der Zusammensetzung von Permutationen, ähnlich wie in Beispiel c) in Nr. 3 definiert werden. Es sind für $n = 4, 5, 6$ die entsprechenden Multiplikationstabellen aufzustellen.

3. In Beispiel b) in Nr. 3 kann die Menge G nur die Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ enthalten. Es sollen für diesen Fall, und zwar für $n = 1, 2, 3, 4, 5$, die entsprechenden Multiplikationstabellen aufgestellt werden.

4. Ist n ($\geqq 5$) eine natürliche Zahl und gelten für die natürlichen Zahlen a, b die Ungleichungen $a, b \leqq n$, so ist die Anzahl der Primfaktoren von $10\,a + b$ höchstens gleich n. Daraus schließen wir, daß man in der Menge $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Multiplikation auf folgende Weise definieren kann: Das Produkt ab eines beliebigen Elements $a \in G$ mit einem Element $b \in G$ ist durch die Anzahl der Primfaktoren der Zahl $10\,a + b$ gegeben. Der Leser möge sich überzeugen, daß für $n = 6$ die entsprechende Multiplikationstabelle folgendermaßen aussieht:

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	1	2	2	4
2	2	2	1	4	2	2
3	1	5	2	2	2	4
4	1	3	1	3	3	2
5	2	3	1	4	2	4
6	1	2	3	6	2	3

5. In dem System aller Teilmengen einer nicht leeren Menge kann eine Multiplikation so definiert werden, daß man jeder zweigliedrigen Folge von Teilmengen die Summe der letzteren zuordnet. Kann man analog eine Multiplikation mit Hilfe des Durchschnitts definieren?

6. Der Leser möge selbst Beispiele von Multiplikationen in Mengen angeben.

§ 12. Grundbegriffe über Gruppoide

1. Definition. Eine nicht leere Menge G mit einer in ihr erklärten Multiplikation M heißt ein *Gruppoid; G* ist das *Feld, M* die *Multiplikation* des Gruppoids. Gruppoide werden wir mit großen Frakturbuchstaben bezeichnen, und zwar im allgemeinen mit den gleichen wie ihre Felder. Zum Beispiel bezeichnen wir ein Gruppoid, dessen Feld G ist, mit $\mathfrak{G}$, und wurde ein Gruppoid mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet, so bedeutet der Buchstabe G im allgemeinen das Feld von $\mathfrak{G}$.

2. Weitere Grundbegriffe. Die Gruppoide $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$. Auf Gruppoide übertragen wir die Begriffe und Symbole, die für ihre Felder definiert wurden. Wir sprechen z. B. von *Elementen* eines Gruppoids statt von Elementen seines Feldes und schreiben $a \in \mathfrak{G}$ statt $a \in G$; wir sprechen von *Unter-* oder *Teilmengen* in einem Gruppoid und schreiben $A \subset \mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{G} \supset A$, von *Zerlegungen in* und *auf einem Gruppoid*, von der *Ordnung* eines Gruppoids, von einer *Abbildung* eines Gruppoids in oder auf eine Menge, in oder auf ein Gruppoid, usw. Nicht leere Teilmengen in Gruppoiden werden auch *Komplexe* genannt. Wenn das Feld G eines Gruppoids $\mathfrak{G}$ eine abstrakte Menge ist, so heißt auch das Gruppoid $\mathfrak{G}$ *abstrakt*.

Ebenso übertragen wir auf Gruppoide die Begriffe und Symbole, die für ihre Multiplikationen definiert wurden. Insbesondere besitzt jede zweigliedrige Folge von Elementen $a, b \in \mathfrak{G}$ ein bestimmtes Produkt $a \cdot b$ oder ab. Wenn für je zwei Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$ die Gleichheit $ab = ba$ besteht, so heißt das Gruppoid $\mathfrak{G}$ *kommutativ* oder *abelsch*. Einem endlichen Gruppoid $\mathfrak{G}$ können wir eine Multiplikationstabelle zuordnen, in der seine Multiplikation beschrieben wird. In § 11, Nr. 3 haben wir einige Beispiele von Multiplikationen angegeben; jedes von ihnen ist zugleich ein Beispiel für ein Gruppoid.

In unseren weiteren Überlegungen werden wir öfter Gelegenheit haben, auf die folgenden Gruppoide, die wir mit $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_n$, $\mathfrak{S}_n$ bezeichnen wollen, hinzuweisen. Das Gruppoid $\mathfrak{Z}$ besteht aus der Menge Z aller ganzen Zahlen, und seine Multiplikation stimmt mit der arithmetischen Addition überein (§ 11, Nr. 3a). Das Gruppoid $\mathfrak{Z}_n$ besteht aus der Menge $Z_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, und seine Multiplikation wird als die Addition in bezug auf den Modul n definiert (§ 11, Nr. 3b). Das Gruppoid $\mathfrak{S}_n$ besteht aus der Menge S_n aller Permutationen einer endlichen Menge H von der Ordnung $n \, (\geqq 1)$, und seine Multiplikation wird mittels der Zusammensetzung von Permutationen definiert. Wir bemerken, daß ein Gruppoid, dessen Elemente aus Permutationen einer endlichen oder unendlichen Menge bestehen und dessen Multiplikation mittels Zusammensetzung von Permutationen definiert wird, *Permutationsgruppoid* heißt. Zum Beispiel ist das Gruppoid $\mathfrak{S}_n$ ein Permutationsgruppoid.

3. Vertauschbare (kommutative) Teilmengen. Es sei (überall im folgenden) $\mathfrak{G}$ ein Gruppoid, und es seien A, B beliebige Teilmengen in $\mathfrak{G}$. Die von allen Produkten ab gebildete Menge, wobei a alle Elemente in A und b alle Elemente in B durchläuft, heißt das *Produkt der Teilmenge A mit der Teilmenge B* oder das *Produkt aus A und B;* dieses Produkt wird mit $A \cdot B$ oder AB bezeichnet. Wenn eine der Teilmengen A, B leer ist, so wird unter den Symbolen $A \cdot B$, AB die Nullmenge verstanden. Für $a \in \mathfrak{G}$ schreiben wir im allgemeinen aA bzw. Aa statt $\{a\}A$ bzw. $A\{a\}$; es bedeutet also z. B. das Symbol aA die Menge aller Produkte des Elements a mit den einzelnen Elementen von A oder, im Fall $A = \emptyset$, die Nullmenge. Statt AA schreiben wir kürzer A^2.

Ist $AB = BA$, so heißen A, B *miteinander vertauschbar* oder *miteinander kommutativ*. In diesem Fall bestehen also für beliebige Elemente $a \in A$, $b \in B$ und geeignete Elemente $a', a'' \in A$; $b', b'' \in B$ die Gleichheiten $ab = b'a'$, $ba = a''b''$. Wenn das Gruppoid $\mathfrak{G}$ abelsch ist, so sind offenbar je zwei Teilmengen in $\mathfrak{G}$ miteinander vertauschbar. Im allgemeinen gilt für zwei Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$ die Beziehung $ab \neq ba$, und man sieht, daß zwei Teilmengen $A, B \subset \mathfrak{G}$ keineswegs miteinander vertauschbar zu sein brauchen, wie dies etwa für die Teilmengen $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ zutrifft. Zum Beispiel wird in dem Gruppoid $\mathfrak{Z}$ das Produkt der Teilmenge $A = \{1\}$ mit der Teilmenge $B = \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots\}$ durch die Teilmenge $\{\ldots, -1, 1, 3, \ldots\}$ dargestellt, und es gilt offenbar $AB = BA$; für $A = \{0, 1\}$ und $B = \{\ldots, -2, 0, 2, \ldots\}$ ist $AB = BA = Z$. Wir wollen beachten, daß für das Gruppoid $\mathfrak{G}$ immer die Beziehung $GG \subset \mathfrak{G}$ gilt.

4. Unter- und Obergruppoide. Ideale. Es sei A ein Komplex in $\mathfrak{G}$. Wenn $AA \subset A$ ist, wenn also das Produkt von jedem Element $a \in A$ mit jedem Element $b \in A$ wiederum in A liegt, so sagen wir, A sei ein *gruppoidaler Komplex in* $\mathfrak{G}$. In diesem Fall wird durch die Multiplikation M in $\mathfrak{G}$ eine sogenannte *partielle Multiplikation* M_A in A eindeutig bestimmt; durch diese partielle Multiplikation M_A wird jeder zweigliedrigen Folge von Elementen $a, b \in A$ dasselbe Element wie durch die Multiplikation M zugeordnet. Die Menge A mit der Multiplikation M_A bildet ein Gruppoid $\mathfrak{A}$; wir sagen $\mathfrak{A}$ sei ein *Untergruppoid* in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}$ ein *Obergruppoid* auf $\mathfrak{A}$, und schreiben $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{A}$. Wenn A in $\mathfrak{G}$ echt ist, so nennen wir $\mathfrak{A}$ *echtes Untergruppoid* in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}$ *echtes Obergruppoid* auf $\mathfrak{A}$. Im Gruppoid $\mathfrak{G}$ gibt es stets das mit $\mathfrak{G}$ identische *größte Untergruppoid* $\mathfrak{G}$.

Wenn sogar die Beziehung $GA \subset A$ (oder $AG \subset A$ oder zugleich $GA \subset A \supset AG$) erfüllt ist, so wird $\mathfrak{A}$ *linksseitiges* (oder *rechtsseitiges* oder *zweiseitiges*) *Ideal* in $\mathfrak{G}$ genannt. Der Fall $A \neq G$ wird wiederum durch das Attribut *echt* charakterisiert.

Zum Beispiel ist der von allen ganzen Vielfachen einer natürlichen Zahl m gebildete Komplex in dem Gruppoid $\mathfrak{Z}$ gruppoidal, da das Produkt (d. h. die arithmetische Summe) von je zwei ganzen Vielfachen von m wiederum ein ganzes Vielfaches von m ist; dieser Komplex und die in ihm als Multiplikation erklärte arithmetische Addition stellt ein Untergruppoid in $\mathfrak{Z}$ dar, das offenbar im Fall $m > 1$ in $\mathfrak{Z}$ echt ist. Ein anderes Beispiel ist folgendes: Es sei $A \subset \mathfrak{S}_n$ der von allen Elementen in $\mathfrak{S}_n$, die einen bestimmten Punkt $a \in H$ unverändert lassen, gebildete Komplex. Dieser Komplex A ist gruppoidal; denn, wenn zwei Permutationen $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathfrak{S}_n$ den Punkt a unverändert lassen, so gilt dies auch von ihrem Produkt $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}$ (d. h. von der zusammengesetzten Permutation $\boldsymbol{q}\boldsymbol{p}$). Wir sehen, daß der Komplex A zusammen mit der in ihm als Multiplikation definierten Zusammensetzung von Permutationen ein Untergruppoid $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}_n$ darstellt.

Für beliebige Gruppoide $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$ gelten offenbar die folgenden Aussagen:

Ist $\mathfrak{B}$ *ein Untergruppoid in* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{A}$ *ein solches in* $\mathfrak{G}$, *so ist auch* $\mathfrak{B}$ *ein Untergruppoid in* $\mathfrak{G}$.

Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *Untergruppoide in* $\mathfrak{G}$ *und besteht für ihre Felder* A, B *die Beziehung* $B \subset A$, *so ist* $\mathfrak{B}$ *ein Untergruppoid in* $\mathfrak{A}$.

5. Weitere Begriffe. Im Einklang damit, daß wir auf Gruppoide Begriffe und Symbole, die wir für ihre Felder definiert haben, übertragen, verstehen wir unter dem Durchschnitt einer Teilmenge $B \subset \mathfrak{G}$ und eines Untergruppoids $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{G}$ den Durchschnitt der Teilmenge B und des Feldes von $\mathfrak{A}$; ähnlich sprechen wir von dem *Produkt* der Untermenge B mit dem Untergruppoid $\mathfrak{A}$, von dem *Produkt* des Untergruppoids $\mathfrak{A}$ mit der Teilmenge B, von der *Hülle* des Untergruppoids $\mathfrak{A}$ in einer Zerlegung $\bar{A}$, von der *Durchdringung* der Zerlegung $\bar{A}$ mit dem Untergruppoid $\mathfrak{A}$, usw. Dementsprechend wenden wir die Bezeichnungen $B \cap \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $B\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}B$, $\mathfrak{A} \sqsubset \bar{A}$ oder $\bar{A} \sqsupset \mathfrak{A}$, $\bar{A} \sqcap \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A} \sqcap \bar{A}$, usw. an.

6. Durchschnitt von Untergruppoiden. Wir betrachten zwei Untergruppoide $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ und setzen voraus, daß der Durchschnitt $A \cap B$ ihrer Felder nicht leer ist: $A \cap B \neq \emptyset$. Dann gelten für beliebige Elemente $a, b \in A \cap B$ einerseits die Beziehungen $ab \in AA \subset A$, andererseits $ab \in BB \subset B$, und wir sehen, daß $ab \in A \cap B$ ist. $A \cap B$ stellt also einen gruppoidalen Komplex in $\mathfrak{G}$ dar. Das zu dem Feld $A \cap B$ gehörige Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ heißt der *Durchschnitt* der Untergruppoide $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und wird mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A}$ bezeichnet. Wir sehen, daß je zwei Untergruppoide in $\mathfrak{G}$, deren Felder gemeinsame Elemente besitzen, stets einen Durchschnitt haben, der wiederum ein Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ ist und offenbar ein Untergruppoid in jedem dieser Untergruppoide darstellt. Wir wollen beachten, daß der Durchschnitt von zwei Untergruppoiden lediglich dann definiert ist, wenn die Felder der beiden Untergruppoide gemeinsame Elemente besitzen. Zum Beispiel haben die Untergruppoide $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}_n$, deren Felder A, B von allen Elementen in $\mathfrak{S}_n$ gebildet werden, die einen Punkt $a \in H$ bzw. $b \in H$ unverändert lassen, einen Durchschnitt; denn die Mengen A, B haben wenigstens ein Element gemeinsam, und zwar die identische Permutation von H, die alle Punkte in H unverändert läßt.

Der Begriff des Durchschnitts von zwei Untergruppoiden in $\mathfrak{G}$ läßt eine unmittelbare Erweiterung auf Systeme von Untergruppoiden in $\mathfrak{G}$ zu. Wenn ein System $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots\}$ von Untergruppoiden in $\mathfrak{G}$ so beschaffen ist, daß der Durchschnitt $\bar{a}_1 \cap \bar{a}_2 \cap \ldots$ der entsprechenden Felder nicht leer ist, so stellt dieser Durchschnitt, wie leicht nachgewiesen werden kann, einen gruppoidalen Komplex in $\mathfrak{G}$ dar; das zugehörige Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ heißt der *Durchschnitt des Systems von Untergruppoiden* $\{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots\}$ und wird mit $\mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{A}_2 \cap \ldots$ oder $\bigcap \mathfrak{A}$ oder ähnlich bezeichnet.

7. Produkt einer endlichen Folge von Elementen. 1. *Definition.* Wir betrachten eine endliche Folge von Elementen $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{G}$, wobei wir $n \geqq 2$ annehmen, und fragen, was unter dem Produkt dieser Folge $a_1, \ldots, a_n$ verstanden werden soll. Das Produkt der zweigliedrigen Folge ($n = 2$) von Elementen a_1, a_2 haben wir bereits definiert und wissen, daß es mit $a_1 \cdot a_2$ oder $a_1 a_2$ bezeichnet wird. Im Fall $n = 3$ erklären wir das betreffende Produkt so: Das Produkt der dreigliedrigen Folge von Elementen a_1, a_2, a_3 ist die von den sogenannten Produktelementen $a_1(a_2a_3)$, $(a_1a_2)\,a_3$ gebildete Menge und wird mit $\{a_1a_2a_3\}$ bezeichnet. Mit dem Symbol $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$ oder $a_1a_2a_3$ bezeichnen wir eines der Produktelemente, etwa das Produkt $a_1(a_2a_3)$ des Elements a_1 mit dem Element a_2a_3 oder das Produkt $(a_1a_2)\,a_3$ des Elements a_1a_2 mit a_3. Im Fall $n = 4$ stellen wir eine analoge Definition auf: Das Produkt der viergliedrigen Folge von Elementen a_1, a_2, a_3, a_4 ist die von den Produktelementen $a_1(a_2a_3a_4)$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $(a_1a_2a_3)\,a_4$ gebildete Menge und wird mit $\{a_1a_2a_3a_4\}$ bezeichnet. Mit dem Symbol $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$ oder $a_1a_2a_3a_4$ bezeichnen wir eines der fünf Produktelemente $a_1(a_2(a_3a_4))$, $a_1((a_2a_3)\,a_4)$, $(a_1a_2)(a_3a_4)$, $(a_1(a_2a_3))\,a_4$, $((a_1a_2)\,a_3)\,a_4$. Diese speziellen Fälle dürften wohl zum vollen Verständnis der folgenden allgemeinen Definition genügen:

Unter dem *Produkt der n-gliedrigen Folge von Elementen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verstehen wir die auf folgende Weise definierte Menge $\{a_1a_2 \cdots a_n\}$: Für

$n = 2$ besteht die Menge $\{a_1 a_2\}$ aus dem einzigen Element $a_1 a_2$, für $n > 2$ ist sie durch die Formel

$$\{a_1 a_2 \cdots a_n\} = \{a_1\}\{a_2 \cdots a_n\} \cup \{a_1 a_2\}\{a_3 \cdots a_n\} \cup \cdots \cup \{a_1 \cdots a_{n-1}\}\{a_n\}$$

definiert. Die einzelnen Elemente von $\{a_1 a_2 \cdots a_n\}$ werden *Produktelemente* genannt und mit $a_1 a_2 \cdots a_n$ bezeichnet. Offenbar gibt es nur endlich viele dieser Produktelemente. Für $n = 2$ unterscheiden wir im allgemeinen nicht zwischen dem Produkt und dem entsprechenden Produktelement.

2. *Assoziative Gruppoide.* Nach den obigen Erörterungen besitzt eine dreigliedrige Folge von Elementen $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ höchstens zwei Produktelemente $a_1(a_2 a_3)$, $(a_1 a_2) a_3$. Wenn diese stets übereinstimmen, wenn also für je drei Elemente $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{G}$ die Gleichheit $a_1(a_2 a_3) = (a_1 a_2) a_3$ gilt, so heißt die zugehörige Multiplikation und auch das Gruppoid $\mathfrak{G}$ *assoziativ*.

Die in der klassischen Mathematik am häufigsten vorkommenden Gruppoide sind dadurch gekennzeichnet, daß jede endliche Folge ihrer Elemente ein einziges Produktelement besitzt; wie wir später (§ 18, Nr. 1,1) sehen werden, besitzen genau die assoziative Gruppoide diese Eigenschaft.

Zum Beispiel ist das Gruppoid $\mathfrak{Z}$ assoziativ, da nach der in ihm erklärten Multiplikation die aus beliebigen Elementen $a, b, c \in \mathfrak{Z}$ gebildeten Produkte $a(bc)$, $(ab)c$ durch die arithmetischen Summen $a + (b + c)$, $(a + b) + c$ dargestellt werden und folglich übereinstimmen.

Das Gruppoid $\mathfrak{Z}_n$ $(n \geqq 1)$ ist ebenfalls assoziativ. Nach der in ihm erklärten Multiplikation sind nämlich die aus beliebigen Elementen $a, b, c \in \mathfrak{Z}_n$ gebildeten Produkte $a(bc)$, $(ab)c$ durch die Reste von $a + r$, $s + c$ bei der Division durch n bestimmt, wobei r bzw. s den Rest von $b + c$ bzw. $a + b$ bei Division durch n bedeutet. Da sich die Zahlen $a + r$, $a + (b + c)$ nur um ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl n unterscheiden, ist $a(bc)$ der Rest der Zahl $a + (b + c)$ bei Division durch n; aus analogen Gründen ist $(ab)c$ der Rest von $(a + b) + c$ bei Division durch n. Da nun $a + (b + c) = (a + b) + c$ ist, ergibt sich die Beziehung $a(bc) = (ab)c$.

Schließlich stellt auch $\mathfrak{S}_n$ $(n \geqq 1)$ ein assoziatives Gruppoid dar, denn nach Definition der Multiplikation in $\mathfrak{S}_n$ sind für je drei Elemente $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r} \in \mathfrak{S}_n$ die Produkte $\boldsymbol{p} \cdot (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r})$, $(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{r}$ durch die zusammengesetzten Permutationen $(\boldsymbol{r}\boldsymbol{q})\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{p})$ gegeben, und diese sind einander gleich (§ 8, Nr. 7,3).

3. *Beispiel*: Als Beispiel für die Berechnung des Produkts einer endlichen Folge von Elementen in einem Gruppoid wollen wir das Produkt $\{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\}$ in dem in § 11, Nr. 5,4 beschriebenen Gruppoid bestimmen. Nach der zugehörigen Multiplikationstabelle haben wir

$$\begin{aligned}
\{1 \cdot 2 \cdot 3\} &= \{1\} \cdot \{2 \cdot 3\} \cup \{1 \cdot 2\} \cdot \{3\} = \{1\} \cdot \{1\} \cup \{3\} \cdot \{3\} = \{1\} \cup \{2\} = \{1,2\};\\
\{2 \cdot 3 \cdot 4\} &= \{2\} \cdot \{3 \cdot 4\} \cup \{2 \cdot 3\} \cdot \{4\} = \{2\} \cdot \{2\} \cup \{1\} \cdot \{4\} = \{2\} \cup \{2\} = \{2\};\\
\{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\} &= \{1\} \cdot \{2 \cdot 3 \cdot 4\} \cup \{1 \cdot 2\} \cdot \{3 \cdot 4\} \cup \{1 \cdot 2 \cdot 3\} \cdot \{4\}\\
&= \{1\} \cdot \{2\} \cup \{3\} \cdot \{2\} \cup \{1, 2\} \cdot \{4\} = \{3\} \cup \{5\} \cup \{2, 4\} = \{2, 3, 4, 5\}.
\end{aligned}$$

Die Produktelemente $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ sind also die Zahlen 2, 3, 4, 5.

8. Produkt einer endlichen Folge von Teilmengen. 1. *Definition.* Es seien $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ beliebige Teilmengen in $\mathfrak{G}$.

Unter dem *Produkt der n-gliedrigen Folge von Teilmengen* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ verstehen wir die Summe aller Produkte $\{a_1 a_2 \cdots a_n\}$, wobei die $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$ alle Elemente von $A_1, A_2, \ldots, A_n$ durchlaufen. Dieses Produkt wird mit $A_1 A_2 \cdots A_n$, bezeichnet. Wenn eine der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ leer ist, so wird unter dem erwähnten Produkt die Nullmenge verstanden. Nach dieser Erklärung und nach der Definition von $\{a_1 a_2 \cdots a_n\}$ ist jedes Element $a \in A_1 A_2 \cdots A_n$ durch das Produkt eines Produktelements $a_1 \cdots a_k$ mit einem Produktelement $a_{k+1} \cdots a_n$ dargestellt, wobei $1 \leqq k \leqq n-1$ ist; daraus folgt die Beziehung $a \in (A_1 \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_n)$, und wenn k den obigen Ungleichungen genügt, so stellt das Produkt jedes Elements in $A_1 \cdots A_k$ mit jedem Element in $A_{k+1} \cdots A_n$ ein Element $a \in A_1 A_2 \cdots A_n$ dar. Aus dieser Überlegung folgt die Gültigkeit der Formel

$$A_1 A_2 \cdots A_n = A_1 (A_2 \cdots A_n) \cup (A_1 A_2)(A_3 \cdots A_n) \cup \cdots \cup (A_1 \cdots A_{n-1}) A_n .$$

Bedeutet A eine Teilmenge in $\mathfrak{G}$, so schreibt man statt $\underbrace{A \cdots A}_{n}$ kürzer A^n; folglich gilt für $n \geqq 2$ die Formel

$$A^n = A A^{n-1} \cup A^2 A^{n-2} \cup \cdots \cup A^{n-1} A .$$

Die obigen Definitionen des Produkts einer endlichen Folge von Elementen oder Teilmengen in einem Gruppoid stellen offenbar eine Verallgemeinerung des Produkts einer zweigliedrigen Folge von Elementen oder Teilmengen dar.

2. *Beispiel.* Es sei A die von den Elementen 1, 2, 4 gebildete Teilmenge in dem Gruppoid aus § 11, Nr. 5,4. Wir haben

$$\begin{aligned}
A^2 &= \{1, 2, 4\} \cdot \{1, 2, 4\} = \{1 \cdot 1,\ 1 \cdot 2,\ 1 \cdot 4,\ 2 \cdot 1,\ 2 \cdot 2,\ 2 \cdot 4,\ 4 \cdot 1,\ 4 \cdot 2,\ 4 \cdot 4\} \\
&= \{1, 2, 3, 4\}; \\
A^3 &= \{1, 2, 4\} \cdot \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \cdot \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \\
A^4 &= \{1, 2, 4\} \cdot \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \cdot \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} \cdot \{1, 2, 4\} \\
&= \{1, 2, 3, 4, 5\}.
\end{aligned}$$

9. Übungsaufgaben.

1. Wenn die Teilmengen $A, B \subset \mathfrak{G}$ als Summen von einigen Teilmengen $\bar{a}_\gamma$, $\bar{b}_\delta$ gegeben sind, also $A = \bar{a}_1 \cup \ldots$, $B = \bar{b}_1 \cup \ldots$, so gilt $AB = \bigcup \bar{a}_\gamma \bar{b}_\delta$, wobei die $\bar{a}_\gamma$ bzw. $\bar{b}_\delta$ alle Teilmengen $\bar{a}_1, \ldots$ bzw. $\bar{b}_1, \ldots$ durchlaufen.

2. Wenn analog zu Aufgabe 1 die Gleichheiten $A = \bar{a}_1 \cap \ldots$, $B = \bar{b}_1 \cap \ldots$ gelten, so ist $AB \subset \bigcap \bar{a}_\gamma \bar{b}_\delta$, wobei die $\bar{a}_\gamma$ bzw. $\bar{b}_\delta$ alle Teilmengen $\bar{a}_1, \ldots$ bzw. $\bar{b}_1, \ldots$ durchlaufen. Insbesondere gelten für je drei Teilmengen $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ die folgenden Beziehungen: a) $(A \cap B) C \subset AC \cap BC$; b) $C(A \cap B) \subset CA \cap CB$. Es soll an geeigneten Beispielen gezeigt werden, daß sich in diesen Beziehungen das Zeichen $\subset$ nicht immer durch das Gleichheitszeichen ersetzen läßt.

3. Es ist zu zeigen, daß die Anzahl N_n der in dem Produkt einer n-gliedrigen Folge von Elementen in $\mathfrak{G}$ enthaltenen Produktelemente $(n \geqq 2)$ im allgemeinen durch die Formel $N_n = (2n-2)!/(n-1)!\,n!$ gegeben ist.

4. Es sei $A \subset \mathfrak{G}$ eine Teilmenge in $\mathfrak{G}$, und es seien m, n natürliche Zahlen. Man beweise die Gültigkeit der folgenden Formeln:

$$\text{a) } A^m A^n \subset A^{m+n}; \quad \text{b) } (A^m)^n \subset A^{mn}.$$

5. Es seien $A \subset B$ Teilmengen in $\mathfrak{G}$ und ferner n eine natürliche Zahl. Dann gilt die Beziehung $A^n \subset B^n$.

6. Für das Feld G von $\mathfrak{G}$ und jede natürliche Zahl n gilt $G^n \supset G^{n+1}$; folglich bestehen die Beziehungen $G \supset G^2 \supset G^3 \supset \ldots$.

7. Es mögen G und n dieselbe Bedeutung haben wie in Aufgabe 6. Man zeige, daß G^n einen gruppoidalen Komplex in $\mathfrak{G}$ darstellt und daß das zugehörige Untergruppoid ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{G}$ ist.

Bemerkung. Dieses Ideal wird mit $\mathfrak{G}^n$ bezeichnet.

8. Für ein assoziatives Gruppoid $\mathfrak{G}$ gelten die folgenden Aussagen: a) Jedes Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ ist wiederum assoziativ; b) für je drei Teilmengen $A, B, C \subset \mathfrak{G}$ gilt die Beziehung $A(BC) = (AB)C$.

9. Jedes assoziative Gruppoid $\mathfrak{G}$ hat die Eigenschaft, daß für je zwei gruppoidale und *miteinander vertauschbare* Komplexe $A, B \subset \mathfrak{G}$ auch der Komplex AB gruppoidal ist.

Bemerkung. Sind in diesem Fall $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ miteinander vertauschbare Untergruppoide in $\mathfrak{G}$, so heißt das zum Produkt ihrer Felder gehörige Untergruppoid *Produkt von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$; dieses Untergruppoid wird mit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ bezeichnet.

10. Jedes assoziative Gruppoid $\mathfrak{G}$ hat die Eigenschaft, daß die von allen seinen mit jedem Element in $\mathfrak{G}$ vertauschbaren Elementen gebildete Menge gruppoidal oder leer ist.

Bemerkung. Das zugehörige Untergruppoid in $\mathfrak{G}$ heißt das *Zentrum* von $\mathfrak{G}$.

11. Es sei $\mathfrak{G}$ das Gruppoid, dessen Feld von allen natürlichen Zahlen gebildet wird und in dem die Multiplikation auf folgende Weise definiert ist: Das Produkt ab mit beliebigen Faktoren $a, b \in \mathfrak{G}$ wird durch das kleinste gemeinsame Vielfache bzw. den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a, b dargestellt. Man zeige, daß in beiden Fällen das Gruppoid $\mathfrak{G}$ abelsch und assoziativ ist.

§ 13. Homomorphe Abbildungen (Deformationen) von Gruppoiden

1. Definition. Es seien $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ beliebige Gruppoide. Wie wir bereits bemerkt haben (§ 12, Nr. 2), versteht man unter einer Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ eine Abbildung des Feldes G von $\mathfrak{G}$ in das Feld G^* von $\mathfrak{G}^*$; ähnlich überträgt man auf Gruppoide auch die übrigen Begriffe, die wir im Zusammenhang mit Abbildungen von Mengen besprochen haben. Nach dieser Definition betrifft also der Begriff der Abbildung des Gruppoids $\mathfrak{G}$ in das Gruppoid $\mathfrak{G}^*$ lediglich die beiden Felder und hängt im allgemeinen von den in den Gruppoiden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ definierten Multiplikationen nicht ab.

Es gibt jedoch Abbildungen, die sich durch gewisse Beziehungen zu den in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ definierten Multiplikationen auszeichnen. Für die Gruppoidtheorie sind die sogenannten homomorphen Abbildungen am wichtigsten, die dadurch charakterisiert sind, daß sich mit ihrer Hilfe die Multiplikationen in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ in gewissem Sinn gleichzeitig ausführen lassen. Ausführlich wollen wir diesen Begriff so beschreiben: