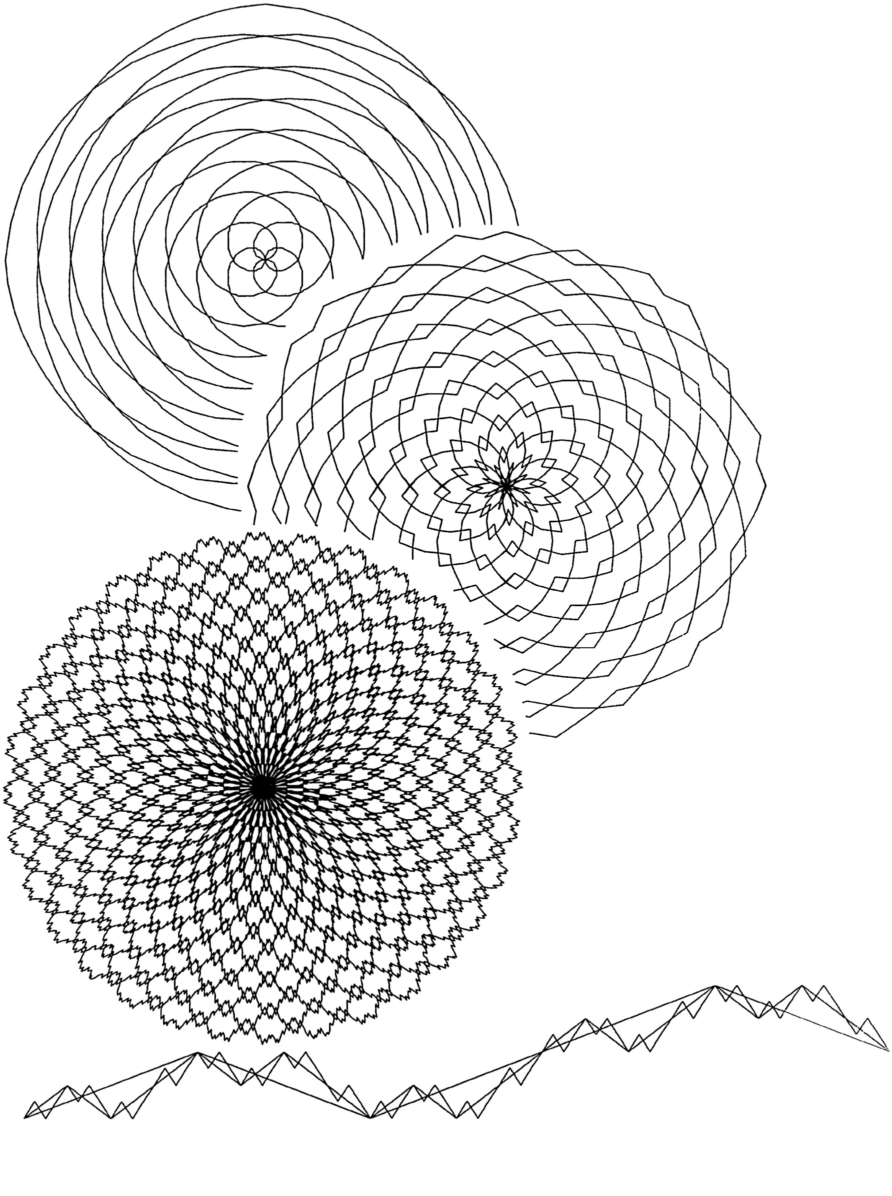


Obr. 2.5 První tři aproximace Petrovy funkce zobrazené v polárních souřadnicích

3 PRÁCE Z MATEMATICKÉ ANALÝZY

3.1 POSLOUPNOSTI A ŘADY

3.2 SPOJITÉ NEDIFERENCOVATELNÉ FUNKCE

3.3 ZÁVĚR

3.1 POSLOUPNOSTI A ŘADY

3.1.1 Teorie interpolace

***Poznámky k theorii interpolace* [R1], 1907**

Pojednání [R1] vzniklo jako seminární práce pro seminář profesora Karla Petra, který Karel Rychlík navštěvoval ve druhém a třetím roce studia na filosofické fakultě, tj. ve školních letech 1905/06 a 1906/07. Petr Rychlíkovu práci uveřejnil začátkem roku 1907 v *Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky.* Rychlík později ve svém článku *Jak jsem studoval matematiku* [R52] napsal, že byl ke své seminární práci přiveden Borelovou knihou [3], jednou z řady jeho monografií, které tehdy začaly vycházet.

Ocitujme nejprve úvodní odstavec Rychlíkovy práce.

Uvažujme funkci f(z) proměnné $z = x + iy$ analytickou v oboru (S),[1] *omezeném čarou S, a předpokládejme, že známe v n bodech vesměs různých $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, nalézajících se uvnitř oboru (S), hodnoty funkce $f(z)$. Jest možno stanoviti jednoznačně polynom $G_n(z)$ stupně $n-1$, nabývající týchž hodnot jako funkce $f(z)$, totiž $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$, pro $z = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pak přirozeně se vyskytuje otázka, kdy polynom $G_n(z)$ s n rostoucím do nekonečna konverguje k funkci $f(z)$, čímž by se způsobem celkem jednoduchým znázornila funkce $f(z)$ posloupností polynomů. Úloha ta vede ke zkoumání zbytku $R_n(z) = f(z) - G_n(z)$ pro n rostoucí do nekonečna …* ([R1], str. 13–14)

Rychlík se nejdříve věnuje vyjádření zbytku $R_n(z)$ křivkovým integrálem pomocí Cauchyho věty,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} d\xi\,, \tag{3.1}$$

a dochází ke vztahu

$$R_n(z) = \frac{g_n(z)}{2\pi i}\int_S \frac{f(\xi)}{g_n(\xi)}\frac{d\xi}{\xi - z}\,, \tag{3.2}$$

kde $g_n(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_n)$. Potom odvozuje Newtonův a Lagrangeův interpolační vzorec a ukazuje, že se oba vzorce liší jen formálně a zbytek

[1] *Oborem* se zde rozumí jednoduše souvislá množina.

je v obou případech stejný.[2] Rychlík poznamenává, že popsaný postup je obsažen ve Frobeniově pojednání [6], avšak obyčejně se přičítá Charlesu Hermiteovi [11]. Navíc upozorňuje na Lerchovu práci [15].

V druhé části svého pojednání [R1] se Rychlík obrací ke speciálnímu případu, kdy body, ve kterých jsou dány funkční hodnoty, leží na ose reálných čísel a jsou odděleny hodnotami $t_k = \chi(s_k)$ jisté funkce $t = \chi(s)$, kde reálná čísla $s_0 = \alpha, s_1, s_2, \ldots, s_n = \beta$ tvoří úsek aritmetické posloupnosti a funkce t je analytická na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$,[3] nabývá v tomto intervalu reálných hodnot a nemá v něm nulovou derivaci:

$$a = t_0 \leq x_1 \leq t_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq t_{k-1} \leq x_k \leq t_k \leq \cdots \leq x_n = b. \tag{3.3}$$

Výsledky své práce Rychlík později charakterizoval v článku [R52] takto:

V práci jsou udány případy rozdělení, pro něž existují „obory konvergence“, t.j. oblasti (jednoduše souvislé množiny), v jejichž bodech z interpolační mnohočlen $G_n(z)$ konverguje stejnoměrně k $f(z)$, kdežto pro body vně příslušného uzávěru nastává divergence. K podobnému účelu užívá Runge úvah z hydrodynamiky ... [viz [20] a [21]]*, kdežto já provádím důkaz pomocí Cauchyova integrálu.* ([R52], str. 14)

Rychlík blíže zkoumá tři speciální případy rozdělení (3.3) (v prvních dvou případech na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$; lineární substitucí však lze přejít k libovolnému intervalu $\langle a, b \rangle$):

1) Rozdělení Čebyševovo, kdy pro dané n je

$$x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

tj. $t = \chi(s) = \cos s$; s jsou členy aritmetické posloupnosti s diferencí π/n a prvním členem $\pi/(2n)$.

2) x_k jsou kořeny Legendreova polynomu[4]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{pro } n \geq 1, \quad P_0(x) = 1.$$

Toto rozdělení Rychlík převádí na předchozí případ Čebyševova rozdělení, a to na základě Burnsovy práce [4], kde je dokázáno, že kořeny x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$,

[2] Připomeňme zde Lagrangeův interpolační vzorec:

$$G_n(z) = \frac{(z-x_2)(z-x_3)\ldots(z-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)} f(x_1) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})} f(x_n).$$

[3] Tím se zde rozumí analytická v *oboru* obsahujícím reálný interval $\langle \alpha, \beta \rangle$.

[4] Viz Rychlíkovu knížku *Úvod do analytické teorie mnohočlenů s reálnými koeficienty* [R64], kde je mj. podán důkaz, že Legendreův polynom $P_n(x)$ $(n \geq 1)$ má právě n jednoduchých reálných kořenů ležících vesměs v intervalu $(-1, 1)$.

Legendreova polynomu jsou v intervalu $(-1, 1)$ rozloženy takto:

$$\cos\frac{2k\pi}{2n+1} < x_k < \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1}\,, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Snadnou úvahou pak lze dojít k volbě

$$t_k = \cos s_k = \cos\frac{4k+1}{2(2n+1)}\,\pi, \qquad t_0 > x_1 > t_1 > x_2 > \cdots > x_n > t_n,$$

tedy opět $t = \chi(s) = \cos s$.

V poznámce pod čarou Rychlík naznačuje ještě jiný, přímý postup využívající asymptotické vzorce pro Legendreův polynom, které podal Matyáš Lerch v pojednání [14]: je-li $z \in \mathbb{C}$, $|z + \sqrt{z^2 - 1}| > 1$, pak

$$P^{(n)}(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{2\pi n}}\sqrt{\frac{z + \sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}}}(1 + \varepsilon_n), \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Zde Rychlík cituje také Heineho práci [10].

Celkem Rychlík v případech 1) a 2) ukazuje, že obor konvergence je vždy vnitřek elipsy s ohnisky $z = -1$ a $z = 1$, která prochází singulárním bodem dané funkce $f(z)$ tak, že uvnitř elipsy je tato funkce analytická. Ve všech bodech reálného intervalu $\langle -1, 1\rangle$ tedy posloupnost interpolačních polynomů $G_n(z)$ konverguje.

Jak je uvedeno v článku [R52], případ 1) uvažoval již Runge, případ 2) pochází od Karla Rychlíka.

3) $t = \chi(s) = s$, $a = \alpha$, $b = \beta$, $\varphi(t) = 1$, tj. interval $\langle a, b\rangle$ je rozdělen na stejné části a v každé z nich leží právě jeden z bodů x_k. Sem patří ještě speciálnější případ, který uvažoval Runge v práci [21], kdy body x_k jsou rozloženy ekvidistantně.

Rychlík ukazuje, že hranice oborů konvergence jsou v tomto případě křivky souměrné podle osy x a podle osy úsečky ab, procházející singulárním bodem funkce $f(z)$, takže uvnitř je funkce analytická, a jsou to buď elipsy obklopující úsečku ab (ve speciálním případě elipsa procházející body a, b), nebo dvojice kruhových oblouků protínajících se uvnitř úsečky ab. Ne vždy tedy bude posloupnost $G_n(z)$ ve všech bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ konvergovat.

Jako příklad Rychlík uvádí funkci

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}\,, \qquad \langle a, b\rangle = \langle -12, 12\rangle.$$

Tato funkce má póly v bodech $\pm i$; hranice oboru konvergence, která jimi prochází, protne v tomto případě daný interval v bodech $c_{1,2} = \pm 5,9282$; v doplňku $\langle -12, 12\rangle \setminus \langle c_1, c_2\rangle$ bude posloupnost $G_n(z)$ divergovat.

Zbývá dodat, že kromě vlastních výsledků podal Karel Rychlík ve svém pojednání [R1] rozsáhlý přehled o problému interpolace a shromáždil velké množství bibliografických informací.

3.1.2 Teorie mocninných řad o více proměnných

Karl Weierstrass dokázal v práci [24] následující větu.

Věta 1 (Weierstrass). Nechť je dána mocninná řada $n+1$ proměnných $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nechť $F(0, 0, \ldots, 0) = 0$ a nechť $F(y, 0, 0, \ldots, 0)$ není identicky rovno nule, ale je to mocninná řada počínající členem y^m.

Potom lze psát:

$$F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = E(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)\, G(y, x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3.4}$$

kde vpravo jsou mocninné řady $n+1$ proměnných, pro které

$$E(0, 0, 0, \ldots, 0) \neq 0\,;$$

$$G(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_m, \tag{3.5}$$

kde p_i jsou mocninné řady n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a $p_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, m$.

Příspěvek k teorii potenčních řad o více proměnných **[R10] (1912)**

Ve své práci [R10] Rychlík navazuje na uvedenou Weierstrassovu větu. Připomíná, že jiným způsobem než Weierstrass větu dokázal Edouard Goursat [8] a další autoři,[5] a to nejprve formálním srovnáním koeficientů a následným důkazem konvergence pomocí majorantních funkcí.

Rychlík k Weierstrassově větě připojuje následující poznámku:

Máme-li potenční řadu

$$F = F_m + F_{m+1} + F_{m+2} + \cdots\,, \tag{3.6}$$

kdež F_k značí souhrn členů stupně k, můžeme vždy lineární substitucí dosíci toho, že se ve výrazu F_m vyskytuje člen y^m. Pak bude

$$F_m = f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \cdots + A_m, \tag{3.7}$$

kdež A_k značí formu stupně k v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a užijeme-li věty Weierstrassovy, bude v (3.4) *a* (3.5)

[5] Rychlík cituje následující práce:
Hartogs, F., *Über die elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes“*, Sitzungsberichte der Mathematisch physikalischen Klasse der Königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München **39**(1909), č. 3, 12 stran;
Dumas, G., *Elementare Herleitung des Weierstrass'schen „Vorbereitungssatzes“*, tamtéž, č. 18, 9 stran;
Bliss, G. A., *A New Proof of Weierstrass's Theorem Concerning the Factorization of a Power Series*, Bull. AMS **16**(1910), 356–359;
Brill, A., *Über Weierstrass'schen Vorbereitungssatz*, Math. Ann. **69**(1910), 538–549.

$$G = y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} + \cdots + p_m, \tag{3.8}$$

$$p_k = A_k + p_{k,k+1} + p_{k,k+2} + \cdots$$

a $p_{k,l}$ značí souhrn členů stupně l.

Věta Weierstrassova umožňuje definovati dělitelnost potenčních řad o více proměnných zcela analogicky jako při polynomech a zavésti pojem resultantu a diskriminantu.[6]

Zbytek Rychlíkova pojednání [R10] tvoří důkaz následující věty:

VĚTA 2. Ke znázornění hodnot $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyhovujících rovnici

$$F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

a ležících v okolí bodu $(0, 0, \ldots, 0)$, stačí konečný počet soustav mocninných řad

$$\begin{array}{lcl} y & = & P(u_1, u_1, \ldots, u_n), \\ x_1 & = & P_1(u_1, u_1, \ldots, u_n), \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_n & = & P_n(u_1, u_1, \ldots, u_n), \end{array}$$

kde $u_1, u_2, \ldots, u_n$ lze volit jako racionální funkce proměnných $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Vzhledem k tomu, že $E(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$, je hledání příslušných hodnot převedeno na hledání kořenů rovnice $G(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ v okolí bodu $(0, 0, \ldots, 0)$.

Důkaz věty Rychlík provádí indukcí podle m ze vztahu (3.6), tj. podle stupně členů, kterými daná řada F začíná.

První krok je snadný. Z Weierstrassovy věty totiž přímo plyne, že je

$$G(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = y + p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

takže ke znázornění kořenů rovnice $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ stačí jediný systém:

$$\begin{array}{lcl} y & = & -p_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ x_1 & = & u_1, \\ x_2 & = & u_2, \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ x_n & = & u_n. \end{array}$$

Indukční krok je poměrně pracný. Rychlík manipuluje s diskriminantem Δ polynomu G z (3.8) v proměnné y a od mocninné řady počínající členy stupně $m > 1$ přechází konečným počtem transformací k mocninné řadě počínající členy stupně nižšího než m, pro niž věta platí.

[6] [R10], str. 470–471.

3.1.3 De La Vallée-Poussinova sčítací metoda

Připomeňme nejprve některé pojmy a výsledky související se sčítatelností nekonečných řad.

Uvažujme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ a posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ jejích částečných součtů.

Definice 1 (Hölderovský součet řady).
Řada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ je *sčítatelná k-tého řádu ve smyslu Hölderově se součtem s*, neboli posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ má *k-tou Hölderovu limitu s*, jestliže existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} h_n^{(k)} = s$, kde

$$
\begin{aligned}
h_n^{(0)} &= s_n, \\
h_n^{(1)} &= \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}, \\
h_n^{(2)} &= \frac{h_0^{(1)} + h_1^{(1)} + \cdots + h_n^{(1)}}{n+1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_n^{(k)} &= \frac{h_0^{(k-1)} + h_1^{(k-1)} + \cdots + h_n^{(k-1)}}{n+1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Věta 3. Existuje-li k-tá Hölderova limita ($k \geq 0$), existuje i $(k+1)$-ní a tedy i všechny následující a mají tutéž hodnotu.

Poznámka. Speciálně řada sčítatelná prvního řádu ve smyslu Hölderově se nazývá také *sčítatelná podle aritmetického středu*. Poznamenejme, že například řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ je sčítatelná podle aritmetického středu se součtem $1/2$.

Definice 2 (Cesàrovský součet řady).
Řada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ je *sčítatelná k-tého řádu ve smyslu Cesàrově se součtem s*, neboli posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ má *k-tou Cesàrovu limitu s*, jestliže existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} c_n^{(k)} = s$, kde

$$
c_n^{(0)} = s_n, \quad c_n^{(1)} = \frac{s_n^{(1)}}{n+1} \quad c_n^{(2)} = \frac{s_n^{(2)}}{\binom{n+2}{2}}, \ \ldots, \ c_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}, \ \ldots,
$$

přičemž

$$\begin{aligned} s_n^{(1)} &= s_0 + s_1 + \cdots + s_n\,, \\ s_n^{(2)} &= s_0^{(1)} + s_1^{(1)} + \cdots + s_n^{(1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n^{(k)} &= s_0^{(k-1)} + s_1^{(k-1)} + \cdots + s_n^{(k-1)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

VĚTA 4. Existuje-li k-tá Cesàrova limita ($k \geq 0$), existuje i $(k+1)$-ní a tedy i všechny následující a mají tutéž hodnotu.

VĚTA 5 (KNOPP–SNEE). Existuje-li k-tá Cesàrova limita, existuje i k-tá Hölderova limita a jsou si rovny a naopak.

V roce 1908 byla uveřejněna práce [23] Ch. J. De La Vallée-Poussina, který uvažoval následující zobecněný součet:

DEFINICE 3 (DE LA VALLÉE-POUSSINŮV SOUČET ŘADY).
Řada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ je *sčítatelná podle De La Vallée-Poussinovy metody se součtem* s, jestliže existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} v_n^{(k)} = s$, kde

$$v_n = u_0 + \frac{n}{n+1}u_1 + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}u_2 + \ \cdots \ + \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}u_n =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-\lambda)!(n+\lambda)!}u_\lambda\ .$$

VĚTA 6 (GRONWALL). Je-li řada $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sčítatelná k-tého řádu ve smyslu Cesàrově (tedy i Hölderově), je sčítatelná i podle De La Vallée-Poussinovy metody s týmž součtem.

Tuto větu dokázal roku 1917 T. H. Gronwall v práci [9]. Důkaz je poměrně komplikovaný, využívá parciální sumaci, Cauchyho větu pro integrály komplexní proměnné, funkci gamma aj.

Gronwall rovněž dokázal, že existují řady, které jsou sčítatelné podle De La Vallée-Poussinovy metody, ale nejsou sčítatelné pro žádný řád podle metody Cesàrovy. Jako příklad uvedl řadu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in \mathbb{C}$, která má pro $|x| < 1$ Cesàrovský součet prvního řádu $s = 1/(1-x)$, pro $|x| \geq 1$ není Cesàrovsky sčítatelná pro žádný řád. Podle De La Vallée-Poussinovy metody je však sčítatelná ve větším oboru konvergence, obsahujícím jednotkovou kružnici, který Gronwall popsal pomocí křivky $|(1+x)/(2\sqrt{x})|$.[7]

[7] [9], str. 16–27.

O de la Vallée-Poussinově metodě sčítací **[R13] (1917)**

V úvodu své práce [R13] Karel Rychlík připomíná základní poznatky o Hölderovském a Cesàrovském součtu řady, a to podle Landauovy knihy [13]. Cituje rovněž Petrův *Počet integrální* [17], De La Vallée-Poussinovu práci [23] a Gronwallův článek [9].

Potom se obrací ke Gronwallově větě 6 a podává její jednodušší důkaz, ve kterém vystačil s daleko skromnějším matematickým aparátem než Gronwall (i tak je však Rychlíkův důkaz poměrně pracný). Východiskem mu byla věta, kterou dokázal v roce 1911 Otto Toeplitz [22]:

Věta 7 (Toeplitz). Uvažujme posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ a utvořme posloupnost lineárních homogenních funkcí vždy konečného počtu jejích členů:

$$\begin{array}{rcl} t_0 & = & a_{00}s_0 + a_{01}s_1 + \cdots + a_{0\nu_0}s_{\nu_0}, \\ t_1 & = & a_{10}s_0 + a_{11}s_1 + \cdots + a_{1\nu_1}s_{\nu_1}, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ t_n & = & a_{n0}s_0 + a_{n1}s_1 + \cdots + a_{n\nu_n}s_{\nu_n}, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \end{array}$$

Posloupnost $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje pro každou konvergentní posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, a to k téže limitě, právě když jsou splněny následující podmínky:

I. $\lim_{n\to\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu_n} a_{n\lambda} = 1$,

II. $\lim_{n\to\infty} a_{n\lambda} = 0, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots$,

III. $\forall n \geq 0 \;\; \exists M > 0$ tak, že $\sum_{\lambda=0}^{\nu_n} |a_{n\lambda}| \leq M$.

Členy posloupnosti $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ odpovídají „středním hodnotám“ tvořeným různými způsoby při výše popsaných sčítacích metodách.

Aby se Rychlík dostal ke Gronwallově větě, potřeboval obdobné vyjádření De La Vallée-Poussinovy střední hodnoty v_n pomocí k-tých Cesàrovských středních hodnot $c_\lambda^{(k)}$. K tomu zavedl značení:

$$K(0) = 1,\ K(1) = \frac{n}{n+1},\ \ldots,\ K(\lambda) = \frac{(n!)^2}{(n-\lambda)!(n+\lambda)!} \quad \text{pro} \;\; 0 \leq \lambda \leq n,$$

$$K(\lambda) = 0 \quad \text{pro } \lambda > n;$$

$$\begin{array}{rcl} \Delta K(\lambda) & = & K(\lambda+1) - K(\lambda), \\ \Delta^2 K(\lambda) & = & \Delta K(\lambda+1) - \Delta K(\lambda) = K(\lambda+2) - 2K(\lambda+1) + K(\lambda), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \Delta^r K(\lambda) & = & \Delta^{r-1}K(\lambda+1) - \Delta^{r-1}K(\lambda) = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \begin{pmatrix} r \\ l \end{pmatrix} K(\lambda+l), \end{array}$$

$$\Delta^r K(\lambda) = 0 \quad \text{pro} \;\; \lambda > n; \qquad (-1)^r \Delta^r K(n) = K(n).$$

Pro De La Vallée-Poussinovu střední hodnotu při uvedeném značení platí:

$$v_n = \sum_{\lambda=0}^{n} K(\lambda) u_\lambda = s_0 + \sum_{\lambda=1}^{n} K(\lambda)(s_\lambda - s_{\lambda-1}) = \sum_{\lambda=0}^{n} (K(\lambda) - K(\lambda+1)) s_\lambda,$$

tedy

$$\begin{array}{lcll} v_n & = & - & \sum_{\lambda=0}^{n} \Delta K(\lambda) s_\lambda, \qquad \text{analogicky} \\ v_n & = & & \sum_{\lambda=0}^{n} \Delta^2 K(\lambda) s_\lambda^{(1)}, \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ v_n & = & (-1)^{k+1} & \sum_{\lambda=0}^{n} \Delta^{k+1} K(\lambda) s_\lambda^{(k)}. \end{array}$$

Po dosazení k-tých Cesàrovských středních hodnot $s_n^{(k)} = c_n^{(k)} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$ obdržíme hledané vyjádření:

$$v_n = \sum_{\lambda=0}^{n} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda) c_\lambda^{(k)}.$$

K dokončení důkazu Gronwallovy věty je nyní třeba ověřit podmínky I – III. Toeplitzovy věty, přičemž se uvažuje

$$a_{n\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda+k \\ k \end{pmatrix} (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K(\lambda).$$

Zbytek důkazu je ještě poměrně pracný, avšak, jak již bylo řečeno, neužívá se v něm žádného složitého matematického aparátu – pokračuje v podobném duchu jako výše uvedená ukázka.

Na závěr poznamenejme, že Rychlíkova práce [R13] je citována v Čuprově článku *Parsevalova identita a její užití v teorii o funkcích konečných* [5] z roku 1926.

3.1.4 Nepravidelné posloupnosti

Paul Eugen Böhmer studoval v práci *Über regellose alternierende Folgen* [2] z roku 1923 tzv. *nepravidelné posloupnosti* (*alternierende Folgen*), tj. posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \dots$ skládající se pouze z nul a jedniček a splňující následující podmínky:

I. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu = p,$

$$\text{II.}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{r+k\nu} = p \quad \text{pro každé celé} \quad k \geq 1,\ r \geq 0,$$

$$\text{III.}\quad 0 < p < 1.$$

Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňující podmínky I – III Böhmer dokázal, že mocninná řada $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ konverguje uvnitř jednotkového kruhu a diverguje ve všech bodech jeho hranice a že definuje analytickou funkci $f(z)$ komplexní proměnné, která je uvnitř jednotkového kruhu regulární a má jednotkovou kružnici za přirozenou hranici.[8] Důkaz Böhmer provedl na základě výsledků Fatouových[9] a Carlsonových.[10]

Böhmer ve své práci [2] navazoval na Misesovo pojednání *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [16] z roku 1919, ve kterém je podán výklad počtu pravděpodobnosti založený na pojmu *kolektiv* a *limitní frekvence*.[11]

Poznámka k Böhmerovým nepravidelným posl. [R41], [R42] (1933)

Karel Rychlík navázal na Böhmerovy výsledky ve dvojici článků [R41] a [R42], které představují českou a německou verzi téže práce. Zareagoval tak na vydání Kamkeovy knihy *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* [12] z roku 1932, kde je teorie pravděpodobnosti založena na pojmu nepravidelné posloupnosti definované níže uvedeným způsobem pomocí podmínek I – III.

Rychlík Böhmerovy výsledky zobecňuje tím, že místo posloupností sestávajících z nul a jedniček uvažuje posloupnosti $A = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, jejichž každý člen je roven jednomu z konečného počtu navzájem různých reálných čísel $A_1, A_2, \ldots, A_h$.

Rychlík používal toto označení:

$N_n(A, A_\nu)$ udává počet, kolikrát se mezi prvními n členy posloupnosti A vyskytuje hodnota A_ν;

$A_{k,r}$ značí posloupnost $a_r, a_{r+k}, a_{r+2k}, \ldots$, kde $k, r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, $k \geq 1$ (tj. $A = A_{1,0}$).

V pracích [R41] a [R42] Rychlík dokázal následující větu.

---

[8] Tím se rozumí, že jednotková kružnice je hranicí přirozeného oboru dané analytické funkce $f(z)$, tj. funkce $f(z)$ je uvnitř jednotkového kruhu analytická, avšak není možné ji dále rozšířit.

[9] Fatou, P., *Sur les séries entières à coefficients entiers*, Comptes Rendus **138**(1909), 342–344.

[10] Carlson, F., *Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koefficienten*, Math. Zeit. **9**(1921), 1–13.

[11] Připomeňme, že *kolektivem* byla myšlena posloupnost $e_0, e_1, e_2, \ldots$ výsledků opakovaně prováděného pokusu; budeme-li sledovat určitý jev A, pak můžeme vytvořit posloupnost $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sestávající z nul a jedniček, v níž je $a_i = 1$, pokud $e_i \in A$, jinak $a_i = 0$. Vztah I udává pravděpodobnost jevu A, podmínka II vystihuje „náhodnost“ pokusu.

Věta 8 (Rychlík). Nechť má posloupnost A tyto vlastnosti:[12]

I. existují limity $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_n(A, A_\nu)}{n} = p_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h,$

II. existují limity $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_n(A_{k,r}, A_\nu)}{n} = p_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h,$

$k > 1, \quad 0 \leq r \leq k - 1,$

III. v posloupnosti A se alespoň dvě z čísel $A_1, \ldots, A_h$ vyskytují v nekonečném počtu.

Potom má analytická funkce definovaná mocninnou řadou $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ jednotkovou kružnici za přirozenou hranici.

Důkaz věty 8 Rychlík provádí pomocí následující věty, jejíž znění cituje podle Bieberbachovy knihy [1] takto:

Věta 9 (Szegő). *Je-li každý koeficient potenční řady $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ roven jednomu z konečného počtu různých čísel $d_1, d_2, \ldots, d_h$, představuje potenční řada buď racionální funkci, jejíž poly jsou kořeny z jednotky, nebo funkci, která má jednotkovou kružnici za přirozenou hranici. První případ nastane tehdy a jen tehdy, jsou-li koeficienty od jistého počínajíc periodicky rozloženy a funkce řadou znázorněná má tvar $P(z)/(1 - z^m)$, při čemž $P(z)$ je mnohočlen a m celé kladné číslo.*[13]

Podle Szegőovy věty tedy stačí dokázat, že posloupnost A není periodická. To Rychlík provádí sporem. V závěru své práce Rychlík ještě vyšetřuje, jak se funkce $f(z)$ chová na jednotkové kružnici. Cituje přitom práce Georga Frobenia [7] a Alfreda Pringsheima [18] a dokazuje:

Věta. *Pro k-tý kořen z jednotky ε platí při radiální limitě*[14]

$$\lim_{z\to\varepsilon} (\varepsilon - z) f(z) = 0.$$

[12] Jak Rychlík poznamenává, v terminologii počtu pravděpodobnosti podle uvedené Kamkeovy knihy [12] první podmínka znamená, že posloupnost A má vzhledem k číslům $A_1, A_2, \ldots, A_h$ rozdělení s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_h$.

[13] [R41], str. 2.

[14] Tamtéž.

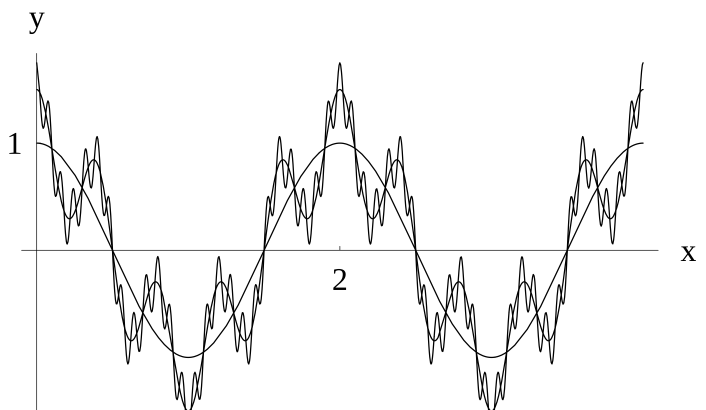
3.2 SPOJITÉ NEDIFERENCOVATELNÉ FUNKCE

3.2.1 Historický přehled

Karl Weierstrass ukázal 18. 7. 1872 ve své přednášce v Královské akademii věd v Berlíně funkci, která je v celém reálném oboru spojitá, ale nemá v žádném bodě derivaci:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x), \qquad 0 < a < 1;\ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi. \tag{3.9}$$

Na obrázku 3.1 jsou znázorněny první tři její aproximace pro $a = 1/2,\ b = 5$.[15]



Obr. 3.1 Weierstrassova funkce

[15] V roce 1916 dokázal G. F. Hardy, že stačí předpokládat $0 < a < 1,\ ab > 1$. Viz [46], str. 408.

Weierstrassův příklad spojité nediferencovatelné funkce uveřejnil roku 1875 Paul du Bois-Reymond v Crelleově časopise [44] (sám autor jej zveřejnil až v roce 1880 – viz [48]). Dlouhou dobu pak byla tato funkce považována za první a přitom nejjednodušší funkci svého druhu.

V následující době se mnozí matematikové s nadšením zabývali problémem spojitých funkcí bez derivace (např. G. Darboux ([28], 1875), V. Dini ([30], 1878), M. Lerch ([37], 1888) a další), jiní se však na jejich snažení dívali nevraživě, jejich příklady nazývali *matematickými monstry*; Ch. Hermite například ve svém dopise T. Stieltjesovi roku 1893 napsal, že se *odvrátil s hrůzou a ošklivostí od toho politováníhodného zla, jímž jsou funkce bez derivací ...*

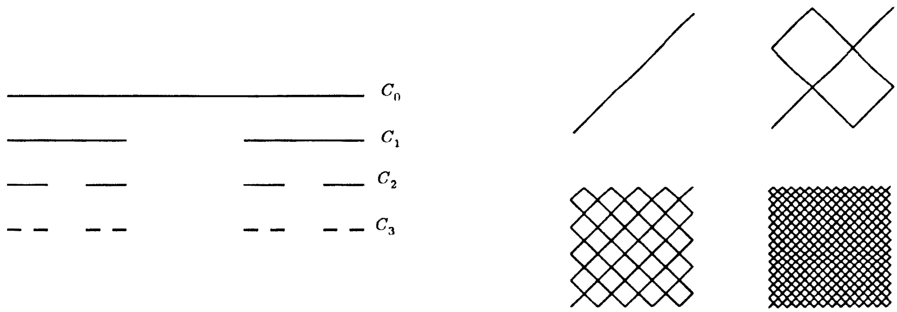
Značné překvapení vyvolala koncem devatenáctého století funkce švýcarského matematika Ch. Cellériera, která byla zveřejněna roku 1890 v práci [27], ale sestrojena již kolem roku 1860:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} b^{-n} \sin(\pi b^n x); \quad b > 1000\,.$$

Daleko větší překvapení však přišlo po první světové válce, kdy středoškolský profesor matematiky z Plzně Martin Jašek objevil v pozůstalosti Bernarda Bolzana ve vídeňské Národní knihovně jako součást rukopisu *Functionenlehre* později proslulou *Bolzanovu funkci* (srov. [33] – [36] v seznamu literatury na str. 197–201), zkonstruovanou před rokem 1834. O Bolzanově funkci je pojednáno v části 5.2.1.

Koncem devatenáctého a počátkem dvacátého století se také objevily konstrukce různých „podivných útvarů“, z nichž nejznámější jsou *Cantorovo diskontinuum* ([26], 1883), *Peanova křivka* ([40], 1890) a *Kochova křivka* ([36], 1904).

Připomeňme, že *Cantorovo diskontinuum* je podmnožina množiny reálných čísel $C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k$, kde $C_0 = [0,1]$, množina C_1 vznikne vyjmutím „prostřední třetiny“ intervalu $[0,1]$, tj. $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, množina C_2 vznikne vyjmutím prostředních třetin obou intervalů z C_1, tj. $C_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$ atd. (viz obr. 3.2 vlevo).



Obr. 3.2 Cantorovo diskontinuum a Peanova křivka

Peanova křivka je příkladem spojitého zobrazení úsečky na čtverec. Peano uvažoval $t \in [0,1]$ vyjádřené v trojkové číselné soustavě:

$$t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots;\ 0 \le a_i \le 2,$$

a_i celé. Této hodnotě přiřadil bod (x,y) v rovině, daný rozvoji:

$$x = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \cdots; \quad y = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots,$$

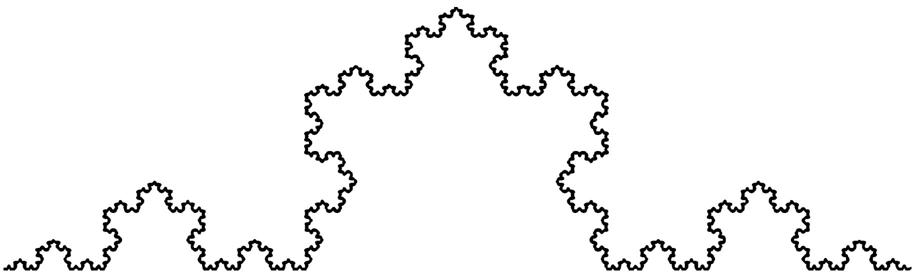
kde

$$b_n = K^{a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}}(a_{2n-1}), \qquad c_n = K^{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}(a_{2n});$$

$$K(0) = 2,\ K(1) = 1,\ K(2) = 0.$$

Peano navíc ukázal, že $x(t),\ y(t)$ jsou spojité nediferencovatelné funkce.

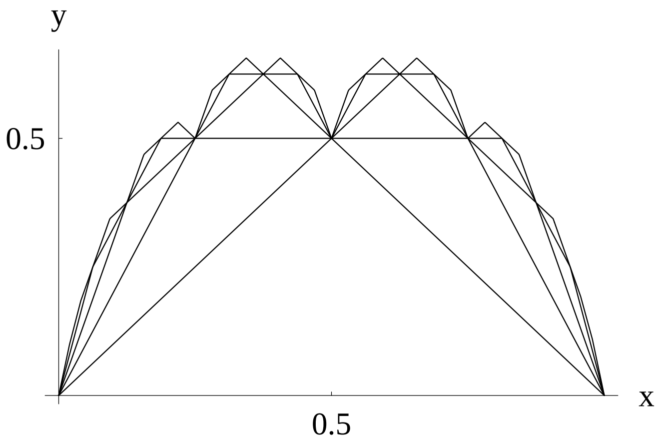
Kochova křivka je definována geometricky jako limita posloupnosti lomených čar, z nichž první je jistá úsečka, druhá vznikne tím, že se prostřední třetina této úsečky nahradí dvěma stranami nad ní sestrojeného rovnostranného trojúhelníka, v dalším kroku se místo původní úsečky uvažuje každá ze čtyř právě vytvořených částí atd.



Obr. 3.3 Kochova křivka

Takového útvary jsou spolu se spojitými nediferencovatelnými funkcemi příklady fraktálů; tento dnes tolik populární pojem byl definován B. B. Mandelbrotem až v sedmdesátých letech dvacátého století. Mandelbrot nastínil svou teorii nejprve roku 1975 v knize [38], poněkud úplněji potom v práci [39] z roku 1982. Později se vyvinula poměrně rozsáhlá část matematiky, kterou lze prohlásit za studium fraktálů; sem patří především metody pro výpočet Hausdorffovy dimenze. Z monografií matematického charakteru věnovaných této problematice zde uveďme [29], [31], [32], [33] a [35].

Vraťme se ke spojitým nediferencovatelným funkcím.



Obr. 3.4 Takagiho funkce

Za nejjednodušší příklad je obvykle považován tzv. *van der Waerdenův příklad* z třicátých let dvacátého století [47], který je ovšem mírnou modifikací následující funkce definované roku 1903 Teiji Takagim [45]:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Delta(2^n x); \;\; \Delta(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}).$$

V roce 1920 publikoval v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky příklad spojité nediferencovatelné funkce Karel Petr [41]. Jeho příklad není běžně citovaný jako příklady předchozí, je však velice jednoduchý; k pochopení konstrukce i důkazu spojitosti a nediferencovatelnosti stačí znalost definice spojitosti a derivace a jedné věty z počátků aritmetiky, která se týká desetinných rozvojů. Petr vychází z Peanovy konstrukce, podané v práci [40], kterou jednak ještě zobecňuje, jednak výrazně zjednodušuje.

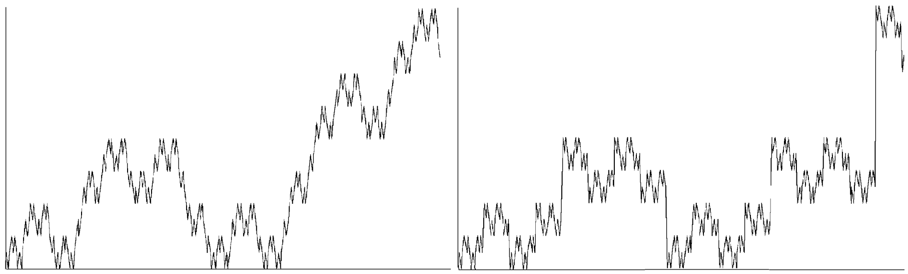
Petrova funkce je na intervalu $[0, 1]$ definovaná takto:

$$\text{je-li} \quad x = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots; \; a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\},$$

$$\text{pak} \quad f(x) = \frac{b_1}{2^1} \pm \frac{b_2}{2^2} \pm \frac{b_3}{2^3} \pm \frac{b_4}{2^4} \pm \cdots; \; b_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } a_k \text{ sudé}, \\ 1 & \text{pro } a_k \text{ liché}, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\text{znaménko před členem} \quad b_{k+1} \begin{cases} \text{opačné než před } b_k, \text{ je-li } a_k \in \{1, 3, 5, 7\}, \\ \text{stejné ve zbývajících případech.} \end{cases}$$

Na obrázku 3.5 vlevo je znázorněn graf Petrovy funkce, resp. jejího hrubého přiblížení; pro lepší názornost je užito čtyřkové číselné soustavy. Proč je nejvyšší liché číslici udělena výjimka při určování znaménka, je vidět ze srovnání tohoto grafu s jiným grafem (vpravo), kde jsou všechny liché číslice rovnocenné: umožní nám to „vyplnit skoky“ a sestrojit funkci opravdu spojitou:



Obr. 3.5 Petrova funkce

Kromě toho, že není nutné vycházet z desítkové číselné soustavy, Petr v závěru svého článku poznamenává, že je možné uvažovat místo předpisu (3.10) například předpis

$$f(x) = \frac{b_1}{4^1} \pm \frac{b_2}{4^2} \pm \frac{b_3}{4^3} \pm \frac{b_4}{4^4} \pm \cdots, \tag{3.11}$$

kde se čísla b_k volí podle tabulky

a_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b_k	0	1	$\underline{2}$	$\underline{1}$	0	1	$\underline{2}$	1	2	3

;

znaménko před b_{k+1} je opačné než před b_k, je-li $a_k = 2, 3, 6$ (v tabulce podtržené).

Podobně lze místo (3.10) a (3.11) volit například

$$f(x) = \frac{b_1}{6^1} \pm \frac{b_2}{6^2} \pm \frac{b_3}{6^3} \pm \cdots \quad \text{či} \quad f(x) = \frac{b_1}{8^1} \pm \frac{b_2}{8^2} \pm \frac{b_3}{8^3} \pm \cdots . \tag{3.12}$$

3.2.2 Bolzanova funkce

Aby byl výklad o Rychlíkových aktivitách spojených s rukopisy Bernarda Bolzana (1781 – 1848) co možná nejplynulejší, je diskuse Bolzanovy funkce a příslušného Rychlíkova článku ***Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse*** [R19] zařazena do 4. kapitoly této práce (viz str. 176).

3.2.3 Funkce definované na tělese g-adických čísel

Ve dvojici článků ***Funkce spojité nemající derivace pro žádnou hodnotu proměnné v tělese čísel Henselových*** [R17] a ***Eine stetige nicht differenzierbare Funktion im Gebiete der Henselschen Zahlen*** [R21] z let 1920 a 1922 Karel Rychlík zobecnil Petrovu funkci zkonstruovanou v práci [41] (viz závěr části 3.2.1) tím, že přešel do tělesa *p-adických čísel* $\mathbb{Q}_p$.

Každý prvek tohoto tělesa lze jednoznačně znázornit ve tvaru

$$x = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + a_{r+2} p^{r+2} + \cdots, \tag{3.13}$$

kde r je celé číslo a koeficienty a_i jsou čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.

V česky psané práci [R17], která byla otištěna ve stejném ročníku ČPMF jako práce Petrova, Rychlík přiřazuje prvku (3.13) hodnotu

$$f(x) = a_r p^r + a_{r+2} p^{r+2} + a_{r+4} p^{r+4} + \cdots \tag{3.14}$$

a poměrně jednoduše dokazuje, že takto definovaná funkce je spojitá a pro žádné $x \in \mathbb{Q}_p$ nemá derivaci. V důkazu Rychlík využívá Petrovy myšlenky, přenáší je však z tělesa reálných čísel do tělesa čísel p-adických a modifikuje je s ohledem na zákonitosti, které v tělese $\mathbb{Q}_p$ platí.

Důkaz spojitosti funkce (3.14) spočívá v tom, že pro každé $n \geq r$ a libovolné $h \equiv 0 \pmod{p^n}$, neboli $h = h_n p^n + h_{n+1} p^{n+1} + \cdots$, je

$$x + h = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} + (a_n + h_n) p^n + \cdots,$$

tudíž $f(x+h) \equiv f(x) \pmod{p^n}$.[16]

K důkazu nediferencovatelnosti funkce (3.14) v libovolném bodě $x \in \mathbb{Q}_p$ Rychlík pro přirozené číslo $n \geq 0$ klade

$$\varepsilon_{r+n} = \begin{cases} 1 & \text{pro } \ a_{r+n} \neq p-1, \\ -1 & \text{pro } \ a_{r+n} = p-1. \end{cases}$$

Prvek $x + \varepsilon_{r+n} p^{r+n} = a_r p^r + \cdots + (a_{r+n} + \varepsilon_{r+n}) p^{r+n} + a_{r+n+1} p^{r+n+1} + \cdots$ je v redukovaném tvaru, jeho funkční hodnota je tedy

$$f(x + \varepsilon_{r+n} p^{r+n}) = \begin{cases} f(x) & \text{pro liché } \ n, \\ f(x) + \varepsilon_{r+n} p^{r+n} & \text{pro sudé } \ n. \end{cases}$$

Pro posloupnosti $h'_k = \varepsilon_{s+2k} p^{s+2k}$ a $h''_k = \varepsilon_{s+2k+1} p^{s+2k+1}$, kde $k \in \mathbb{N}$, proto platí:

$$\frac{f(x + h'_k) - f(x)}{h'_k} = 1, \qquad \frac{f(x + h''_k) - f(x)}{h''_k} = 0,$$

[16] Tj. $\|f(x+h) - f(x)\| \leq p^n$ při p-adickém ohodnocení $\|\cdot\|$ tělesa $\mathbb{Q}_p$ (viz poznámku 82 na str. 91).

totéž v limitách pro $k \to \infty$; odtud ihned plyne, že pro dané $x \in \mathbb{Q}_p$ skutečně neexistuje derivace.

Rychlík poznamenává, že stejným způsobem je možno vést důkaz také v případě okruhu g-adických čísel, kde g je složené číslo, či pro libovolné algebraické rozšíření konečného stupně tělesa $\mathbb{Q}_p$.

O dva roky později byla v Crelleově časopise otištěna německá verze [R21] Rychlíkova článku [R17]. Rychlík zde trochu pozměnil konstrukci funkce (3.14); prvku $x \in \mathbb{Q}_p$ tvaru (3.13) nyní přiřazuje funkční hodnotu takto:

$$f(x) = a_s p^s + a_{s+2} p^{s+2} + a_{s+4} p^{s+4} + \cdots; \quad s = \left\{ \begin{array}{ll} r+1 & \text{pro sudé } r, \\ r & \text{pro liché } r. \end{array} \right. \tag{3.15}$$

Hodnota $f(x)$ tedy obsahuje právě ty členy z rozvoje (3.13) prvku x, ve kterých se vyskytuje lichá mocnina prvočísla p; $f(0) = 0$.

Důkaz spojitosti je shodný s důkazem uvedeným v článku [R17], důkaz nediferencovatelnosti se odlišuje jen v detailech, v zásadě se však také shoduje s [R17].

Německá verze [R21] se však od své české předchůdkyně [R17] liší tím, že navíc obsahuje závěrečnou poznámku o Bolzanově funkci (viz str. 176) včetně citace Jaškova článku [33][17] a Rychlíkovy práce [R19]. V Rychlíkově článku [R17] z roku 1920 není žádná historická poznámka, v Petrově práci [41] z téhož roku, z níž Rychlík vyšel, je jako první příklad spojité nediferencovatelné funkce uvedena funkce Weierstrassova (3.9). Tyto skutečnosti nasvědčují tomu, že Petr ani Rychlík v roce 1920 o Bolzanově funkci ještě nevěděli a jejich práce jen shodou okolností vyšly v době, kdy začal Martin Jašek studovat Bolzanovy rukopisy uložené ve vídeňské Národní knihovně (srov. str. 167).

[17] Viz literaturu uvedenou na str. 197–201.

3.3 ZÁVĚR

Práce z matematické analýzy představují na seznamu publikací Karla Rychlíka jen malý zlomek, jeho odborný zájem v matematice byl zaměřen v první řadě na algebru a teorii čísel. Jak jsme se však již zmínili v úvodu, těžiště Rychlíkových pedagogických aktivit bylo na české technice v Praze, kde vyučoval především matematickou analýzu. Podle slov Vladimíra Kořínka, který byl na technice tři roky jeho asistentem, si Rychlík na začátku své profesorské kariéry opatřil a prostudoval prakticky všechny důležité světové učebnice diferenciálního a integrálního počtu, aby se dobral k co nejlepší metodice výuky budoucích inženýrů (viz str. 36).

Rychlíkův zájem však nebyl jen ryze pedagogický, kromě učebnic studoval i práce v odborných časopisech. O tom svědčí jeho články diskutované v této kapitole, které mají shodné rysy s pracemi z algebry a teorie čísel: dokládají Rychlíkův široký rozhled v daném oboru, sledování aktuální literatury a nejnovějšího vývoje; v pracích jsou podány zajímavé postřehy, zobecnění či naopak jednodušší důkazy.

Ve dvojici článků věnovaných spojitým nediferencovatelným funkcím v tělesech p-adických čísel ([R17] a [R21]) Rychlík oba své odborné zájmy propojil a vytvořil jednu z prvních prací studujících p-adickou analýzu, která byla rozvíjena až mnohem později (srov. str. 88).

Dvojice článků o Böhmerových nepravidelných posloupnostech ([R41], [R42]) představuje propojení matematické analýzy s jiným Rychlíkovým pedagogickým zájmem, teorií pravděpodobnosti, a opět svědčí o tom, že Rychlík sledoval nejnovější trendy ve vývoji této disciplíny.

Literatura

Posloupnosti a řady

[1] Bieberbach, L., *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Teubner, Leipzig, 1930.

[2] Böhmer, P. E., *Über regellose alternierende Folgen. Ein Beitrag zu den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung I–IV*, Berichte Säch. Akad. **75**(1923), 91–101; **76**(1924), 139–148, 149–157; **77**(1925), 36–40.

[3] Borel, E., *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développments en séries de polynomes*, Gauthier-Villars, Paříž, 1905.

[4] Burns, H., *Zur Theorie der Kugelfunctionen*, Crelle **90**(1881), 322–328.

[5] Čupr, K., *Parsevalova identita a její užití v teorii o funkcích konečných*, ČPMF **55**(1926), 11–31.

[6] Frobenius, G., *Über die Entwicklung analytischer Functionen in Reihen, die nach gegeben Functionen fortschreiten*, Crelle **73**(1871), 1–30.

[7] Frobenius, G., *Ueber die Leibnizsche Reihen*, Crelle **89**(1880), 262–264.

[8] Goursat, E., *Démonstration élémentaire d'un théorème de Weierstrass*, Bulletin de la société mathématique de France **36**(1908), 209–215.

[9] Gronwall, T. H., *Über einige Summationsmethoden und ihre Anwendung auf die Fouriersche Reihe*, Crelle **147**(1917), 16–35.

[10] Heine, E., *Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen I*, G. Reimer, Berlin, 1878 [2. vydání].

[11] Hermite, Ch., *Sur la formule d'interpolation de Lagrange (Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt)*, Crelle **84**(1878), 70–84.

[12] Kamke, E., *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1932.

[13] Landau, E., *Darstellung und Begründung einiger Ergebnisse der Funktionentheorie*, Springer Verlag, Berlin, 1916.

[14] Lerch, M., *Elementárné stanovení asymptotické hodnoty Legendreových mnohočlenů*, Rozpravy **1**(1892), 149–158.

[15] Lerch, M., *Poznámky k theorii interpolace*, Rozpravy **1**(1892), 663–677.

[16] Mises, R. von, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Math. Zeit. **5**(1919), 52–99.

[17] Petr, K., *Počet integrální*, JČM (Sborník Jednoty českých matematiků a fysiků č. 13), Praha, 1915.

[18] Pringsheim, A., *Über den Divergenz–Charakter gewisser Potenzreihen an der Convergenzgrenze*, Acta math. **28**(1904), 1–30.

[19] Runge, C., *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Acta math. **VI**(1885), 229–244.

[20] Runge, C., *Theorie und Praxis der Reihen*, G. J. Göschen, Leipzig, 1904.

[21] Runge, C., *Über empirische Functionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **46**(1901), 224–243.

[22] Toeplitz, O., *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, Prace matematyczno–fizyczne **22**(1911), 113–119.

[23] Vallée-Poussin, Ch. J. De La, *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées pas des polynoms et des suites limitées de Fourier*, Bull. soc. Belgique (1908), 193–254.

[24] Weierstrass, K., *Einige auf die Theorie der analytischer Funktionen mehrerer Veränderlichen sich beziehenden Sätze*, in: *Mathematische Werke II*, Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Mayer & Mayer, Berlin, 1895, 135–188.

Spojité nediferencovatelné funkce

[25] Bržečka, V. F., *O funkcii Bol'cano*, Uspechi **4(30)**(1949), č. 2, 15–21.

[26] Cantor, G., *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.

[27] Cellérier, Ch., *Note sur les principes fondamentaux de l'analyse*, Bulletin des sciences mathématiques **14**(1890), 142–160.

[28] Darboux, G., *Mémoire sur les fonctions discontinues*,
Annales de l'Ecole normale (2) **IV**(1875) 57–112.

[29] David, G.; Semmes, S., *Fractured Fractals and Broken Dreams (Self–Similar Geometry through Metric and Measure*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[30] Dini, V., *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa, 1878.

[31] Falconer, K. J., *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[32] Falconer, K. J., *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, Chichester, 1990.

[33] Richter, P. H.; Peitgen, H.-O., *The Beauty of Fractals*, Springer Verlag, Berlin, 1986.

[34] Hlaváček, M., *Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace*, ČPMF **60**(1931) 157–159.

[35] Jürgens, H.; Peitgen, H.-O.; Saupe, D., *Fractals for the Classroom, part I, II*, Springer Verlag, New York, 1992.

[36] Koch, H. von, *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, utgivet af K. Svenska Vetenskaps–Akademien. Stockholm **1**(1903/04), 681–702.

[37] Lerch, M., *Über die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Function*, Crelle **92**(1888), 126–138.

[38] Mandelbrot, B. B., *Les objects fractals: forme, hasard et dimension*, Flammarion, San Paris, 1975.

[39] Mandelbrot, B. B., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1982.

[40] Peano, G., *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Ann. **36**(1890), 157–160.

[41] Petr, K., *Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace*, ČPMF **49**(1920), 25–31.

[42] Petr, K., *Poznámka k článku pana Hlaváčka*, ČPMF **60**(1931), 160–161.

[43] Preiss, D., *Nederivovatelné funkce*, in: Bernard Bolzano – konference českých matematiků, Matematická vědecká sekce, Praha, 1981, 13–18 [sborník konference ve Zvíkovském Podhradí].

[44] du Bois–Reymond, P., *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeler Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen*, Crelle **79**(1875), 21–37.

[45] Takagi, T., *A simple example of the continuous function without derivative*, Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji **1**(1903), 176–177 [anglicky a japonsky].

[46] Veselý, J., *Matematická analýza pro učitele II*, Matfyzpress, Praha, 1997.

[47] Waerden, B. L. van der, *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion*, Math. Zeit. **32**(1930), 474–475.

[48] Weierstrass, K., *Zur Functionenlehre*, Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1880), přetisk in: *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, Springer Verlag, Berlin, 1886, 67–101.