die an der Stelle t_0 den Wert T_0 annimmt, und die zu ihr inverse Funktion $x(T)$ sind linear und drücken sich folgendermaßen aus:

$$X(t) = \frac{\omega}{\Omega}(t - t_0) + T_0; \qquad x(T) = \frac{\Omega}{\omega}(T - T_0) + t_0 \quad (t, T \in (-\infty, \infty)).$$

Durch diese Funktionen wird in dem Intervall $(-\infty, \infty)$ das Integral Y in y bzw. das Integral y in Y transformiert, und es gilt

$$\sqrt[4]{\frac{\omega}{\Omega}} \cdot \frac{c}{\sqrt{\omega}} \sin\left[\omega(t - t_0) + \frac{\pi}{2}\right] = \sqrt[4]{\frac{\Omega}{\omega}} \cdot \frac{c}{\sqrt{\Omega}} \sin\left[\Omega(T - T_0) + \frac{\pi}{2}\right]. \tag{2}$$

Wir wählen nun entsprechend den obigen Überlegungen die Funktion X bzw. x während des Zeitintervalls $(-\infty, \infty)$ zur Zeitfunktion für den Raum II bzw. I. Die Linearität dieser Funktionen drückt den gleichförmigen Zeitverlauf in den betrachteten Räumen aus. Außerdem wählen wir die Längeneinheiten in den Räumen I, II konstant, und zwar gleich $\sqrt[4]{\omega : \Omega}$ bzw. $\sqrt[4]{\Omega : \omega}$. Dann sind [nach der Formel (2)] die Bewegungen der Punkte P_{I}, P_{II} in dem Zeitintervall $(-\infty, \infty)$ dieselben.

Wir fassen kurz zusammen:

Geradlinige harmonische Bewegungen zweier Punkte in physikalischen Räumen sind bei geeignetem gleichförmigem Zeitverlauf und passend gewählten konstanten Längeneinheiten in beiden Räumen dieselben.

B. VOLLSTÄNDIGE TRANSFORMATIONEN

Dieses Kapitel ist Fragen über Existenz und Allgemeinheit der vollständigen Transformationen zweier Differentialgleichungen (q), (Q) sowie Untersuchungen über die Struktur der Menge solcher Transformationen gewidmet.

Die diesbezügliche Theorie stützt sich auf die in § 9, Nr. 5 gewonnenen Erkenntnisse über ähnliche Phasen zweier Differentialgleichungen. Folglich werden wir die in der erwähnten Nr. angewandten Bezeichnungen in den folgenden Überlegungen benutzen. Insbesondere wollen wir die links- bzw. rechtsseitigen 1-Grundfolgen der Differentialgleichungen (q), (Q), sofern sie existieren, mit

$$(a <)\, a_1 < a_2 < \cdots \quad \text{bzw.} \quad (b >)\, b_{-1} > b_{-2} > \cdots$$

und

$$(A <)\, A_1 < A_2 < \cdots \quad \text{bzw.} \quad (B >)\, B_{-1} > B_{-2} > \cdots$$

bezeichnen.

§ 26. Existenz und Allgemeinheit der vollständigen Transformationen

1. Fragestellung. Den Ausgangspunkt zu den folgenden Betrachtungen bildet der Existenz- und Eindeutigkeitssatz über Lösungen der Differentialgleichung (Qq) (§ 24, Nr. 1) und die auf S. 196 gemachte Bemerkung. Nach dem erwähnten Satz gibt es genau eine in einem gewissen Intervall $k (\subset j)$ definierte breiteste

Lösung $Z(t)$ der Differentialgleichung (Qq) mit vorgeschriebenen Anfangsbedingungen. Der Wertevorrat K dieser breitesten Lösung $Z(t)$ bildet ein Teilintervall von J, $K \subset J$. Nun ist für unsere weiteren Betrachtungen die Bemerkung von Wichtigkeit, daß weder das Intervall k mit j noch das Intervall K mit J übereinzustimmen brauchen. Dies bedeutet, daß Integrale Y der Differentialgleichung (Q) im allgemeinen nicht in ihrem ganzen Verlauf vermöge der Funktion $Z(t)$ in Integrale y der Differentialgleichung (q) transformiert werden, sondern nur ihre Teile in Teile der anderen.

Wir wollen eine *Lösung* $X(t)$ der Differentialgleichung (Qq) *vollständig* nennen, wenn ihr Definitionsintervall k mit j und ihr Wertevorrat K mit dem Intervall J übereinstimmen. Ähnlich sprechen wir von *vollständigen Transformationen* von Integralen Y der Differentialgleichung (Q) in Integrale y der Differentialgleichung (q), wenn dieselben von vollständigen Lösungen $X(t)$ der Differentialgleichung (Qq) im Sinne der Formel § 23, (7) gebildet sind.

Vollständige Lösungen der Differentialgleichung (Qq) sind offenbar dadurch charakterisiert, daß die entsprechenden Kurven von einem Eckpunkt des rechteckigen Bereiches $j \times J$ zu dem diagonal gelegenen Eckpunkt gehen.

Durch vollständige Lösungen der Differentialgleichung (Qq) bzw. vollständige Transformationen werden Integrale der Differentialgleichung (Q) in ihrem ganzen Verlauf in Integrale der Differentialgleichung (q) transformiert.

Offenbar ist die zu einer vollständigen Lösung X der Differentialgleichung (Qq) inverse Lösung x der Differentialgleichung (qQ) ebenfalls vollständig.

Wir können die Fragen, mit denen wir uns in diesem Paragraphen befassen werden, wie folgt formulieren:

Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq) *anzugeben, und es soll die Allgemeinheit dieser Lösungen bestimmt werden.*

2. Vorbereitung. Wir betrachten zwei Differentialgleichungen (q), (Q). Ihre Definitionsintervalle wollen wir wieder mit $j = (a, b)$, $J = (A, B)$ bezeichnen.

Wir wissen, daß jede Lösung X der Differentialgleichung (Qq) durch zwei passende (erste) Phasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q) im Sinne der Formel

$$\alpha(t) = \mathsf{A}X(t) \qquad (t \in k \subset j) \tag{1}$$

eindeutig bestimmt ist (§ 24, Nr. 1). Solche Phasen haben wir Erzeugende von X genannt. Eine von den Erzeugenden, z. B. α, kann unter den Phasen der Differentialgleichung (q) beliebig gewählt werden; dann ist die andere, A, durch diese Wahl und die Funktion X eindeutig bestimmt.

Dies gilt insbesondere auch für jede vollständige Lösung der Differentialgleichung (Qq), sofern sie existiert.

3. Existenzfragen über vollständige Lösungen der Differentialgleichung (Qq). Grundlegend für die Untersuchung von Existenzfragen über vollständige Lösungen der Differentialgleichung (Qq) ist der folgende

Satz 1. *Zwei Phasen* α, A *der Differentialgleichungen* (q), (Q) *stellen dann und nur dann Erzeugende einer vollständigen Lösung* X *der Differentialgleichung* (Qq) *dar, wenn sie ähnlich sind.*

Beweis. a) Es sei X eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (Qq), und α, A seien ihre Erzeugende.

Dann haben wir $X(j) = J$, und es besteht für $t \in j$ die Beziehung (1). Daraus sieht man, daß die Wertevorräte der Phasen α, A in ihren Definitionsintervallen j, J übereinstimmen. Folglich sind die Phasen α, A ähnlich (§ 9, Nr. 5).

b) Es seien α, A ähnliche Phasen der Differentialgleichungen (q), (Q). Dann bilden die Wertevorräte der Phasen α, A in ihren Definitionsintervallen j, J dasselbe Intervall L. Daraus folgt, daß der Wertevorrat der im Intervall j vermöge der Formel $X(t) = \mathsf{A}^{-1}\alpha(t)$ definierten Funktion X mit J übereinstimmt und daß ferner für $t \in j$ die Beziehung (1) gilt. Die Phasen α, A sind also Erzeugende der vollständigen Lösung X der Differentialgleichung (Qq).

Damit ist der Beweis beendet.

Aus (1) folgt für $t \in j$: $X'(t) = \alpha'(t) : \dot{\mathsf{A}}X(t)$, und dies ergibt:

Je nachdem, ob die Erzeugenden α, A einer vollständigen Lösung X der Differentialgleichung (Qq) direkt oder indirekt ähnlich sind, stellt X eine im Intervall j wachsende oder abnehmende Funktion dar.

Aus Satz 1 folgern wir:

Die Differentialgleichung (Qq) hat dann und nur dann vollständige Lösungen X, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) ähnliche Phasen zulassen.

Dieses Ergebnis führt (§ 9, Nr. 6) zu dem

Satz 2. *Die Differentialgleichung* (Qq) *hat dann und nur dann vollständige Lösungen* X, *wenn die Differentialgleichungen* (q), (Q) *von demselben Charakter sind.*

4. Allgemeinheit der vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq). Wir nehmen nun an, daß die Differentialgleichungen (q), (Q) von demselben Charakter sind. Nach dem Satz 2 läßt also die Differentialgleichung (Qq) vollständige Lösungen zu.

Wenden wir den Satz von § 9, Nr. 6 an, so ergibt sich:

Es sei $t_0 \in j$ eine beliebige Zahl. Ferner sei $X_0 \in J$ eine mit t_0 direkt bzw. indirekt assoziierte Zahl in bezug auf die Differentialgleichungen (q), (Q). Es gibt wachsende bzw. abnehmende vollständige Lösungen X der Differentialgleichung (Qq), die an der Stelle t_0 den Wert X_0 haben. Je nach dem Charakter der Differentialgleichungen (q), (Q) und je nachdem, ob die Zahlen t_0, X_0 ausgezeichnet sind oder nicht, gibt es entweder genau eine vollständige Lösung X oder ein ein- oder zweiparametriges System von vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq).

Genauer gilt (nach § 9, Nr. 6):

Es gibt genau eine vollständige Lösung X, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) allgemeine Differentialgleichungen entweder vom Typus (1) sind oder vom Typus (m), $m \geqq 2$, wobei die Zahlen t_0, X_0 nicht ausgezeichnet sind.

Es gibt genau ∞^1 vollständige Lösungen X, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) allgemein sind vom Typus (m), $m \geqq 2$, und die Zahlen t_0, X_0 ausgezeichnet sind; ferner dann, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) speziell sind von Typus (1) oder vom Typus (m), $m \geqq 2$, wobei die Zahlen t_0, X_0 nicht ausgezeichnet sind; schließlich dann, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) einseitig oszillatorisch und die Zahlen t_0, X_0 nicht ausgezeichnet sind.

Es gibt genau ∞^2 vollständige Lösungen X, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) speziell sind vom Typus (m), $m \geqq 2$, wobei die Zahlen t_0, X_0 ausgezeichnet sind; ferner dann, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) einseitig oszillatorisch und die Zahlen t_0, X_0 ausgezeichnet sind; schließlich dann, wenn die Differentialgleichungen (q), (Q) oszillatorisch sind.

Dieses Resultat liefert natürlich auch Aussagen über Existenz und Allgemeinheit vollständiger Lösungen der Differentialgleichung (qq), also über Möglichkeit und Anzahl vollständiger Transformationen von Integralen der Differentialgleichung (q) ineinander ($Q = q$). Wir sehen, daß die Differentialgleichung (qq) stets vollständige Lösungen zuläßt. Ist die Differentialgleichung (q) vom endlichen Typus (m), $m \geqq 1$, oder oszillatorisch, so gibt es stets sowohl wachsende als auch abnehmende vollständige Lösungen der Differentialgleichung (qq); ist sie jedoch einseitig oszillatorisch, so gibt es stets nur wachsende vollständige Lösungen der Differentialgleichung (qq). Wir überlassen es dem Leser, diesen Sachverhalt in Einzelheiten zu prüfen.

§ 27. Struktur der Menge vollständiger Lösungen der Differentialgleichung (Qq)

Dieser Paragraph ist Untersuchungen der Struktur der aus vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq) bestehenden Menge gewidmet. Diese Struktur hängt natürlich von dem Charakter der Differentialgleichungen (q), (Q) ab. Um unsere Ausführungen zu verkürzen, wollen wir zunächst eine für die erwähnten Untersuchungen in allen Fällen anwendbare Grundlage entwickeln, dann aber in Einzelheiten nur den Fall von allgemeinen Differentialgleichungen (q), (Q) eines endlichen Typus (m), $m \geqq 2$, behandeln.

Wir betrachten zwei Differentialgleichungen (q), (Q) in den Intervallen $j = (a, b)$, $J = (A, B)$ und nehmen an, sie seien von demselben Charakter. Nach § 9, Nr. 2 bedeutet das, daß beide Differentialgleichungen (q), (Q) allgemein oder speziell von demselben endlichen Typus (m), $m \geqq 1$, oder beide einseitig oszillatorisch oder schließlich beide oszillatorisch sind.

Dies ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq) (§ 26, Nr. 3).

1. Vorbereitung. Wir wissen folgendes:

1. Sind $t_0 \in j$, $X_0 \in J$ beliebige direkt bzw. indirekt assoziierte Zahlen, so gibt es stets vollständige Lösungen der Differentialgleichung (Qq), die an der Stelle t_0 den Wert X_0 annehmen: $X(t_0) = X_0$.

Jede solche vollständige Lösung X ist vermöge zweier direkt bzw. indirekt ähnlichen (ersten) Normalphasen α, A der Differentialgleichungen (q), (Q) mit den Nullstellen t_0, X_0 als Lösung der Funktionalgleichung

$$\alpha(t) = \mathsf{A}X(t) \tag{1}$$

gegeben. Die Funktion X wächst oder nimmt ab, je nachdem, ob die Phasen α, A direkt oder indirekt ähnlich sind.

Ferner zeigen wir:

2. Es sei X eine vollständige wachsende bzw. abnehmende Lösung der Differentialgleichung (Qq). Dann sind je zwei Zahlen $(j \ni)\, t$, $X(t)$ $(\in J)$ direkt bzw. indirekt assoziiert.

In der Tat, es sei $t_0 \in j$ eine beliebige Zahl. Wir wählen eine Normalphase α von (q) mit der Nullstelle t_0. Dann gibt es eine mit α ähnliche Phase A von (Q) so, daß im Intervall j die Beziehung (1) gilt. Die Phasen α, A sind direkt oder indirekt ähnlich, je nachdem, ob die Funktion X wächst oder abnimmt. Aus $\alpha(t_0) = 0$ haben wir $\mathsf{A}X(t_0) = 0$. Folglich ist $X(t_0)$ die Nullstelle von A, und daraus schließen wir im Hinblick auf § 9, Nr. 5,2., daß die Zahlen t_0, $X(t_0)$ direkt bzw. indirekt assoziiert sind.

Aus 1. und 2. folgt:

3. Für jede Zahl $t \in j$ bilden die Werte $X(t)$ aller wachsenden bzw. abnehmenden vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq) die Menge der mit t direkt bzw. indirekt assoziierten Zahlen.

2. Beziehungen zwischen vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq). Wir wählen eine z. B. wachsende Phase A der Differentialgleichung (Q). Dann ist jede vollständige Lösung X der Differentialgleichung (Qq) vermöge einer mit A ähnlichen Phase α der Differentialgleichung (q) durch eine Beziehung wie (1) eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen die Phase α als die *Erzeugende* von X und sagen, X sei von der Phase α erzeugt.

Offenbar gilt:

1. Zwei vollständige Lösungen X, $\bar{X}$ der Differentialgleichung (Qq) stimmen im Intervall j dann und nur dann überein, wenn dies bei ihren Erzeugenden α, $\bar{\alpha}$ der Fall ist.

Aus dem Mittelwertsatz folgt für $t \in j$ die Beziehung

$$X(t) - \bar{X}(t) = \frac{1}{\dot{\mathsf{A}}(T)} [\alpha(t) - \bar{\alpha}(t)], \tag{2}$$

wobei T im Fall $X(t) \neq \bar{X}(t)$ eine zwischen $X(t)$ und $\bar{X}(t)$ liegende Zahl ist.

Wir sehen also:

2. Zwei vollständige Lösungen X, $\bar{X}$ der Differentialgleichung (Qq) sind an jeder Stelle $t \in j$ in derselben Größenbeziehung wie ihre Erzeugende α, $\bar{\alpha}$.

Ferner:

3. Wenn im Intervall J die Funktion $\dot{\mathsf{A}}$ stets eine positive Konstante übertrifft, so ist die Differenz $X(t) - \bar{X}(t)$ beschränkt, falls dies für $\alpha(t) - \bar{\alpha}(t)$ der Fall ist.

Wenn z. B. die Differentialgleichung (Q) zwei unabhängige beschränkte Integrale zuläßt, so sind alle Integrale und folglich auch die Amplituden aller Basen von (Q) beschränkt, und die Funktion A hat (nach § 5, (14)) die erwähnte Eigenschaft.

3. Die Struktur der Menge vollständiger Lösungen der Differentialgleichung (Qq) im Falle allgemeiner Differentialgleichungen (q), (Q) eines endlichen Typus (m), $m \geqq 2$.

Wir nehmen an, (q), (Q) seien allgemeine Differentialgleichungen von endlichem Typus (m), $m \geqq 2$.

Es sei M die Menge der vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq).

Unter einer Integralkurve der Differentialgleichung (Qq) wollen wir im folgenden die vermöge einer vollständigen Lösung $X \in M$ der Differentialgleichung (Qq) bestimmte Kurve $[t, X(t)]$ verstehen.

Die Menge M zerfällt offenbar in zwei Klassen M_1, M_{-1}, von denen M_1 aus wachsenden und M_{-1} aus abnehmenden Funktionen besteht. Wir werden uns in Einzelheiten nur mit der Menge M_1 befassen, da der Sachverhalt bei der Menge M_{-1} analog ist.

1. Der von den Integralkurven der Differentialgleichung (Qq) bedeckte Bereich. Wir setzen

$$j_\mu = (a_\mu, b_{-m+\mu+1}), \qquad j'_\nu = (b_{-m+\nu+1}, a_{\nu+1}),$$
$$J_\mu = (A_\mu, B_{-m+\mu+1}), \quad J'_\nu = (B_{-m+\nu+1}, A_{\nu+1});$$
$$\lambda = 1, \ldots, m-1; \quad \mu = 0, \ldots, m-1; \quad \nu = 0, \ldots, m-2;$$
$$a_0 = a, \quad b_0 = b; \quad A_0 = A, \quad B_0 = B.$$

Satz. *Alle Integralkurven* $[t, X(t)]$, $X \in M_1$ *gehen durch die* $2(m-1)$ *Punkte* $P(a_\lambda, A_\lambda)$, $P(b_{-\lambda}, B_{-\lambda})$ *und bedecken im übrigen den durch Vereinigung der rechteckigen offenen Gebiete* $j_\mu \times J_\mu$, $j'_\nu \times J'_\nu$ *gebildeten Bereich* D_1 *schlicht und lückenlos.*

Alle Integralkurven $[t, X(t)]$, $X \in M_{-1}$ *gehen durch die* $2(m-1)$ *Punkte* $P(a_\lambda, B_{-\lambda})$, $P(b_{-\lambda}, A_\lambda)$ *und bedecken im übrigen den durch Vereinigung der rechteckigen offenen Gebiete* $j_\mu \times J_{m-\mu-1}$, $j'_\nu \times J'_{m-\nu-2}$ *gebildeten Bereich* D_{-1} *schlicht und lückenlos.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Beweis des ersten Teiles des Satzes.

Es sei $X \in M_1$. Nach Nr. 1,2. ist $X(a_\lambda)$ eine mit a_λ direkt assoziierte Zahl, d. h. $X(a_\lambda) = A_\lambda$.

Es sei $P(t_0, X_0) \in D_1$, also z. B. $t_0 \in j_\mu$, $X_0 \in J_\mu$. Dann sind die Zahlen t_0, X_0 direkt assoziiert und nicht ausgezeichnet. Folglich gibt es (nach § 26, Nr. 4) genau eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (Qq), deren Wert an der Stelle t_0 gleich X_0 ist.

Damit ist der Beweis beendet.

2. Normalisierung der Erzeugenden. Es sei (u, v) $(uv' - u'v < 0)$ eine Hauptbasis der Differentialgleichung (q) und (U, V) $(UV' - U'V < 0)$ eine solche von (Q). Wir nehmen an, daß u bzw. v ein links- bzw. rechtsseitiges 1-Grundintegral von (q) ist; Entsprechendes gelte für U bzw. V für die Differentialgleichung (Q).

Wir wählen eine Zahl r $(= 1, \ldots, m-1)$.

Ferner wählen wir eine Normalphase A der Basis (U, V) mit der Nullstelle A_r und eine solche $\bar{\mathsf{A}}$ mit der Nullstelle B_{-r}. Die Randcharakteristik von A ist $\left(A_r;\ -r\pi,\ (m-r-\frac{1}{2})\,\pi\right)$, diejenige von $\bar{\mathsf{A}}$ ist $\left(B_{-r},\ -(m-r-\frac{1}{2})\,\pi,\ r\pi\right)$.

Es sei $P(a_r)$ das von den an der Stelle a_r verschwindenden Normalphasen des einparametrigen Basensystems $(\varrho u, v)$ von (q) mit $\varrho \neq 0$ gebildete Phasenbüschel (§ 7, Nr. 10).

Bei jeder Zahl ϱ $(\neq 0)$ bezeichnen wir mit α_ϱ die in dem Phasenbüschel $P(a_r)$ enthaltene Normalphase der Basis $(\varrho u, v)$.

Wir wissen, daß $P(a_r)$ in zwei Unterbüschel zerfällt, von denen eines, $P_1(a_r)$, aus wachsenden und das andere $P_{-1}(a_r)$ aus abnehmenden Phasen besteht.

Jede Normalphase $\alpha_\varrho \in P_\varepsilon(a_r)$ hat die Randcharakteristik $\left(a_r;\ -r\pi\varepsilon,\ (m-r-\frac{1}{2})\,\pi\varepsilon\right)$ $(\varepsilon = \pm 1)$. Folglich ist die Phase α_ϱ im Fall $\varepsilon = 1$ mit A direkt und im Fall $\varepsilon = -1$ mit $\bar{\mathsf{A}}$ indirekt ähnlich.

Umgekehrt hat jede mit A direkt bzw. mit $\bar{\mathsf{A}}$ indirekt ähnliche Phase der Differentialgleichung (q) die obige Randcharakteristik; daraus schließen wir, daß sie in dem Unterbüschel $P_1(a_r)$ bzw. $P_{-1}(a_r)$ enthalten ist.

Die mit A direkt ähnlichen Phasen der Differentialgleichung (q) sind also genau die Elemente des Unterbüschels $P_1(a_r)$; die mit $\bar{\mathsf{A}}$ indirekt ähnlichen Phasen der Differentialgleichung (q) sind genau die Elemente des Unterbüschels $P_{-1}(a_r)$.

Daraus folgt:

Die wachsenden vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq) sind bei der obigen Wahl der Phase A genau von den Elementen des Unterbüschels $P_1(a_r)$ erzeugt. Die abnehmenden vollständigen Lösungen der Differentialgleichung (Qq) sind bei der obigen Wahl der Phase $\bar{\mathsf{A}}$ genau von den Elementen des Unterbüschels $P_{-1}(a_r)$ erzeugt.

3. Struktureigenschaften der Menge M_ε. Es sei I_1 bzw. I_{-1} das Intervall aller positiven bzw. negativen Zahlen und ferner $I = I_1 \cup I_{-1}$.

Bei jeder Zahl $\varrho \in I$ bezeichnen wir mit X_ϱ die von der Normalphase $\alpha_\varrho \in P_1(a_r)$ bei der Wahl der Phase A oder von der Normalphase $\alpha_\varrho \in P_{-1}(a_r)$ bei der Wahl der Phase $\bar{\mathsf{A}}$ erzeugte vollständige Lösung der Differentialgleichung (Qq).

Es sei K die Abbildung $\varrho \to X_\varrho$ von I auf M.

Offenbar bildet die Abbildung K das Intervall I_ε auf die Menge M_ε ab ($\varepsilon = \pm 1$).

Die Abbildung K *ist schlicht.* Dies folgt aus Nr. 2,1. und § 7, Nr. 12,2.

Für $\varrho, \bar{\varrho} \in I_\varepsilon$, $\varrho < \bar{\varrho}$ gilt im Intervall j_μ bzw. j'_ν

$$X_\varrho < X_{\bar{\varrho}} \quad \text{bzw.} \quad X_\varrho > X_{\bar{\varrho}}.$$

Dies folgt aus Nr. 2,2. und § 7, Nr. 12,3.

Die Menge M_ε läßt somit die folgende Ordnung ($\prec$) zu: Für $X, \bar{X} \in M_\varepsilon$ ist $X \prec \bar{X}$ genau dann, wenn in jedem Intervall j_μ bzw. j'_ν die Beziehung $X < \bar{X}$ bzw. $X > \bar{X}$ besteht.

Die Abbildung K *ist in bezug auf diese Ordnung ordnungstreu.*

Wir nehmen nun an, daß die Werte der Funktion $\dot{\mathsf{A}}$ zwischen positiven Schranken λ, Λ enthalten sind:

$$\lambda \leqq \dot{\mathsf{A}} \leqq \Lambda \quad (\lambda, \Lambda > 0).$$

Dann haben wir (nach (2)) im Intervall j für je zwei Elemente X_ϱ, $X_{\bar{\varrho}} \in M_\varepsilon$

$$\lambda |X_\varrho - X_{\bar{\varrho}}| \leqq |\alpha_\varrho - \alpha_{\bar{\varrho}}| \leqq \Lambda |X_\varrho - X_{\bar{\varrho}}|.$$

Aus der ersten Ungleichung und aus der Beziehung § 7, (32) folgt, daß die Differenz $X_\varrho - X_{\bar{\varrho}}$ beschränkt ist.

Wir definieren in der Menge M_ε eine Metrik, d, und zwar im Sinne der Formel

$$d(X_\varrho, X_{\bar{\varrho}}) = \sup_{t \in j} |X_\varrho(t) - X_{\bar{\varrho}}(t)|.$$

Im Intervall I_ε nehmen wir die euklidische Metrik an.

Wir zeigen:

Die Abbildung K *ist homöomorph.*

Beweis. Nach (2) und den Beziehungen § 7, (33), (34) gilt

$$d(X_\varrho, X_{\bar\varrho}) \leqq \frac{1}{2\lambda} \frac{|\varrho - \bar\varrho|}{\sqrt{\varrho\bar\varrho}},$$

$$\frac{|\varrho - \bar\varrho|}{1 + \varrho\bar\varrho} \leqq \tan [\Lambda \cdot d(X_\varrho, X_{\bar\varrho})].$$

Die erste Beziehung zeigt, daß die Abbildung K an jeder Stelle $\bar\varrho \in I_\varepsilon$ stetig ist; aus der zweiten folgt die Stetigkeit der Abbildung K^{-1} an jeder Stelle $X_{\bar\varrho} \in M_\varepsilon$.

Damit ist der Beweis beendet.

4. Kanonische Formen der Differentialgleichungen (q). Wir wollen nun die Theorie der vollständigen Transformationen zur Aufstellung gewisser kanonischer Formen der Differentialgleichungen (q) anwenden.

Zwecks Vereinfachung unserer Ausdrucksweise wollen wir eine Funktion $X(t)$, $t \in j = (a, b)$, als *kanonische Phasenfunktion* bezeichnen, wenn im Intervall j $X \in C_3$ und stets $X' > 0$ ist, und ferner, wenn für die Zahlen $C = \lim\limits_{t \to a+} X$, $D = \lim\limits_{t \to b-} X$ einer der folgenden fünf Fälle eintritt:

I. a) $C = 0, \quad D = (m - \frac{1}{2})\pi, \quad m \geqq 1$ ganz;
   b) $C = 0, \quad D = m\pi, \quad m \geqq 1$ ganz;

II. a) $C = 0, \quad D = \infty$;
   b) $C = -\infty, \quad D = 0$;
   c) $C = -\infty, \quad D = \infty$.

Satz. *Der Träger q jeder Differentialgleichung* (q), $j = (a, b)$, *kann vermöge einer im Intervall j definierten kanonischen Phasenfunktion X in der Form*

$$q(t) = -\{X, t\} - X'^2(t) \tag{3}$$

ausgedrückt werden.

Je nachdem, ob die Differentialgleichung (q)

I. *von endlichem Typus* (m), $m \geqq 1$, *und*
   a) *allgemein* oder
   b) *speziell*

oder

II. a) *rechtsseitig oszillatorisch* oder
   b) *linksseitig oszillatorisch* oder
   c) *oszillatorisch*

ist, hat die Funktion X die entsprechende Eigenschaft I. a)–II. c).

Beweis. Wir wollen uns auf den Beweis z. B. im Fall I. a) beschränken.

Es sei also (q) eine allgemeine Differentialgleichung von endlichem Typus (m), $m \geqq 1$.

Die Differentialgleichung (Q) mit $Q = -1$ im Intervall $J = \big(0, (m - \frac{1}{2})\pi\big)$ ist ebenfalls allgemein von endlichem Typus (m). In der Tat, die Funktion $\mathsf{A}(T) = T$ $(T \in J)$ ist offenbar eine erste Phase der Differentialgleichung (Q). Ihre Randwerte sind $C = 0$, $D = (m - \frac{1}{2})\,\pi$. Wir haben also $O(\mathsf{A} \mid J) = (m - \frac{1}{2})\,\pi$, und daraus folgt die Behauptung (§ 7, Nr. 16).

Wir sehen, daß die Differentialgleichungen (q), (Q) von demselben Charakter sind.

Folglich gibt es eine mit A direkt ähnliche erste Phase α der Differentialgleichung (q). Für diese gilt $\lim\limits_{t \to a+} \alpha(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to b-} \alpha(t) = (m - \frac{1}{2})\,\pi$. Wir sehen, daß α eine kanonische Phasenfunktion mit der Eigenschaft I. a) ist. Nun ist die Lösung $X(t)$ der Funktionalgleichung $\mathsf{A}(X) = \alpha(t)$, also die Funktion $\alpha(t)$, eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (Qq). Folglich erfüllt die Funktion α die Beziehung (3). Damit ist der Beweis beendet.

Dies ist auch der Abschluß unserer Überlegungen.