Pravda, naopak, niektoré otázky týkajúce sa d. rovníc vyšších rádov možno riešiť jednoduchšie priamo než v rámci teórie zmienených systémov.

12. Základné vlastnosti systémov explicitných d. rovníc 1. rádu

66. Smerové pole

Budeme sa najskôr zaoberať najjednoduchšími vlastnosťami systémov explicitných d. rovníc 1. rádu.

Uvažujme o systéme explicitných d. rovníc 1. rádu:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n)
\end{aligned}
\qquad (A)
$$

kde $f_1, \dots, f_n$ značia dané funkcie $n + 1$ premenných $x, y_1, \dots, y_n$, definované v nejakom obore ω. ω, je tzv. definičný obor systému (1). O funkciách $f_1, \dots, f_n$ a o obore ω neurobíme zatiaľ žiadne predpoklady.

Funkcie $f_1, \dots, f_n$ priraďujú ku každému bodu $(x, y_1, \dots, y_n) \in \omega$ n čísel: $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$.

Usporiadaná skupina $2n + 1$ čísel $(x, y_1, \dots, y_n, f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n))$ sa nazýva lineárny element systému (A) v bode $(x, y_1, \dots, y_n)$; jednotlivé čísla spomenutej usporiadanej skupiny sú súradnice lineárneho elementu. Množina všetkých lineárnych elementov v jednotlivých bodoch oboru ω. je tzv. smerové pole systému (A). Množina bodov $(x, y_1, \dots, y_n) \in \omega$, v ktorých každá funkcia f_α $(\alpha = 1, \dots, n)$ má tú istú hodnotu C_α nazýva sa izoklína systému (A). Rovnice každej izoklíny sa teda môžu napísať v tvare:

$$f_1(x, y_1, \dots, y_n) = C_1, \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n) = C_n$$

kde $C_1, \dots, C_n$ značia nejaké konštanty. V bodoch tejže izoklíny majú všetky lineárne elementy tú istú $(n + 2), \dots, (2n + 1)$-tú súradnicu.

Ľubovoľný lineárny element $(x, y_1, \dots, y_n, f_1, \dots, f_n)$ si môžeme znázorniť malou úsečkou v $n + 1$ - rozmernom priestore vzhľadom na pravouhlý súradnicový systém. Táto úsečka prechádza bodom $(x, y_1, \dots, y_n)$, jej priemet do roviny $[x, y_\alpha]$, $\alpha = 1, \dots, n$, zviera s kladnou polosou x uhol, ktorého tangens je $f_\alpha(x, y_1, \dots, y_n)$. Takú úsečku si môžeme ľahko predstaviť, keď $n = 2$, t.j. keď ide o trojrozmerný priestor. Ak $n > 2$, máme do činenia s priestormi o vyššom počte rozmerov a bezprostrednú predstavu o príslušných geometrických útvaroch nemáme; matematik, ktorý je zbehlý vo viacrozmernej geometrii, spojuje však aj v tomto prípade s predchádzajúcou úvahou určité predstavy, ktoré mu umožňujú udať názorne lineárne elementy a iné pojmy s nimi súvisiace.

67. Význam smerového poľa

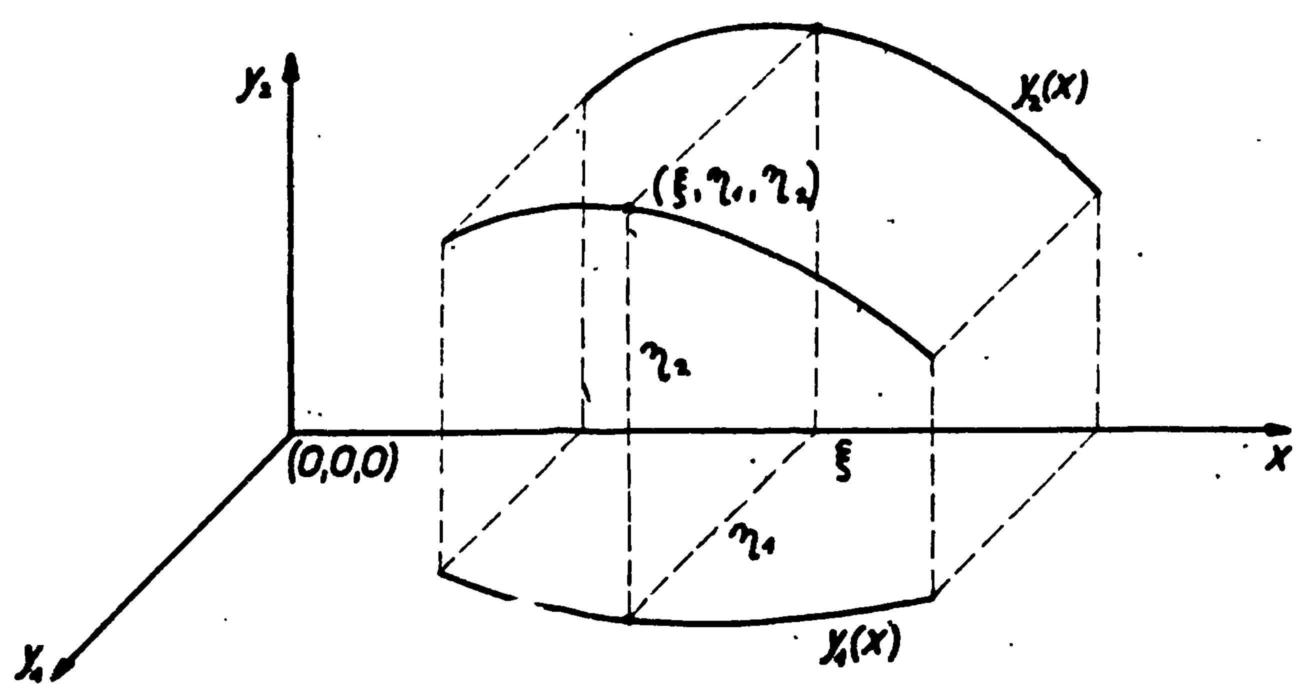
Podľa toho, čo sme povedali v ods. 63, rozumieme riešením alebo integrálom systému (A) každý systém n funkcií $y_1, \dots, y_n$ nezávisle premennej x, definovaných v tomže intervale j, ktoré systému (A) vyhovujú. Krivka v n + 1- rozmernom priestore, ktorá je určená ľubovoľným riešením systému A, nazýva sa <u>integrálnou (int.) krivkou systému</u>. (A).

Napr. uvažujme o systéme (A) skladajúcom sa z dvoch rovníc

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \qquad \text{(A)}$$

Predpokladajme, že existuje nejaké jeho riešenie $y_1(x)$, $y_2(x)$; funkcie y_1, y_2 sú teda definované v určitom intervale j. V danom čísle $\xi \in j$ majú určité hodnoty η_1, η_2. Príslušná int. krivka leží v trojrozmernom priestore a prechádza bodom (ξ, η_1, η_2); funkcie y_1, y_2 značia jeho priemety do súradných rovín $[x, y_1]$ a $[x, y_2]$. Situácia je znázornená na tomto obrázku



Obr. 20

Kvôli väčšej názornosti uskutočníme nasledujúcu úvahu pre uvedený systém (A) skladajúci sa len z dvoch rovníc.

Podľa definície riešení y_1, y_2 systému (A) majú funkcie y_1, y_2 v každom čísle $x \in j$ derivácie $y_1'(x)$, $y_2'(x)$, ktorých hodnoty sú $f_1[x, y_1(x), y_2(x)]$, $f_2[x, y_1(x), y_2(x)]$. To môžeme vyjadriť tak, že int. krivka y_1, y_2 leží v obore ω a má v každom svojom bode dotyčnicu v smere príslušného lineárneho elementu. Inými slovami, v každom svojom bode sa dotýka príslušného lineárneho elementu, lebo sleduje smerové pole. Vidíme najmä, že všetky int. krivky systému (A), ktoré pretínajú tú istú izoklínu, pretínajú ju v rovnakom smere.

Táto názorná úvaha vedie k jednoduchej metóde slúžiacej k vyhľadaniu kriviek v trojrozmernom priestore, ktoré by mohli mať približne ten istý priebeh ako int. krivky systému (A). Princíp metódy je ten, že za hľadané funkcie volíme polygóny skladajúce sa z malých úsečiek, ktoré sledujú smerové pole. Metódu vyložíme v geometrickej reči.

Nech $(x_0, y_{10}, y_{20}) \in \omega$ je ľubovoľný bod a hľadajme polygón, ktorý by mohol aproximovať riešenie systému (A), prechádzajúce týmto bodom. Najprv zvolíme malú úsečku, ktorá vychádza z bodu (x_0, y_{10}, y_{20}), má smer lineárneho elementu v tomto bode a koncový bod (x_1, y_{11}, y_{21}) vpravo od bodu $(x_0, y_{10}; y_{20})$, tajže $x_1 > x_0$; smernice priemetu tejto úsečky do rovín $[x, y_1]$, $[x, y_2]$ sú teda: $f_1(x_0, y_{10}, y_{20})$, $f_2(x_0, y_{10}, y_{20})$. V prípade $(x_1, y_{11}, y_{21}) \in \omega$ zvolíme opäť malú úsečku, ktorá vychádza z bodu (x_1, y_{11}, y_{21}), má smer lineárneho elementu v tomto bode a koncový bod (x_2, y_{12}, y_{22}) vpravo od (x_1, y_{11}, y_{21}), takže $x_2 > x_1$; smernice ich priemetov sú teda $f_1(x_1, y_{11}, y_{21})$, $f_2(x_1, y_{11}, y_{21})$. V prípade $(x_2, y_{12}, y_{22}) \in \omega$ môžeme tento postup opakovať a eventuálne i niekoľkokrát. Tým dostaneme istý polygón (x_0, y_{10}, y_{20}), (x_1, y_{11}, y_{21}), (x_2, y_{12}, y_{22}), ..., ktorý vychádza z bodu (x_0, y_{10}, y_{20}) a sleduje smerové pole. Je to tzv. <u>Eulerov polygón systému (A) vychádzajúci z bodu</u> (x_0, y_{10}, y_{20}). Zdá sa prirodzené usúdiť, že má približne ten istý priebeh ako niektoré riešenie systému (A), vychádzajúce z bodu (x_0, y_{10}, y_{20}), pokiaľ samozrejme riešenie tohto systému existuje. Všimnime si, že polygón závisí od zvolených dĺžok jeho strán a je jednoznačne určený postupnosťou $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$. Môžeme sa domnievať, že vystihuje riešenie tým presnejšie, čím kratšie zvolíme jeho strany. Podobne dostaneme Eulerov polygón, ktorý do bodu (x_0, y_{10}, y_{20}) vchádza. Jeho konštrukcia sa líši od predchádzajúcej len tým, že sa koncové body úsečiek zvolia vždy vľavo od začiatočných. Tento polygón pravdepodobne aproximuje niektoré riešenie systému (A) a opäť usudzujeme, že tým presnejšie, čím sú jeho strany kratšie. Obidva polygóny, pokiaľ existujú, tvoria dohromady Eulerov polygón systému (A) prechádzajúci bodom (x_0, y_{10}, y_{20}), ktorý naznačuje isté riešenie systému (A) prechádzajúce bodom (x_0, y_{10}, y_{20}).

Táto jednoduchá metóda na určenie približného riešenia daného systému (A) má cenu pre teóriu, lebo možno na jej základe vypracovať dôkaz existencie riešení systému (A) (kap. 13) avšak tiež pre numerické výpočty približných hodnôt riešenia prechádzajúceho daným bodom.

Poznamenajme, že predchádzajúca úvaha, ktorú sme kvôli názornosti urobili pre systém (A) skladajúci sa len z dvoch rovníc, dá sa bezprostredne rozšíriť na všeobecné systémy (A).

68. Vektorové označenie

Ak porovnáme úvahy uvedené v predchádzajúcich ods. 66, 67 s úvahami o d. rovnici $y' = f(x, y)$ (a), ktoré sme uviedli v ods. 2, 3, vidíme, že sú úplne podobné. Táto obdoba teórie systémov explicitných d. rovníc 1. rádu s teóriou d. rovnice (a) je omnoho hlbšia a je zvlášť výrazná pri maticovom a vektorovom zápise vzorcov týkajúcich sa zmienených systémov. Pri tomto zápise sa mnohé vzorce pre systémy explicitných d. rovníc 1. rádu formálne nelíšia od príslušných vzorcov z teórie d. rovnice (a), hoci ich obsah je všeobecnejší a zahrňuje vzorce rovnice (a) ako najjednoduchšie prípady.

Matica majúca m ($\geqq 1$) riadkov a n($\geqq 1$) stĺpcov sa nazýva matica typu m/n. V prípade $m = n$ sa matica nazýva štvorcová matica rádu n. V teórii matíc nazývame čísla skaláry; ak ide o premenné veličiny, hovoríme o skalárnych premenných. Štvorcové matice rádu 1 považujeme za skaláry.

Matice označujeme spravidla veľkými latinskými písmenami, napr. $A = (a_{ik})$. Symbol pre maticu združenú s $A = (a_{ik})$, t.j. pre maticu, v ktorej sú vzhľadom na A vymenené riadky a stĺpce, je A^*, takže $A^* = (a_{ki})$.

Základné pojmy o maticiach a pravidlá pre počítanie s maticami považujeme za známe. Jednotkovou (nulovou) maticou ľubovoľného rádu, t.j. maticou, ktorej prvky v hlavnej diagonále sa rovnajú 1 a ostatné (ktorej všetky prvky) sú nuly, označujeme symbolom E (O).

Nerovnosť medzi maticami toho istého typu, napr. $A \leqq B$, je ekvivalentná so systémom príslušných nerovností pre rovnoľahlé prvky obidvoch matíc: $a_{ik} \leqq b_{ik}$.

Vektory v n ($\geqq 1$) rozmernom priestore rozoznávame stĺpcové a riadkové a stotožňujeme ich s maticami typu $n/1$ alebo $1/n$. Vektory označujeme malými latinskými písmenami (niekedy tučne); napr.:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad y^* = (y_1, \ldots, y_n)$$

Jednotlivé prvky príslušnej matice nazývame zložky vektora. Pre vektory platia zrejme pojmy a výsledky z teórie matíc. Napr. pri už predtým uvedenom označení zložiek vektorov $\underline{y}$, $\underline{y}^*$ máme: $y^* y = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$, $y\, y^* = (y_i\, y_k)$, takže súčin $y^* y$ vektora y^* s vektorom y je skalár a súčin vektora y s vektorom y^* je symetrická štvorcová matica rádu n. Vektor, ktorého všetky zložky sa rovnajú 1. označujeme: 1; vektor, ktorého všetky zložky sa rovnajú 0, označujeme: 0

Pripomenme, že ľubovoľnú maticu $A = (a_{ik})$ typu m/n môžeme zapísať symbolom $(a_1, \ldots a_n)$ alebo $\begin{matrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_m^* \end{matrix}$, pričom a_k značí stlpcový vektor v m-rozmernom priestore o zložkách $a_{1k}, \ldots, a_{mk}$ a a_i^* značí riadkový vektor v n-rozmernom priestore o zložkách $a_{i1}, \ldots, a_{in}$.

Ľubovoľný vektor $a(x; y_1, \dots, y_n)$ v $m(\geq 1)$- rozmernom priestore, ktorého zložky $a_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, a_m(x, y_1, \dots y_n)'$ sú funkcie definované v nejakom $(n+1)$- rozmernom obore $c \times \sigma$, pričom $x \in c$ a $(y_1, \dots, y_n) \in \sigma$ predstavuje vektor závislý od útvaru skladajúceho sa z čísla x a zo stĺpcového, alebo riadkového vektora y, alebo y^* o zložkách $y_1, \dots, y_n$. Označujeme ho $a(x,y)$; vektor k nemu združený zapisujeme $a^*(x,y^*)$. Ak všetky zložky nejakého vektora majú určitú vlastnosť, hovoríme, že vektor má tú vlastnosť. V tomto zmysle hovoríme o vektoroch kladných, ohraničených, spojitých atď. Ak sú všetky zložky napr. vektora $a(x,y)$ kladné, píšeme $a(x, y) > 0$ a pod. Ak zložky premenného vektora y môžu nadobudnúť všetky hodnoty, píšeme $-\infty < y < \infty$.

Predpokladajme, že zložky a_i napr. stĺpcového vektora a majú v niektorých bodoch oboru $j \times \sigma$ prvé parciálne derivácie a'_{ix}, a'_{iy_k} podľa premenných x, y_k $(k = 1, \dots, n)$.

Potom pre vektor $a(x, y)$ definujeme prvú parciálnu deriváciu $a'_x(x, y)$ podľa premennej x v zmysle vzorca:

$$a'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial x} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial a_m(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial x} \end{pmatrix}$$

a parciálnu deriváciu $a'_y(x, y)$ podľa vektora y v zmysle vzorca:

$$a'_y(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial a_1(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_1}, & \dots, & \dfrac{\partial a_1(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial a_m(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_1} & & \dfrac{\partial a_m(x, y_1, \dots y_n)}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že parciálna derivácia vektora $a(x, y)$ podľa premennej x je opäť vektor v m- rozmernom priestore, naproti tomu parciálna derivácia podľa vektora y je matica typu m/n. V prípade $m = 1$, t.j. keď $a(x, y)$ je skalár, predstavuje $a_y(x, y)$ riadkový vektor v n-rozmernom priestore.

Pri vektorovom označení môžeme systém explicitných d. rovníc 1. rádu

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \qquad \text{(A)}$$

zapísať v tvare

$$y' = f(x, y)$$

teda formálne rovnako ako v prípade jedinej d. rovnice (a), samozrejme teraz má tento vzorec širší obsah: y značí vektor v n-rozmernom priestore o zložkách $y_1, \dots y_n$ a $f(x, y)$ vektor o zložkách $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$, ktoré sú funkciami premennej x a vektora y.

Všimnime si, že iný zápis už uvedeného systému je daný vzorcom

$$y^{*\prime} = f^{*}(x, y^{*})$$

69. Prehľad o základoch teórie systémov explicitných d. rovníc

Vzhľadom na to, že teória systémov explicitných d. rovníc 1. rádu je obdobná teórii d. rovnice (a), ktorú sme v predchádzajúcich úvahách vyvinuli, obmedzíme sa v prípade týchto systémov na stručný popis hlavných vecí, prenechávajúc čitateľovi, aby si podrobnosti premyslel a doplnil s prihliadnutím k predchádzajúcim úvahám o d. rovnici (a).

Nech je daný systém explicitných d. rovníc 1. rádu

$$y' = f(x, y) \qquad \text{(A)}$$

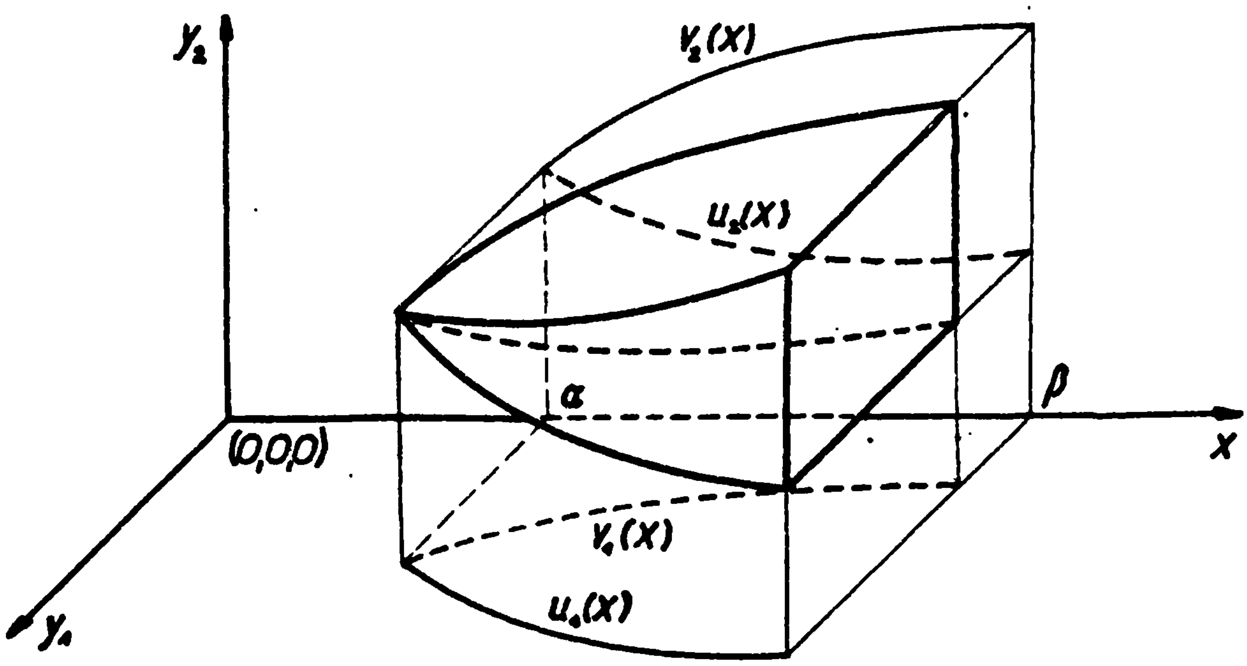
x značí skalárnu premennú v nejakej číselnej množine c, y premenný vektor o n zložkách v nejakom obore σ a f vektor premenných x, y definovaný v obore $\omega = c \times \sigma$. Kvôli stručnosti obvykle hovoríme o d. rovnici (A), hoci táto rovnica vyjadruje systém d. rovníc. ω je <u>definičný obor d. rovnice (A)</u> stručne: <u>obor d. rovnice (A)</u>.

<u>Riešením</u> alebo <u>integrálom d. rovnice (A)</u> rozumieme každý vektor $y(x)$, ktorý jej vyhovuje. Pritom sa v ďalších úvahách vždy obmedzujeme na riešenia, ktoré sú definované v nejakom intervale j, teda riešenia, ktorých zložky sú definované v intervale j.

Obory ω d. rovnice (A) sú spravidla $(n + 1)$- rozmerné oblasti, $(n + 1)$- rozmerné normálne obory, najmä $(n + 1)$- rozmerné intervaly a $(n +1)$- rozmerné klinové obory. Každý $(n + 1)$- rozmerný kompaktný normálny obor je vyjadrený nerovnosťami

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad u(x) \leqq y \leqq v(x)$$

$\alpha < \beta$ sú skaláry a $u(x)$, $v(x)$ sú spojité vektory o n zložkách; pritom je $u(x) < v(x)$ s výnimkou v číslach $x = \alpha$, $x = \beta$, v ktorých pripúšťame rovnosť. Vidíme, že keď napr. $n = 2$ je každý kompaktný normálny obor prienikom dvoch valcov, z ktorých jeden má základňu v rovine $[x, y_1]$ danú nerovnosťami: $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $u_1(x) \leqq y_1 \leqq v_1(x)$ a je rovnobežný s osou y_2 a druhý má základňu v rovine $[x, y_2]$ danú nerovnosťami $\alpha \leq x \leq \beta$, $u_2(x) \leq y_2 \leq v_2(x)$ a je rovnobežný s osou y_1. $u_1(x)$, $u_2(x)$ značia zložky vektora $u(x)$ a podobne $v_1(x)$, $v_2(x)$ zložky vektora $v(x)$. Situácia je znázornená na tomto obrázku:



Obr. 21

Zvláštnym prípadom $(n + 1)$-rozmerného normálmeho oboru je $(n + 1)$-rozmerný kompaktný interval o strede (ξ, η) vyjadrený nerovnosťami

$$\xi - a \leq x \leq \xi + a, \quad \eta - b \leq y \leq \eta + b$$

pričom ξ, a sú skaláry a η, b vektory o n zložkách; $a > 0$, $b > 0$.

Do teórie d. rovnice (A) môžeme bezprostredne preniesť pojmy, metódy a výsledky z ods. 6 - 10. Naproti tomu úvahy týkajúce sa rozšírenia na d. rovnicu (A) pojmov a vlastností dolných a horných funkcií, ktorými sme sa zaoberali v ods. 11, je zložitejšie.

Ako ukážku rozšírenia úvah v d. rovnici (a) na d. rovnicu (A) predvedieme podrobne rozšírenie teórie transformácie premenných, ktorú sme vyvinuli v ods. 12. Čitateľ nech si všimne, že rozšírenú teóriu možno formulovať takmer doslovne ako v pôvodnom prípade, avšak odporúčame, aby si pozorne premyslel každý krok v tejto novej situácii.

Uvažujme o d. rovnici

$$y' = f(x, y) \qquad (A)$$

pričom o vektore f a jeho definičnom obore ω nerobíme žiadne predpoklady.

Predpokladáme však, že bodová množina ω je proste zobrazená bodove na tú istú množinu Ω. Body $(X, Y) \in \Omega$ nech súvisia s bodmi $(x, y) \in \omega$ vzorcami:

$$X = \varphi(x, y), \qquad x = \Phi(X, Y)$$
$$Y = \psi(x, y), \qquad y = \Psi(X, Y) \tag{1}$$

ktoré definujú zmienené prosté zobrazenie množiny Ω na ω a inverzné zobrazenie množiny Ω na ω. Pripomeňme, že x, X φ, Φ sú skaláry, avšak y, Y, ψ, Ψ vektory o n zložkách.

Predpokladajme, že v obore ω existujú parciálne derivácie φ'_x, φ'_y, ψ_x, ψ_y a podobne v obore Ω parciálne derivácie Φ'_x, Φ'_y, Ψ'_x, Ψ'_y (v zmysle definícií v ods. 68). Okrem toho predpokladajme, že hodnoty (skalárnej) funkcie

$$\varphi'_x + \varphi'_y f \tag{2}$$

v obore ω sú buď vždy kladné alebo vždy záporné.

Uvažujme o vektore F, ktorý je definovaný v obore Ω vzorcom

$$F(X, Y) = \frac{\psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y)\, f(x, y)}{\varphi'_x(x, y) + \varphi'_y(x, y)\, f(x, y)}$$

pričom $(x, y) \in \omega$, $(X, Y) \in \Omega$ značia dva odpovedajúce si body.

Zo vzorcov (1) vyplýva, že hodnoty predtým spomenutých parciálnych derivácií v každých dvoch odpovedajúcich si bodoch spĺňajú rovnice:

$$\begin{aligned}
&\varphi'_x\, \Phi'_X + \varphi'_y\, \Psi'_X = 1, \qquad && \Phi'_X\, \varphi'_x + \Phi'_Y\, \psi'_x = 1\\
&\varphi'_x\, \Phi'_Y + \varphi'_y\, \Psi'_Y = 0, && \Phi'_X\, \varphi'_y + \Phi'_Y\, \psi'_y = 0\\
&\psi'_x\, \Phi'_X + \psi'_y\, \Psi'_X = 0, && \Psi'_X\, \varphi'_x + \Psi'_Y\, \psi'_x = 0\\
&\psi'_x\, \Phi'_Y + \psi'_y\, \Psi'_Y = 1, && \Psi'_X\, \varphi'_y + \Psi'_Y\, \psi'_y = 1
\end{aligned} \tag{3}$$

Ďalej ľahko vidíme, že hodnoty (skalárnej) funkcie

$$\Phi'_X + \Phi'_Y F$$

v obore Ω sú tiež vždy buď kladné, alebo vždy záporné a že platí vzťah

$$f(x, y) = \frac{\Psi'_X(X, Y) + \Psi'_Y(X, Y)\, F(X, Y)}{\Phi'_X(X, Y) + \Phi'_Y(X, Y)\, F(X, Y)}$$

Nech y značí ľubovoľné riešenie d. rovnice (A) definované v nejakom intervale j. Potom funkcia $\varphi[x, y(x)]$ má v každom čísle $x \in j$ deriváciu a tá je buď vždy kladná, alebo vždy záporná, lebo to isté platí o funkcii (2) v obore ω. Z toho usudzujeme, že funkcia $\varphi[x, y(x)]$ je v intervale j spojitá a v ňom rastie alebo klesá; jej hodnoty teda tvoria interval J, v ktorom existuje funkcia inverzná.

Definujeme v intervale J vektor Y takto:

$$X = \varphi\big(x, y(x)\big), \quad Y(X) = \psi\big(x, y(x)\big)$$

Potom obidve krivky $\big(x, y(\bar{x})\big), x \in j$ a $\big(X, Y(X)\big)$, $X \in J$ sú na seba zobrazené práve transformáciou (1); súradnice dvoch si odpovedajúcich bodov spolu súvisia podľa práve napísaných vzorcov a samozrejme súčasne spĺňajú rovnice

$$x = \Phi\big(X, Y(X)\big), \quad y(x) = \Psi\big(X, Y(X)\big)$$

Vektor $Y(X)$ má v každom čísle $X \in J$ deriváciu, ktorá je daná vzorcom

$$Y'(X) = \frac{\psi'_x\big(x, y(x)\big) + \psi'_y\big(x, y(x)\big)\, f\big(x, y(x)\big)}{\varphi'_x\big(x, y(x)\big) + \varphi'_y\big(x, y(x)\big)\, f\big(x, y(x)\big)} = F\big(X, Y(X)\big)$$

v ktorom $\big(x, y(x)\big)$ a $\big(X, Y(X)\big)$ značia odpovedajúce si body. Z posledného vzorca vidíme, že vektor $Y(X)$ je v intervale J riešením d. rovnice

$$Y' = F(X, Y)$$

13. Prehľad o existenčných teorémach a o vetách o jednoznačnosti riešení systémov explicitných d. rovníc 1. rádu

70. Existenčné teorémy

Tiež peanovské existenčné teorémy týkajúce sa d. rovnice (a), ktorými sme sa zaoberali v ods. 27 - 30, aj so svojimi dôkazmi dajú sa ľahko rozšíriť na systémy explicitných d. rovníc 1. rádu. Výnimku tvoria tie doplnky existenčných teorém, v ktorých sa uplatňujú pojmy dolných a horných funkcií. Spokojíme sa tu s uvedením existenčných teorém pre neohraničený a kompaktný $(n + 1)$- rozmerný interval a pre otvorenú množinu.

Nech je daná d. rovnica

$$y' = f(x, y) \qquad \text{(A)}$$

Peanovská existenčná veta pre d. rovnicu (A) v prípade, že jej oborom je $(n + 1)$- rozmerný neohraničený interval, znie takto: