3. Wenn wir jeder natürlichen Zahl alle natürlichen Vielfachen (alle positiven Teiler) derselben zuordnen, so erhalten wir eine antisymmetrische Kongruenz der Menge aller natürlichen Zahlen. Je zwei natürliche Zahlen besitzen in bezug auf diese Kongruenz die obere Grenze, und zwar ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches (ihren größten gemeinsamen Teiler), und zugleich die untere Grenze, und zwar den größten gemeinsamen Teiler (das kleinste gemeinsame Vielfache). Beide Kongruenzen sind zueinander invers.

4. Wenn wir jeder Teilmenge in $G$ alle ihre Obermengen (Untermengen) in $G$ zuordnen, so erhalten wir eine antisymmetrische Kongruenz der von allen Teilmengen in $G$ gebildeten Menge. Je zwei Teilmengen in $G$ besitzen in bezug auf diese Kongruenz eine obere Grenze, und zwar ihre Vereinigungsmenge (ihren Durchschnitt), und zugleich eine untere Grenze, und zwar den Durchschnitt (die Vereinigungsmenge). Beide Kongruenzen sind zueinander invers.

5. Ist $\boldsymbol{g}$ eine antisymmetrische Kongruenz von $G$ und gibt es für die Elemente $a, b \in G$ die obere Grenze $a \smile b$, so gilt:

a) $\boldsymbol{g}(a \smile b) = \boldsymbol{g}a \cap \boldsymbol{g}b$;

b) $\boldsymbol{g}^{-1}(a \smile b) \supset \boldsymbol{g}^{-1}a \cup \boldsymbol{g}^{-1}b$.

## § 10. Reihen von Zerlegungen auf Mengen

In diesem Paragraphen werden wir eine Theorie der sogenannten Reihen von Zerlegungen auf Mengen entwickeln, in der zahlreiche Ergebnisse unserer bisherigen Ausführungen über Zerlegungen und Abbildungen von Mengen eine Anwendung finden werden. Diese Theorie stellt die mengentheoretische Struktur der entsprechenden Abschnitte der Gruppoid- und Gruppentheorie dar und gestattet einen tieferen Einblick in die diesbezüglichen, durch klassische Methoden erzielten Ergebnisse der Gruppentheorie. Außerdem finden die Untersuchungen und Resultate über Reihen von Zerlegungen auf Mengen eine bedeutsame Anwendung im Zusammenhang mit Abbildungen auf Folgenmengen und auf dem Gebiet der wissenschaftlichen Klassifikationen.

**1. Grundbegriffe.** Es seien $\bar{A} \geqq \bar{B}$ Zerlegungen auf $G$.

Unter einer *Reihe von Zerlegungen auf $G$ von $\bar{A}$ nach $\bar{B}$* oder *Reihe von $\bar{A}$ nach $\bar{B}$* verstehen wir eine endliche Folge von $\alpha (\geqq 1)$ Zerlegungen $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ auf $G$ mit den folgenden Eigenschaften: a) Die erste Zerlegung der Folge ist $\bar{A}$, die letzte $\bar{B}$, also $\bar{A}_1 = \bar{A}$, $\bar{A}_\alpha = \bar{B}$; b) jede nachfolgende Zerlegung ist eine Verfeinerung der unmittelbar vorangehenden, also

$$(\bar{A} =) \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha (= \bar{B}).$$

Eine solche Reihe wird kürzer mit $(\bar{A})$ bezeichnet. Die Zerlegungen $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_\alpha$ werden die *Glieder der Reihe* $(\bar{A})$ genannt. $\bar{A}_1$ ist das *Anfangsglied* und $\bar{A}_\alpha$ das *Endglied* der Reihe $(\bar{A})$. Unter der *Länge* der Reihe $(\bar{A})$ verstehen wir die Anzahl $\alpha$ der Glieder in $(\bar{A})$.

Zum Beispiel bildet jede Zerlegung $\bar{A}$ auf $G$ eine Reihe von der Länge 1; das Anfangs- und das Endglied dieser Reihe fällt mit $\bar{A}$ zusammen.

Wir betrachten nun eine beliebige Reihe $((\bar{A}) =)\ \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha$ von $\bar{A}$ nach $\bar{B}$.

Ein Glied von $(\bar{A})$ wird *wesentlich* genannt, wenn es entweder das erste Glied $\bar{A}_1$ der Reihe oder eine echte Verfeinerung des unmittelbar vorangehenden Gliedes ist; anderenfalls ist es *unwesentlich*. Gibt es in $(\bar{A})$ wenigstens ein unwesentliches Glied $\bar{A}_{\gamma+1}$, so heißt $(\bar{A})$ wegen $\bar{A}_{\gamma+1} = \bar{A}_\gamma$ *Reihe mit Wiederholungen*. Sind alle Glieder der Reihe $(\bar{A})$ wesentlich, so heißt die Reihe $(\bar{A})$ *ohne Wiederholungen*. Die Anzahl $\alpha'$ der wesentlichen Glieder in der Reihe $(\bar{A})$ ist die *reduzierte Länge von* $(\bar{A})$. Es ist $1 \leqq \alpha' \leqq \alpha$, wobei die Gleichheit $\alpha' = \alpha$ Reihen ohne Wiederholungen charakterisiert. Wenn die Reihe $(\bar{A})$ Wiederholungen enthält, so kann sie durch Streichung aller unwesentlichen Glieder *reduziert*, d. h. auf eine Reihe $(\bar{A}')$ ohne Wiederholungen verkürzt werden. Die Länge der reduzierten Reihe $(\bar{A}')$ ist der reduzierten Länge $\alpha'$ der Reihe $(\bar{A})$ gleich. Umgekehrt kann die Reihe $(\bar{A})$ *verlängert* werden, und zwar dadurch, daß man zwischen zwei beliebige Glieder $\bar{A}_\gamma$, $\bar{A}_{\gamma+1}$ bzw. vor (hinter) das erste (letzte) Glied $\bar{A}_1(\bar{A}_\alpha)$ von $(\bar{A})$ die Zerlegung $\bar{A}_\gamma$ bzw. $\bar{A}_1(\bar{A}_\alpha)$ oder eine beliebige endliche Anzahl solcher Zerlegungen eingliedert. Offenbar besitzt jede verkürzte oder verlängerte Reihe von $(\bar{A})$ dieselbe reduzierte Länge wie die Reihe $(\bar{A})$.

Sind $\alpha_1 < \cdots < \alpha_\beta$ beliebige Zahlen der Menge $\{1, \ldots, \alpha\}$, so ist

$$\bar{A}_{\alpha_1} \geqq \cdots \geqq \bar{A}_{\alpha_\beta}$$

ebenfalls eine Reihe von Zerlegungen auf $G$, eine sogenannte *Teilreihe* von $(\bar{A})$.

Ist ferner $A$ eine nicht leere Untermenge in $G$, so ist

$$\bar{A}_{\alpha_1} \sqcap A \geqq \cdots \geqq \bar{A}_{\alpha_\beta} \sqcap A$$

eine Reihe von Zerlegungen auf $A$.

**2. Lokale Ketten.** Es sei $((\bar{A}) =)\ \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha$ eine Reihe von Zerlegungen auf $G$ von der Länge $\alpha \geqq 1$, $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha$ ein beliebiges Element und $\bar{a}_\gamma$ dasjenige Element der Zerlegung $\bar{A}_\gamma$, in dem $\bar{a}$ als Teilmenge enthalten ist $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Offenbar gelten die Beziehungen

$$\bar{a}_1 \supset \cdots \supset \bar{a}_\alpha \ (\bar{a}_\alpha = \bar{a}).$$

Ferner ist

$$\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1} \quad (\bar{A}_{\alpha+1} = \bar{A}_\alpha)$$

eine Zerlegung auf $\bar{a}_\gamma$. Sie ist eine Teilmenge in $\bar{A}_{\gamma+1}$, und es gilt $\bar{a}_{\gamma+1} \in \bar{K}_\gamma$ $(\bar{a}_{\alpha+1} = \bar{a}_\alpha)$. Wir sehen, daß

$$([\bar{K}] =)\ \bar{K}_1 \to \cdots \to \bar{K}_\alpha$$

eine Kette von Zerlegungen von $\bar{a}_1$ nach $\bar{a}_{\alpha+1} (= \bar{a})$ darstellt. Sie wird die *zu dem Element* $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha$ *gehörige lokale Kette der Reihe* $(\bar{A})$ oder die *lokale Kette mit der Basis* $\bar{a}$ genannt; wir bezeichnen sie wie oben oder ausführlicher $([\bar{K}\bar{a}] =)\ \bar{K}_1\bar{a} \to \cdots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}$. Das Element $\bar{a} \in \bar{A}$ heißt die *Basis der Kette* $[\bar{K}]$. Offenbar ist die Kette $[\bar{K}]$ durch ihre Basis $\bar{a}$ eindeutig bestimmt.

Wir wollen beachten, daß das Endglied $\bar{K}_\alpha$ der Kette $[\bar{K}]$ die größte Zerlegung der Basis $\bar{a}$ darstellt, also unwesentlich ist, und daß ferner die Zerlegung $\bar{K}_\gamma$ wegen $\bar{A}_\gamma \geqq \bar{A}_{\gamma+1}$ auch mit Hilfe der Formel $\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqsubset \bar{A}_{\gamma+1}$ definiert werden kann.

*Die lokale Kette* $[\bar{K}]$ *ist eine elementare Kette von* $\bar{a}_1$ *nach* $\bar{a}_{\alpha+1} (= \bar{a})$ *über* $\bar{A}_{\alpha+1}$.

Dieser Satz besagt, daß die Zerlegung $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ eine Überdeckung von $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\alpha+1}$ darstellt. Dies ist jedoch eine unmittelbare Folgerung davon, daß $\bar{A}_{\gamma+1}$ die Zerlegung $\bar{A}_{\alpha+1}$ überdeckt $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$.

Die Länge der lokalen Kette $[\bar{K}]$ ist offenbar gleich $\alpha$ und stimmt also mit derjenigen der Reihe $(\bar{A})$ überein. Wenn ein Glied $\bar{A}_{\gamma+1}$ der Reihe $(\bar{A})$ unwesentlich ist, also $\bar{A}_{\gamma+1} = \bar{A}_\gamma$ gilt, so haben wir $\bar{a}_{\gamma+1} = \bar{a}_\gamma$ und sehen, daß $\bar{K}_\gamma$ ein unwesentliches Glied der lokalen Kette $[\bar{K}]$ darstellt. Aus dieser Tatsache schließen wir, daß zwischen den reduzierten Längen $\alpha', \varkappa'$ von $(\bar{A})$ bzw. $[\bar{K}]$ die folgende Beziehung besteht: $\varkappa' \leqq \alpha'$. *Wenn also eine lokale Kette der Reihe* $(\bar{A})$, *abgesehen vom Endglied, keine Wiederholungen besitzt, so gilt dasselbe von der Reihe* $(\bar{A})$.

**3. Verfeinerungen von Reihen von Zerlegungen.** Es sei $((\bar{A}) =)\ \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha$ eine Reihe von Zerlegungen auf $G$ von der Länge $\alpha \geqq 1$.

Unter einer *Verfeinerung* der Reihe $(\bar{A})$ verstehen wir eine Reihe von Zerlegungen auf $G$, welche die Reihe $(\bar{A})$ als Teilreihe enthält. Jede Verfeinerung der Reihe $(\bar{A})$ hat also die Form

$$\bar{A}_{1,1} \geqq \cdots \geqq \bar{A}_{1,\beta_1-1} \geqq \bar{A}_{1,\beta_1} \geqq \bar{A}_{2,1} \geqq \cdots \geqq \bar{A}_{2,\beta_2-1} \geqq \bar{A}_{2,\beta_2} \geqq \cdots$$
$$\geqq \bar{A}_{\alpha,\beta_\alpha} \geqq \bar{A}_{\alpha+1,1} \geqq \cdots \geqq \bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}$$

Hier ist $\bar{A}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{A}_\gamma (\gamma = 1, \ldots, \alpha)$, und die $\beta_1, \ldots, \beta_{\alpha+1}$ bedeuten natürliche Zahlen; wenn $\beta_\delta = 1$ ist, so werden die Glieder $\bar{A}_{\delta,1} \geqq \cdots \geqq \bar{A}_{\delta,\beta_\delta-1}$ nicht gelesen. Dieser Definition entnimmt man, daß man jede Verfeinerung der Reihe $(\bar{A})$ erhält, wenn man zwischen einige benachbarte Glieder $\bar{A}_\gamma, \bar{A}_{\gamma+1}$ und eventuell vor das Anfangsglied $\bar{A}_1$ und hinter das Endglied $\bar{A}_\alpha$ eine Reihe von Zerlegungen auf $G$ eingliedert. Insbesondere ist also jede Verlängerung der Reihe $(\bar{A})$ eine Verfeinerung von $(\bar{A})$.

Es sei nun $(\mathring{A})$ eine Verfeinerung der Reihe $(\bar{A})$, wobei wir für die Glieder der Reihe $(\mathring{A})$ dieselben Bezeichnungen wie oben wählen, also insbesondere $\bar{A}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{A}_\gamma (\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Die im folgenden auftretenden Indizes $\mu, \nu$ sollen im Fall $\beta_{\alpha+1} = 1$ die Zahlen $\mu = 1, \ldots, \alpha;\ \nu = 1, \ldots, \beta_\mu$ und im Fall $\beta_{\alpha+1} > 1$ außerdem die Zahlen $\mu = \alpha + 1,\ \nu = 1, \ldots, \beta_{\alpha+1} - 1$ durchlaufen.

Es sei $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha$ bzw. $\bar{a} \in \bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}$, je nachdem, ob $\beta_{\alpha+1} = 1$ oder $\beta_{\alpha+1} > 1$ ist, ein beliebiges Element. Wir bezeichnen mit $\bar{a}_{\mu,\nu}, \bar{a}_\gamma$ die durch die Beziehungen $\bar{a} \subset \bar{a}_{\mu,\nu} \in \bar{A}_{\mu,\nu},\ \bar{a} \subset \bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$ bestimmten Elemente von $\bar{A}_{\mu,\nu}, \bar{A}_\gamma$; wir haben also insbesondere $\bar{a}_{\gamma,\beta_\gamma} = \bar{a}_\gamma$.

Die zu der Basis $\bar{a}$ gehörige lokale Kette $[\mathring{K}]$ der Reihe $(\mathring{A})$ ist

$$([\mathring{K}]) =)\ \bar{K}_{1,1} \to \cdots \to \bar{K}_{1,\beta_1} \to \bar{K}_{2,1} \to \cdots \to \bar{K}_{2,\beta_2} \to \cdots \to \bar{K}_{\alpha,\beta_\alpha} \to$$
$$\to \bar{K}_{\alpha+1,1} \to \cdots \to \bar{K}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1};$$

dabei ist natürlich $\bar{K}_{\mu,\nu} = \bar{a}_{\mu,\nu} \sqcap \bar{A}_{\mu,\nu+1}$, $\bar{A}_{\mu,\beta_\mu+1} = \bar{A}_{\mu+1,1}$, ferner $\bar{A}_{\alpha+1,1} = \bar{A}_{\alpha,\beta_\alpha}$ im Fall $\beta_{\alpha+1} = 1$ und $\bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}} = \bar{A}_{\alpha+1,\beta_{\alpha+1}-1}$ im Fall $\beta_{\alpha+1} > 1$.

Wir sehen, daß wir die lokale Kette $[\bar{K}]$ erhalten, wenn wir jedes Glied $\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ der zu der Basis $\bar{a}_\alpha \in \bar{A}_\alpha$ gehörigen lokalen Kette $[\bar{K}]$ der Reihe $(\bar{A})$ durch die von $\bar{a}_\gamma$ nach $\bar{a}_{\gamma+1}$ laufende Kette

$$\bar{K}_{\gamma,\beta_\gamma} \to \bar{K}_{\gamma+1,1} \to \cdots \to \bar{K}_{\gamma+1,\beta_{\gamma+1}-1}$$

(für $\beta_{\gamma+1} = 1$ wird nur das Anfangsglied $\bar{K}_{\gamma,\beta_\gamma}$ gelesen) ersetzen und, wenn $\beta_1 > 1$ ist, die Kette von $\bar{a}_{1,1}$ nach $\bar{a}_1$, also $\bar{K}_{1,1} \to \cdots \to \bar{K}_{1,\beta_1-1}$, am Anfang von $[\bar{K}]$ hinzufügen. Nun sind aber, wie leicht einzusehen ist, die in Frage stehenden Ketten elementare Ketten von $\bar{a}_\gamma$ nach $\bar{a}_{\gamma+1}$ über $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ bzw. von $\bar{a}_{1,1}$ nach $\bar{a}_1$ über $\bar{a}_{1,1} \sqcap \bar{A}_1$. Daraus schließen wir, daß *die zu der Basis $\bar{a} \subset \bar{a}_\alpha$ gehörige lokale Kette einer Verfeinerung der Reihe $(\bar{A})$ eine Verfeinerung der zu $\bar{a}_\alpha$ gehörigen lokalen Kette von $(\bar{A})$ darstellt.*

**4. Lokalkettengebilde.** Wir betrachten eine Reihe von Zerlegungen auf $G$:

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha \qquad (\alpha \geqq 1).$$

Zu jedem Element $\bar{a} \in \bar{A}_\alpha$ gehört eine lokale Kette der Reihe $(\bar{A})$ mit der Basis $\bar{a}$:

$$([\bar{K}\bar{a}] =) \quad \bar{K}_1\bar{a} \to \cdots \to \bar{K}_\alpha\bar{a}.$$

Die von den zu den einzelnen Elementen von $\bar{A}_\alpha$ gehörigen lokalen Ketten gebildete Menge nennen wir das zu der Reihe $(\bar{A})$ gehörige *Lokalkettengebilde* und schreiben $\mathbb{A}$. Dies ist offenbar ein $\alpha$-Mengengebilde bezüglich der Folge von Zerlegungen $\bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_{\alpha+1}$ $(\bar{A}_{\alpha+1} = \bar{A}_\alpha)$ von der in § 1, Nr. 9 beschriebenen Struktur.

Wenn wir jedem Punkt $a \in G$ die lokale Kette $[\bar{K}\bar{a}] \in \mathbb{A}$ mit der den Punkt $a$ enthaltenden Basis $\bar{a} = \bar{a}_\alpha \in \bar{A}_\alpha (a \in \bar{a})$ zuordnen, so erhalten wir eine Abbildung, die sogenannte *natürliche Abbildung* der Menge $G$ auf das Lokalkettengebilde $\mathbb{A}$. Offenbar stimmt die zu dieser Abbildung gehörige Zerlegung der Menge $G$ mit der Zerlegung $\bar{A}_\alpha$ überein. Unter der *zu dem Punkt $a$ gehörigen lokalen Kette der Reihe* $(\bar{A})$ verstehen wir die lokale Kette $[\bar{K}\bar{a}]$.

Es seien nun

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha,$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{B}_\beta \qquad (\alpha, \beta \geqq 1)$$

beliebige Reihen von Zerlegungen auf $G$ mit der besonderen Eigenschaft, daß ihre Endzerlegungen $\bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_\beta$ zusammenfallen, $\bar{A}_\alpha = \bar{B}_\beta$.

Wir betrachten die zu den Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ gehörigen Lokalkettengebilde $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$.

*Wenn wir jedem Element $[\bar{K}\bar{a}] \in \mathbb{A}$ das zu derselben Basis $\bar{a}$ gehörige Element $[\bar{L}\bar{a}] \in \mathbb{B}$ zuordnen, so erhalten wir eine schlichte Abbildung des Lokalkettengebildes $\mathbb{A}$ auf das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$.* Diese Abbildung nennen wir *gleichbasig.*

Wir sehen, daß die zu zwei Reihen von Zerlegungen mit übereinstimmenden Endgliedern gehörigen Lokalkettengebilde äquivalente Mengen darstellen, wobei die gleichbasige Abbildung des einen Lokalkettengebildes auf das andere eine schlichte Abbildung realisiert.

**5. Kettenäquivalente Reihen von Zerlegungen.** Es seien

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{B}_\alpha$$

beliebige Reihen von Zerlegungen auf $G$ von derselben Länge $\alpha$ ($\geqq 1$).

Wir bezeichnen mit $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ die zu den Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ gehörigen Lokalkettengebilde.

Wir nennen die Reihe $(\bar{B})$ *kettenäquivalent mit der Reihe* $(\bar{A})$, wenn das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$ mit dem Lokalkettengebilde $\mathbb{A}$ stark äquivalent ist.

Ist die Reihe $(\bar{B})$ kettenäquivalent mit der Reihe $(\bar{A})$, so ist auch die Reihe $(\bar{A})$ kettenäquivalent mit $(\bar{B})$ (§ 6, Nr. 9,1). Mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *kettenäquivalenten Reihen* $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Nach der obigen Definition ist die Reihe $(\bar{B})$ kettenäquivalent mit der Reihe $(\bar{A})$, wenn es eine starke Äquivalenz des Lokalkettengebildes $\mathbb{A}$ auf das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$ gibt (§ 6, Nr. 9,1). Wenn insbesondere die Endglieder $\bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_\alpha$ der Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ übereinstimmen und die gleichbasige Abbildung des Lokalkettengebildes $\mathbb{A}$ auf das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$ eine starke Äquivalenz darstellt, so nennen wir die Reihe $(\bar{B})$ *gleichbasig kettenäquivalent mit der Reihe* $(\bar{A})$ und sprechen von *gleichbasig kettenäquivalenten Reihen* $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Wir nehmen nun an, die Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ seien kettenäquivalent, und $\boldsymbol{f}$ sei eine starke Äquivalenz des Lokalkettengebildes $\mathbb{A}$ auf das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$. Wir wissen (§ 6, Nr. 9, 1), daß $\boldsymbol{f}$ eine schlichte Abbildung von $\mathbb{A}$ auf $\mathbb{B}$ darstellt, wobei je zwei einander zugeordnete Elemente von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ gewisse gegenseitige Beziehungen aufweisen. Ausführlicher kann diese Tatsache so beschrieben werden:

Es gibt eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ mit folgender Auswirkung: Es seien $[\bar{K}] \in \mathbb{A}$, $\boldsymbol{f}[\bar{K}] = [\bar{L}] \in \mathbb{B}$ beliebige, bei der Abbildung $\boldsymbol{f}$ einander zugeordnete lokale Ketten der Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$:

$$([\bar{K}] =) \quad \bar{K}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{K}_\alpha,$$
$$([\bar{L}] =) \quad \bar{L}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \bar{L}_\alpha.$$

Wir wissen, daß jedes Glied $\bar{K}_\gamma(\bar{L}_\gamma)$ von beliebigem Rang $\gamma (= 1, \ldots, \alpha)$ eine aus gewissen Elementen der Zerlegung $\bar{A}_{\gamma+1}(\bar{B}_{\gamma+1})$ bestehende Zerlegung in der Menge $G$ darstellt ($\bar{A}_{\alpha+1} = \bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_{\alpha+1} = \bar{B}_\alpha$). Nun besteht die erwähnte Auswirkung der Permutation $\boldsymbol{p}$ darin, daß es zu jedem Glied $\bar{K}_\gamma$ der lokalen Kette $[\bar{K}]$ eine schlichte Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$ gibt, die das Glied $\bar{K}_\gamma$ auf das Glied $\bar{L}_\delta$ der lokalen Kette $[\bar{L}]$ elementweise abbildet; dabei ist $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$.

Wir sehen, daß je zwei Glieder $\bar{K}_\gamma$, $\bar{L}_\delta$ der lokalen Ketten $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ mit entsprechenden Indizes $\gamma$, $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ äquivalente Mengen darstellen. Folglich sind solche Glieder $\bar{K}_\gamma$, $\bar{L}_\delta$ für die lokalen Ketten $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ zugleich wesentlich oder unwesentlich. Somit kommen wir zu der Erkenntnis, daß *je zwei in der starken Äquivalenz $f$ einander entsprechende lokale Ketten dieselbe reduzierte Länge besitzen.*

Wir wollen nun zeigen, daß *selbst die Reihen* $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ *dieselbe reduzierte Länge haben.*

Dies ist zunächst selbstverständlich für $\alpha = 1$, denn die Anfangsglieder $\bar{A}_1$, $\bar{B}_1$ der Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ sind immer wesentlich.

Wir nehmen also $\alpha > 1$ an und betrachten ein wesentliches Glied $\bar{A}_{\gamma+1}$ $(1 \leqq \gamma < \alpha)$ der Reihe $(\bar{A})$. Dann gibt es ein Element $\bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$ derart, daß die Zerlegung $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ in $G$ mehr als ein Element enthält. Es sei $\bar{a} = \bar{a}_\alpha$ ein beliebiges, der Beziehung $\bar{a} \subset \bar{a}_\gamma$ entsprechendes Element von $\bar{A}_\alpha$. Ferner sei $[\bar{K}]$ die zu der Basis $\bar{a}$ gehörige lokale Kette von $(\bar{A})$ und $[\bar{L}] = f[\bar{K}]$ die dieser lokalen Kette $[\bar{K}]$ in der starken Äquivalenz $f$ zugeordnete lokale Kette von $(\bar{B})$. Wir wenden die obige Bezeichnung der Glieder von $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ an. Dann haben wir insbesondere $\bar{K}_\gamma = \bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$, $\bar{L}_\delta = \bar{b}_\delta \sqcap \bar{B}_{\delta+1}$, wobei $\delta = p\gamma$ und $\bar{b}_\delta \in \bar{B}_\delta$ ist. Nun stellt nach der obigen Überlegung das Glied $\bar{L}_\delta$ eine mit der Zerlegung $\bar{K}_\gamma$ äquivalente, also aus mehr als einem Element bestehende Menge dar. Daraus schließen wir, daß das Glied $\bar{B}_{\delta+1}$ der Reihe $(\bar{B})$ wesentlich ist; insbesondere haben wir $1 \leqq \delta < \alpha$. Wir sehen, daß die Reihe $(\bar{B})$ nicht weniger wesentliche Glieder enthält als die Reihe $(\bar{A})$. Folglich gilt für die reduzierten Längen $\alpha'$, $\beta'$ der Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ die Beziehung $\alpha' \leqq \beta'$. Aus analogen Gründen gilt auch die Beziehung $\beta' \leqq \alpha'$, womit das Gewünschte gezeigt ist.

**6. Halbverkettete und verkettete Reihen von Zerlegungen.** Wir betrachten wiederum beliebige Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ von Zerlegungen auf $G$ von derselben Länge $\alpha$ $(\geqq 1)$ und benutzen die obigen Bezeichnungen. Insbesondere bedeuten die Symbole $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ die zu den Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ gehörigen Lokalkettengebilde.

Wir nennen die Reihe $(\bar{B})$ *halbverkettet* (*verkettet*) mit der Reihe $(\bar{A})$, wenn das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$ mit dem Lokalkettengebilde $\mathbb{A}$ äquivalent und halbverknüpft (äquivalent und verknüpft) ist.

Ist die Reihe $(\bar{B})$ halbverkettet (verkettet) mit der Reihe $\bar{A}$, so ist auch die Reihe $(\bar{A})$ halbverkettet (verkettet) mit der Reihe $(\bar{B})$ (§ 6, Nr. 9, 2). Mit Rücksicht auf diese Symmetrie sprechen wir von *halbverketteten* (*verketteten*) *Reihen* $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

Nach der obigen Definition ist die Reihe $(\bar{B})$ halbverkettet (verkettet) mit der Reihe $(\bar{A})$, wenn es eine Äquivalenz mit Halbverknüpfung (Äquivalenz mit Verknüpfung) des Lokalkettengebildes $\mathbb{A}$ auf das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$ gibt (§ 6, Nr. 9, 2). Wenn insbesondere die Endglieder $\bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_\alpha$ der Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ übereinstimmen und die gleichbasige Abbildung des Lokalkettengebildes $\mathbb{A}$ auf das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$ eine Äquivalenz mit Halbverknüpfung (Äquivalenz mit Verknüpfung) darstellt, so nennen wir die Reihe $(\bar{B})$ *gleichbasig halbverkettet* (*gleichbasig verkettet*) *mit der Reihe* $(\bar{A})$*;* in diesem

Fall sprechen wir von *gleichbasig halbverketteten* (*gleichbasig verketteten*) *Reihen* $(\bar{A}), (\bar{B})$.

Wir nehmen nun an, die Reihen $(\bar{A}), (\bar{B})$ seien halbverkettet (verkettet), und $\boldsymbol{f}$ sei eine Äquivalenz mit Halbverknüpfung (Äquivalenz mit Verknüpfung) des Lokalkettengebildes $\mathbb{A}$ auf das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$. Wir wissen (§ 6, Nr. 9), daß die Abbildung $\boldsymbol{f}$ schlicht ist; dieser Sachverhalt kann so beschrieben werden (§ 6, Nr. 9, 2):

Es gibt eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ mit folgender Auswirkung: Es seien $[\bar{K}] \in \mathbb{A}$, $\boldsymbol{f}[\bar{K}] = [\bar{L}] \in \mathbb{B}$ beliebige, in der Abbildung $\boldsymbol{f}$ einander zugeordnete lokale Ketten der Reihen $(\bar{A}), (\bar{B})$. Dann sind die durch je zwei Glieder $\bar{K}_\gamma, \bar{L}_\delta$ der lokalen Ketten $[\bar{K}], [\bar{L}]$ dargestellten Zerlegungen in $G$ halbverknüpft (verknüpft); dabei ist $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$. Diese Situation kann ausführlicher so beschrieben werden, daß jedes Element einer jeden der erwähnten Zerlegungen höchstens (genau) mit einem Element der anderen inzident ist, wobei immer wenigstens eine Inzidenz stattfindet. Dabei sind die beiden Hüllen $\mathrm{H}\bar{K}_\gamma = \bar{L}_\delta \sqsubset \bar{K}_\gamma$, $\mathrm{H}\bar{L}_\delta = \bar{K}_\gamma \sqsubset \bar{L}_\delta (\neq \emptyset)$ verknüpft.

Sind die Reihen $(\bar{A}), (\bar{B})$ verkettet, so ist die durch Inzidenz von Elementen der Zerlegungen $\bar{K}_\gamma, \bar{L}_\delta$ definierte Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$ des Gliedes $\bar{K}_\gamma$ auf das Glied $\bar{L}_\delta$ schlicht. Wir sehen, daß *zwei verkettete Reihen von Zerlegungen kettenäquivalent sind*. Insbesondere haben also zwei verkettete Reihen von Zerlegungen dieselbe reduzierte Länge.

**7. Modulare Reihen von Zerlegungen.** Wir betrachten beliebige Reihen $(\bar{A}), (\bar{B})$ von Zerlegungen auf $G$ von den Längen $\alpha, \beta \geqq 1$:

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha,$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{B}_\beta.$$

Wir nennen die Reihen $(\bar{A}), (\bar{B})$ *modular*, wenn jedes Glied $\bar{A}_\mu$ von $(\bar{A})$ in bezug auf je zwei benachbarte Glieder $\bar{B}_{\delta-1}, \bar{B}_\delta$ von $(\bar{B})$ und zugleich jedes Glied $\bar{B}_\nu$ von $(\bar{B})$ in bezug auf je zwei benachbarte Glieder $\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{A}_\gamma$ von $(\bar{A})$ modular ist, d. h. wenn die folgenden Formeln bestehen:

$$\begin{aligned} [\bar{A}_\gamma, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_\nu)] &= (\bar{A}_{\gamma-1}, [\bar{A}_\gamma, \bar{B}_\nu]), \\ [\bar{B}_\delta, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_\mu)] &= (\bar{B}_{\delta-1}, [\bar{B}_\delta, \bar{A}_\mu]). \end{aligned} \tag{1}$$

Wir setzen nun voraus, daß die Reihen $(\bar{A}), (\bar{B})$ modular sind. In diesem Fall gilt der folgende Satz:

*Die Reihen* $(\bar{A}), (\bar{B})$ *besitzen gleichbasig halbverkettete Verfeinerungen* $(\mathring{A}), (\mathring{B})$ *mit übereinstimmenden Anfangs- bzw. Endgliedern. Diese Verfeinerungen sind durch die in Teil* a) *des folgenden Beweises beschriebene Konstruktion gegeben.*

Beweis. a) Wir setzen

$$[\bar{A}_1, \bar{B}_1] = \bar{U}, \quad (\bar{A}_\alpha, \bar{B}_\beta) = \bar{V},$$
$$\bar{A}_0 = \bar{B}_0 = \bar{G}_{\max}, \quad \bar{A}_{\alpha+1} = \bar{B}_{\beta+1} = \bar{V}.$$

Dann gelten die Formeln (1) für $\gamma, \mu = 1, \ldots, \alpha + 1$ und $\delta, \nu = 1, \ldots, \beta + 1$.

Wir bezeichnen die auf beiden Seiten der ersten (zweiten) Gleichheit (1) auftretende Zerlegung von $G$ mit $\mathring{A}_{\gamma,\nu}(\mathring{B}_{\delta,\mu})$, wobei die $\gamma, \mu, \delta, \nu$ die oben erwähnten Werte annehmen.

Aus dieser Definition von $\mathring{A}_{\gamma,\nu}$, $\mathring{B}_{\delta,\mu}$ schließen wir insbesondere auf die Gültigkeit der Beziehungen

$$\bar{A}_{\gamma-1} \geqq \mathring{A}_{\gamma,\nu}, \quad \mathring{A}_{\gamma,\beta+1} = \bar{A}_{\gamma},$$
$$\bar{B}_{\delta-1} \geqq \mathring{B}_{\delta,\mu}, \quad \mathring{B}_{\delta,\alpha+1} = \bar{B}_{\delta}.$$

Für $\nu \leqq \beta$ haben wir $\bar{B}_{\nu} \geqq \bar{B}_{\nu+1}$; hieraus folgt $(\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\nu}) \geqq (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\nu+1})$ nach § 3, Nr. 7,2 und ferner die Beziehung $[\bar{A}_{\gamma}, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\nu})] \geqq [\bar{A}_{\gamma}, (\bar{A}_{\gamma-1}, \bar{B}_{\nu+1})]$. Ähnlich leitet man für $\mu \leqq \alpha$ die Beziehung $[\bar{B}_{\delta}, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_{\mu})] \geqq [\bar{B}_{\delta}, (\bar{B}_{\delta-1}, \bar{A}_{\mu+1})]$ her. Es gilt also für $\nu \leqq \beta$, $\mu \leqq \alpha$

$$\mathring{A}_{\gamma,\nu} \geqq \mathring{A}_{\gamma,\nu+1}, \quad \mathring{B}_{\delta,\mu} \geqq \mathring{B}_{\delta,\mu+1},$$

und wir erhalten die folgenden Reihen von Zerlegungen von $\mathring{A}_{\gamma,1}$ nach $\bar{A}_{\gamma}$ und von $\mathring{B}_{\delta,1}$ nach $\bar{B}_{\delta}$:

$$\mathring{A}_{\gamma,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{A}_{\gamma,\beta+1},$$
$$\mathring{B}_{\delta,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{B}_{\delta,\alpha+1}.$$

Wir sehen also, daß die folgenden Reihen von Zerlegungen auf $G$ Verfeinerungen der Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ darstellen:

$$((\mathring{A}) =) \quad \bar{U} = \mathring{A}_{1,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{A}_{1,\beta+1} \geqq \mathring{A}_{2,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{A}_{2,\beta+1} \geqq \cdots \geqq \mathring{A}_{\alpha+1,1}$$
$$\geqq \cdots \geqq \mathring{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \bar{V},$$
$$((\mathring{B}) =) \quad \bar{U} = \mathring{B}_{1,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{B}_{1,\alpha+1} \geqq \mathring{B}_{2,1} \geqq \cdots \geqq \mathring{B}_{2,\alpha+1} \geqq \cdots \geqq \mathring{B}_{\beta+1,1}$$
$$\geqq \cdots \geqq \mathring{B}_{\beta+1,\alpha+1} = \bar{V}.$$

Offenbar haben die Reihen $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ dieselbe Länge $(\alpha+1)(\beta+1)$, und ihre Anfangsglieder bzw. Endglieder stimmen überein: $(\bar{U} =)\ \mathring{A}_{1,1} = \mathring{B}_{1,1}$, $\mathring{A}_{\alpha+1,\beta+1} = \mathring{B}_{\beta+1,\alpha+1} (= \bar{V})$. *Die Reihen* $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ *sind die erwähnten gleichbasig halbverketteten Verfeinerungen der Reihen* $(\bar{A})$, $(\bar{B})$.

b) Wir wollen zeigen, daß die Reihen $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ gleichbasig halbverkettet sind.

Zu diesem Zweck definieren wir zunächst eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, (\alpha+1)(\beta+1)\}$ mit Hilfe der Formeln

$$\boldsymbol{p}[(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1] = (\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1$$
$$\text{für} \quad \mu = 1, \ldots, \alpha+1; \quad \nu = 1, \ldots, \beta+1; \ \mu+\nu > 2,$$
$$\boldsymbol{p}(\alpha+1)(\beta+1) = (\beta+1)(\alpha+1).$$

Es sei nun $\bar{a} \in \bar{V}$ ein beliebiges Element und

$$([\mathring{K}\bar{a}] =) \quad \mathring{K}_1 \to \cdots \to \mathring{K}_{(\alpha+1)(\beta+1)}$$
$$([\mathring{L}\bar{a}] =) \quad \mathring{L}_1 \to \cdots \to \mathring{L}_{(\beta+1)(\alpha+1)}$$

die zu der Basis $\bar{a}$ gehörigen lokalen Ketten der Reihen $\mathring{A})$, $(\mathring{B})$.

Ferner seien $\bar{a}_{\mu-1}$, $\bar{b}_{\nu-1}$, $\mathring{a}_{\mu,\nu}$, $\mathring{b}_{\nu,\mu}$ die durch

$$\bar{a} \subset \bar{a}_{\mu-1} \in \bar{A}_{\mu-1}, \quad \bar{a} \subset \bar{b}_{\nu-1} \in \bar{B}_{\nu-1}; \quad \bar{a} \subset \mathring{a}_{\mu,\nu} \in \mathring{A}_{\mu,\nu}, \quad \bar{a} \subset \mathring{b}_{\nu,\mu} \in \mathring{B}_{\nu,\mu}$$
$$(\mu = 1, \ldots, \alpha+1; \quad \nu = 1, \ldots, \beta+1; \quad \bar{a}_0 = \bar{b}_0 = G)$$

definierten Elemente. Dann haben wir

$$\mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1} = \mathring{a}_{\mu,\nu-1} \sqcap \mathring{A}_{\mu,\nu} \quad \overset{\circ}{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1} = \mathring{b}_{\nu,\mu-1} \sqcap \mathring{B}_{\nu,\mu} \tag{1}$$
$$(\mu+\nu > 2, \quad \mathring{a}_{\mu,0} = \bar{a}_{\mu-1}, \quad \mathring{b}_{\nu,0} = \bar{b}_{\nu-1}),$$
$$\mathring{K}_{(\alpha+1)(\beta+1)} = \bar{a} \sqcap \bar{V} = \overset{\circ}{L}_{(\beta+1)(\alpha+1)}.$$

Wir wollen zeigen, daß die mit Hilfe der Permutation $\boldsymbol{p}$ einander zugeordneten Zerlegungen, nämlich $\mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1}$ und $\overset{\circ}{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1)}$ $(\mu+\nu>2)$, und ferner $\mathring{K}_{(\alpha+1)(\beta+1)}$ und $\overset{\circ}{L}_{(\beta+1)(\alpha+1)}$ halbverknüpft sind.

Da $\mathring{a}_{\mu,\nu-1}$ zu $(\bar{A}_{\mu-1}, [\bar{A}_\mu, \bar{B}_{\nu-1}])$ gehört, gilt $\mathring{a}_{\mu,\nu-1} = \bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{v}$, wobei $\bar{v} \in [\bar{A}_\mu, \bar{B}_{\nu-1}]$ die Summe derjenigen Elemente von $\bar{B}_{\nu-1}$ darstellt, die sich mit $\bar{b}_{\nu-1}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{A}_\mu$ verbinden lassen. Es ist also insbesondere $\bar{b}_{\nu-1} \subset \bar{v}$ und folglich auch $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1} \subset \mathring{a}_{\mu,\nu-1}$.

Ähnlich gilt $\mathring{b}_{\nu,\mu-1} = \bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{u}$, wobei $\bar{u} \in [\bar{B}_\nu, \bar{A}_{\mu-1}]$ die Summe derjenigen Elemente von $\bar{A}_{\mu-1}$ darstellt, die sich mit $\bar{a}_{\mu-1}$ mit Hilfe der Zerlegung $\bar{B}_\nu$ verbinden lassen. Wir haben also insbesondere $\bar{a}_{\mu-1} \subset \bar{u}$ und folglich auch $\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1} \subset \mathring{b}_{\nu,\mu-1}$.

Aus dieser Überlegung folgen die Beziehungen

$$(\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \subset (\mathring{a}_{\mu,\nu-1} \cap \mathring{b}_{\nu,\mu-1}) = (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{v}) \cap (\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{u}) \subset (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}),$$

und wir haben

$$\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1} = \mathring{a}_{\mu,\nu-1} \cap \mathring{b}_{\nu,\mu-1}.$$

Nach (1) ist nun aber $\mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1}$ eine Zerlegung auf $\mathring{a}_{\mu,\nu-1}$ und $\overset{\circ}{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1}$ eine auf $\mathring{b}_{\nu,\mu-1}$. Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir für einen Augenblick $\mathring{K}_{\mu,\nu} = \mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1}$, $\overset{\circ}{L}_{\nu,\mu} = \overset{\circ}{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1}$ setzen. Dann kann insbesondere die obige Gleichheit in der Form

$$\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1} = \mathbf{s}\mathring{K}_{\mu,\nu} \cap \mathbf{s}\overset{\circ}{L}_{\nu,\mu}$$

geschrieben werden.

Ein Element $\mathring{x} \in \mathring{K}_{\mu,\nu}$ ist mit einem Element von $\overset{\circ}{L}_{\nu,\mu}$ dann und nur dann inzident, wenn $\mathring{x} \in (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{K}_{\mu,\nu}$ gilt. In der Tat, ist $\mathring{x}$ mit einem Element von $\overset{\circ}{L}_{\nu,\mu}$ inzident, so hat es dieselbe Eigenschaft in bezug auf $\mathbf{s}\mathring{K}_{\mu,\nu} \cap \mathbf{s}\overset{\circ}{L}_{\nu,\mu}$, also in bezug auf $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}$, und wir haben $\mathring{x} \in (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{K}_{\mu,\nu}$; ist umgekehrt diese Beziehung erfüllt, so ist $\mathring{x}$ mit $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}$, also mit $\mathbf{s}\mathring{K}_{\mu,\nu} \cap \mathbf{s}\overset{\circ}{L}_{\nu,\mu}$ und folglich auch mit (wenigstens) einem Element von $\overset{\circ}{L}_{\nu,\mu}$ inzident.

Ähnlich sehen wir, daß ein Element $\mathring{y} \in \overset{\circ}{L}_{\nu,\mu}$ mit einem Element von $\mathring{K}_{\mu,\nu}$ dann und nur dann inzident ist, wenn $\mathring{y}$ zu $(\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1}) \sqsubset \overset{\circ}{L}_{\nu,\mu}$ gehört.

Nun ist leicht zu zeigen, daß die Zerlegungen $\mathring{K}_{\mu,\nu}$ und $\overset{\circ}{L}_{\nu,\mu}$ halbverknüpft sind.

Wir bemerken, daß die Durchdringung $\mathring{K}_{\mu,\nu} \sqcap \mathring{L}_{\nu,\mu}$ wegen $\bar{a} \subset \mathring{a}_{\mu,\nu} \cap \mathring{b}_{\nu,\mu}$ nicht leer ist. Ferner behaupten wir, daß jedes Element von $\mathring{K}_{\mu,\nu}$ mit höchstens einem Element von $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ inzident ist. Ist nämlich ein Element $\mathring{x} \in \mathring{K}_{\mu,\nu}$ nicht in der Hülle $(\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{K}_{\mu,\nu}$ enthalten, so ist es mit keinem Element von $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ inzident. Andernfalls ist es mit wenigstens einem Element von $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ inzident, und alle mit $\mathring{x}$ inzidenten Elemente von $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ gehören der Hülle $(\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1}) \sqsubset \mathring{L}_{\nu,\mu}$ an. Nun sind aber nach § 4, Nr. 3 die beiden Hüllen $(\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{K}_{\mu,\nu}$ und $(\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1}) \sqsubset \mathring{L}_{\nu,\mu}$ verknüpft. Folglich gibt es genau ein mit $x$ inzidentes Element von $\mathring{L}_{\nu,\mu}$. Somit ist gezeigt, daß jedes Element von $\mathring{K}_{\mu,\nu}$ höchstens mit einem Element von $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ inzident ist. Ähnlich läßt sich zeigen, daß auch jedes Element von $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ mit höchstens einem Element von $\mathring{K}_{\mu,\nu}$ inzident ist. Wir sehen, daß die Zerlegungen $\mathring{K}_{\mu,\nu}$, $\mathring{L}_{\nu,\mu}$ tatsächlich halbverknüpft sind.

Um den Satz vollständig zu beweisen, müßten wir noch zeigen, daß auch die Zerlegungen $\mathring{K}_{(\alpha+1)(\beta+1)}$ und $\mathring{L}_{(\beta+1)(\alpha+1)}$ halbverknüpft sind. Dies ist jedoch unmittelbar ersichtlich, da die erwähnten Zerlegungen von dem einzigen Element $\bar{a}$ gebildet werden.

**8. Komplementäre Reihen von Zerlegungen.** Wir betrachten wiederum beliebige Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ von Zerlegungen auf $G$ von den Längen $\alpha, \beta \geqq 1$ und wenden die obigen Bezeichnungen an.

Wir nennen die Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ *komplementär*, wenn jedes Glied von $(\bar{A})$ zu jedem Glied von $(\bar{B})$ komplementär ist.

Wir setzen im weiteren voraus, daß die Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ komplementär sind. Dann gelten zunächst im Hinblick auf die in § 5, Nr. 5 und § 5, Nr. 4 erhaltenen Resultate die folgenden Sätze:

*Je zwei zu den Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ gehörige lokale Ketten mit zusammenfallenden Enden sind adjungiert.*

*Die Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ sind modular.*

Ferner wollen wir den folgenden Satz beweisen:

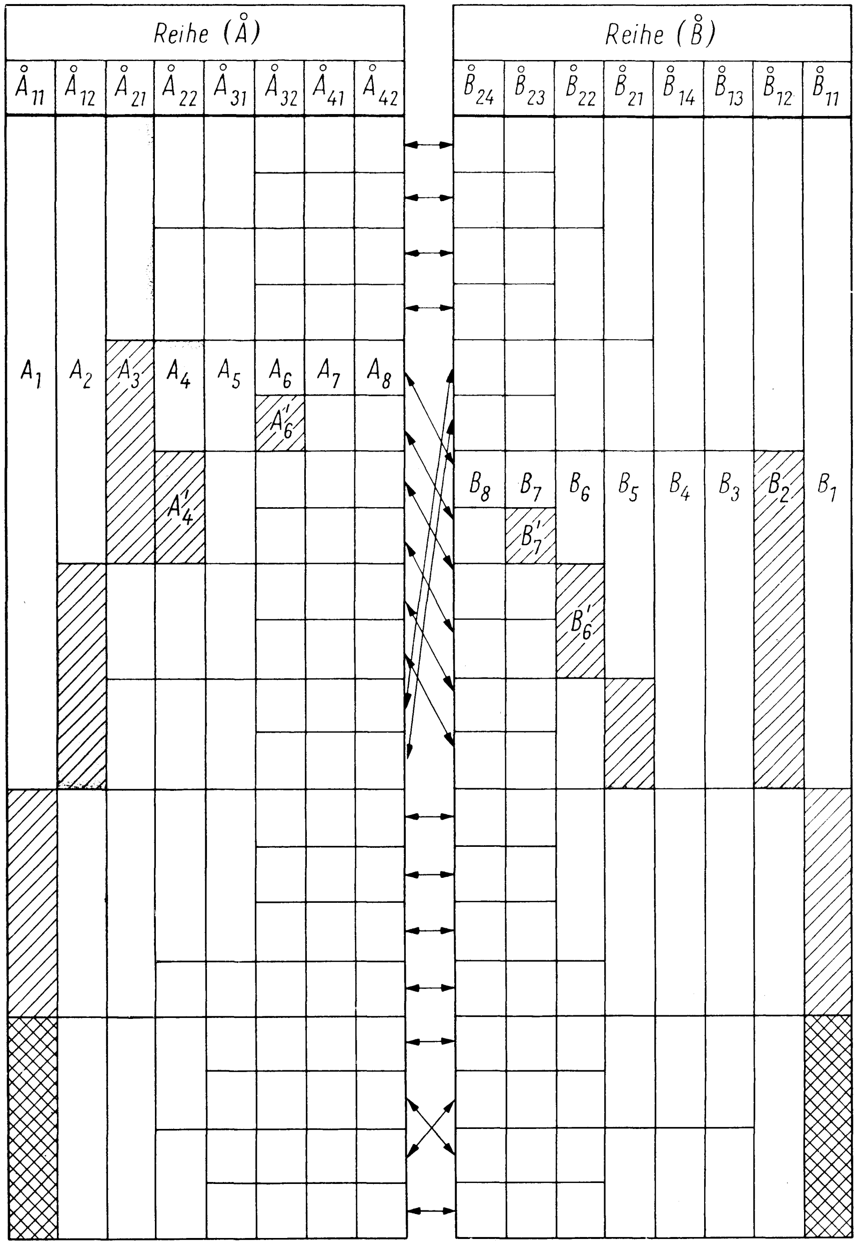
*Die Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ besitzen gleichbasig verkettete Verfeinerungen $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ mit übereinstimmenden Anfangs- bzw. Endgliedern. Diese Verfeinerungen sind durch die oben beschriebene Konstruktion von halbverketteten Verfeinerungen modularer Reihen gegeben* (Teil a) des obigen Beweises).

Beweis. Wir haben den Teil b) des erwähnten Beweises unter Berücksichtigung der Komplementarität der Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ dahin zu verschärfen, daß die Zerlegungen

$$(\mathring{K}_{\mu,\nu} =)\ \mathring{K}_{(\mu-1)(\beta+1)+\nu-1} = \mathring{a}_{\mu,\nu-1} \sqcap \mathring{A}_{\mu,\nu},$$

$$(\mathring{L}_{\nu,\mu} =)\ \mathring{L}_{(\nu-1)(\alpha+1)+\mu-1} = \mathring{b}_{\nu,\mu-1} \sqcap \mathring{B}_{\nu,\mu} \quad (\mu+\nu > 2, \quad \mathring{a}_{\mu,0} = \bar{a}_{\mu-1}, \quad \mathring{b}_{\nu,0} = \bar{b}_{\nu-1})$$

verknüpft sind. Nun sind nach § 5, Nr. 3 die Zerlegungen $\bar{A}_\mu$ und $(\bar{A}_{\mu-1}, \bar{B}_{\nu-1})$ komplementär; daraus schließen wir mit Rücksicht auf den ersten Satz von


Reihe (Å)
Reihe (B̊)
Å11 Å12 Å21 Å22 Å31 Å32 Å41 Å42
B̊24 B̊23 B̊22 B̊21 B̊14 B̊13 B̊12 B̊11
A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8
A'6
A'4
B8 B7 B6 B5 B4 B3 B2 B1
B'7
B'6

§ 5, Nr. 3, daß das Element $\mathring{a}_{\mu,\nu-1} \in [\bar{A}_\mu, (\bar{A}_{\mu-1}, \bar{B}_{\nu-1})]$ die Summe aller Elemente von $\bar{A}_\mu$ darstellt, die mit dem Element $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1} \in (\bar{A}_{\mu-1}, \bar{B}_{\nu-1})$ inzident sind. Ferner ist ein beliebiges Element $\mathring{x} \in \mathring{A}_{\mu,\nu}$ ebenfalls die Summe von einigen Elementen von $\bar{A}_\mu$; wir sehen, daß dieses Element genau dann mit $\mathring{a}_{\mu,\nu-1}$ inzident ist, wenn es mit dem Durchschnitt $\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}$ inzidiert. Diese Überlegung führt zu $\mathring{K}_{\mu,\nu} = (\bar{a}_{\mu-1} \cap \bar{b}_{\nu-1}) \sqsubset \mathring{A}_{\mu,\nu}$; ähnlich erhalten wir auch $\mathring{L}_{\nu,\mu} = (\bar{b}_{\nu-1} \cap \bar{a}_{\mu-1}) \sqsubset \mathring{B}_{\nu,\mu}$. Damit ist der Satz bewiesen, da die in diesen Formeln rechts auftretenden Zerlegungen verknüpft sind (§ 5, Nr. 5).

**9. Beispiel von gleichbasig verketteten Reihen von Zerlegungen.** In der vorstehenden Farbtafel ist ein Beispiel von gleichbasig verketteten Reihen $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ von Zerlegungen einer von 20 Elementen gebildeten Menge $G$ angegeben (vgl. S. 189, Nr. 33). Die Elemente von $G$ bzw. die aus je einem von diesen Elementen bestehenden Mengen sind in den inneren Spalten angeführt und mit $A_8$, $B_8$, ... bezeichnet; die Pfeile geben identische Elemente an. Die einzelnen Glieder der gleichbasig verketteten Reihen

$$((\mathring{A}) =) \quad \mathring{A}_{11} \geqq \mathring{A}_{12} \geqq \mathring{A}_{21} \geqq \mathring{A}_{22} \geqq \mathring{A}_{31} \geqq \mathring{A}_{32} \geqq \mathring{A}_{41} \geqq \mathring{A}_{42},$$
$$((\mathring{B}) =) \quad \mathring{B}_{11} \geqq \mathring{B}_{12} \geqq \mathring{B}_{13} \geqq \mathring{B}_{14} \geqq \mathring{B}_{21} \geqq \mathring{B}_{22} \geqq \mathring{B}_{23} \geqq \mathring{B}_{24}$$

sind in der Figur in die entsprechenden Spalten eingesetzt worden.

Den Ausgangspunkt zu der Konstruktion der Reihen $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ bilden die komplementären Reihen von Zerlegungen auf $G$,

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \bar{A}_2 \geqq \bar{A}_3,$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \bar{B}_2 \, (= \bar{A}_3).$$

deren Glieder in den Reihen $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ unter den Bezeichnungen $\mathring{A}_{12}$, $\mathring{A}_{22}$, $\mathring{A}_{32}$ und $\mathring{B}_{14}$, $\mathring{B}_{24}$ auftreten. Aus der Figur ist leicht zu entnehmen, daß tatsächlich jedes Glied der Reihe $(\bar{B})$ zu jedem Glied der Reihe $(\bar{A})$ komplementär ist.

Die verknüpften Glieder der je zu derselben Basis gehörigen lokalen Ketten der Reihen $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ sind in den mit $\mathring{A}_{\gamma\delta}$, $\mathring{B}_{\delta\gamma}$ bezeichneten Spalten eingetragen.

In der Figur sind die zu dem Element $A_8 = B_8$ gehörigen lokalen Ketten der Reihen $(\mathring{A})$, $(\mathring{B})$ farbig hervorgehoben. Man sieht, daß die in je zwei Spalten $\mathring{A}_{\gamma\delta}$, $\mathring{B}_{\delta\gamma}$ stehenden Glieder dieser lokalen Ketten verknüpfte Zerlegungen darstellen. Die inzidenten Elemente solcher verknüpfter Zerlegungen sind durch die gleiche Farbe gekennzeichnet. Zum Beispiel ist der aus den Elementen $A_4$, $A_4'$ bestehenden Zerlegung die von den Elementen $B_6$, $B_6'$ gebildete Zerlegung zugeordnet; das Element $A_4$ $(B_6)$ ist mit dem einzigen Element $B_6$ $(A_4)$ und das Element $A_4'$ $(B_6')$ mit dem einzigen Element $B_6'$ $(A_4')$ inzident.

**10. Zusammenhang mit der Abbildungstheorie.** Die vorhergehende Theorie der Reihen von Zerlegungen auf Mengen steht in engem Zusammenhang mit Betrachtungen über Abbildungen auf Mengen, die von endlichen Folgen gebildet werden.

Wir betrachten eine nicht leere, von endlichen $\alpha (\geqq 1)$-gliedrigen Folgen gebildete Menge $\mathscr{A}$ und ferner eine Abbildung $\boldsymbol{a}$ von $G$ auf $\mathscr{A}$.

Zu der Folgenmenge $\mathscr{A}$ gehören die $\alpha$ Hauptteil-Mengen $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_\alpha (= \mathscr{A})$ (§ 1, Nr. 7).

Es sei $\gamma (= 1, \ldots, \alpha)$ eine beliebige Zahl.

Wir definieren eine Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$ der Menge $G$ auf die Hauptteil-Menge $\mathscr{A}_\gamma$ derart, daß wir jedem Punkt $a \in G$ den $\gamma$-ten Hauptteil $a^{(\gamma)} \in \mathscr{A}_\gamma$ der Folge $\boldsymbol{a} a$ zuordnen. Die Abbildung $\boldsymbol{a}_\alpha$ stimmt offenbar mit $\boldsymbol{a}$ überein.

Die zu der Abbildung $\boldsymbol{a}_\gamma$ gehörige Zerlegung auf $G$ wollen wir mit $\bar{A}_\gamma$ bezeichnen. Die Zerlegung $\bar{A}_\alpha$ fällt mit der Abbildungszerlegung von $\boldsymbol{a}$ zusammen.

Es sei $a \in G$ ein beliebiger Punkt.

Zu dem Element $\boldsymbol{a}_\gamma a = a^{(\gamma)} \in \mathscr{A}_\gamma$ gehört die von seinen Nachfolgern (§ 1, Nr. 7) gebildete Nachfolgermenge $M(a^{(\gamma)}) \subset \mathscr{A}_{\gamma+1}$ $(1 \leqq \gamma < \alpha)$. Ferner ist es zweckmäßig, $M(a^{(\alpha)}) = \{a^{(\alpha)}\}$ zu setzen. Die Mengenfolge

$$([Ma] =) \quad M(a^{(1)}) \to \cdots \to M(a^{(\alpha)})$$

nennen wir die zu dem Punkt $a$ gehörige *Nachfolgerkette*.

Wir betrachten nun das Element $a^{(\gamma)} \in \mathscr{A}_\gamma$ und das von seinen $\boldsymbol{a}_\gamma$-Urbildern gebildete Element $\bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma$. Bei der Abbildung $\boldsymbol{a}_{\gamma+1} (1 \leqq \gamma < \alpha)$ wird jeder Punkt von $\bar{a}_\gamma$ auf einen Nachfolger von $a^{(\gamma)}$ abgebildet; zugleich besitzt jeder Nachfolger von $a^{(\gamma)}$ bezüglich dieser Abbildung ein oder mehrere Urbilder in $G$, die stets in $\bar{a}_\gamma$ enthalten sind. Wir sehen, daß die $\boldsymbol{a}_{\gamma+1}$-Urbildmengen der einzelnen Nachfolger von $a^{(\gamma)}$, d. h. die $\boldsymbol{a}_{\gamma+1}$-Urbildmengen der Elemente von $M(a^{(\gamma)})$, eine Zerlegung von $\bar{a}_\gamma$ darstellen; diese ist die durch die partielle Abbildung $\boldsymbol{a}_{\gamma+1}$ des Elements $\bar{a}_\gamma$ auf die Nachfolgermenge $M(a^{(\gamma)})$ erzeugte Abbildungszerlegung $(\bar{K}_\gamma a =) \, \bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$. Nach dem ersten Äquivalenzsatz (§ 6, Nr. 8) ist die Nachfolgermenge $M(a^{(\gamma)})$ mit der Zerlegung $\bar{K}_\gamma a$ äquivalent. Natürlich ist auch die Menge $M(a^{(\alpha)})$ mit der Zerlegung $\bar{K}_\alpha a$ äquivalent.

Durch diese Überlegung ergibt sich:

Die Folgenmenge $\mathscr{A}$ und die Abbildung $\boldsymbol{a}$ von $G$ auf $\mathscr{A}$ bestimmen eine Reihe von Zerlegungen auf $G$ von der Länge $\alpha$, die sogenannte *Abbildungsreihe*

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha,$$

deren Glieder die zu den einzelnen Abbildungen $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha$ gehörigen Zerlegungen darstellen.

Zu jedem Punkt $a \in G$ gehört die Nachfolgerkette

$$([Ma] =) \quad M(a^{(1)}) \to \cdots \to M(a^{(\alpha)})$$

und die durch die Reihe $(\bar{A})$ bestimmte lokale Kette

$$([\bar{K}a] =) \quad \bar{K}_1 a \to \cdots \to \bar{K}_\alpha a.$$

*Je zwei Glieder $M(a^{(\gamma)})$, $\bar{K}_\gamma a$ dieser Ketten von demselben Rang $\gamma$ sind äquivalente Mengen.*

Wir betrachten nun zwei nicht leere Folgenmengen $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, die von endlichen $\alpha (\geqq 1)$-gliedrigen Folgen gebildet werden, und beliebige Abbildungen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ der Menge $G$ auf $\mathscr{A}$ bzw. $\mathscr{B}$. Wir haben dann die Hauptteil-Mengen $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_\alpha (= \mathscr{A})$,

$\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_\alpha (= \mathscr{B})$, ferner die Abbildungen $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\alpha (= \boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_\alpha (= \boldsymbol{b})$ von $G$ auf die entsprechenden Hauptteil-Mengen und die Abbildungsreihen

$$((\bar{A}) =) \quad \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha,$$
$$((\bar{B}) =) \quad \bar{B}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{B}_\alpha.$$

Zu jedem Punkt $a \in G$ gehören zwei Nachfolgerketten

$$([M a] =) \quad M(a^{(1)}) \to \cdots \to M(a^{(\alpha)}),$$
$$([N a] =) \quad N(b^{(1)}) \to \cdots \to N(b^{(\alpha)})$$

sowie die lokalen Ketten der Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$:

$$([\bar{K} a] =) \quad \bar{K}_1 a \to \cdots \to \bar{K}_\alpha a,$$
$$([\bar{L} a] =) \quad \bar{L}_1 a \to \cdots \to \bar{L}_\alpha a.$$

Je zwei Glieder $M(a^{(\gamma)})$, $\bar{K}_\gamma a$ bzw. $N(b^{(\gamma)})$, $\bar{L}_\gamma a$ dieser Ketten von demselben Rang $\gamma$ sind äquivalente Mengen.

Wir nehmen nun an, daß die Abbildungsreihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ gleichbasig kettenäquivalent sind.

In diesem Fall stimmen also zunächst die Endglieder $\bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_\alpha$ der Abbildungsreihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$ überein: $\bar{A}_\alpha = \bar{B}_\alpha$. Ferner läßt sich Folgendes zeigen:

*Es gibt eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ derart, daß das Glied $M(a^{(\gamma)})$ von beliebigem Rang $\gamma$ der zu jedem beliebigen Punkt $a \in G$ gehörigen Nachfolgerkette $[M a]$ und das Glied $N(b^{(\delta)})$ vom Rang $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ der zu demselben Punkt $a$ gehörigen Nachfolgerkette $[N a]$ äquivalente Mengen darstellen.*

Beweis. Nach unserer Annahme ist die gleichbasige Abbildung des Lokalkettengebildes $\mathbb{A}$ der Reihe $(\bar{A})$ auf das Lokalkettengebilde $\mathbb{B}$ der Reihe $(\bar{B})$ eine starke Äquivalenz. Es gibt also eine Permutation $\boldsymbol{p}$ der Zahlenmenge $\{1, \ldots, \alpha\}$ mit folgender Auswirkung:

Es sei $a \in G$ ein beliebiger Punkt und $\bar{a}$ das ihn enthaltende Element von $\bar{A}_\alpha = \bar{B}_\alpha$. Ferner seien $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{L}\bar{a}]$ die zu der Basis $\bar{a}$ gehörigen lokalen Ketten der Reihen $(\bar{A})$, $(\bar{B})$. Dann sind je zwei Glieder $\bar{K}_\gamma \bar{a}$, $\bar{L}_\delta \bar{a}$ der lokalen Ketten $[\bar{K}\bar{a}]$, $[\bar{L}\bar{a}]$ äquivalente Mengen; dabei ist $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$.

Wir betrachten nun das Glied $M(a^{(\gamma)})$ von beliebigem Rang $\gamma$ der zu dem Punkt $a$ gehörigen Nachfolgerkette $[M a]$ und das Glied $N(b^{(\delta)})$ vom Rang $\delta = \boldsymbol{p}\gamma$ der zu demselben Punkt $a$ gehörigen Nachfolgerkette $[N a]$. Wir haben $\bar{K}_\gamma a = \bar{K}_\gamma \bar{a}$, $\bar{L}_\delta a = \bar{L}_\delta \bar{a}$. Nun ist, wie wir wissen, $M(a^{(\gamma)})$ mit $\bar{K}_\gamma a (= \bar{K}_\gamma \bar{a})$, ferner $\bar{K}_\gamma a$ mit $\bar{L}_\delta a (= \bar{L}_\delta \bar{a})$ und schließlich $\bar{L}_\delta a$ mit $N(b^{(\delta)})$ äquivalent. Folglich ist (§ 6, Nr. 10,7) $M(a^{(\gamma)})$ mit $N(b^{(\delta)})$ äquivalent. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus diesem Satz ergibt sich die auf unseren Überlegungen beruhende Folgerung: *Wenn man einen beliebigen Punkt $a \in G$ vermöge der Abbildungen $\boldsymbol{a}_\gamma$, $\boldsymbol{b}_\delta$ in die Hauptteil-Mengen $\mathscr{A}_\gamma$, $\mathscr{B}_\delta$ abbildet, wobei $\gamma$, $\delta$ die oben beschriebenen Werte haben, so sind die Nachfolgermengen der beiden Bilder $\boldsymbol{a}_\gamma a$, $\boldsymbol{b}_\delta a$ äquivalent.*

**11. Bemerkungen über eine Anwendung der obigen Theorie auf dem Gebiet der wissenschaftlichen Klassifikationen.** Die Theorie der Reihen von Zerlegungen bzw. der Abbildungen auf Folgenmengen hat eine interessante Anwendung auf dem Gebiet der wissenschaftlichen Klassifikationen gefunden. Wir wollen uns mit einigen diesbezüglichen Bemerkungen begnügen, da eine ausführlichere Behandlung dieser Frage die Konzeption dieses Buches übersteigen würde.

Unter einer *wissenschaftlichen Klassifikation* ($\mathscr{A}$) oder *Klassifikation* ($\mathscr{A}$) der Menge $G$ verstehen wir eine Menge $\mathscr{A}$ von endlichen $\alpha(\geqq 1)$-gliedrigen Folgen von Elementen und eine Abbildung $\boldsymbol{a}$ der Menge $G$ auf die Menge $\mathscr{A}$. Für jedes $a \in G$ heißt das $\gamma$-te Glied der Folge $\boldsymbol{a}a$ das *Merkmal vom Rang* $\gamma$ des Elements $a(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$. Dementsprechend werden die Elemente von $\mathscr{A}$ *Merkmalsfolgen* genannt. Offenbar kann man die obigen Resultate über Abbildungen auf Folgenmengen unmittelbar anwenden. Im Fall von wissenschaftlichen Klassifikationen werden die Elemente von $G$ als *Individuen*, die Hauptteil-Mengen als *Merkmalsmengen* und die Abbildungsreihe als die *Klassifikationsreihe* bezeichnet.

In konkreten Fällen werden bei der Aufstellung einer Klassifikation an die Wahl der Merkmale spezielle Bedingungen gestellt, durch die die zugehörige Klassifikationsreihe mit bestimmt wird. Man denke etwa an die auf dem Gebiet der Naturwissenschaften vorkommenden Klassifikationen, bei denen die Merkmale der zu klassifizierenden Individuen als bestimmte, den Individuen anhaftende und durch die Natur gegebene Eigenschaften zu wählen sind.

Zur Bestimmung eines Individuums $a$ mit Hilfe einer Klassifikation ($\mathscr{A}$) wird die ihm zukommende Merkmalsfolge $\boldsymbol{a}a$ festgestellt. Nun kommt es in konkreten Fällen vor, daß bei einem Individuum einige Merkmale nicht festgestellt werden können, sei es, daß es sich um ein beschädigtes oder pathologisches Individuum handelt, sei es aus Mangel an einigen zu der Feststellung notwendigen Mitteln, oder aus anderen Gründen. In solchen Fällen ist die Bestimmung des Individuums mit Hilfe der Klassifikation ($\mathscr{A}$) im allgemeinen nicht möglich.

Aus diesem Sachverhalt ergibt sich nun das folgende Problem: Es soll ein Verfahren zur Aufstellung von zwei in geeigneten gegenseitigen Beziehungen stehenden Klassifikationen der Menge $G$ angegeben werden; man verlangt, daß a) die beiden Klassifikationen dasselbe Resultat ergeben, d. h. die voneinander nicht zu unterscheidenden Individuen in den beiden Klassifikationen dieselben sind; b) für jedes Individuum die fehlenden Merkmale in der einen Klassifikation durch bestimmte Merkmale in der anderen ersetzt werden können.

Die oben gewonnenen Erkenntnisse über Abbildungen auf Folgenmengen zeigen einen Weg zur Lösung dieses an sich offenbar sehr schwierigen Problems. Man geht von zwei geeignet gewählten komplementären Reihen von Zerlegungen der zu klassifizierenden Menge aus und wählt, unter Anwendung der in Nr. 7 beschriebenen Konstruktion, die Merkmale in den beiden Klassifikationen so, daß die zugehörigen Klassifikationsreihen gleichbasig verkettet herauskommen (Nr. 8). Ist dies erzielt, so kann man aus der Kenntnis der ersten $\gamma$ Merkmale in der einen Klassifikation und der ersten $\delta + 1$ Merkmale in der anderen für jedes Individuum mit Hilfe der zwischen den entsprechenden Nachfolgermengen bestehenden schlichten Abbildung das $(\gamma+1)$-te Merkmal in der zuerst genannten Klassifikation bestimmen. Die Möglichkeit der tatsächlichen Durchführung dieser Konstruktion in konkreten Fällen kann jedoch wegen der voraussichtlich vorhandenen speziellen Eigenschaften der zu wählenden Merkmale keineswegs sichergestellt werden. Das beschriebene Konstruktionsprinzip läßt dennoch eine gewisse Freiheit in der Wahl der Merkmale zu, da die komplementären Reihen von Zerlegungen, von denen man bei der Konstruktion auszugehen hat, beliebig gewählt werden können.

## 12. Übungsaufgaben.

1. Das zu einer Reihe $((\bar{A}) =)\ \bar{A}_1 \geqq \cdots \geqq \bar{A}_\alpha$ von Zerlegungen auf $G$ gehörige Lokalkettengebilde ist eine Folgenmenge $\mathscr{A}$. Ordnet man jedem Punkt $a \in G$ die entsprechende lokale Kette $[\bar{K}a]$ zu, so erhält man eine Abbildung $\boldsymbol{a}$ der Menge $G$ auf die Folgenmenge $\mathscr{A}$. Die diesbezügliche Abbildungsreihe ist durch die Reihe $(\bar{A})$ dargestellt. Der $\gamma$-te Hauptteil $(\gamma = 1, \ldots, \alpha)$ der zu einem beliebigen Punkt $a \in G$ gehörigen Folge $\boldsymbol{a}a$ ist durch die Kette $\bar{K}_1 a \to \cdots \to \bar{K}_\gamma a$ dargestellt. Man erhält für $1 \leqq \gamma < \alpha$ alle seine Nachfolger, wenn man am Ende der erwähnten Kette je eine Zerlegung $\bar{x}_{\gamma+1} \sqcap \bar{A}_{\gamma+2}$ hinzufügt; $\bar{x}_{\gamma+1}$ durchläuft die Elemente der Zerlegung $\bar{a}_\gamma \sqcap \bar{A}_{\gamma+1}$ $(a \in \bar{a}_\gamma \in \bar{A}_\gamma)$; $\bar{A}_{\alpha+1} = \bar{A}_\alpha$. Es gibt Abbildungen der Menge $G$ auf Folgenmengen mit beliebig vorgegebenen Abbildungsreihen auf $G$.

2. Die Tafel zu Nr. 9 kann als das Schema von zwei Klassifikationen mit gleichbasig verketteten Klassifikationsreihen aufgefaßt werden. Die den einzelnen Individuen bzw. den einzelnen Klassen der voneinander nicht zu unterscheidenden Individuen zukommenden Merkmalsfolgen sind in den einzelnen Zeilen der Figur angegeben; die Pfeile zeigen immer die denselben Individuen zukommenden Merkmalsfolgen in den beiden Klassifikationen an. Für jedes Individuum sind die im obigen Text näher beschriebenen äquivalenten Nachfolgermengen in je zwei mit $\mathring{A}_{\gamma\delta}$ und $\mathring{B}_{\gamma\delta}$ bezeichneten Spalten angeführt. Zum Beispiel kann bei einem Individuum aus der Kenntnis der Merkmale $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ in der Klassifikation $(\mathring{A})$ und der Merkmale $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$, $B_6$, $B_7$ (bzw. $B_7'$) in der Klassifikation $(\mathring{B})$ auf das Vorhandensein des Merkmals $A_6$ (bzw. $A_6'$) in der Klassifikation $(\mathring{A})$ geschlossen werden. Der Leser möge sich den Sachverhalt in allen Einzelheiten überlegen.