Historický vývoj pojmu křivka

Závěr

In: Lenka Lomtatidze (author): Historický vývoj pojmu křivka. (Czech). Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. pp. 223–226.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401123

Závěr

Geometr má před sebou list papíru pokreslený čárami rozmanitých tvarů, rovnými i křivými, vzájemně propletenými a protínajícími se v různých bodech. Jeho zrak spočinul na obrázku, jeho pohled však pronikl skrze obrázek, ven z reálného světa do světa geometrického. Tak například za rovnou čárou uviděl úsečku, uviděl ji v její úplné čistotě a spolu s ní uviděl dokonalou přímost. Od okamžiku tohoto prohlédnutí je pro něj navždy úsečka úsečkou geometrickou a ne čárou narýsovanou podle pravítka. P. Vopěnka, [Vop89, str. 16]

Prošli jsme 5000 let po stopách křivek. Viděli jsme, že impulzy k jejich zkoumání byly velmi rozmanité. Zájem o křivky zdaleka nebyl iniciován jen potřebami praxe, ale často byly používány, rozvíjeny či zkoumány křivky pro ně samotné – ať už z důvodů estetických nebo čistě z přirozené zvídavosti lidského ducha. Během studia pojmu křivka jsme došli k závěru, že otázka vytyčená v úvodu

Co je to křivka?

je ve své podstatě spíše filozofická než matematická.

Zůstaneme nejdříve u křivky jako matematického pojmu. Ukázali jsme, že nejstarší písemně dochovaná snaha zformulovat definici křivky se objevuje u Eukleida:

Eukleidova definice: *Čára je délka bez šířky.*

Během historického vývoje se tato definice měnila v souvislosti s objevením nových metod, které umožňovaly křivky zkoumat. Z těch naprosto stěžejních to byla metoda souřadnic, která umožnila uchopit křivky algebraickým aparátem, později infinitezimální počet, pojem funkce a matematická analýza, v neposlední řadě topologie. Přehledně jsou tyto vývojové etapy shrnuty v tabulce 6.1. Postupem času se v souvislosti s každou novou metodou a s ní spojenou definicí křivky objevily další otázky, které (mimo jiné) iniciovaly nový přístup ke křivkám. Ve dvacátém století dospěl Urysohn k definici, která, jak jsme ukázali, zahrnuje všechny „rozumné" rovinné i prostorové objekty, které bychom nazvali křivkou a nezahrnuje ty, které bychom v žádném případě křivkou nenazvali, např. plochu čtverce.

Urysohnova definice: *Křivkou rozumíme kontinuum dimenze 1.*

Pozoruhodné je, že když tuto definici srovnáme s definicí Eukleida, spatříme mezi nimi jistou analogii, přestože byly napsány v rozmezí více než 2200 let. Na definici Urysohna lze pohlížet jako na exaktní formulaci Eukleidova intuitivního vyjádření.

Eukleides i Urysohn vystihli podstatu pojmu křivka – podstatu toho, čím oddělit křivku od plošného obrazce. Mohli bychom být spokojeni s Urysohnovou formulací. Ukázali jsme však, že tato definice neumožňuje zkoumat obvyklé lokální vlastnosti křivek.

Lze říci, že různé obory matematiky rozumí pod pojmem křivka různý obsah. Něco jiného znamená pojem křivka v topologii, něco jiného v diferenciální geometrii apod. Pro pojem křivka pak zavádí každý obor svou vlastní definici. Tyto definice mají neprázdný průnik do něhož budou spadat běžné křivky, ale v zahrnutí některých objektů se budou odlišovat. Daleko podstatnější však je, že každá z těchto definic nám umožňuje dobře zkoumat jiné vlastnosti. Některé obory matematiky se vrací k definici Jordanově s tím, že přidávají další předpoklady. Tak dostáváme jiný přístup ke křivce, který v intuitivní podobě naznačil poprvé Riemann. Křivka je chápána jako jednorozměrná podvarieta, přičemž dalšími předpoklady se rozumí požadované vlastnosti variety – projektivní, algebraická, diferencovatelná apod.

Coolidge v úvodu [Coo40] dělí geometrii do čtyř oblastí:

(1) Syntetická - to je geometrie prakticky všech předchůdců Descarta, geometrie bez algebraické struktury, kde uvažujeme přímo obrazy a nikoli obrazy skrze rovnice. Je tu také geometrie pohybu a kolineace.
(2) Algebraická - zde studujeme vlastnosti geometrických obrazů skrze algebraické vztahy spojující jejich souřadnice nebo jejich rovnice. Grupa je lineární, později vzájemně jednoznačných algebraických transformací, biracionální grupa.
(3) Diferenciální - zde studujeme vlastnosti geometrických obrazů objevené pomocí diferenciálního počtu. Grupa jsou vzájemně jednoznačné

analytické transformace.[33]
(4) Topologie. Grupou zde jsou vzájemně jednoznačné spojité transformace (homomorfismy).

K těmto oborům přiřadíme dnes běžně používané definici křivky:

(1) Syntetická geometrie – křivka chápána jako obraz tenké čáry, tj. definice křivky v matematickém smyslu v syntetické geometrii není.

(2) Algebraická geometrie – křivka jako množina bodů $X[x_1, \ldots, x_n]$ splňujících jistý systém algebraických rovnic.

(3) Diferenciální geometrie – křivka jako jednorozměrná diferencovatelná varieta.

(4) Topologie – křivka jako kontinuum dimenze 1.

Striktně matematicky je tedy pojem křivka tímto způsobem vyřešen.

Zůstává rovina filozofická, kdy se ptáme

Co je to křivka?

a předpokládáme, že dostaneme odpověď zahrnující všechny objekty, které intuitivně pod pojmem křivka chápeme, a přitom nezahrnující žádné jiné. Avšak takovou odpověď nemáme. A patrně ji ani najít exatně nelze. Reálné objekty jako kružnice nakreslená kružítkem nebo graf funkce generovaný počítačem apod. jen znázorňují objekty, které považujeme za křivky, v mnoha případech dokonce znázorňují jen jejich části. Intuitivně pod pojmem křivka chápeme abstraktní ideu – něco, co reálné objekty jen modelují či symbolizují.

Při studiu vývoje pojmu křivka, pohybujíce se často na hranicích mezi matematikou, historií a filozofií, nás napadalo, zda jsme s intuitivně jednoduchým pojmem křivka nenarazili na strop světa exaktního myšlení. Ostatně podobně jako se to v posledních desetiletích stalo již s dalšími pojmy v jiných oblastech matematiky a fyziky. Dovedlo nás to k úvahám, že přirozenost světa kolem nás, jehož podstatu vnímáme někde uvnitř sebe, nelze zvážit, změřit, pojmenovat, nastudovat a pojmout myšlením. A což teprve svět našich abstraktních představ, kam pojem křivka u každého z nás patří jeho osobitým způsobem. Tyto úvahy jsou však již zcela subjektivního rázu a vzdáleny od objektivního jazyka matematiky. Přesto i v matematice je třeba pochopit, tedy jít až za myšlení, dojít na ten okraj, kde se myšlení mění v poznání. Tento proces pochopení podstaty pojmu je, dle našeho názoru, na vývoji pojmu křivka možno zajímavým způsobem sledovat.

[33] Analytické transformace ve smyslu hladkých zobrazení. (Pozn. autorky.)

Období	Nová metoda	Nová definice křivky	Objevený „problém“
3. století před Kr. (Eukleides)	Axiomatické budování geometrie	Čára jako délka bez šířky. (viz str. 41)	Pohyb
polovina 17. století (R. Descartes)	Analytická metoda souřadnic	Dráha průsečíku pohybujících se přímek, později křivek. (viz str. 113)	Nealgebraické křivky
Přelom 17.–18. st. (I. Newton)	Mocninné řady	$F(x, y)$ jako analytický výraz. (viz str. 167)	Neanalytické funkce
2. pol. 19. století (C. Jordan)	Zpřesňování základů matematické analýzy	Jordanova definice (viz str. 202)	Vlastnosti funkcí, mohutnost continua
Konec 19. století (G. Cantor)	Teorie množin	Cantorova definice (viz str. 209)	Nemožnost přenosu z roviny do prostoru
Začátek 20. století (P. S. Urysohn)	Topologie a teorie dimenze	Urysohnova defnice (viz str. 216)	Nemožnost zkoumat lokální vlastnosti
20. století	Analýza na varietách	Křivka jako jednorozměrná varieta (viz str. 222)	***Dnes užívaná v mnoha oborech***

Tabulka 6.1: Vývojové etapy definice křivky