3.

ABÚ KÁMIL:

KNIHA ARITMETICKÝCH KURIOZIT

Překlad úvodu a komentované úlohy

3.1. Úvod

Pokud se historie arabské matematiky týče, je jí věnováno takřka 150 stran v knize [Ju], proto nepovažujeme za nutné zabývat se jí zde podrobněji; připomeneme pouze některá základní historická fakta týkající se kontaktů mezi Araby a franckou říší.

Jak už bylo řečeno na začátku, Alkuin působil na dvoře Karla Velikého, který panoval ve francké říši v letech 768 – 814. V té době Arabové ovládali celé severní pobřeží Afriky a takřka celý Pyrenejský poloostrov, takže byli sousedy Franků. V dalekém Bagdádu panoval v letech 786 – 809 chalífa Hárún ar-Rašíd (známý z *Pohádek tisíc a jedné noci*), který byl v diplomatických kontaktech s Karlem Velikým ([Fo2], str. 278, [Ju], str. 179). Alkuin tedy mohl mít nějaké informace o arabské matematice[83] a proto se nyní budeme věnovat jednomu arabskému spisu obsahujícímu úlohy vedoucí na soustavy diofantovských rovnic.

Tímto spisem je *Kniha aritmetických kuriozit*, jejímž autorem je Abú Kámil[84] žijící přibližně v letech 850 – 930. Uvedený spis tedy nemohl přímo ovlivnit Alkuina, který žil dříve, ale Abú Kámil zahajuje svůj spis konstatováním, že pouze řeší úlohy, které jsou všeobecně známy; je tedy možné, že nějaké poznatky o tomto typu úloh mohly z arabského světa proniknout už dříve i k Alkuinovi.[85]

Abú Kámilův spis představuje vlastně sbírku šesti řešených úloh motivovaných prodejem různých ptáků sloužících zřejmě k jídlu[86]; všechny úlohy vedou na řešení soustavy dvou diofantovských rovnic o třech až šesti neznámých a Abú Kámil vždy uvádí všechna řešení, neuvažuje ale řešení obsahující nulu. Příslušné soustavy pro čtyři z těchto šesti úloh jsou uvedeny v knize [Ju] na str. 231 – 232; jedná se o Abú Kámilovy úlohy č. 1 (má jedno řešení), č. 2 (má šest řešení), č. 5 (nemá celočíselné řešení !) a č. 6 (má 2676 řešení a Abú Kámil na ni zřejmě byl obzvlášť hrdý, protože na ni hned v úvodu svého spisu dvakrát upozorňuje).

V této práci vyjdeme z německého překladu Abú Kámilovy sbírky [AK]. Nejprve uvedeme úplný překlad úvodní části spisu, v další části pak uvedeme překlady všech zadání, nebudeme však překládat Abú Kámilův popis postupu řešení; místo toho vždy v krátkém komentáři v dnešní terminologii shrneme Abú Kámilův postup řešení.

3.2. Překlad úvodní části Abú Kámilova spisu

Ve jménu Boha milosrdného a slitovného !

Hovoří Šudžá ibn Aslam, známý pod jménem Abú Kámil:

---

[83]Mohl by tomu nasvědčovat i výskyt velblouda v zadání úloh č. 39 a 52, M. Folkerts však upozorňuje na to ([Fo1], poznámka 113 na str. 33), že velbloudi (často společně s osly a ovcemi) se vyskytují i v textu Starého zákona, který Alkuin jistě dobře znal, takže z výskytu velblouda v zadání dvou úloh nelze dělat žádné závěry.

[84]Podle [Ju], str. 218 bylo jeho plné jméno Abú Kámil Šudžá ibn Aslam Ibn Muhammad al-Hásib al-Misrí.

[85]Gericke a Folkerts ([GF], str. 294 a 346) upozorňují například na to, že Alkuinova úloha č. 39 má číselně (nikoli zoologicky) stejné zadání a tedy i stejné řešení, jako Abú Kámilova úloha č. 1.

[86]Prodávají se kuřata, kachny, holubi, holubi hřívnáči, skřivani a vrabci.

Znám zvláštní druh početních úloh, které kolují mezi vznešenými i nepatrnými, učenými i neučenými, kterými se kochají a které shledávají novými a krásnými; ptá-li se jeden druhého na jejich řešení, pak je mu odpovídáno nepřesnou odpovědí, jen podle dohadu, ve které nepoznávají ani princip, ani pravidlo. Když se mě vyptávali mnozí urození i nepatrní na úlohy početního umění, odpovídal jsem jim pro každou jednotlivou úlohu jedinou odpovědí, když žádná jiná nebyla; často však byly pro jednu úlohu odpovědi dvě, tři, čtyři a více, často také byla odpověď nemožná. Ano, dostala se ke mně dokonce jedna úloha, kterou jsem vyřešil a pro kterou jsem nalezl velice mnoho řešení; prozkoumal jsem tu věc podrobněji a přišel jsem na 2676 správných řešení. Tu byl můj údiv nad tou věcí veliký a učinil jsem zkušenost, že když jsem o tomto objevu vyprávěl, dívali se na mě s údivem nebo jsem byl považován za neschopného nebo ti, kteří mě neznali, neprávem proti mně pojali podezření. Tu jsem se rozhodl napsat knihu o těchto početních úlohách, abych zacházení s nimi usnadnil a přiblížil. To jsem právě začal a budu objasňovat řešení pro ty úlohy, které mají více řešení, i pro takové, které mají jedno, i pro takové, které vůbec žádné řešení nemají, pomocí neklamného postupu; nakonec pojednám o úloze, o které jsem řekl, že má 2676 řešení. Pak opět zmizí podezření a domněnky a mé výroky budou potvrzeny a pravda vyjde najevo. Kdybych chtěl připojit ještě další z různých mínění o těchto a podobných úlohách, která ke mně dospěla v souvislosti s velkým počtem řešení, stala by se ta věc příliš rozvláčnou.

K tomuto druhu úloh patří, Bůh ti dej sílu pro správné chápání, následující úloha:

Má se koupit kachna za 5 drachem, 20 vrabců za 1 drachmu, kuře za 1 drachnu a podobně dále; je ti dáno 100 drachem nebo více nebo méně a je ti řečeno: Kup si za to celkem 100 ptáků nebo více nebo méně těchto různých druhů; odpověd na tuto a podobné úlohy spočívá pak v tom, že řekneš: kachen tolik, vrabců tolik, kuřat tolik, přirozeně celé, žádné zlomky, tj. bez polovin, třetin, čtvrtin atd. ptáků; a kdyby se u nějakého druhu objevil zlomek, nesmíš ho ani sečíst s nějakým zlomkem jiného druhu, abys dostal celky. Kdyby byl tazatel spokojen s takovým řešení (tj. s řešením se zlomky), dostal by u všech úloh tohoto druhu nesčíslný počet řešení, jejichž počet by byl omezen jen pomíjejícností[87] *odpovídajícího.*

Tázající však smí položit také jinou otázku, ve které se například říká: Je-li ti dáno 100 drachem nebo více nebo méně a je ti řečeno: rozděl je mezi 100 nebo více nebo méně osob, mužů, žen, chlapců, atd., a dej každému muži tolik, každé ženě tolik, každému chlapci tolik atd., kolik je tu mužů, žen, chlapců atd. ? Nebo bude otázka: Kup za to meče a kopí nebo jiné takové věci, které nepřipouštějí dělení, když je znám počet druhů těchto věcí a meč stojí tolik, kopí tolik a luk tolik, kolik kusů připadne na každý druh? Tazatel může také tázanému říci, zda počet mužů má být větší nebo menší než počet žen nebo chlapců atd. Je-li tedy toto vše – pokud je to možné – stanoveno, pustí se tázaný do hledání řešení, přesně je vyzkouší a budou-li mezi nimi taková, která odpovídají úloze, pak tazatel přisvědčí; jsou-li taková, že neodpovídají, pak řekne: není to možné.

[87] Německý překladatel doplňuje: *smrtí.*

3.3. Úlohy z Abú Kámilova spisu

Při zápisu rovnic, na které vedou Abú Kámilovy úlohy, budeme používat ve všech úlohách následujícího značení:

$k =$ počet kachen,
$r =$ počet kuřat,
$v =$ počet vrabců,
$s =$ počet skřivanů,
$h =$ počet holubů,
$b =$ počet holubů hřívnáčů.

Úloha 1.

Je ti dáno sto drachem a máš za ně koupit sto ptáků tří druhů: kachny, kuřata a vrabce; jedna kachna stojí pět drachem, dvacet vrabců jednu drachmu, jedno kuře jednu drachmu.

Komentář[88]

Úloha vede na soustavu rovnic[89]

$$\begin{aligned} k \ + v \ + r &= 100 \ , \\ 5k + \frac{v}{20} + r &= 100 \ . \end{aligned}$$

Abú Kámil odečtením první rovnice od druhé dostává po úpravách vztah

$$v \ = 4k + \frac{4}{19}k \ \ ,$$

z čehož je zřejmé, že počet kachen musí být dělitelný devatenácti. Z toho pak dosazováním zjistí, že úloha má jediné celočíselné kladné řešení $k = 19$, $v = 80$, $r = 1$; nezáporné řešení $r = 100$, $k = v = 0$ Abú Kámil neuvažuje.

Úloha 2.

Je ti dáno sto drachem a je ti řečeno: kup za to sto ptáků tří druhů, kachny, holuby a kuřata, kachnu za dvě drachmy, tři holuby za jednu drachmu a dvě kuřata za jednu drachmu.

Komentář

Úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} k \ + h \ + r &= 100 \ , \\ 2k + \frac{h}{3} + \frac{r}{2} &= 100 \ . \end{aligned}$$

[88] V úvodní části jsme již v souvislosti s touto úlohou upozornili na [Ju], str. 231, a [GF], str. 294 a 346.

[89] V použitém německém překladu [AK] jsou rovnice zapisovány v současné symbolice, je tam však upozorněno na to, že Abú Kámil všechny rovnice a početní operace popisoval slovně.

Abú Kámil odečtením dvojnásobku první rovnice od druhé dostává po úpravách vztah

$$h = 60 - \frac{9}{10}r \ ,$$

z čehož je zřejmé, že počet kuřat musí být dělitelný deseti. Z toho pak postupným dosazováním najde všech šest celočíselných kladných řešení

$$\begin{array}{lcllllll} k & = & 39; & 38; & 37; & 36; & 35; & 34; \\ h & = & 51; & 42; & 33; & 24; & 15; & 6; \\ r & = & 10; & 20; & 30; & 40; & 50; & 60. \end{array}$$

Nezáporné řešení $r = 0$, $h = 60$, $k = 40$ Abú Kámil neuvažuje.

Úloha 3.

Jak budeš počítat, když dostaneš sto drachem a je ti řečeno: kup za to sto ptáků čtyř druhů, totiž kachny, vrabce, holuby a kuřata, kachnu za čtyři drachmy, deset vrabců za jednu drachmu, dva holuby za jednu drachmu a kuře za jednu drachmu?

Komentář

Úloha vede na soustavu rovnic

$$k + v + h + r = 100 \ ,$$
$$4k + \frac{v}{10} + \frac{h}{2} + r = 100 \ .$$

Odečteme-li první rovnici od druhé, dostaneme

$$3k - \frac{9}{10}v - \frac{h}{2} = 0 \ ,$$

z čehož plyne

$$k = \frac{3}{10}v + \frac{h}{6} \ .$$

Řešení úlohy tedy jistě nalezneme, bude-li počet vrabců dělitelný deseti a současně počet holubů dělitelný šesti, z čehož dostává Abú Kámil výchozí řešení $v = 10$, $h = 6$, $k = 4$ a $r = 80$. Dál pokračuje takto: klade postupně $h = 6, 12, \dots , 66$ a při pevném h dosazuje postupně $v = 10, 20, \dots$. Pro dané h a v tak nalézá všechny možné hodnoty k (které se postupně zvyšují) a r (které postupně klesají); dosazování končí ve chvíli, kdy by počet kuřat $r \leq 0$. Tímto postupem najde 44 řešení, při kterých jsou počty všech ptáků kladné.

Řešení úlohy však také nalezneme, bude-li počet vrabců dělitelný pěti a současně počet holubů dělitelný třemi, z čehož dostává Abú Kámil výchozí řešení $v = 5$, $h = 3$, $k = 2$ a $r = 90$. Analogickým postupem jako v předešlém případě najde 54 řešení, při kterých jsou počty všech ptáků kladné, takže celkem dospívá k 98 řešením dané úlohy[90].

[90] Přesně vzato, Abú Kámil dvě řešení přehlédl; podle něj má úloha 96 řešení, ale v [AK] je na tuto chybu upozorněno.

ÚLOHA 4.

Bylo ti dáno sto drachem a bylo ti řečeno: kup za to sto ptáků čtyř druhů, kachny, holuby, skřivany, kuřata, kachnu za dvě drachmy, dva holuby za jednu drachmu, tři skřivany za jednu drachmu a kuře za jednu drachmu.

KOMENTÁŘ

Úloha vede na soustavu rovnic

$$k + h + s + r = 100 ,$$
$$2k + \frac{h}{2} + \frac{s}{3} + r = 100 .$$

Odečteme-li první rovnici od druhé, dostaneme po úpravě

$$k = \frac{h}{2} + \frac{2}{3}s .$$

Musí tedy být počet holubů dělitelný dvěma a počet skřivanů dělitelný třemi. Dosazujeme-li za počet skřivanů postupně $s = 3, 6, \ldots, 57$ ($s = 60$ už není možné), pak dostaneme postupně 19 množin řešení obsahujících $31 + 29 + 28 + 26 + 24 + 23 + 21 + 19 + 18 + 16 + 14 + 13 + 11 + 9 + 8 + 6 + 4 + 3 + 1 = 304$ řešení.

ÚLOHA 5.

Je ti dáno sto drachem a je ti řečeno: kup za to sto ptáků tří druhů, kachny, kuřata, vrabce, kachnu za tři drachmy, tři kuřata za jednu drachmu, dvacet vrabců za jednu drachmu.

KOMENTÁŘ

Úloha vede na soustavu rovnic

$$k + v + r = 100 ,$$
$$3k + \frac{v}{20} + \frac{r}{3} = 100 .$$

Vynásobíme-li druhou rovnici třemi a odečteme-li od ní rovnici první, dostaneme

$$8k - \frac{17}{20}v = 200 ,$$

z čehož plyne

$$k = 25 + \frac{17}{160}v .$$

Počet vrabců tedy musí být dělitelný sto šedesáti, což je však spor (všech ptáků dohromady má být 100); úloha tedy nemá řešení.

Úloha 6.

Je ti dáno sto drachem a je ti řečeno: kup za to sto ptáků pěti druhů, kachny, holuby, holuby hřivnáče, skřivany a kuřata, kachnu za dvě drachmy, dva holuby za jednu drachmu, tři holuby hřivnáče za jednu drachmu, čtyři skřivany za jednu drachmu, jedno kuře za jednu drachmu.

Komentář

Úloha vede na soustavu rovnic

$$k + h + b + s + r = 100 \,,$$
$$2k + \frac{h}{2} + \frac{b}{3} + \frac{s}{4} + r = 100 \,.$$

Odečteme-li první rovnici od druhé, dostaneme po úpravě

$$k = \frac{h}{2} + \frac{2}{3}b + \frac{3}{4}s \,.$$

Musí tedy být počet holubů hřívnáčů dělitelný třemi a součet

$$\frac{h}{2} + \frac{3}{4}s$$

musí být celé číslo. To může být splněno buď tak, že h je sudé číslo a s je dělitelné čtyřmi, nebo tak, že h je liché číslo a s je sudé číslo, které není dělitelné čtyřmi; všechny tyto možnosti je třeba „přebrat“. Abú Kámil ukazuje na několika případech, jaký postup je vhodné při tomto „přebírání“ zvolit a končí konstatováním, že úloha má 2676 řešení[91].

3.4. Historická poznámka

Považujeme za vhodné připojit na závěr výkladu o Abú Kámilově sbírce několik základních historických faktů týkajících se situace, ve které se rozvíjela arabská (možná správněji: islámská; viz k tomu [Ju], str. 186) matematika v časovém období, kterým se zabýváme[92].

Sjednocení arabských kmenů a vznik arabské říše je neoddělitelně spojeno se vznikem islámu a to je opět neoddělitelně spojeno se jménem Muhammadovým (570 – 632). Po Muhammadově smrti došlo k rychlému šíření islámu a růstu arabské říše; v r. 642 byla dobyta Alexandrie, v r. 711 překročila arabská vojska Gibraltarskou úžinu a rychle ovládla takřka celý Pyrenejský poloostrov. Při pokusech pronikat dále na sever se Arabové střetli s franckou říší a v r. 732 byli v bitvě u Poitiers poraženi franckými vojsky vedenými majordomem Karlem Martellem; tato porážka znamenala konec jejich výpravám za Pyreneje.

[91] Abú Kámilův výsledek je potvrzen v [AK] i v [Ju]; autor této práce se přiznává, že výsledek nepřepočítával.

[92] Základní všeobecný přehled je uveden v knize [Ju], podrobnější údaje lze nalézt např. v knížce [HP].

Arabská říše se však rozšiřovala i dalšími směry. Ve směru na východ připojili ke své říši celé území až k čínské hranici, ve směru na sever se hranicí jejich území stal Kavkaz, nedokázali však proniknout do Malé Asie a porazit Byzanc. Hlavou arabské říše byl chalífa, sídlící nejdříve v Damašku, od r. 762 v Bagdádu; Bagdád se rychle stal významným vědeckým střediskem arabského světa. Již v 8. století se však původně jednotná centralizovaná arabská říše začíná rozpadat[93] a v průběhu 10. století arabská říše jako jednotný celek zaniká.

Jak už bylo řečeno, vývoj arabské matematiky v období od 8. do 15. století je podrobně popsán v knize [Ju]. Nepovažujeme proto za nutné věnovat se zde těmto otázkám, rádi bychom však uvedli nějaké podrobnější informace o autorovi námi studovaného spisu *Kniha aritmetických kuriozit*. Bohužel ani v Juškevičově knize není o Abú Kámilově životě vůbec nic. Nalezneme zde pouze (str. 218), že jeho plné jméno bylo Abú Kámil Šudžá ibn Aslam ibn Muhammad al-Hásib al-Misrí, žil přibližně v letech 850 – 930 a okolo r. 900 pracoval v Egyptě ([Ju], str. 184). Juškevič věnuje velkou pozornost Abú Kámilovu spisu o algebře, který byl asi jeho nejdůležitější prací.

* * * * *

[93]Např. na Pyrenejském poloostrově vzniká již v r. 756 cordobský emírát, od r. 929 samostatný chalífát.