Bernard Bolzano (1781–1848)

Obrázek je převzat z českého překladu Bolzanovy autobiografie, který vyšel v Praze v r. 1913 nákladem Stoklasova sborníku; překladatelem byl PhDr. V. Stoklas.

Podle *„Bernard Bolzano–Gesamtausgabe“* , řada IV, svazek I, díl I, obr. I.12 se jedná o ocelorytinu, kterou zhotovil Carl Mayer podle obrazu Antona Gruße v r. 1836; tato ocelorytina pak byla použita jako frontispis v 1. vydání Bolzanova vlastního životopisu (Sulzbach 1836).

3. Počet pravděpodobnosti v učebnici náboženství Bernarda Bolzana

3.1 Úvod

3.1.1 Vymezení problematiky

V r.1834 vyšla v Sulzbachu anonymně[68] Bolzanova kniha *„Lehrbuch der Religionswissenschaft, ein Abdruck der Vorlesungshefte eines ehemaligen Religionslehrers an einer katholischen Universität, von einigen seiner Schüler gesammelt und herausgegeben“*[69]. I když se jedná o spis náboženský, obsahuje i část zajímavou pro pohled na Bolzana jako matematika. Základem této „matematické“ části je § 15 druhého dílu uvedené knihy, nadepsaný *„Ueber den Begriff der Wahrscheinlichkeit und die verschiedenen Arten derselben“*[70]; pojmy a vzorce tohoto paragrafu jsou pak využity bezprostředně v paragrafech 17, 19, 21, 22 a 27. Všechny tyto paragrafy patří do druhé kapitoly II. dílu, nazvané *„Ueber die Natur der historischen Erkenntniß , besonders in Hinsicht auf Wunder“*[71] a domníváme se, že je lze chápat jako projev Bolzanovy snahy vyvrátit názory vyslovené v práci skotského matematika a teologa Johna Craiga *„Theologiae christianae principia mathematica“* (1.vydání Londýn 1699).

V této kapitole budou v části 3.2 shrnuty Bolzanovy „pravděpodobnostní “ názory obsažené ve shora uvedených paragrafech Bolzanova *„Lehrbuchu“* a v části 3.3 budou doplněny několika poznámkami k pravděpodobnostním úvahám ze známé Bolzanovy *„Wissenschaftslehre“*[72]. V části 3.4 uvedeme náš názor na motivaci „pravděpodobnostní“ části Bolzanova *„Lehrbuchu“* a v části 3.5 budou uvedeny některé souvislosti historické i některé názory současné, které mohou být zajímavé pro posouzení Bolzanova vztahu k počtu pravděpodobnosti[73].

---

[68] V knize není autor uveden, od začátku však bylo známo, že se jedná o Bolzanovu práci.
[69] V dalším bude tato kniha citována jako *„Lehrbuch“*.
[70] *„O pojmu pravděpodobnosti a jejich různých druzích“*.
[71] *„O povaze historického poznání, obzvláště se zřetelem na zázraky“*.
[72] *„Dr. B. Bolzanos Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter.“* 1. vydání Sulzbach 1837.
[73] Termín „počet pravděpodobnosti“ volíme proto, že se nám jeví pro Bolzanovy úvahy v *„Lehrbuchu“* výstižnější než dnes obvyklejší termín „teorie pravděpodobnosti“.

3.1.2 Základní životopisná fakta

O Bolzanovi existuje nepřeberné množství literatury[74], přesto však považujeme za vhodné připomenout zde stručně základní životopisná fakta.

Bernard Bolzano se narodil 5. října 1781 v Praze. V letech 1796–1799 studoval na filozofické fakultě pražské univerzity; po jejím dokončení jeden rok zvažoval své další povolání a věnoval se (kromě jiného) i studiu tzv. vyšší matematiky u F. J. Gerstnera[75]. V letech 1800–1805 studoval na teologické fakultě pražské univerzity[76] a v dubnu 1805 byl postupně vysvěcen na kněze, získal doktorát filozofie a byl uveden do funkce profesora náboženství na filozofické fakultě pražské univerzity; s jeho jmenováním však vznikly problémy a definitivně byl potvrzen v této funkci až v r. 1807. O jeho působení na pražské univerzitě je pojednáno velice podrobně v práci [Pav] a vypráví o něm i Bolzano ve svém vlastním životopisu; stručně lze říci, že jeho názory a postoje mu sice získaly řadu příznivců, ale na druhé straně také odpůrce a kritiky. Ti druzí nakonec převážili, takže 19. ledna 1820 obdržel Bolzano císařský dekret (schválený již 24. XII. 1819) o sesazení z funkce profesora. Protože Bolzano byl kněz a jednalo se o profesuru náboženskou, musel se Bolzano zodpovídat ze svých názorů i po církevní stránce pražskému arcibiskupovi[77] a zde byla celá záležitost uzavřena až 31. XII. 1825; Bolzano ve svém vlastním životopisu neuvádí, že by byl nějak církevně potrestán[78]. Od

[74] Kromě vlastního Bolzanova životopisu [Bol] může pro základní informaci o jeho životě a díle posloužit např. přehledná stať [Fol] nebo knížka [Ber].

[75] Základní povinný kurs matematiky absolvoval Bolzano v rámci studia na filozofické fakultě u S. Vydry (viz např. [SM], str. 202 a násl.). Studium nepovinné vyšší matematiky u F. J. Gerstnera bylo rozvrženo do tří let; Bolzano studoval ve šk. r. 1799–1800 současně látku prvního i druhého roku a ve šk. r. 1800–1801 studoval látku třetího roku Gerstnerova kurzu současně se studiem prvního ročníku na teologické fakultě ([Pav], str. 35). K celkové organizaci studia matematiky na pražské univerzitě v době Bolzanových studií viz např. [DUK], II, str. 129 a násl.

[76] Ještě jako student této fakulty se v r. 1804 přihlásil do dvou konkurzů na filozofické fakultě pražské univerzity, a to jednak na místo profesora elementární matematiky, jednak na místo profesora náboženství; průběh obou konkurzů je podrobně popsán v [Pav], str. 38 a násl. Pokud jde o termín „profesor náboženství“, užíváme ho, protože je používán běžně, formálně se však jednalo o funkci katechety. Podrobně o zavedení výuky náboženství na filozofických fakultách rakouských univerzit pojednává [Pav], str. 27 a násl.

[77] V té době jím byl Václav Leopold Chlumčanský z Chlumčan a Přestavlk (1749–1830), který ještě jako litoměřický biskup v r. 1805 udělil Bolzanovi kněžské svěcení ([Pav], str. 46). Ve svém životopise mluví Bolzano o tomto významném církevním činiteli vždy s úctou a pochopením. Bronzovou bustu V. L. Chlumčanského lze spatřit v Národním muzeu v Praze ve dvoraně hlavního schodiště na úrovni 2. patra.

[78] Přesně řečeno, Bolzano píše ([Bol], str. 82 českého překladu M. Pavlíkové), že 7. prosince 1824 mu bylo pražským arcibiskupem zakázáno zpovídat (což lze považovat za jistou formu

té doby žil jako soukromá osoba převážně mimo Prahu, hlavně v Těchobuzích, kde byl hostem v rodině statkáře J. Hoffmanna. V r. 1841 byl zvolen sekretářem matematické a filozofické sekce Královské české společnosti nauk (viz [Ber], str. 36–37) a koncem téhož roku se vrátil do Prahy, kde 8. prosince 1848 zemřel.

3.1.3 Bolzanova knihovna

Z hlediska této kapitoly se nám jeví jako důležitá skutečnost, že se zachovala Bolzanova soukromá knihovna; na jejím základě můžeme totiž usuzovat, jaké znalosti tehdejší pravděpodobnostní literatury mohl Bolzano mít a z čeho mohl vycházet[79].

Historie této knihovny je podrobně zpracována ve stati [Šve]; tam lze také nalézt základní informace o obsahu této knihovny. Pokud jde o osudy této knihovny po Bolzanově smrti, Bolzano svoji soukromou knihovnu odkázal hraběti Leo Thunovi von Hohenstein, který Bolzana finančně podporoval při nákupu knih. Hrabě Thun tutu knihovnu daroval v r. 1849 tzv. lužickému semináři[80] v Praze s tím, že v případě odchodu uvedeného semináře z Prahy by Bolzanova knihovna přešla do pražské univerzitní knihovny. K tomu došlo v r. 1922; po různých peripetiích je dnes Bolzanova knihovna uložena v Národní knihovně ČR v Praze v oddělení rukopisů a starých tisků a je vybavena samostatným lístkovým katalogem; podle [Šve] obsahuje 2087 svazků uložených pod 1342 signaturami.

Prohlídkou zmíněného katalogu Bolzanovy knihovny jsme zjistili, že Bolzano měl ve své knihovně následující knihy vztahující se k teorii pravděpodobnosti:

1) John Craig (1660–1731): *„Theologiae christianae principia mathematica“.* Lipsko 1755.

---

církevního trestu), z Bolzanova textu však není jasné, zda tento zákaz trval i po církevním uzavření celého případu.

[79] Tím nechceme říci, že by Bolzano nemohl znát a používat i knihy z jiných knihoven, domníváme se však, že jeho vlastní knihovna mu asi byla nejbližší a využíval ji nejvíce.

[80] Tím je vysvětleno, proč je dnes v knihách, které byly Bolzanovým soukromým majetkem, kulaté razítko tohoto semináře s nápisem „E biblioth. seminarii St. Petri Pragae“. Tzv. lužický seminář byl založen na začátku 18. století a byl určen pro přípravu kněží na působení v Lužici, která tehdy církevně byla součástí pražského arcibiskupství. Z hlediska této kapitoly je zajímavé, že v uvedeném semináři působil jistou dobu i Bolzanův žák František Příhonský (1788–1859), který po Bolzanově smrti vydal jeho *„Paradoxy nekonečna“* (1851). Obrázek Příhonského lze najít v *„Gesamtausgabe“*, řada IV, sv. I, díl I, obr. II.20; v popisu k obrázku se říká: *„Präses des wendischen Seminars in Prag, wirkte später in Bautzen“.*

První vydání této knihy vyšlo v Londýně v r. 1699; Bolzano měl ve své knihovně vydání z Lipska z r.1755 s úvodem a komentářem J. D. Titiuse[81] a tohoto exempláře bylo použito při přípravě této kapitoly. Jak už bylo řečeno, domníváme se, že Craigova kniha představovala pro Bolzana důležitý motiv k tomu, aby se ve své učebnici náboženství zabýval i teorií pravděpodobnosti; podrobněji bude o této knize pojednáno v paragrafu 3.4.

2) Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, markýz de Condorcet (1743–1794): *„Elémens du calcul des probabilités, et son application aux jeux de hasard, a la loterie, et aux jugemens des hommes par feu M. de Condorcet. Avec un discours sur les avantages des mathematiques sociales et un notice sur M. de Condorcet“.* Paříž 1805.

Markýz de Condorcet se zabýval nejen matematikou, ale i filozofií, ekonomií a literaturou; navíc byl aktivně činný i politicky (viz např. [Can], IV, str. 251 a násl., nebo stať P. Crépela o Condorcetovi v [HS], str. 90–92). Condorcetovu práci, kterou měl Bolzano ve své knihovně, vydal v Paříži v r. 1805, tedy až po autorově smrti, francouzský matematik S. F. Lacroix[82]. Má celkový rozsah 232 stran, z čehož pravděpodobnostní pojednání *„Elémens du calcul des probabilités ...“* zabírá stránky 1–170; o tomto pravděpodobnostním pojednání je podrobněji referováno v [Da1], str. 141–144 a stručně lze říci, že mezi Condorcetovými pravděpodobnostními pracemi hraje okrajovou roli.

3) Silvester François Lacroix (1765–1834): *„Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung“*. Erfurt 1818.

Silvestre François Lacroix (viz např. [Can], IV, str. 344 a násl.) působil celý život jako vysokoškolský učitel na různých školách, od r. 1799 byl členem pařížské Akademie věd. Byl znám jako autor řady učebnic, které výrazně ovlivnily výuku matematiky nejen ve Francii, ale i v jiných zemích. Učebnice teorie pravděpodobnosti, o které je zde řeč, vyšla ve francouzštině poprvé r.1816 a dosáhla už v r.1836 svého čtvrté vydání ve francouzštině, takže ji lze hodnotit jako učebnici úspěšnou.

---

[81] Johann Daniel Titius (1729 –1796) působil jako učitel matematiky, fyziky a filozofie ve Wittenbergu. Jeho jméno se dodnes objevuje v astronomii v názvu tzv. Titiovy – Bodeovy řady, což je matematické vyjádření přibližné zákonitosti ve vzdálenostech mezi Sluncem a planetami.

[82] Poznamenejme pro zajímavost, že Lacroix později (1813) napsal knihu o Condorcetovi; byla to zřejmě první monografie věnovaná tomuto (podle našeho názoru zajímavému) autorovi.

Jiné knihy vztahující se k teorii pravděpodobnosti jsme v Bolzanově knihovně nenašli. Lze soudit, že v průběhu různých přesunů se některé knihy z Bolzanovy knihovny asi ztratily a je možné, že mezi nimi mohly být i knihy týkající se teorie pravděpodobnosti; jeví se nám např. jako překvapivé, že by Bolzano neměl ve své knihovně Laplaceův spis *„Essai philosophique sur les probabilités"*. Ve všech uvedených knihách jsou na některých místech poznámky vepsané tužkou, takže je zřejmé, že je někdo (Bolzano?) opravdu studoval.

3.1.4 Některé práce o Bolzanových pravděpodobnostních úvahách

Jak už bylo řečeno, o Bolzanovi existuje nepřeberné množství literatury. Pokud jde o Bolzanovy pravděpodobnostní úvahy ve *„Wissenschaftslehre"*, věnovala jim pochopitelně pozornost už řada autorů, zdá se však, že se většinou jednalo o pozornost z hlediska dějin filozofie, nikoli z hlediska matematického. Pokud jde o Bolzanovy pravděpodobnostní úvahy v *„Lehrbuchu"*, byla jim věnována pozornost nesrovnatelně menší a když autor této knížky v r. 1994 o teorii pravděpodobnosti v Bolzanově *„Lehrbuchu"* referoval na konferenci ve Vyškově[83], neznal žádnou jinou práci týkající se tohoto tématu. Později zjistil, že již dříve vyšly některé práce související s tímto tématem; zde se pokusíme podat jejich přehled.

1) Na prvním místě je třeba uvést práci

Dorn, G. J. W.: *Zur Bolzanos Wahrscheinlichkeitslehre.* Philosophia naturalis 24 (1987), č. 4, str. 423–441.

V této práci jsou Bolzanovy pravděpodobnostní úvahy z *„Lehrbuchu"* i z *„Wissenschaftslehre"* podrobně zpracovány z hlediska formální logiky; není zde však nic z toho, co je obsaženo v [Ma1]. Z dalších autorů píšících o Bolzanovi Dorn cituje J. Berga a K. Berku.

2) O Bolzanových pravděpodobnostních úvahách v *„Lehrbuchu"* je malá zmínka v knize

Sebestik, J.: *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano.* Paris, Libraire philosophique J. Vrin, 1992

na str. 254. V rámci kapitoly *„Logique des probabilités. Déductibilité stricte"* se mluví o Bolzanově výkladu pravděpodobnosti ve *„Wissenschaftsle-*

[83] Tento referát vyšel později jako [Ma1].

hre“ a v poznámce pod čarou je upozorněno i na příslušnou kapitolu v *„Lehrbuchu“*, tato poznámka však opět neobsahuje nic z toho, co je obsaženo v [Ma1]. Jako další autoři zabývající se tématem *„logique des probabilités de Bolzano“* jsou v této poznámce citováni J. Berg, K. Berka, G. Dorn (viz výše), Th. Hailperin, J. Lukasiewicz, I. Niiniluoto a dvojice A. A. Starčenko – O. S. Tjagnibedina.

3) Mezi práce o Bolzanovi je nepochybně třeba zahrnout i úvody a komentáře k modernímu vydání sebraných spisů Bernarda Bolzana, které vychází již od r. 1969 pod názvem *„Bernard Bolzano-Gesamtausgabe“*[84]. Pokud jde o *„Lehrbuch“* , vyšel zde v letech 1994–2004 v řadě I v sedmi dílech (díly 6/1 a 6/2 obsahují první díl *„Lehrbuchu“*, díly 7/1 a 7/2 obsahují jeho druhý díl, díly 8/1, 8/2 a 8/3 obsahují jeho třetí díl); z hlediska této naší kapitoly je podstatný díl 7/1, který vyšel v r. 1996 a obsahuje §§ 1–54 druhého dílu *„Lehrbuchu“*, tedy i paragrafy, o kterých pojednáváme v této kapitole. Editorem tohoto vydání byl Jaromír Loužil; pokud jde o Bolzanovy pravděpodobnostní úvahy, Loužil je v úvodu k dílu 7/1 uvádí do souvislosti s Bolzanovou obhajobou věrohodnosti biblických zpráv o zázracích (*„... ungewöhnlich weitläufende Schilderung der Wunder samt der Beteuerung ihrer Echtheit und Unverfälschtheit“*[85]) a píše: *„Es ist gewiß nicht ohne Interesse, daß Bolzano zu diesem Behufe sogar eine eigene mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeit formuliert hat. (Die Theorie ist korrekt; daß läßt sich allerdings von den einzusetzenden konkreten Instanzen – den einzelnen Wundnern, Zeugen und Zeugenaussagen – also von der praktischen Anwendung der Theorie auf dem Gebiete der Religion schwerlich sagen.)“*[86]. Žádné další komentáře k Bolzanovým pravděpodobnostním úvahám Loužil neuvádí; domníváme se proto, že můžeme přikročit k podrobnému výkladu toho, co z teorie pravděpodobnosti vlastně Bolzano ve svém *„Lehrbuchu“* vyložil a jak toho pak použil.

---

[84] Edice vychází v nakladatelství Friedrich Frommann Verlag (Günther Holzboog), Stuttgart – Bad Cannstatt. Jako editoři edice jsou uvedeni Eduard Winter (dnes již zemřelý), Jan Berg, Friedrich Kambartel, Jaromír Loužil (v prvních vydaných svazcích edice není uveden) a Bob van Rootselaar. Edice je dostupná (i když asi ne zcela kompletní) v příruční knihovně oddělení rukopisů a starých tisků Národní knihovny ČR v Praze; k dnešnímu dni (4. VIII. 2005) jsme tam na poličce napočítali šedesát dílů této edice. Edice je rozdělena do několika řad, jednotlivé řady pak do svazků (Band) a ty potom do dílů (Teil); v případě potřeby budeme jednotlivé díly této edice citovat jako *„Gesamtausgabe“* s číslem příslušné řady, svazku a dílu.

[85] *„ ... neobvykle rozsáhlé líčení zázraků spolu s ujišťováním o jejich pravosti a nezfalšovanosti.“*

[86] *„Jistě není bez zajímavosti, že Bolzano k tomuto cíli zformuloval vlastní matematickou teorii pravděpodobnosti. (Tato teorie je správná; to lze ovšem sotva říci o dosazovaných konkrétních instancích – jednotlivých zázracích, svědcích a svědectvích – tedy o praktickém použití této teorie v oblasti náboženství).“*

3.2 Pravděpodobnost v knize *„Lehrbuch der Religionswissenschaft“*

Druhá kapitola II. dílu uvedené knihy obsahuje paragrafy 13–30 a má rozsah 39 stran. Dva úvodní paragrafy ponecháme stranou a přikročíme přímo k výkladu již zmíněného § 15, který je poměrně rozsáhlý (více než 9 stran) a je členěn do řady dalších bodů a podbodů.

3.2.1 Základní pojmy

§ 15 / 2
Bolzano nejprve upozorňuje: *„Ich werde mich aber hier keine eigentliche Erklärung oder Zerlegung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit in seine einfachen Bestandtheile einlassen; sondern mich mit einer bloßen Verständigung über ihn begnügen.“*[87]

Toto upozornění považujeme za důležité pro porovnání s *„Wissenschaftslehre“*, obzvláště pak s jejím § 161, který má název *„Verhältniß der vergleichungsweisen Gültigkeit oder der Wahrscheinlichkeit eines Satzes in Hinsicht auf andere Sätze“*[88] a jehož matematický obsah je takřka totožný s obsahem námi studovaného § 15 v *„Lehrbuchu“*, zaváděné pojmy jsou v něm však rozebírány velice podrobně.

§ 15 / 4
Výchozím pojmem je pojem *„der Grad der Wahrscheinlichkeit“*[89], vymezený v tomto bodu pouze obecně: *„Der Grad der Zuversicht, mit welchem wir etwas erwarten, oder vermuthen, oder annehmen können, ist der Grad der Wahrscheinlichkeit, welchen es hat.“*[90]

§ 15 / 5
Zde je podána přesná definice, totožná v podstatě s tím, čemu se dnes říká „klasická definice pravděpodobnosti“:

„Die Wahrscheinlichkeit eines Urtheiles ist eine derjenigen Beschaffenheiten, die einen Grad oder eine Größe haben; und zwar wird diese Größe durch einen Bruch gemessen. Um nämlich zu bestimmen, mit welchem Grade der Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann, daß unter mehreren

---

[87] *„Nebudu se zde však pouštět do vlastního objasňování nebo rozkladu pojmu pravděpodobnosti na jeho jednoduché složky; spokojím se s pouhým jeho pochopením.“*
[88] *„Vztah relativní platnosti čili pravděpodobnosti nějaké věty s ohledem na jiné věty.“*
[89] *„stupeň pravděpodobnosti“.*
[90] *„Stupeň důvěry, se kterým můžeme něco očekávat, nebo tušit, nebo předpokládat, je stupeň pravděpodobnosti, který to má.“*

nicht erweislich falschen, d.h. problematisch möglichen Antworten auf eine Frage die Antwort A *die richtige sey, müssen wir zählen, wie viele nicht erweislich falsche Fälle es in Betreff der Antwort auf die Frage gibt, die alle, weil ein gleicher Theilgrund für sie spricht, auch eine gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Die Summe dieser Fälle gibt uns den Nenner des Bruches. Dann müssen wir zählen, wie viele dieser Fälle es gibt, bei deren Annahme die Antwort* A *zum Vorscheine kommt. Die Summe dieser Fälle gibt uns den Zähler des Bruches.*"[91]

Následuje příklad: je-li v urně je 30 koulí bílých a 10 černých, pak stupeň pravděpodobnost, s nímž lze předpokládat, že při náhodném výběru bude vytažena bílá koule, je roven 3/4.

Z tohoto výchozího pojmu je v § 15/(6–14) odvozena řada dalších pojmů; uveďme zde pro úplnost jejich přehled:

§ 15 / 7
Je-li stupeň pravděpodobnosti roven 1, pak se jedná o jistotu (*„die Gewißheit“*).

§ 15 / 8
Je-li stupeň pravděpodobnosti roven 1/2, jedná se o nejistotu (*„die Zweifelhaftigkeit“*).

§ 15 / 11–12
Je-li stupeň pravděpodobnosti hodně malý, mluví Bolzano o nekonečně malé pravděpodobnosti nebo nekonečně velké nepravděpodobnosti. Případy s takovým stupněm pravděpodobnosti nazývá morálně nemožné, neboť ve většině takových případů je povinností chovat se jako při úplné nemožnosti; jako příklad takového jevu je uvedeno sestavení prvního verše Iliady náhodným vytahováním písmen z krabice.

Opačná tvrzení nazývá Bolzano morálně jistá nebo morálně nutná.

---

[91] *„Pravděpodobnost nějakého úsudku je jeho vlastnost, která má nějaký stupeň čili velikost; tato velikost je měřena zlomkem. Abychom totiž stanovili, s jakým stupněm pravděpodobnosti může být předpokládáno, že mezi mnoha nikoli prokazatelně chybnými, tudíž problematicky možnými odpověďmi na nějakou otázku je odpověď A správná, musíme spočítat, kolik existuje případů vzhledem k odpovědi na otázku, které nejsou prokazatelně chybné a které všechny, protože pro ně mluví stejný částečný důvod, mají také stejnou pravděpodobnost. Součet těchto případů nám dává jmenovatele zlomku. Pak musíme spočítat, kolik existuje těchto případů, při kterých se objevuje odpověď A. Součet těchto případů nám dává čitatele zlomku.“*

§ 15 / 13–14
Je zavedena pravděpodobnost absolutní a relativní, která se dělí dále na vnější a vnitřní:

„Diese nur aus Berücksichtigung gewisser Umstände allein hervorgehende Wahrscheinlichkeit eines Satzes heißt seine relative oder beziehungsweise Wahrscheinlichkeit, zum Unterschied von derjenigen, die er erhält, wenn wir auf alle uns bekannten Umstände oder Gründe merken, die seine absolute Wahrscheinlichkeit genannt wird.“[92]

„Eine besondere Art der relativen Wahrscheinlichkeit eines Erfolges, nämlich diejenige, die aus der Betrachtung eines Zeugen entstehen, pflegt man die äußere zu nennen; und im Gegentheile diejenige Wahrscheinlichkeit desselben, welche man mit Berücksichtigung aller andern Umstände, die nur nicht Zeugnisse sind, erhält, nennt man die innere Wahrscheinlichkeit.“[93]

3.2.2 Vzorce a příklady

Přikročme nyní k výkladu 15. bodu v § 15. Tento bod je co do rozsahu (více než 3 stránky) a z našeho hlediska i co do obsahu těžištěm celé 2. kapitoly II. dílu Bolzanova *„Lehrbuchu“*. Je dále členěn do sedmi podbodů a my se tohoto členění v podstatě přidržíme. Poznamenejme ještě, že Bolzano všechna matematická tvrzení v této části knihy dokazuje z dříve uvedené definice pravděpodobnosti.

§ 15 / 15 / a
Obsahuje větu o pravděpodobnosti doplňkového jevu:

„Wenn der Grad der Wahrscheinlichkeit der Behauptung des wirklichen Eintreffens eines Erfolges = x *ist: so ist der Grad der Wahrscheinlichkeit des contradictorischen Gegentheils, oder der Behauptung, daß sich der Erfolg nicht zutragen werde* = 1 – x *.“*[94]

---

[92] *„Tato pravděpodobnost nějaké věty, vycházející pouze ze zřetele na jisté okolnosti, se nazývá její relativní nebo vztažená pravděpodobnost, na rozdíl od té, kterou (ona věta) získá, budeme-li přihlížet ke všem nám známým okolnostem nebo důvodům, která je nazývána její absolutní pravděpodobností.“*

[93] *„Zvláštní druh relativní pravděpodobnosti nějakého výsledku, totiž ta, která vznikne z pozorování jednoho svědka, se nazývá vnější; a naopak ona pravděpodobnost téhož, kterou obdržíme při přihlédnutí ke všem jiným okolnostem, které jen nejsou svědectvími, se nazývá vnitřní pravděpodobností.“*

[94] *„Je-li stupeň pravděpodobnosti tvrzení o skutečném výskytu nějakého výsledku = x: pak je stupeň pravděpodobnosti kontradiktorického opaku, čili tvrzení, že se výsledek nevyskytl = 1 – x.“*

§ 15 / 15 / b
Obsahuje větu o násobení pravděpodobnosti pro nezávislé náhodné jevy, pojem nezávislosti se však u Bolzana neobjevuje a nezávislost se zřejmě pouze intuitivně předpokládá:

„Die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges M*, der nur bewirkt wird durch die Vereinigung zweier Umstände* A *und* B*, gleicht dem Producte aus den Wahrscheinlichkeiten dieser beiden.“*[95]

V následujícím podbodu §15/15/c je toto tvrzení zobecněno na více než dva jevy. V § 17 *„Erfordernisse zur Glaubwürdigkeit eines unmittelbaren Zeugen“*[96] je pak řešen následující příklad:

Příklad z § 17

Je-li pro nějakého svědka stupeň pravděpodobnosti toho, že
1. zná věc, o které mluví, roven 9/10,
2. má schopnost sdělovat myšlenky, roven 4/5,
3. je pravdomluvný, roven 2/3,

pak se můžeme na jeho výpověď spolehnout se stupněm pravděpodobnosti

$$\frac{9}{10}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{12}{25}\,.$$

§ **15 / 15 / d**
Tento paragraf obsahuje vzorec, který je pro Bolzana v daných souvislostech skoro tím nejdůležitějším, formulace problému však bohužel není příliš průhledná:

„Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges M *in einer gewissen Rücksicht* A (*d.h. wegen des Vorhandenseyns des Umstandes* A) = x*; in einen anderen Rücksicht* B (*d.h. wegen des Vorhandenseyns des Umstandes* B) = y *ist: so ist der Grad der Wahrscheinlichkeit des Erfolges* M *aus der Vereinigung von beiden Rücksichten (d.h. weil beide Umstände zugleich vorhanden sind) oder die absolute Wahrscheinlichkeit, die aus Vereinigung jener zwei relativen hervorgeht =*

$$\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}\,. \text{“ }^{97} \tag{1}$$

---

[95] *„Pravděpodobnost nějakého výsledku M, který může být způsoben jen spojením dvou okolností A a B, je rovna součinu pravděpodobností těchto obou.“*
[96] *„Požadavky pro věrohodnost bezprostředního svědka“.*

Tvrzení je sice odvozeno, ale ani toto odvození není zcela jasné. Protože však stejná otázka je velice podrobně probírána v § 161 ve *„Wissenschaftslehre"*, uveďme zde pro ilustraci některé příklady z tohoto pramene.

Příklady z *„Wissenschaftslehre"*

V jedné urně je 30 černých a 20 bílých koulí,ve druhé urně 70 černých a 50 bílých koulí. Z každé urny byla vytažena jedna koule a víme, že obě byly stejné barvy. Pak pravděpodobnost toho, že obě vytažené koule jsou černé, je podle (1)

$$\frac{\frac{30}{50}\frac{70}{120}}{\frac{30}{50}\frac{70}{120}+\left(1-\frac{30}{50}\right)\left(1-\frac{70}{120}\right)}=\frac{21}{31}.$$

Dnešní řešení by mohl spočívat v použití Bayesovy věty. Označíme-li

jev A_1 = obě vytažené koule jsou černé,

$$P(A_1) = \frac{30}{50}\cdot\frac{70}{120} = \frac{21}{60};$$

jev A_2 = obě vytažené koule jsou bílé,

$$P(A_2) = \frac{20}{50}\cdot\frac{50}{120} = \frac{10}{60};$$

jev B = obě vytažené koule jsou stejné,

$$P(B/A_1) = P(B/A_2) = 1 ;$$

dostaneme

$$P(A_1/B) = \frac{21}{31}.$$

Bolzano ovšem míří k úlohám odlišného charakteru, totiž k posuzování věrohodnosti tvrzení založených na nějakých svědectvích. K tomu však lze opět použít vzorce (1), což je v § 161 Bolzanovy *„Wissenschaftslehre"* ilustrováno na dvou příkladech, které zde ocitujeme.

Nejdříve je uvedeno totéž jako v předešlém příkladu, ale s jevy
A_1 = oba svědci mluví pravdu;

---

[97] *„Je-li pravděpodobnost výsledku M v jistém ohledu A (tj. kvůli výskytu okolnosti A) = x; v jiném ohledu B (tj. kvůli výskytu okolnosti B) = y: pak je stupeň pravděpodobnosti ze spojení obou ohledů (tj. vyskytnou-li se obě okolnosti současně) čili absolutní pravděpodobnost vznikající ze spojení oněch dvou relativních = (xy)/[xy + (1 - x)(1 - y)]."*

A_2 = oba svědci lžou;
B = oba svědci říkají totéž.

„Gesetzt, der Grad der Wahrscheinlichkeit, den ein gewisses Ereigniß bloß durch die Aussage des Zeugen A *erhält, wäre 3/5, und der Grad der Wahrscheinlichkeit, den er bloß durch die Aussage des Zeugen* B *hat, = 7/12; so wird, weil wegen der Uebereinstimmung beider Zeugen nur Eines von Beidem Statt finden kann, entweder daß Beide die Wahrheit sprechen oder daß Beide uns täuschen, der Grad der Wahrscheinlichkeit, den das Ereignß aus der Vereinigung beider Zeugen erhält, = 21/31.“*[98]

Následující příklad ukazuje, že vzorce (1) lze použít, i když si oba svědci protiřečí:

„Auch in dem Falle, wenn ein oder etliche Sätze wider den zu beweisenden Satz sprechen (z.B. Zeugen, die das Geschehenseyn des Ereignisses läugnen), kann man den obigen Lehrsatz gebrauchen, wenn man sich vorstellt, daß statt der Voraussetzung, die der Verneinung unsers Satzes die Wahrscheinlichkeit π gäbe, eine Voraussetzung vorhanden sey, die seiner Bejahung die Wahrscheinlichkeit 1 – π ertheilt. So muß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, wenn ein Zeuge mit der Wahrscheinlichkeit = 4/5 dafür, und ein anderer mit der Wahrscheinlichkeit = 3/4 dagegen spricht, eben so gewiß seyn, als die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, für das sich zwei Zeugen, der eine mit der Wahrscheinlichkeit 4/5, der andere mit der Wahrscheinlichkeit 1/4 erklären; also = 4/7.“[99]

Vraťme se nyní zpět k naší učebnici náboženství. V § 15/15/e je vzorec (1) zobecněn na případ více než dvou okolností, v § 15/15/f je diskutován případ x = 1/2.

Za aplikaci vzorce (1) lze považovat § 19 a částečně i § 21.

---

[98] *„Předpokládejme, že stupeň pravděpodobnosti, který získá jistý jev pouze výpovědí svědka A, je 3/5, a stupeň pravděpodobnosti, který má pouze z výpovědi svědka B, = 7/12; protože kvůli souhlasu obou svědků může nastat jen jedno ze dvojího, buď že oba mluví pravdu nebo že nás oba klamou, bude stupeň pravděpodobnosti, který jev získá ze spojení obou svědectví, = 21/35.“*

[99] *„Také v případě, že jedna nebo několik vět mluví proti dokazované větě (např. svědkové, kteří výskyt jevu popírají), můžeme shora uvedené poučky použít, představíme-li si, že místo předpokladu, který popření naší věty udílí pravděpodobnost π, máme k dispozici předpoklad, který jejímu schválení udílí pravděpodobnost 1 – π. Musí tedy být pravděpodobnost nějakého jevu, když jeden svědek mluví s pravděpodobností 4/5 pro něj a jiný s pravděpodobností 3/4 proti němu, právě tak jistá jako pravděpodobnost jevu, pro který mluví dva svědkové, jeden s pravděpodobností 4/5, druhý s pravděpodobností 1/4; tedy = 4/7.“*

Užití vzorce (1) v § 19 a v § 21

Tento paragraf má název *„Bestimmung der absoluten Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit, für die man eine Zeugenaussage hat“*[100]. V návaznosti na definice podané v § 15/(13–14) je zde konstatováno, že každá událost může mít už sama o sobě (bez přihlédnutí k tomu, že byla oznámena nějakým svědkem) nějaký stupeň vnitřní pravděpodobnosti x, což ve spojení se stupněm svědkovy pravděpodobnosti y vede ke stupni absolutní pravděpodobnosti události vyjádřené pomocí vzorce (1). Hodnota tohoto zlomku se může libovolně přiblížit k jedničce, když se aspoň jedna z hodnot x, y může libovolně přiblížit k jedničce, což znamená, že nějaká událost může být věrohodná, i když je svědek málo věrohodný, ale její vnitřní pravděpodobnost je vysoká, nebo i když je její vnitřní pravděpodobnost malá, ale hodnověrnost svědka vysoká. K této myšlence se Bolzano znovu vrací v § 21 *„Ueber Zeugenmehrheit“*[101] , kde říká, že není nezbytně nutné mít více svědků k dostatečnému ujištění o tom, že nějaká událost nastala; dokonce i když událost má nekonečně malou vnitřní pravděpodobnost [102], může výpovědí jediného svědka získat morální jistotu (což je termín zavedený v § 15/(11–12)).

V § 19 se dále říká, že svědectvím svědka s hodnověrností 1/2 se hodnověrnost události nemění, a je-li hodnověrnost svědka menší než 1/2, pak jeho svědectví dokonce hodnověrnost události zmenšuje. Tuto situaci Bolzano podrobně komentuje a připomíná, že hodnověrnost svědka menší než 1/2 bude mimořádně řídkým případem:
„... denn selbst ein Zeuge, der wenig, oder gar keine Liebe zur Wahrheit hat, begründet bloß dadurch, daß er uns etwas erzählt, nicht sogleich die Vermuthung, daß es sich nicht werde zugetragen haben; zumal wenn das Ereigniß, das er erzählt, innere Unwahrscheinlichkeit hat.“[103]

V již zmíněném § 21 k tomu pak uvádí následující příklad:
„Denn setzen wir, daß Jemand aus einer Million Kugeln, die mit den Nummern 1 bis 1000000 bezeichnet sind, Eine hervorgezogen habe, und daß zwei Zeugen (deren der Eine nichts von der Angabe des Anderen weiß) der herausgezogenen Kugel die Nummer 275 beilegen: wird es nicht schon durch diese Uebereinstimmung äußerst wahrscheinlich, daß beide die

---

[100] *„Stanovení absolutní pravděpodobnosti události, pro kterou máme jednu svědeckou výpověď.“*
[101] *„O množství svědků“.*
[102] Bolzano píše „ = n/∞“.
[103] *„... neboť dokonce i svědek, který má malou nebo vůbec žádnou lásku k pravdě, nevytváří pouze tím, že něco vypráví, hned dojem, že se to neudálo; zvláště když jev, o kterém vypráví, má vnitřní nepravděpodobnost.“*

Wahrheit berichten, weil es äußerst unwahrscheinlich ist, daß sie sonst Beide auf dieselbe Zahl verfallen wären?"[104]

§ 15 / 15 / g

Tento paragraf je posledním podbodem § 15/15 a obsahuje následující, pro Bolzanův výklad důležité tvrzení:

„Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Erfolges M, = x, und eines andern N, der jenem widerstreitet = y ist: so ist der Grad der Wahrscheinlichkeit, mit dem wir annehmen können, daß der Erfolg M eher, als der Erfolg N, Statt finden werde

$$= \frac{x}{x+y}\,.\text{“}^{105} \qquad (2)$$

Ilustrujme toto tvrzení nejprve opět příkladem z § 161 Bolzanovy *„Wissenschaftslehre"*. Je-li v urně 100 koulí různých barev, přičemž jen 10 je černých, jen jedna je bílá a víme-li, že náhodně vytažená koule je černá nebo bílá, pak pravděpodobnost toho, že ona vytažená koule je černá, je 10/11.

Nyní ukážeme dva příklady z naší učebnice náboženství, při jejichž řešení Bolzano využívá vzorce (2).

Užití vzorce (1) v § 22 a v § 27

V § 22 *„Ueber Zeugenwiderspruch"*[106] je uveden příklad: *„Wenn* A *erzählt, daß ein gewißer Mann über einen schmalen Steg gehend unversehens in's Wasser gefallen sey;* B *aber, daß er sich absichtlich hineingestürzt habe; und die Glaubwürdigkeit von* A *= 3/4, die innere Glaubwürdigkeit seiner Erzählung = 1/2; die Glaubwürdigkeit des* B *dagegen = 4/5, die innere seiner Erzählung 1/100 ist; so wird (nach §19*[107] *die Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses = 3/4, die des zweiten = 4/103 seyn. Also ist das Erste viel glaubwürdiger, als das Letztere, und der Grad der Wahrscheinlichkeit,*

---

[104] *„Předpokládejme totiž, že někdo vytáhl jednu z milionu koulí, které jsou označené čísly od 1 do 1000000, a že dva svědkové (z nichž jeden neví nic o údaji druhého) přidělí vytažené kouli číslo 275; nebude už tímto souhlasem nejvýše pravděpodobné, že oba říkají pravdu, protože je nejvýše nepravděpodobné, že by jinak oba napadlo totéž číslo?"*

[105] *„Je-li pravděpodobnost nějakého výsledku M, = x a nějakého jiného N, který prvnímu odporuje, je = y: pak stupeň pravděpodobnosti, se kterým můžeme předpokládat, že výsledek M nastane spíše než výsledek N, je = x/(x + y)."*

[106] *„O rozporu svědků."*

[107] Tj. podle (1).

mit dem wir annehmen können, das sich das Erste und nicht das Letzte zugetragen habe, ist (nach § 15 g)[108] *= 309/325.“*[109]

V § 27 s názvem *„Auch Wunder können historisch beglaubiget werden“*[110] končí pravděpodobnostní úvahy v Bolzanově *„Lehrbuchu“* příkladem: *„Gesetzt, es wäre die innere Unwahrscheinlichkeit eines bestimmten Wunders =* n/∞*; die Unwahrscheinlichkeit jeder anderen Voraussetzung aber, welche man machen muß , wenn die Geschichte lügt, wäre noch viel größer, z.B. =* n/m.∞ *oder wohl gar* n/∞^{2}*. In diesem Falle wäre denn also die Wahrscheinlichkeit, mit der wir annehmen müssen, daß sich das Wunder zugetragen habe nach der Formel*

$$\frac{x}{x+y}=\frac{\frac{n}{\infty}}{\frac{n}{\infty}+\frac{n}{m.\infty}}=\frac{m}{m+1}, \qquad (3)$$

welches, wenn m *sehr groß ist, der Einheit so nahe kommen kann, als man nur immer will.“*[111]

3.3 Počet pravděpodobnosti ve *„Wissenschaftslehre“*

V předešlé části příspěvku jsme výklad několikrát doplnili příklady převzatými z § 161 Bolzanova stěžejního díla *„Wissenschaftslehre“*. Toto dílo vyšlo r.1837, tedy později než *„Lehrbuch“*, bylo však dokončeno už před ro-

---

[108] Tj. podle (2).

[109] *„Vypráví-li* A*, že jistý člověk šel po úzké lávce a znenadání spadl do vody;* B *však (říká o onom člověku), že se úmyslně (do vody) vrhl; a věrohodnost* A *= 3/4, vnitřní pravděpodobnost jeho vyprávění = 1/2; věrohodnost* B *naopak = 4/5, vnitřní (věrohodnost) jeho vyprávění je 1/100, pak bude podle § 19 (tj. dle (1)) pravděpodobnost prvního jevu = 3/4, druhého = 4/103. Je tedy to první mnohem věrohodnější než druhé a stupeň pravděpodobnosti, se kterým můžeme předpokládat, že se přihodilo první a ne druhé, je podle § 15 g* [tj. dle (2)] *= 309/325.“*

[110] *„Také zázraky mohou být historicky ověřeny“.*

[111] *„Předpokládejme, že by byla vnitřní nepravděpodobnost jistého zázraku = n/∞; ale nepravděpodobnost jiného předpokladu, který bychom museli učinit, kdyby dějiny lhaly, by byla ještě mnohem větší, např. = n/m.∞ nebo dokonce n/∞^{2}. V takovém případě by tedy byla pravděpodobnost, s níž musíme předpokládat, že se zázrak stal, podle vzorce (3),* $\frac{x}{x+y}=\frac{\frac{n}{\infty}}{\frac{n}{\infty}+\frac{n}{m.\infty}}=\frac{m}{m+1}$*, což se může přiblížit jedničce tak blízko, jak jen chceme, je-li m hodně velké.“*

rokem 1830. Jak vidno z úplného titulu této knihy[112], Bolzano nekoncipoval *„Wissenschaftslehre“* jako spis matematický, ale logický[113], a v moderním vydání, ze kterého zde vycházíme, je každý svazek opatřen úvodem Jana Berga, ve kterém jsou Bolzanovy myšlenky zařazeny do kontextu moderní logiky; z našeho hlediska je zajímavé, že v souvislosti s pojmem pravděpodobnosti je zde Bolzano spojován s Wittgensteinem[114] a Carnapem[115].

V tomto paragrafu uvedeme několik poznámek, které nám na základě *„Wissenschaftslehre“* umožní lépe chápat pravděpodobnostní problematiku v *„Lehrbuchu“* (ostatně takto jsme už využili několika příkladů z § 161 *„Wissenschaftslehre“*); není našim cílem provádět podrobné porovnávání pravděpodobnostní části Bolzanova *„Lehrbuchu“* s pravděpodobnostními úvahami ve *„Wissenschftslehre“*.

Poznámka 1

Jak jsme již řekli, námi studovanému § 15 Bolzanova *„Lehrbuchu“* odpovídá ve *„Wissenschaftslehre“* paragraf 161, který je rozsáhlejší a z hlediska výkladu základních pojmů daleko zevrubnější, ale z matematického hlediska neobsahuje takřka nic navíc proti našemu § 15 v *„Lehrbuchu“*, snad až na několik příkladů (z nichž nejzajímavější jsme uvedli) a tvrzení obsažené v § 161/16, které by v dnešní symbolice mělo tvar

$$P(A \cup B) = 1 - (1 - P(A)).(1 - P(B)).$$

Toto tvrzení Bolzano ilustruje následujícím příkladem:

„Sonach ist z.B. die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand, der in zwei Urnen greift, in deren einer unter 50 Kugeln 40, in deren anderer aber unter 60 Kugeln 45 schwarze sind, eine schwarze hervorholen werde, =

$1 - (1 - 40/50).(1 - 45/60) = 19/20.$“ [116]

[112] Viz paragraf 3.1.

[113] Základní výklad o obsahu „*Wissenschaftslehre*“ lze nalézt např. v [Ber], str.67–89.

[114] Wittgenstein, L.: *Tractatus logico-philosophicus.* Londýn 1922. (Česko-německý překlad Praha, OIKÚMENÉ 1993).

[115] Carnap, R.: *Logical foundations of probability.* Chicago 1950. (Český překlad prvních dvou kapitol viz Carnap, R.: *Problémy jazyka vědy.* Praha, Svoboda 1968, str.166–220). K souvislostem mezi Bolzanem a Carnapem kromě prací uvedených ve *„Wissenschaftslehre“* viz též Starčenko, A. A. - Tjagnibedina, O. S.: *Besonderheiten der wahrscheinlichkeitslogischen Forschungen B. Bolzanos.* In: Bernard Bolzano. Studien und Quellen. Berlin, Akademie - Verlag 1981.

[116] *„Je tedy např. pravděpodobnost, že někdo, kdo sáhne do dvou uren, z nichž v jedné je z 50 koulí 40 černých, ve druhé z 60 koulí 45 černých, vytáhne černou, = 1 – (1 – 40/50)(1 – 45/60) = 19/20.“*

Z matematického hlediska je uvedené Bolzanovo tvrzení jistou analogií věty o sčítání pravděpodobnosti pro nezávislé náhodné jevy. Možná by mohlo být zajímavé zabývat se otázkou, v jaké časové posloupnosti vznikal § 161 ve *„Wissenschaftslehre"* a § 15 v *„Lehrbuchu"*, my se zde ale spokojíme s konstatováním, že matematické obsahy obou těchto textů jsou takřka stejné.

Ani v *„Lehrbuchu"* , ani ve *„Wissenschaftslehre"* Bolzanovi nejde o výklad matematické teorie pravděpodobnosti, ale o důkladné pochopení jejich základních myšlenek. V § 161 ve *„Wissenschaftslehre"* k tomu říká:

„Die Sätze[117] sind nur einige der ersten und leichtesten, die in den Schriften über die Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommen. Ich habe aber geglaubt, den Ausdruck derselben hie und da etwas umständlicher einrichten zu müssen, als man es meistens thut."[118]

Z tohoto důvodu nepovažujeme za nutné porovnávat pravděpodobnostní pasáže v *„Lehrbuchu"* s tehdejšími učebnicemi počtu pravděpodobnosti. Jak už bylo řečeno, Bolzano měl ve své knihovně Lacroixovu učebnici *„Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung"* (Erfurt 1818); v námi studovaném § 161 *„Wissenschaftslehre"* je ze známých matematiků zabývajících se pravděpodobností kromě Lacroixe citován ještě Laplace[119], ale v Bolzanově knihovně (uložené nyní v oddělení rukopisů a starých tisků Národní knihovny v Praze) žádný Laplaceův spis není a je tedy možné, že se jedná o citaci zprostředkovanou.

Uvážíme-li ovšem, že se v této kapitole zabýváme Bolzanovým výkladem počtu pravděpodobnosti v učebnici náboženství napsané před více než sto padesáti lety, pak musíme konstatovat, že Bolzano své potenciální čtenáře nijak nešetřil a uváděl je do počtu pravděpodobnosti skutečně důkladně.

Poznámka 2

Asi hlavní rozdíl mezi dnešním matematickým chápáním pravděpodobnosti a pojetím Bolzanovým spočívá v tom, že dnes v matematice mluvíme o pravděpodobnosti nějakého jevu, zatímco Bolzano mluví o pravděpodobnosti (přesněji: o stupni pravděpodobnosti) nějakého soudu, tvrzení, věty. Je to zřejmé už z citací z § 15 Bolzanova *„Lehrbuchu"*, které jsme uvedli v pře-

---

117 Tj. věty o pravděpodobnosti v tomto paragrafu.

118 *„Tyto věty jsou jen některé z prvních a nejlehčích, které se vyskytují ve spisech o počtu pravděpodobnosti. Domníval jsem se však, že jejich vyjádření je třeba tu a tam uspořádat poněkud zevrubněji, než se to většinou dělá."*

119 *„Gesamtausgabe"* , Bd. 12/1, str. 237.

dešlé části, ale ve *„Wissenschaftslehre“* (která je důkladným spisem logickým, zatímco *„Lehrbuch“* je učebnice náboženství) je tato skutečnost uvedena daleko výrazněji; ocitujme např. z § 317 ve *„Wissenschaftslehre“* :

„Die Wahrscheinlichkeit ist und bleibt immer nur eine Beschaffenheit, die Sätzen überhaupt, gleichviel, ob sie für wahr oder nicht für wahr gehalten, ja auch nur vorgestellt werden, zukommt, ...“[120].

Matematicky vzato, Bolzano důsledně vychází z tzv. klasické definice pravděpodobnosti, která je použitelná pouze při popisu konečných množin náhodných jevů. V jeho době ale už byla známá i tzv. geometrická definice pravděpodobnosti, která umožňuje popis některých nekonečných množin náhodných jevů. První příklad takové „geometrické“ pravděpodobnosti dal již r. 1777 hrabě Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707–1788) ve své známé úloze o náhodném vrhání jehly, vedoucí k experimentálnímu stanovení přibližné hodnoty čísla π. Bylo by zajímavé zjistit, zda Bolzano geometrickou definici pravděpodobnosti znal, ale nepoužil, protože se mu v rámci jeho úvah k ničemu nehodila, nebo zda Bolzano v rámci svých obecných logických koncepcí geometrickou definici pravděpodobnosti odmítal; zdá se totiž málo pravděpodobné, že by velice sečtělý Bolzano tento přístup k pojmu pravděpodobnosti neznal.

Poznámka 3

Jak už bylo řečeno, Bolzano užívá ve svých úvahách větu o násobení pravděpodobnosti, přičemž ale nemluví o nezávislosti jevů. Zdá se, že předpoklad nezávislosti zkoumaných náhodných jevů byl v teorii pravděpodobnosti dlouho považován za intuitivně samozřejmý[121], Bolzano si však zřejmě byl této problematiky vědom, neboť v poznámce č. 3 na konci § 161 kritizuje mechanické používání této věty a uvádí tento příklad:

„Wenn wir z.B. in einem Kasten zwei Kugel befänden, von denen uns nur gesagt wird, daß eine derselben schwarz, eine (wir hören nicht, ob dieselbe) wohlriechend sey: so ist die Wahrscheinlichkeit des Satzes, daß Cajus, der eine hervorzieht, die schwarze ziehen werde, = 1/2, ferner die Wahrscheinlichkeit des Satzes, daß die schwarze Kugel der Urne zugleich die wohlriechende ist, abermals = 1/2. Aus diesen beiden Sätzen, als Vordersätzen eines Syllogismus aber, ergibt sich der Schlußsatz, daß die Kugel, die Cajus hervorziehen wird, wohlriechend sey. Wenn nun die Wahrscheinlichkeit des

---

[120] *„Pravděpodobnost je a zůstane vždy jen vlastností, která všeobecně přísluší větám, lhostejno, zda jsou považovány za pravdivé nebo nepravdivé, nebo zda jsou jen v představách.“*
[121] O vývoji pojmu nezávislosti v teorii pravděpodobnosti viz např. [Da2], str. 307 a násl.

Schlußsatzes immer nur dem Producte aus den Wahrscheinlichkeiten seiner Vordersätze gleich wäre: so müßte die Wahrscheinlichkeit des gegenwärtigen Schlußsatzes = (1/2)(1/2) = 1/4 seyn, während sie doch offebar größer, nämlich = 1/2 ist."[122]

Poznámka 4

V pracích, věnovaných historii teorie pravděpodobnosti, je věnován Bolzanovým pravděpodobnostním úvahám ve *„Wissenschaftslehre"* asi jenom jeden kratičký paragraf v knize [Da1]. Jedná se o paragraf 7.3 na str. 286 a protože je to asi jediná zmínka o Bolzanových pravděpodobnostních úvahách v práci věnované historii teorie pravděpodobnosti, ocitujeme ho zde celý, i když o *„Lehrbuchu"* v něm není ani zmínka:

„In 1837 Bolzano's Wissenschaftslehre *appeared. Here the definition of logical probability proposed by the autor is seen as being in complete agreement with that given by Laplace and Lacroix, and it is, moreover, a definition in which probability is clearly seen as a relation between propositions*[123]*. But despite the importance of this book as a contribution to inductive probability, and of the discussion of confidence, belief, and subjective probability to be found here, there is little that is directly relevant to our present theme. Indeed, the only pertinent point seems to be a brief use of the rule of succession in § 379. Here Bolzano states that if the proposition* A *has occured* α *times in* n *cases, the probability that* A *is present in a further case is* $(\alpha + 1)/(n + 2)$*."*

Uvedený fakt je zajímavý, protože ukazuje, že Bolzano měl dobré znalosti některých problémů řešených v rámci tehdejší teorie pravděpodobnosti, nebudeme ho však podrobněji rozebírat, protože nijak nesouvisí s *„Lehrbuchem"*, který je předmětem našeho zájmu.

---

[122] *„Kdyby se např. v nějaké krabici nalézaly dvě koule, o nichž by nám bylo pouze řečeno, že jedna z nich je černá, jedna (nevíme, zda tatáž) je voňavá: pak pravděpodobnost věty, že Cajus, který jednu vytáhne, vytáhne černou, = 1/2, dále pravděpodobnost věty, že černá koule v urně je současně i voňavá, opět = 1/2. Z obou těchto vět jako premis sylogismu plyne však závěr, že koule, kterou Cajus vytáhne, je voňavá. Kdyby nyní pravděpodobnost závěru vždy byla rovna součinu pravděpodobností premis, musela by být pravděpodobnost uvedeného závěru = (1/2).(1/2) = 1/4, zatímco přece je zřejmě větší, totiž = 1/2."*

[123] Na tomto místě Dale vkládá poznámku: *„For a short discussion of Bolzano's introduction of probability see Nový [1980, pp. 30–31]".* Jedná se o citaci práce L. Nového *„Some remarks on the calculus of probability in the 18th century".* In: Probabilistic thinking, thermodynamics and the interaction of the history and philosophy of science. Pisa Conference Proceedings, eds. J. Hintikaa, D. Gruender, E. Agazzi. Vol. II, Dordrecht, Reidel 1981. Str. 25–32. Rok 1980 v Daleově citaci zřejmě odkazuje na rok pořádání konference, sborník vyšel později.

Stejně tak necháme stranou např. zajímavou poznámku v úvodu k modernímu vydání Bolzanovy *„Wissenschaftslehre“* (svazek 13/2 souborného vydání Bolzanových spisů, str. 24–25), kde J. Berg k Bolzanovým úvahám z § 317 *„Wissenschaftslehre“* píše: *„Bolzanos Kriterium der moralischen Gewißheit eines Satzes an sich beinhalted daher im wesentlichen einen Bayes-Test zwischen diesem Satz an sich und seinem kontradiktorischen Gegenteil.“*; odvolává se přitom na dvě práce, které publikoval I. Niiniluoto: (i) *Bolzano und Bayes-Tests.* In: Studia excellentia. Helsinki 1977, 30–36; (ii) *Truthlikeness.* Dordrecht 1987.

3.4 Motivace „pravděpodobnostní“ části Bolzanova *„Lehrbuchu“*

Zabývat se (byť jen v omezeném rozsahu a na elementární úrovni) počtem pravděpodobnosti v učebnici náboženství je jistě velice neobvyklé a proto může být zajímavé podívat se podrobněji na motivaci, která Bolzana vedla k napsání příslušné části *„Lehrbuchu“*.

Připomeňme nejprve, že Bolzanův výklad počtu pravděpodobnosti v *„Lehrbuchu“* patří do kapitoly nazvané *„Ueber die Natur der historischen Erkenntniß, besonders in Hinsicht auf Wunder“*, kde v úvodu říká (§ 13/4):

„In neuerer Zeit hat man aber auf verschiedene Art gesucht, den historischen Glauben, besonders in Hinsicht auf Wunder, wankend zu machen, und behauptet, daß Erzählungen von Wundern, vornehmlich solchen, die sich vor vielen Jahrhunderten ereignet haben, nie strenge erweislich wären. Dergleichen Behauptungen haben z.B. Joh. Crayg, Dav. Hume, Bolinbroke, J. J. Rousseau, C. F. Bahrdt, Im. Kant u.m.A. vorgetragen.“[124]

Bolzano hodlá použít počtu pravděpodobnosti jako nástroje k obraně víry proti námitkám uvedených badatelů, což znovu upřesňuje v § 15/15:

„Wer einige Kenntnisse in der Buchstaberechnung hat, wird auch noch folgende mathematische Sätze leicht zu verstehen vermögen, die ich nur darum hier beifügen will, weil sie zur gründlichen Widerlegung jener Einwürfe dienen, die selbst von Mathematikern, z.B. von Joh. Crayg, gegen die Möglich-

---

[124] *„V novější době byly však činěny různé pokusy rozkolísat historickou víru, obzvláště s ohledem na zázraky, a tvrdilo se, že vyprávění o zázracích, především o takových, které se odehrály před mnoha staletími, nebyla nikdy přísně dokazatelná. Stejná tvrzení předložili např. Joh. Crayg, Dav. Hume, Bolinbroke, J. J. Rousseau, G. F. Bahrdt, Im. Kant a mnozí další.“*

keit der historischen Beglaubigung eines Wunders mit einem Anscheine von Gelehrsamkeit vorgebracht werden sind." [125]

Zdá se tedy, že hlavním motivem k napsání „pravděpodobnostní" části *„Lehrbuchu"* byla Bolzanova snaha vyrovnat se s názory skotského matematika a teologa Johna Craiga (1660–1731). Podrobnosti o něm lze nalézt např. v [Can], III, str.195[126]; z našeho hlediska je však podstatné, že v r. 1699 publikoval spis *„Theologiae christianae principia mathematica"*[127]; tento nepříliš rozsáhlý spis (68 stránek osmerkového formátu) je v dějinách matematiky známý (viz např. [Can], III, str.56) a ve své době měl zřejmě značný ohlas (je např. citován také v již zmíněné Lacroixově učebnici)[128].

Bolzano měl tento spis ve své knihovně (viz paragraf 3.1.3) a zdá se, že hlavně s tímto spisem polemizuje, neboť Craig svá teologická tvrzení rovněž dokazuje pomocí „pravděpodobnostní" terminologie.

Craigovo tvrzení, které Bolzano kritizuje, spočívá (stručně řečeno) v názoru, že věrohodnost svědectví o jakékoli události klesá jednak s délkou řady svědků, kteří si svědectví předávají (a tato závislost je dle Craiga lineární), dále pak s časem, který od události uplynul (tato závislost je dle Craiga kvadratická), a konečně se vzdáleností od místa události (což je rovněž kvadratická závislost). Je kuriozní, že Craig zná i koeficienty v matematickém vyjádření těchto závislostí, neuvádí však, odkud je získal. Při formulaci svých názorů užívá Craig termínu „historická pravděpodobnost", který definuje následovně:

„Probabilitas est apparentia convenientiae vel disconvenientiae duarum idearum per argumenta, quorum connexio non est constans, aut saltim talis esse non percipitur."

---

[125] *„Kdo má nějaké znalosti v počítání se symboly* [doslova: „s písmeny"], *bude také moci lehce porozumět následujícím matematickým větám, které zde chci uvést jen proto, že slouží k důkladnému vyvrácení oněch námitek, které byly vzneseny se zdáním učenosti proti možnosti historického ověření nějakého zázraku dokonce od matematiků, např. od Joh. Crayga."*

[126] Podle [Can], III, str. 195, Craig od r.1680 studoval v Cambridgi a v r.1685 publikoval v Philosophical Transactions XVI, No.183, p.185 článek *„Methodus figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum quadraturas determinandi"*, ve kterém uvedl do Anglie základní myšlenky Leibnizova diferenciálního počtu.

[127] Název spisu asi ne náhodou připomíná slavný spis Craigova učitele Isaaca Newtona *„Philosophiae naturalis principia mathematica"*.

[128] Z hlediska historie teorie pravděpodobnosti je Craigovi věnován např. jeden odstavec v [Tod], str. 54, skoro dvě stránky v [Ha1], str. 186–187, a na mnoha místech se o něm mluví v knize [Das].

„Probabilitas historica est, quae deducitur ex testimoniis aliorum, qui suam affirmant observationem aut experientiam.“[129]

Z uvedených definic je zřejmé, že s pravděpodobností v dnešním pojetí nemají Craigovy úvahy nic společného. Ubývání počáteční historické pravděpodobnosti počítá Craig jako součet pohybu rovnoměrného (délka řady svědků) a pohybů rovnoměrně zrychlených (čas, vzdálenost), případně více takovýchto pohybů (je-li více „paralelních“ řad svědků); inspirace mechanikou je v této části Craigovy práce očividná.

Dle Craiga tato zákonitost platí i pro Písmo svaté a jeho práce byla možná populární hlavně díky tomu, že podle jeho výpočtů (viz str.55–56 Craigova spisu) by měla v roce 3150 klesnout víra v Písmo sv. na nulu, z čehož Craig odvodil (s odvoláním na evangelium sv. Lukáše, kap.18, v. 8), že nejpozději v tomto roce dojde k Poslednímu soudu.

Svědčí o skutečně hluboké náboženské víře Bolzanově, že považoval za nutné vytáhnout do boje proti tomuto názoru, přičemž jako zbraň volil počet pravděpodobnosti. Protože se však u Bolzana jednalo už o „skutečný“ počet pravděpodobnosti, dostal se tím problém do zcela jiné matematické polohy než v podání Craigově. Bolzano totiž na základě svých vzorců (1) a (2) a souvisejících úvah tvrdí, že věrohodnost Písma sv. může být stejně veliká jako věrohodnost matematických tvrzení. Jeho argumenty ovšem nejsou vždy přesvědčivé; tak např. v již jednou citovaném § 27 říká:

„ ... selbst jene wenigen Gelehrten, die keine Wunder auf fremden Zeugniß annehmen wollten, doch manche andere Begebenheiten, die eine eben so große, wenn nicht noch größere innere Unwahrscheinlichkeit haben, als Wunder, auf bloßes Zeugniß glauben, z.B. daß Zeit zu Zeit Steine vom Himmel herabgefallen seyen, u.dgl..“[130]

Bolzano tedy považuje meteority za jev méně pravděpodobný než biblické zázraky. Většina jeho argumentů má charakter morálně teologický; ocitujme zde na ukázku malou část § 30 *„Ob historische Urtheile, besonders solche,*

---

[129] *„Pravděpodobnost je zjevnost souhlasu nebo nesouhlasu dvou myšlenek prostřednictvím argumentů, jejichž spojení není konstantní nebo aspoň jako takové není chápáno.“*
„Historická pravděpodobnost je taková, která je odvozena ze svědectví jiných, kteří uvádějí své pozorování nebo zkušenost.“

[130] *„ ... dokonce i těch několik učenců, kteří by nechtěli přijmout žádné zázraky na základě cizího svědectví, přece jen věří na základě pouhého svědectví mnoha jiným událostem, které mají právě tak velikou, ne-li ještě větší vnitřní nepravděpodobnost jako zázraky, např. že čas od času padají z nebe kameny.“*

wie sie der Glaube an eine Offenbarung erfordert, eben den Grad der Gewißheit, wie Urtheile a priori, ersteigen können ?"[131], neboť tímto paragrafem uzavírá Bolzano námi studovanou kapitolu *„Lehrbuchu"* a pro matematiky to bude ukázka jiné stránky Bolzanova myšlení:

§ 30 / 6

„Hieraus ergibt sich ferner, daß auch historische Erkentnisse unter gewisssen Umständen einen Grad der Gewißheit ersteigen können, der selbst einem mathematischen Wissen nicht nachsteht. Das es ein Troja einst gegeben habe, ist eine bloß historische Behauptung, die gleichwohl jeder Vernünftige ganz so gewiß finden wird, als etwa den Pythagoräischen Lehrsatz vom Quadrate der Hypotenuse."[132]

§ 30 / 7

„Aber wird auch der Glaube an eine Offenbarung, zumal an eine solche, die vor Jahrtausenden schon gegeben worden ist, und deren Wunder sich auf uralte Zeugnisse stützen, einen solchen Grad der Zuverlässigkeit ersteigen können ?"[133]

§ 30 / 8

„Ein eben so hohen, antworte ich, wo nicht einen noch höheren. Denn was ist dazu nöthig, damit der Glaube an eine solche Offenbarung nach sehr vernünftigen Gründen in uns entstehen könne ? Nichts Anderes, als:
a) eine hinlänglich sichere Kenntniß von dem Inhalte dieser angeblichen Offenbarung verschaffen; dann uns
b) überzeugen, daß diese Lehren das Merkmal sittlicher Zuträglichkeit für uns besitzen; und daß wir es
c) gewissen außerordentlichen Begebenheiten verdanken, mit ihnen bekannt geworden zu seyn."[134]

---

[131] *„Zda historické úsudky, zvlášť takové, které se zakládají na víře ve Zjevení, mohou dosáhnout stejného stupně jistoty, jako úsudky a priori ?*

[132] *„Z toho dále plyne, že také historické poznatky za jistých okolností mohou dosáhnout takového stupně jistoty, který se dokonce vyrovná matematickému vědění. Že kdysi existovala Troja, je pouhým historickým tvrzením, které nicméně každý rozumný shledá stejně jistým, jako asi Pythagorovu větu o čtverci přepony."*

[133] *„Bude však moci také víra ve Zjevení, zvlášť takové, které bylo dáno už před tisíciletími a jehož zázraky se opírají o prastará svědectví, dosáhnout takového stupně věrohodnosti ?"*

[134] *„Stejně vysokého, odpovídám, ne-li ještě většího. Neboť co je nutné k tomu, aby v nás z velmi rozumných důvodů mohla vzniknout víra v takové Zjevení ? Nic jiného, než:*
a) utvořit si dostatečně jistou znalost obsahu tohoto domnělého Zjevení; pak
b) přesvědčit se, že toto učení obsahuje pro nás znamení mravní prospěšnosti; a že
c) jsme s ním byli seznámeni dík jistým mimořádným okolnostem."

V odstavcích § 30/9–11 pak Bolzano vysvětluje, že Zjevení dané nám Písmem svatým má uvedené vlastnosti a) - c) a celou druhou kapitolu druhého dílu knihy uzavírá následujícím odstavcem:

§ 30 / 12
„Und so ersehen wir denn, daß der Glaube an eine göttliche Offenbarung das Eigene hat, daß er, obschon auf historischen Sätzen von ungewisser Art beruhend, doch diese Ungewißheit nicht mit ihnen theilet, weil es sich hier durchgängig nicht darum handelt, wie die Sache an sich sey, sondern nur darum, wie sie uns erscheint. Was sich uns nach gehöriger Prüfung als göttliche Offenbarung darstellt, ist es auch in der Wahrheit.“[135]

3.5 Dvě závěrečné poznámky

3.5.1 Historická poznámka

Máme-li zařadit pravděpodobnostní části Bolzanova *„Lehrbuchu“* do širších souvislostí historie teorie pravděpodobnosti, pak podle našeho názoru tyto Bolzanovy pravděpodobnostní úvahy patří do historické kapitoly nazývané „pravděpodobnost svědectví“ (v anglicky psané literatuře „probability of testimony“). Podíváme-li se do prací Bolzanových současníků, zjistíme, že např ve II. dílu Laplaceovy *„Théorie analytique des probabilités“* je těmto otázkám věnována celá 11. kapitola *„De la probabilité des témoignages“*, stejná problematika se objevuje i v Poissonově knize *„Recherches sur la probabilité des jugements ...“* v bodech 36–40, a kapitola na toto téma (*„Von der Wahrscheinlichkeit der Zeugnisse und der Rechtsentscheidungen“*) nechybí ani v Lacroixově učebnici, kterou měl Bolzano ve své knihovně. Bolzano se tedy v pravděpodobnostní části svého *„Lehrbuchu“* pohybuje v oblasti, která v teorii pravděpodobnosti v jeho době byla živá a aktuální, a Bolzanův přístup k problému není původní; původní je pouze myšlenka použít této matematické teorie v oblasti náboženství. Z historického hlediska je třeba říci, že ani v podrobných historických pracích pojednávajících o tématu „pravděpodobnost svědectví“ (viz např. příslušné části v knize [Das] nebo článek [Zab]) jsme nenalezli sebemenší zmínku o Bolzanovi; zdá se tedy, že pravděpodobnostní části z Bolzanova *„Lehrbuchu“* asi nikdy nikoho a nic neo-

135 *„A tak vidíme, že víře v Boží Zjevení – třebaže spočívá na historických větách nejisté povahy – je vlastní, že nesdílí tuto nejistotu, protože se zde veskrze nejedná o to, jak jsou věci o sobě, ale jen o to, jak se nám jeví. Co se nám po příslušném přezkoušení jeví jako Boží Zjevení, je jím také ve skutečnosti.“*

vlivnily, upadly v zapomnění a byly znovu objeveny až současnými historiky (viz 3.1.4).

3.5.2 Jeden možný současný pohled na problém

Otázka studovaná Bolzanem (tj. jak věrohodné závěry lze činit na základě nejistých výchozích tvrzení) je dodnes zkoumána (např. v rámci teorie expertních systémů) a existuje řada přístupů k této otázce. Tyto přístupy většinou nevycházejí z teorie pravděpodobnosti; zdá se, že jako matematický základ pro řešení této otázku se osvědčují spíš pojmy a metody vycházející z teorie fuzzy množin. Základní přehled problematiky lze nalézt např. v knihách [No, DP]; zde vyjdeme z matematického rozboru problému podaného P. Hájkem v práci [Haj] a podíváme se, jak by do této dnešní teorie zapadaly názory a postupy B. Bolzana.

Výchozí situaci v Bolzanovu § 15/15/d v *„Lehrbuchu"* lze v Hájkově terminologii formulovat takto:

Nechť pravidlo (tj. implikace) A → M má váhu $x \in \langle 0, 1 \rangle$, pravidlo B → M má váhu $y \in \langle 0, 1 \rangle$; jiná pravidla k tvrzení M nevedou. Vzniká otázka, jaké binární operace □ použít k výpočtu váhy tvrzení M z vah x, y.

Hájek formuluje dvě skupiny intuitivně zcela přirozených požadavků, kterým má operace □ vyhovovat:
1.1 $0 \,\square\, 1$ a $1 \,\square\, 0$ není definováno.
1.2 $x \neq 0 \Rightarrow x \,\square\, 1 = 1 \,\square\, x = 1$.
1.3 $x \neq 1 \Rightarrow x \,\square\, 0 = 0 \,\square\, x = 0$.

Hodnoty 0 a 1 budou v dalším nazývány extrémními. Pro všechna neextrémní x, y, z platí:
2.1 $(x \,\square\, y) \,\square\, z = x \,\square\, (y \,\square\, z)$, tj. operace □ je asociativní;
2.2 $x \,\square\, y = y \,\square\, x$, tj. operace □ je komutativní;
2.3 pro každé neextrémní x existuje neutrální prvek Ø takový, že $x \,\square\, Ø = x$;
2.4 pro každý neextrémní prvek x existuje opačný prvek $(-x)$ takový, že $(-x) \,\square\, x = Ø$;
2.5 $(x \leq y) \Rightarrow (x \,\square\, z) \leq (y \,\square\, z)$.

Podíváme-li se nyní z hlediska těchto požadavků na Bolzanem navrženou funkci (1)

$$\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}\ ,$$

pak snadno zjistíme, že tato funkce splňuje všechny uvedené požadavky, přičemž neutrální prvek Ø = 1/2 a opačný prvek (-x) = 1 − x.

Jak uvádí Hájek, operací □ splňující uvedené požadavky existuje mnoho a každá z nich vytvoří na neextremních vahách uspořádanou komutativní grupu. Obvyklými příklady takových grup jsou
(i) množina reálných čísel s operací sčítání, neutrálním prvkem 0 a opačným prvkem (-x) (tj. obvyklá aditivní grupa reálných čísel), nebo
(ii) množina kladných reálných čísel s operací násobení, neutrálním prvkem 1 a opačným prvkem (-x) = 1/x,

a jednou z cest k získávání různých operací sdružování vah je isomorfní zobrazování grupy (i) nebo (ii) na interval (0, 1).

Z našeho hlediska je zajímavé, že Hájek uvádí jako jeden z příkladů možných zobrazení grupy (ii) funkci

$$f(x) = \frac{x}{1+x}\ ,$$

která isomorfně převádí uspořádanou grupu (ii) na uspořádanou grupu na (0, 1) s operací □ danou vztahem (1) (viz výše). Funkce sdružování vah (1) není přímo v Hájkově práci uvedena, je však uvedena v práci [Sil] (citováno podle [DP], str.81 a násl.), který vyšel z jiné formulace problému než Hájek a uvedl funkci (1) jako jedno z možných řešení.

3.6. Závěr

V této kapitole jsme věnovali pozornost málo známému faktu, že B. Bolzano se snažil v učebnici náboženství využít počtu pravděpodobnosti ke zdůvodnění věrohodnosti Písma svatého. Podrobně jsme vyložili příslušné pasáže této učebnice a výklad jsme doplnili příklady z odpovídající části *„Wissenschaftslehre"*. Ukázali jsme, co asi Bolzana vedlo k napsání příslušné části *„Lehrbuchu"* a uvedli jsme i jeden z možných dnešních pohledů na Bolzanem zkoumanou matematickou problematiku; teologické aspekty problému jsme pochopitelně nechali stranou.

Z hlediska celého Bolzanova díla se jedná o záležitost zcela okrajovou, ale z hlediska poznání osobnosti Bernarda Bolzana se nám jeho snaha o využití počtu pravděpodobnosti (tj. matematiky) k obhajobě Písma sv. a zařazení příslušné matematické partie do učebnice náboženství jeví jako charakteristické; pro Bolzana zřejmě matematika, filosofie a teologie představovaly pouze různé cesty k témuž cíli, který zformuloval ve svém životopise ([Bol], str. 27, český překlad M. Pavlíkové str. 39):

„Es währte jetzt kaum einige Wochen, so war ich zu meiner völligen Beruhigung überzeugt geworden, daß wir am Christenthume, und zwar gerade an dem katholischen, eine wahre göttliche Offenbarung und die vollkommenste aller Religionen haben. Ich fühlte so lebhaft die Wohlthätigkeit dieser Ueberzeugung, und wie erstprießlich es wäre, wenn alle gebildete Menschen dieselbe Ansicht von der Sache erhielten, daß ich mir die Verbreitung dieser Begriffe von nun an zu meiner Lebensaufgabe machte.“[136]

Matematické prostředky, kterých zde Bolzano použil, jsou sice elementární, ale zkoumaný problém (tj. posouzení věrohodnosti závěrů tvořených na základě nejistých výchozích tvrzení) jistě elementární není a je i dnes předmětem výzkumů. Z těchto důvodů se domníváme, že pro lepší poznání osobnosti B. Bolzana má cenu zabývat se i touto jeho prací. Uvážíme-li navíc, že u nás v první čtvrtině 19. století teorie pravděpodobnosti pravděpodobně vůbec nebyla pěstována, pak máme další důvod k tomu, abychom se Bolzanovou snahou o aplikaci počtu pravděpodobnosti v teologii zabývali.

Autor této knížky se seznámil s Bolzanovým *„Lehrbuchem“* při vyhledávání starých matematických tisků v knihovně kostela sv. Kříže v Liberci[137]. Sám fakt, že se v této farní knihovně nachází kniha B. Bolzana i přesto, že k jeho názorům měla církevní hierarchie značné výhrady, je svým způsobem zajímavý, neboť ho lze považovat za jistý důkaz toho, že Bolzanův vliv zasahoval nejen do kruhů pražských studentů a intelektuálů, ale i do širších vrstev katolického duchovenstva mimo významná kulturní a náboženská centra[138].

---

[136] *„Trvalo nyní sotva několik týdnů a byl jsem k svému naprostému uklidnění přesvědčen, že máme v křesťanství, a to právě v katolickém křesťanství, pravé Boží Zjevení a nejdokonalejší ze všech náboženství. Cítil jsem tak živě blahodárnost tohoto přesvědčení, i jak by bylo prospěšné, kdyby všichni vzdělaní lidé získali o věci stejné mínění, že jsem učinil od této chvíle rozšiřování těchto názorů svým životním úkolem.“*

[137] Tuto knihovnu založil liberecký děkan A. I. Kopsch v r. 1759.

[138] V této souvislosti autor děkuje libereckému římskokatolickému arciděkanovi P. Františku Opletalovi za laskavost a pochopení, se kterým umožnil autorovi nerušenou práci v knihovně kostela sv. Kříže.