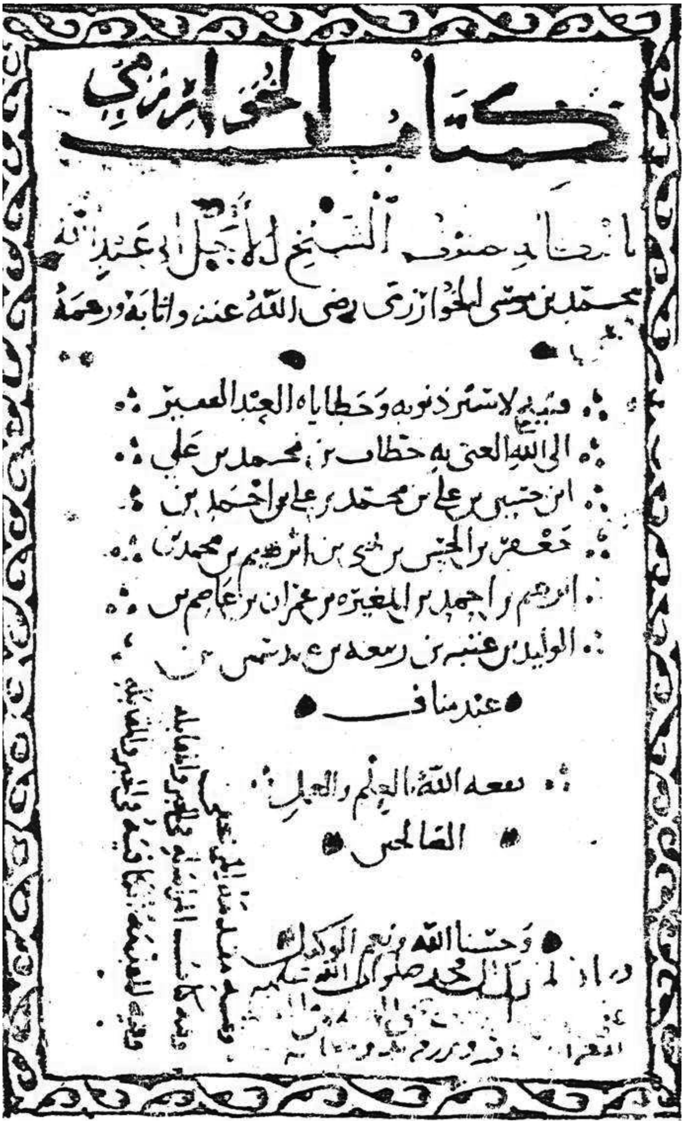
Marie Benediktová Větrovcová

Al-Chvárizmího počty - prameny algebry a aritmetiky

In: Jindřich Bečvář (editor); Martina Bečvářová (author): Mathematics throughout the ages. VI. (Czech). , 2010. pp. 86–119.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401731


كتاب الخوارزمي
مما صنف الشيخ الأجل أبو عبد الله
محمد بن موسى الخوارزمي رضي الله عنه وأثابه ورحمه
وحسبنا الله ونعم الوكيل

Titulní strana Al-Chvárizmího algebraického traktátu

AL-CHVÁRIZMÍHO POČTY – PRAMENY ALGEBRY A ARITMETIKY

Marie Benediktová Větrovcová*

Abstrakt

Al-Chvárizmího knihy *Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabal* (Algebraický traktát) a *Al-Kitab al-jam wa-t-tafriq bi-hisab al-Hind* (Aritmetický traktát) stojí na počátku kalkulu, a to jak aritmetického, tak algebraického. Ačkoli jsou tyto texty pro evropskou vzdělanost klíčové, českého překladu se jim dostává teprve až na začátku 21. století. První vydání s komentářem Petra Vopěnky je z roku 2008, druhé, opravené a o tři nové texty rozšířené vydání pochází z roku 2009.

Představíme čtenáři tyto původní texty s poukazem na arabskou matematiku kalkulací a poukazy k indické a řecké matematice. Přitom se dotkneme i vymezení některých filosofických a metodologických aspektů obou těchto základních kamenů matematického myšlení. Oproti práci [Ben-Fil] klademe větší důraz na matematické předpoklady vzniku algebraického textu a aritmetických postupů.

1 Zrod kalkulu

Starověká egyptská civilizace znala desítkovou soustavu – pro každou mocninu desítky až do deseti milionů měla zvláštní znak. Staří Sumerové a Babyloňané propojili šestkovou soustavu s desítkovou a počítali v šedesátkové číselné soustavě. Ještě v 5. století používal indický matematik **Arjabhatta** složité označování čísel pomocí slabik sanskrtu. Indická matematika přitom pracovala s desítkovou číselnou soustavou.

Ke zrodu aritmetického kalkulu s desítkovou poziční číselnou soustavou dochází patrně na začátku 7. století v Indii, přesná datace ale není nikde dochována. Najednou se místo zvláštního výsadního znaku pro desítku začaly objevovat znaky dva. Z původních zůstaly zachovány jen znaky označující čísla menší než deset a zavedla se tečka, později kroužek pro prázdné místo. Oproti nepozičním soustavám se tak potenciálně otevírá cesta k násobení a především

* Práce vznikla za podpory grantu GA ČR P401/10/0690 *Prameny evropské matematiky.* Problematika al-Chvárizmího traktátů byla předmětem diskusí v rámci *Semináře z fenomenologie exaktních věd*, pořádaném Mezioborovými aktivitami Výzkumného centra Nové technologie, Západočeské univerzity v Plzni. Seminář je součástí projektu OPVK ESF č. CZ.1.07/2.3.00/09.0070 *Mezioborový dialog jako podpora rozvoje vzdělanosti na vysokých školách, ve vědě, výzkumu a vývoji.* Tento projekt je spolufinancován z prostředků Evropského sociální fondu a státního rozpočtu České republiky.

dělení libovolně velkých čísel.[1] Tuto možnost odkryl a využil až Abu Abdalláh Muhammad ibn Músá al-Chvárizmí al Mádžúsí, zkráceně jen **al-Chvárizmí**, žijící na konci 8. a v první polovině 9. století.[2]

2 Pozadí al-Chvárizmího traktátů

V době 7. století začíná vzkvétat muslimská říše, sídelním městem se stává staroperský Damašek a dochází k prvnímu prolínání kultur – vládnoucí dynastie Abbásovců se totiž kromě Arabů ve své říši opírala i o Peršany, kteří přijali islám. Dochází tak k dalšímu stěhování sídelního města do Bagdádu.

Na konci 8. století po smrti chalífa Hárúna ar-Rašída tak probíhá v říši občanská válka, někdy nahlížená jako boj mezi Araby a Peršany, která skončila vítězstvím Peršanů (na území dnešního Íránu). Moc v říši přebírá jeho syn al-Ma'mún, který vyhrává nad bratrem al-Amínem, podporovaným Irákem.

Al-Ma'mún ... uvažoval nějaký čas i o tom, že přenese své sídlo z Bagdádu do Mervu. Narazil však na prudký odpor obyvatel Bagdádu a Iráku, a tak tuto myšlenku opustil a rozhodl se vrátit do hlavního města říše.[3]

Vliv Persie znamenal i zájem o vědu a vzdělání. Zároveň dochází k institucionalizaci sblížení vládní moci a náboženství. V tom velkou roli sehrály *madrasy*, které byly obdobou křesťanských seminářů. Chalíf al-Ma'mún, kráčející ve stopách svého otce, zde zřídil v Bagdádu *Dům moudrosti* (Bajt al-hikmá), první z mnoha akademií, kde se soustředila většina islámských učenců, kde byla zřízena knihovna a poskytovalo se vyšší vzdělání mimo mešity.

Byla vybudována zřejmě podle vzoru akademie v perském Gondéšápúru, středisku věd, především medicíny, jež založili nejspíš podle vzoru řeckých škol v Alexandrii a Antiochii křesťanští nestoriáni, kteří uprchli před pronásledováním z Byzance do sásánovské Persie.[4]

Hlavní náplní práce bylo soustřeďování, opisování a překládání do arabštiny spisů jak antické filosofie (a tedy i vědy), tak také prolínání s vlivy indickými. K antickým spisům se al-Ma'mún dostával přes Cařihrad nebo ze syrských či perských dřívějších překladů, ke spisům indickým převážně ze zdrojů perských. Do arabštiny se tak překládají matematické spisy **Eukleidovy**, **Archimedovy**, **Apolloniovy**, **Heronovy**, **Ptolemaiovy** a **Diofantovy**. Do světa se odtud dostávají ale také filosofické řecké práce **Pythagorovy**, **Platónovy**, **Aristotelovy** a **Plotínovy**, neuniknou ani lékařské texty **Hippokratovy** a **Galenovy**. Vedle toho se zřejmě na dvůr dostaly i novější matematické spisy **Arjabhatty**, **Bhaskary** a **Brahmagupty** či ajurvédská medicína **Sushruta**

[1] O tom, že další aritmetické operace jako umocňování, odmocňování libovolných čísel či bohatá práce se zlomky bez desítkové soustavy je nesmírně náročná, prakticky neproveditelná, práce, se již není nutné příliš rozepisovat, zvláště uvědomíme-li si šíři spojení „práce s libovolně velkými (či malými) čísly".

[2] Stručný al-Chvárizmího životopis se soupisem děl najdeme např. v [BK].

[3] Viz [DBV], str. 74. Tímto doplňujeme text [BK].

[4] Viz [DBV], str. 174.

Samhita včetně prací **Charakových**, pokrývající tak indické vědění 5.–7. století. Dům moudrosti zaniká během mongolského nájezdu do Badgádu roku 1258.[5]

Islámská vzdělanost se však obracela převážně ke kořenům antického Řecka, indickou vědu nedoceňovala. Proto al-Chvárizmí se svým bádáním v oblasti indické matematiky a astronomie nepatřil mezi nejprominentnější. Ve své době je znám převážně pro své astronomické výpočty a konstrukci astrolábu. Fakt, že v jejich pozadí stojí matematické zkoumání, byl tehdy opomíjen. Čas však ukázal, že jeho hlavními spisy byly tehdy nedoceněné traktáty, kterými se zasloužil o pozdější vývoj evropské matematiky a vzdělanosti. Dnes jsou tyto spisy známy jako *Algebraický traktát* a *Aritmetický traktát*.[6]

Poznamenejme, že v téže době, kdy píše al-Chvárizmí svá pojednání, působí v Domě moudrosti také první překladatel Eukleidových *Základů* Ibn Júsuf ibn Matar **al-Hajjáj** (al-Hadždžádž) a jejich komentátor al-'Abbás ibn Sa'íd **al-Džauhárí**.[7] I o těchto pracech al-Chvárizmí téměř jistě věděl, ale v textech se na **Eukleida** (ani na indického učence Brahmaguptu) přímo neodkazuje, *Základy* pouze ve svých pracech používá. Stejně tak se můžeme odvolávat na al-Chvárizmího znalost **Archimeda**.

Obr. 1 Socha al-Chvárizmího v Chivě.[8]

[5] Srv. [HW].

[6] V [BK] se zmiňují jako *Krátká kniha o počítání algebry a almukabaly* a *Traktát o indické aritmetice*.

[7] Viz [Šišma], str. 156 či [Beč-Eu], str. 40.

[8] Převzato z http://www.math.ens.fr/culturemath/video/html/Djebbar/icono.htm.

3 Filosofie jazyka matematiky

Protože jednou z možností, jak se dívat na historii matematiky, je zkoumat vývoj (ne)dokonalosti jazyka matematiky, pokusíme se k oběma al-Chvárizmího příspěvkům k dějinám matematiky přidat i poznámky, týkající se jazyka matematiky, ve kterém al-Chvárizmí pracuje. Budeme se přitom odvolávat na práci [Kvasz].

Podle **Ladislava Kvasze** se vedle nových poznatků matematiky poměrně významným způsobem proměňuje i jazyk, kterým jsou tyto poznatky sdělovány, formulovány a dokazovány. Často určitý významný matematický objev byl možný teprve až změnou syntaxe nebo sémantiky jazyka matematiky. Máme tak následujících šest aspektů jazyka matematiky:

1. *logická síla*, která ukazuje, nakolik složité formule lze v daném jazyce dokázat;
2. *expresivní síla*, která ukazuje, co nového, co v předešlých stadiích nebylo možné vyjádřit, nyní jazyk vyjádřit dovede;
3. *explanatorická síla*, která ukazuje, jak nový jazyk umožňuje vysvětlit selhání jazyka, která byla v předešlém stadiu nepochopitelná;
4. *integrativní síla*, která ukazuje, jak nový jazyk dovoluje vidět jednotu a pořádek tam, kde se na bázi předešlého jazyka ukazovaly pouze nesouvislé, ba až nahodilé, případy;
5. *logické meze*, které přinášejí nečekaná a překvapivá ohraničení možností nového jazyka, omezení jeho schopnosti řešit určité problémy, anebo odpovídat na jisté otázky;
6. *expresivní meze*, které se projevují tím, že i když se přísně dodržují syntaktická pravidla, v jazyce se začínají objevovat nesmyslné výrazy.

Vývoj jazyka spočívá v nárůstu logické a expresivní síly, protože jazyk umožňuje dokazovat stále více tvrzení a popisovat stále bohatší oblast jevů. Postupně narůstá i jeho explanatorická a integrativní síla, neboť jazyk umožňuje stále hlubší porozumění svým metodám a poskytuje tak ucelenější a jednotnější pohled na svůj předmět. Al-Chvárizmího traktáty nám slouží jako dílčí doklad tohoto vývoje v přechodu *od jazyka geometrie k jazyku algebry a aritmetiky.*

4 Metodologická poznámka

Metodicky jsou *oba* al-Chvárizmího traktáty psány tak, aby téma bylo vyloženo nejprve velmi stručně v obecném pojednání. Následuje několik názorných příkladů, které se snaží postihnout všechny případy, které mohou nastat. Vždy postupuje názorně, od jednoduššího ke složitějšímu. Nelze si ale nevšimnout, že povahou se jedná o deduktivní metodu Eukleidových *Základů.*

V případě *Aritmetického traktátu* se jedná o popis algoritmu, jak počítat. Příklady jsou zde pravidelně uváděny právě tři, jsou jen ilustrativní a dokládají správnost algoritmů. Pokud chybí, pak se jedná s největší pravděpodobností o nedostatek překladu z arabštiny do latiny (čili pro nás zdrojového textu). Zachycují ale také i povahu arabské středověké aritmetiky obecněji – dokládají (i když ne vždy přímo explicitně) jisté jevy a vlastnosti nového aritmetického kalkulu.

U *Algebraického traktátu* jsou příklady u vyjádření novodobě řečeno kvadratických rovnic častější než u ostatních typů úloh. Problematika kvadratických rovnic je tedy i z tohoto hlediska nejpropracovanější partií *Algebraického traktátu* co do obecnosti. Doprovodné příklady jsou oproti *Aritmetickému traktátu* mnohem praktičtější a méně zacílené. Spis zůstává na úrovni učebnice lineárních algebraických rovnic prvního a druhého stupně s prolnutím prvků aritmetiky a aplikacemi v geometrii.

Ještě dodejme pár slov k algoritmům. *Aritmetický traktát* stojí na počátku teorie algoritmu. Koneckonců i vlastní slovo **algoritmus** pochází z latinizované podoby al-Chvárizmího jména Algorizmi – úvodní pasáže traktátu latinského vydání totiž začínají slovy *Dixit Algorizmi* – Algorizmi pravil. Po způsobu al-Chvárizmího, Algorismiho, se ve středověku tvořily nové učebnice aritmetiky, které vyučovaly právě těmto algoritmům – způsobům, jak získat součet, rozdíl, součin, podíl a později i kořen (odmocninu) čísel, libovolně velkých.

O algoritmu jako o metodě, způsobu uvažování, kterou al-Chvárizmí otevírá nový svět matematiky kalkulací, se můžeme podrobněji dočíst v [Knuth]. **Donald E. Knuth**, který je znám jako guru algoritmů, autor 50 let stále nadčasové, zatím čtyřsvazkové „bible“ computer science, *The Art of Computer Programming*, srovnává různé oblasti matematiky a stopuje, že je pro ně charakteristický algoritmický způsob práce, způsob, na počátku jehož stál právě al-Chvárizmí.

5 Aritmetický traktát

5.1 Úvod

Al-Chvárizmího *Aritmetický traktát* je uváděn i jako Traktát o indickém počítání. Pro brahmanský svět je nutné pracovat s většími než největšími (maható mahíján) a menšími než nejmenšími (anóraníján), jak můžeme najít vyjádření čidákásy v indických Upanišadách. Toto vyjádření se vztahuje k brahma (nejvyšší kosmický princip) a k átma (jáství), základním ontologickým pojmům védské filosofie. Stojí totiž za poměry živlů, elementů (bhúta).[9]

Al-Chvárizmí přivádí indické pojetí a chápání čísel do arabského světa v následujícím úryvku z preambule:

… a abys nám [Bože] *pomohl uskutečnit to, co jsme si předsevzali objasnit o počítání Indů pomocí devíti číslic, jimiž vyjádřili libovolné dané číslo, činíce tak pro snadnost a stručnost, ulehčující tomu, kdo se zabývá aritmetikou, to*

[9] Srv. [Upanišady], Śvétáśvatara, III, 20, Kéna, I, 3.

je počítáním s největšími a nejmenšími čísly a vším, co je v ní obsaženo od násobení a dělení, sečítání a odčítání, a dalším.

Cílem traktátu je ukázat, jak velká (nebo velmi malá) čísla[10] pojmout a pracovat s nimi, a to dokonce nejen teoreticky, ale i v praktickém životě. Vnitřním cílem je potencialita i totalita, naplněnost těchto čísel pro vlastní žití. Cesta, která je „hmatatelnou“ stopou po pouti za těmito čísly, residuum, které po ní zbyde, představuje počítání ve dvou číselných pozičních soustavách, desítkové (pro čísla kladná celá) a šedesátkové (pro zlomky).

Pro Evropu *Aritmetický traktát* znamená prvotní učebnici aritmetického kalkulu, která se v průběhu středověku mnohokráte anonymně přepisovala a doplňovala, v těchto číselných soustavách. Zárodky šestkové, desítkové i šedesátkové byly v Mezopotámii dlouho zakořeněné,[11] přesto se při svém psaní autor odvolává výhradně na Indy. Vrcholem traktátu je počítání se zlomky o libovolném základě s náznakem nejspíše vlastní al-Chvárizmího práce.[12]

Stejně jako Eukleidovy *Základy* stojí na počátku geometrie a deduktivní metody, je i al-Chvárizmího *Aritmetický traktát* dalším pramenným textem základů evropské vzdělanosti, který společně s *Algebraickým traktátem* přinesl Evropě symbolické počítání.

5.2 Číslice a čísla

Jak je uvedeno v pojednání [Vopěnka], Indové uměli bravurně počítat s velkými čísly. Al-Chvárizmího to natolik zaujalo, že chtěl vstoupit do tohoto světa a svým pojednáním je tak zprostředkovat i ostatnímu (rozumějme arabskému) světu.[13] Postupuje přitom systematicky a názorně tak, aby vše, o čem píše, měl již náležitě odhalené.

Al-Chvárizmí nejprve představí východoarabskou i západoarabskou podobu číslic (viz obr. 2).

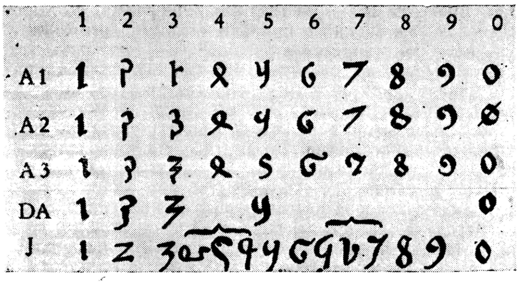
[10] Velká ve srovnání s hellénskou tradicí.

[11] Viz [MEM], str. 107–218. Připomeňme, že Bagdád se nachází na území bývalé Mezopotámie, takže al-Chvárizmí snadno v Domě moudrosti tyto vlivy vstřebal. Srv. [Vopěnka], str. 20 nebo [Šišma], str. 156.

[12] Původní arabský text se nedochoval a není ani znám jeho vlastní název. Al-Chvárizmího arabsky psaný spis se patrně jmenoval *al-Kitab al-džam ‘wa-l-tafrígh bi-hisáb al-Hind*, tj. *Kniha o sčítání a odčítání podle indického počtu* – viz [CP], str. X. Vycházíme proto z latinského textu často označovaného jako *Algoritmi de numero Indorum* (uváděno též jako *Kniha o indickém počítání*). Nejedná se však o přesný překlad, ale spíše o výklad al-Chvárizmího počinu soudobými prostředky (používání římských číslic, chybějící arabské figury i vlastní výpočty). Česká vydání [A08] a [A09] jsou pořízena překladem z ruštiny. Uzbecké vydání [A83] v ruštině vzniklo překladem z latiny na základě rukopisu uloženého v knihovně University of Cambridge. Srovnání tohoto vydání a pozdějšího *Liber Algorismi de practica arismetrice* najdeme v [Karpinski]. Z hlediska použitých technik pak v [Benedict]. Dodejme ještě, že oproti prvnímu českému vydání ([A08]), které obsahuje komentář a překlad latinského textu, je do druhého vydání ([A09]) mimo jiné zařazen i Pokus o rekonstrukci původního arabského textu ([Ben-Rek]).

[13] Srv. „Prakticky každá vyspělejší civilizace si vytvořila vlastní číselný systém, který umožnoval *převést úlohu počítání na úlohu manipulace s číselnými znaky.*“ [Kvasz], str. 18.

Aby ale číslice nebyly pouhými symboly pro nic, hledá podstatu čísel, kterou opírá o číslo jedna.



Obr. 2 Vývoj indických podob číslic, které středověký arabský svět užíval.[14]

5.3 Co je číslo?

Abychom mohli vymezit, co je číslo, musíme si ujasnit, co je jednotka jakožto základ všech ostatních (kladných celých) čísel. Ontologický status jednotky al-Chvárizmí zakládá takto:

Každé číslo je složené z jednotek. [...] *Jednotka je základ každého čísla a leží vně čísel.* [...] *Ona určuje každé číslo. Vně čísel je proto, že je určena sama sebou.* [...] *Ostatní čísla se bez jednotky nemohou vyskytovat.* [...] *Tedy číslo není nic jiného, než soubor jednotek.*[15]

Tomu rozumějme i tak, že jednotka jako jediné číslo má smysl sama o sobě, nemusí se k ničemu dalšímu vztahovat, nepotřebuje nic víc dodat, aby mohla být, nevyžaduje dourčení „čeho počet“. Navíc pokud je, tak už je nutně. Číslo jedna (z dnešního pohledu) pro al-Chvárizmího ještě není rovnoprávným číslem,[16] není totiž počtem, leží mimo čísla.[17] Dodejme ještě, že ohledně ustanovení jednotky se al-Chvárizmí odvolává na svůj dřívější *Algebraický traktát*, nicméně zde je s výkladem preciznější.

---

[14] Převzato z [A83], str. 157.

[15] Viz [A09], str. 112.

[16] Ačkoli al-Chvárizmí rozlišuje mezi podstatou jednotky a čísla, pro naše potřeby popisu spisu si dovolíme psát o jednotce jako o číslu, protože při zápisu pomocí číslic a vlastním počítáním s jednotkou pracuje jako s ostatními čísly. Podle Ladislava Kvasze ([Kvasz], str. 17) má matematika sama o sobě tendenci si svůj jazyk dodatečně vylepšovat a rozšiřovat, takže za základní číselný obor (nyní) bere obor komplexních čísel v celé jeho plnosti.

[17] O ontologickém statutu jednotky a čísla ve vztahu k řecké tradici a soudobým či pozdějším středověkým výměrům viz [Ben-Fil]. O ostatních středověkých aritmetických traktátech pojednává [Benedict].
K postavení jednotky v rámci řecké matematiky srv. Servítovu poznámku [Servít], str. 103, doprovázející výměry VII. knihy Eukleidových *Základů* a dále výměry Aristotelovy *Metafyziky* (Met. B 4 1001a14 a Met. B 4 1001a24), viz [Met], str. 93–94.
O ontologickém základu jsoucna a jednotky viz též [Patočka], str. 69.
O posunu sémantického pole ohledně jednotky jakožto čísla vedle [Benedict] svědčí např. i srovnání Isidora ze Sevilly [Isidor], str. 283, a Křišťana z Prachatic [CP], str. 17.

Čísla, která jednotku následují, jsou vyčíslována potenciálně do nekonečna. *Nekonečnost čísel v potenci* al-Chvárizmí uvažoval a pracoval s ní. Zacházení s čísly pomocí poziční desítkové soustavy, převzaté od Indů, se jevilo v té době jako revoluční.

Oproti tomu všemu *nula* jako číslo není uvažována vůbec. Ontologické postavení, které má jednotka, se nule ještě zdaleka nedostává. Ani v *Aritmetickém traktátu*, ani v *Algebraickém traktátu* nenajdeme žádné podobné výměry jako pro jednotku. Al-Chvárizmí zavádí pouze syntaktickou podobu nuly – kroužku jako vyjádření toho, že v dané pozici se nenachází žádné číslo.

Připomeňme, že z dnešního pohledu jsou nula i jednotka z hlediska aritmetiky rovnocenně významnými entitami – jsou to konstanty algebraického kalkulu.[18]

5.4 Utváření čísla v desítkové poziční soustavě

Pro čtení původního, arabského *Aritmetického traktátu* je nutné si uvědomit, jakým způsobem jsou čísla utvářena. Číslo má jednak svou syntaktickou podobu, znak, ale i svůj význam, sémantiku. V textu poznáme vyjádření sémantiky čísla tak, že číslo je zapsáno slovním popisem, který vyjadřuje skutečný počet (stav věcí). Takže Aritmetický traktát, ačkoli by se na první pohled dnešníma očima mohlo zdát, že je triviální učebnicí počtů, které obsáhne žák prvních pěti ročníků povinné školní docházky, je vlastně uvedením do světa, kde lze najednou velká (a zároveň na druhou stranu velmi malá (kladná, nule blízká) racionální) čísla i vidět.

Vedle toho ale je v druhé rovině psaný znak, syntaktická podoba čísla, psaný způsobem, který je nám velmi blízký, v podobě desítkové poziční soustavy. Al-Chvárizmího převzatý zápis pozičně sledoval sémantiku čísel (kolik jednotek, desítek, tisíců, desítek tisíců, stovek tisíců, tisíců tisíců, …, tisíců tisíců tisíců, …).

Při čtení překladu latinského textu psaného pomocí římských čísel nám připadá, že se směšuje psaní čísel s jejich výkladem. V původním textu nejspíše tyto (římské, ale ani jiné) číslice nebyly, protože se nejprve pojednává o zavedení pojmů jednotlivých čísel (sémantika), a teprve poté jde o psaní čísel pomocí znaků (syntax). Musíme si ale uvědomit, že římská čísla/číslice jsou zde (podobně jako v jiných středověkých textech) zkratkou pro slovní zápis čísel, který s velkou pravděpodobností v arabském originále byl. V textu se vedle toho vyskytují místy i indo-arabská čísla. Ne však všude, kde v původním textu zřejmě byla. Tam, kde byl zápis syntaxe pomocí indo-arabských čísel pro překladatele z arabštiny do latiny příliš náročný, není totiž v latinském textu uvedeno nic.

Konkrétně: al-Chvárizmí přebírá od Indů devět znaků pro jedničku a čísla

[18] Petr Vopěnka dokonce uvádí popis arabského algebraického kalkulu (pouze s konstantou 1), který upravuje na indický (algebraický kalkul) přidáním konstant 0 a -1. [Vopěnka], str. 65–76.

do devíti a navíc přidává ještě desátý znak pro vyjádření prázdné pozice (řádu). Tím je pro něj kroužek. Prostřednictvím zápisu do poziční desítkové soustavy, který se dodnes učí na začátku výuky matematiky, mohl uchopit velká čísla velmi rychle a snadno. Na rozdíl od dnešní zvyklosti čísla však psal v obráceném sledu než zápis řeči. Konkrétně zápis 325 je velmi efektivní zkratkou za vyjádření pět, tj. 5, jednotek, dvě, tj. 2, desítky a tři, tj. 3, stovky. Činí tak ve stejném smyslu jako bychom uvažovali pět jablek, dvě hrušky a tři švestky.

Způsob zapisování čísel je uzavřen sémantikou řádů v příkladu zápisu čísla[19]

$$1\,180\,703\,051\,492\,863.$$

Tento příklad je zdánlivě temný, ale zřetelně podán proto, aby bylo vidět, že i takto velká čísla není problém uchopit a pracovat s nimi. Tedy uvažovat o nich nejen jako syntaktické zkratce něčeho, co si nelze představit. Záměrem al-Chvárizmího tedy bylo uchopit a mít možnost pracovat s do té doby (pro řeckou tradici) nemyslitelnými velkými čísly jako s čísly běžnými. K tomu poznamenejme jako příklad indické výměry pro časově omezené určení věčnosti: indický bůh Brahmá, tvoří vesmír jako konečný. Brahmá, když se probudí a zrodí z květu lotosu, zrodí vesmír, aby poté na konci před jeho odpočinkem i zanikl a mohl se zrodit další. Doba trvání takovéhoto jednoho kosmického cyklu od jeho stvoření do jeho zániku je jeden Brahmův den (kalpa) a stejně dlouhá je i noc, kdy Brahmá po předchozím tvoření odpočívá. Brahmův den se rovná tisíci rokům bohů, přičemž rok bohů trvá 360 lidských let. Brahmův den se dělí na tisíc velkých věků (mahájuga), z nichž každý má 4 320 000 lidských roků. Tedy jedna kalpa trvá

$$4\,320\,000\,000 \text{ let.}$$

Z hlediska brahmánské kosmologické filosofie jsou tedy takto velká čísla, která al-Chvárizmí dokládá, naprosto odpodstatněná.[20]

Ustavením desítkové poziční soustavy u al-Chvárizmího je vyjádřena podle Ladislava Kvasze expresivní síla jazyka.[21] Algoritmy, které následují, předznamenávají písemné počítání, které nejspíše Indové prováděli zpaměti. Z tohoto pohledu tedy algoritmus jakožto způsob matematizace, tj. způsob jak vědět a vidět způsob vědění, zcela zapadá do naší vzdělanostní tradice.

5.5 Sčítání a odčítání

Následuje pojednání o tom, jak velká čísla sčítat a hlavně odčítat – dnešními slovy tedy písemně sčítat a odčítat. Písemné sčítání se al-Chvárizmímu jevilo jako neproblematické.[22]

---

[19] Viz [A09], str. 117–118.

[20] Srv. [DI], str. 185–191, [Upanišady].

[21] Srv. [Kvasz], str. 20.

[22] Oproti tomu Křišťan z Prachatic později důsledně přičítá menší číslo k většímu, protože je to pro něj snadnější. Při sčítání kombinuje pamětné sčítání jednotek se sčítáním písemným. Srv. [CP].

Uvádí pouze obecné poučení, příklady na rozdíl od metody odčítání neuvádí. Dvě čísla máme sepsat pod sebe a sčítat jednotky jednotlivých řádů. Při překročení deseti máme přičíst jednotku do vyššího řádu.

Odčítání se zdá být složitější. Kromě obecného poučení o metodě, obecného popisu algoritmu, jak písemně odčítat, totiž al-Chvárizmí připojuje i příklady. A u výběru příkladů pro odčítání se zastavme, zdá se být pozoruhodný.

Nejprve odečítá polovinu čísla, jehož všechny řády jsou sudé:[23]

$$\begin{array}{cccc} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

Je zřejmé, že umět udělat polovinu, bylo pro tehdejší svět velmi důležité. Navíc je zde skrytý fakt (dnešní symbolikou)

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tato polovina je přitom *ideální*! Navíc je dosažená nikoliv konstrukcí, jak jsme zvyklí z řecké geometrie, a to způsobem, že je tato polovina názorná, ale tato polovina je dosažena čistým kalkulem! Toto je pro vývoj matematiky velmi přelomové místo. Názor už nemusí být nutně jen geometrický, lze pokládat podloží i pro názor aritmetický.

Druhý příklad dokládá, jak pozice v zápisu fungují:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 4 & 4 \\ & 1 & 4 & 4 \\ 1 & \circ & \circ & \circ \end{array}$$

Dnešní symbolikou

$$1\,144 - 144 = 1\,000.$$

Jinými slovy: není nutno pracovat s číslem jako celistvou nedílnou entitou, stačí pracovat s jeho jednotlivými řády. Číslo je „dělitelné“ ve smyslu ontologickém na jednotlivé menší části. Nezapomeňme v tomto uvažovat potencialitu nekonečna, a to nejen co do mohutnosti čísel, ale také těchto částí – číselných řádů.

Pro názornost a porozumění jsou dnešnímu čtenáři zápisy pomocí číslic v desítkové poziční soustavě nezbytností. Nebylo to však samozřejmostí. Třetí příklad totiž v překladu latinského textu chybí, jednalo se zřejmě o odčítání s přechodem přes desítku. Petr Vopěnka v komentáři[24] uvádí $952 - 874 = 78$, tj. podle al-Chvárizmího způsobu:

$$\begin{array}{ccc} 9 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 4 \end{array}$$

[23] Zápis čísel pod sebou koresponduje takto: v prvním řádku se nachází menšenec, v druhém menšitel, ve třetím rozdíl.

[24] Viz [Vopěnka].

To nejprve upravíme

$$\begin{array}{ccc} 8 & 15 & 2 \\ 8 & 7 & 4 \end{array}$$

a ještě

$$\begin{array}{ccc} 8 & 14 & 12 \\ 8 & 7 & 4 \end{array}$$

z toho důvodu, abychom v každém řádu od většího čísla odčítali menší, takže spočítáme

$$\begin{array}{ccc} 8 & 14 & 12 \\ 8 & 7 & 4 \\ & 7 & 8 \end{array}$$

Podobný příklad zřejmě součástí traktátu byl.

Než se pustíme dál, je nutno si uvědomit, že metoda sčítání a odčítání se zde sice vykládá na běžně užívaných číslech, přesto ji lze aplikovat pro *libovolně velká* čísla (například přesné vyčíslení hrubého domácího produktu do jedné koruny jakožto součet peněžních hodnot všech ekonomických statků a služeb vytvořených za dané období na území České republiky). To se ovšem na úrovni primárního vzdělání nečiní, žáci to neprovádějí z důvodů časové náročnosti. Odpověď je pragmatická – nepotřebují to, „na to přece máme počítače“.

5.6 Půlení a zdvojení čísla

Text pokračuje půlením a zdvojením čísla. Podle práce [Benedict] se jedná o vlastní al-Chvárizmího přínos. K tomu, abychom tyto úkony zvládli, se předpokládá znalost půlení sudého čísla (přesněji rozpůlení osmi, šesti, čtyř a dvou). Při půlení lichého čísla se dělí nejbližší nižší sudé číslo a jednotka se půlí na $\frac{30}{60}$ (tj. 30 minut). Al-Chvárizmí se přímo věnuje až půlení čísel větších než 10, tj. věnuje se dělení v desítkové poziční soustavě. Dělení řádu řeší pomocí kroužku $\circ$ a čísla 5.

Dvojnásobek čísla provádíme od vyššího řádu k nižšímu. Aby byla metoda korektní, pak při překročení desíti musíme povýšit předchozí (tj. vyšší) řád o jedna.

5.7 Násobení

Po dvojnásobku následuje poučení o násobení libovolných čísel, čímž se rozšiřuje pojednání z *Algebraického traktátu* (viz dále), kde se uvádí násobení dvouciferných čísel algebraickým způsobem jako násobení dvojčlenů.

V *Aritmetickém traktátu* je popsán postup, jak (písemně) násobit v desítkové poziční soustavě od vyšších řádů k nižším. Příkladem je $2\,326 \cdot 214 = 497\,764$ s následujícím algoritmem:[25]

[25] Jednotlivé kroky jsou podrobně zdůvodněné v [Ben-Rek], str. 95–96. Text [Benedict], str. 74–75, podává jiný způsob zápisu tohoto algoritmu.

			2	3	2	6
1. krok:	2	1	4			
	4	2	8			
2. krok:			2	3	2	6
	2	1	4			
3. krok:	4	2	8	3	2	6
		2	1	4		
		6	4	2		
4. krok:	4	2	8	3	2	6
		2	1	4		
5. krok:	4	9	2	2	2	6
			2	1	4	
			4	2	8	
6. krok:	4	9	2	2	2	6
			2	1	4	
7. krok:	4	9	6	4	8	6
				2	1	4
			1	2	8	4
8. krok:	4	9	6	4	8	6
				2	1	4
9. krok:	4	9	7	7	6	4

Abychom byli více přesvědčeni o správnosti postupu (nikoli o pravdivosti názoru), uvádí al-Chvárizmí tzv. *devítkovou zkoušku*, která má původ v indické matematice.[26]

5.8 Dělení

Al-Chvárizmí dodává i algoritmus pro dělení (v oboru kladných přirozených čísel). V latinském textu, který je zdrojem pro české vydání [A08], je však velmi ledabylé. Obsahuje pouze obecný popis, příklady se překladem z arabštiny do latiny nejspíš ztratily. Proto v druhém vydání [A09] je dělení rozvedeno do algoritmické podoby tak, aby bylo v souladu se způsobem algoritmů, který dosud al-Chvárizmí užíval.[27] V [A83], str. 165–167, je k dělení i další komentář.

Al-Chvárizmí podává dva příklady, které algoritmus pro dělení dokládají,[28] třetí zde asi také byl podán. První příklad je $46\,468 : 324 = 143$ se zbytkem 136 a algoritmus k tomu následující:

[26] Srv. [Vopěnka], str. 34, a [A09], str. 124–125.

[27] Viz [Ben-Rek], str. 97–102.

[28] Latinský překlad už tyto příklady v algoritmické formě neuvádí. Proto druhé české vydání [A09] obsahuje i historickou rekonstrukci textu [Ben-Rek] a příslušné formy, které jsou i zde uvedeny, dělení v příkladech doplňují.

1. krok: $$\begin{array}{ccccc} 4 & 6 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & & \end{array}$$

2. krok: $$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 4 & 6 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & & \\ 1 & 4 & \circ & & \end{array}$$

3. krok: $$\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ 1 & 4 & \circ & 6 & 8 \\ & 3 & 2 & 4 & \end{array}$$

4. krok: $$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & & & \\ \circ & 2 & \circ & 6 & 8 \\ & 3 & 2 & 4 & \end{array}$$

5. krok: $$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & & & \\ \circ & 1 & 2 & 6 & 8 \\ & 3 & 2 & 4 & \end{array}$$

6. krok: $$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & & \\ \circ & 1 & 1 & \circ & 8 \\ & & 3 & 2 & 4 \end{array}$$

7. krok: $$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & & \\ \circ & \circ & 2 & \circ & 8 \\ & & 3 & 2 & 4 \end{array}$$

8. krok: $$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 3 & & \\ \circ & \circ & 1 & 3 & 6 \\ & & 3 & 2 & 4 \end{array}$$

Druhý příklad je $1\,800 : 9 = 200$:

A chceš-li dělit mnohé řády jedním, třeba tisíc osm set s devíti, napiš 18○○. *Poté postav* 9 *pod* 8, *protože jsou větší než* 8*; poté napíšeš přímo nad nimi nad* 8 *něco, co při násobení* 9 *dá ve výsledku to, co je nad nimi, to je dá* 18, *které jsou nad* 9, *a najdeš, že to bude* 2, *které vynásobíš* 9*; a bude* 18*; odečteš je od toho, co je nahoře, a nezbude nic.*

1. krok: $$\begin{array}{cccc} & 2 & & \\ 1 & 8 & \circ & \circ \\ & 9 & & \end{array}$$

2. krok: $$\begin{array}{cccc} & 2 & \circ & \\ 1 & 8 & \circ & \circ \\ & & 9 & \end{array}$$

3. krok: $$\begin{array}{cccc} & 2 & \circ & \circ \\ 1 & 8 & \circ & \circ \\ & & & 9 \end{array}$$

4. krok: $$\begin{array}{cccc} & 2 & \circ & \circ \end{array}$$

5.9 Zlomky

Pokud se al-Chvárizmí věnuje zlomkům, je si sice vědom, že mohou mít různé základy, přesto začíná nejprve tzv. indickými, tj. šedesátinami. Činí tak zřejmě i z tradice mezopotamské. Je si zároveň vědom *potenciálně nekonečného množství zlomků* ve smyslu reciprocity potenciálně nekonečného množství čísel (kladných přirozených). Zlomkům o jiných základech, které v úvodu k počítání se zlomky předznamenává, se věnuje v závěru svého pojednání.

Se *zlomky založenými na šedesáti* zachází stejně elegantně jako s čísly kladnými přirozenými. Z dnešního pohledu s nimi zachází způsobem, jakým se vyučuje práce s úhlovou mírou. Používá pro to šedesátkovou soustavu zapisovanou pomocí čísel vyjádřených v desítkové poziční soustavě. Jednotlivé řády následující jednotky směrem k nižším pak jsou minuty, sekundy, tercie, kvarty, kvinty, sexty, atd. Při zápisu je sepisuje pod sebe. Například $12°30'45''50''''$ píše

$$\begin{array}{l} 12 \\ 3\circ \\ 45\,. \\ \circ\circ \\ 5\circ \end{array}$$

Teprve až pozdější tradice zavádí psaní úhlové míry tak, jak jsme zvyklí, v řádku, přičemž jednotlivé řády odděluje znaky $°$, $'$, $''$. Další už nepoužívá, zřejmě z důvodu praktického – přesnější měření se běžně neužívala.[29]

Samotné počítání se zlomky znamená násobení a dělení. Al-Chvárizmí nejprve násobí zlomky celým číslem (často zmiňované jako stupeň), pak následuje násobení zlomků (vlastních i nevlastních) mezi sebou. Podobně jako s velkými čísly je potřeba i zde dávat pozor na řády a pro prázdný řád užívat kroužek. Vzhledem k tomu, že na závěr násobení al-Chvárizmí poznamenává, že zná i jiný způsob, jak násobení zlomků provádět, nebyl tento způsob buď tak efektivní, nebo akceptovatelný, jako ten, který popsal, tj. postup, který používali Indové při svém počítání. Poznamenejme, že ještě při dělení čísel, z nichž jedno je necelé, je důležité umět převádět čísla do stejných řádů (až na úroveň toho nejnižšího).

Když jsme zvládli násobení a dělení, přejdeme s al-Chvárizmím ke sčítání, odčítání a zdvojení čísel – zlomků (opět od nejvyššího řádu k nejnižšímu, jak běžně počítáme z paměti).

Aritmetický traktát je v českém vydání [A08] i [A09] uzavřen prací se *zlomky o jiných základech.* Tuto práci máme provádět obdobným způsobem jako u zlomků indických – při počítání užívá převedení zlomků na společný jmenovatel. Podrobněji se však neuvádí.

Zlomky o jiných základech český překlad končí. Tím se sleduje text cambridgeského vydání, ve kterém slibované pojednání o odmocňování chybí.

[29] Poznamenejme ještě, že stejné značení jako úhlová minuta a sekunda mají i anglické délkové míry stopa a palec.

Možná ani součástí původního textu nebylo, protože bylo odvoditelné z algebry a almukabaly (obsažených v *Algebraickém traktátu*). Pozdější aritmetické traktáty ho ale běžně uváděly.[30]

6 Jazyk Aritmetického traktátu

Z hlediska vývoje jazyka matematiky podle přístupu Ladislava Kvasze můžeme říci, že jazyk *Aritmetického traktátu* je stále ještě *neexplanatorický*, neumožňuje vyjádřit všeobecnost a není v něm možné vysvětlovat, pouze ukazovat. To, čím je *Aritmetický traktát* pro svou dobu přelomový, je ale *změna v integrativní sílu* jeho *jazyka*.[31] Nejedná se už o pouhý souhrn úloh nejrůznější povahy bez jednotícího prvku jako u egyptské či mezopotamské matematiky,[32] ale o první črty vysvětlení matematické podstaty problému.

7 Poznámka o kosmologické povaze spisu

V práci [Bel-Fil] se rozebírá filosofické zdůvodnění povahy *Aritmetického traktátu* jako nedokončeného kosmologického spisu. Hlavní tezí je, že ačkoli nemá spis geometrický základ, ale aritmetický, přesto je devět čísel (jedna až devět) základním stavebním materiálem (ve smyslu elementy/stoicheia), ze kterého lze cokoli (a to nejen v oboru aritmetiky) vystavět. Zdůvodnění, které je zde podáno, směřuje jednak na význam preambule traktátu a jednak na Popperovu tezi[33] o kosmologické povaze Eukleidových *Základů*, ke kterým se v tomto *Aritmetický traktát* přirovnává. Je nutno podotknout, že při sledování práce s indickým počtem, zdůvodněním potřeby počítat s tak velkými čísly je nutné mít na zřeteli i kosmologické aspekty brahmánských *Upanišad*.

8 Algebraický traktát

8.1 Úvod

Ačkoli je *Algebraický traktát* starší než *Aritmetický traktát*, je jeho významným doplňkem. Ukazuje nám, jak se na svět čísel dívat prakticky – jedná se totiž o příručku, jak se vypořádat „při dělení majetků, v záležitostech soudních, v obchodě, při uzavírání smluv a také při vyměřování půdy, vedení kanálů, ve stavitelství a při nejrůznějších jiných pracích“.[34] Čísla zde reprezentují veličiny geometrických obrazců tak, aby pomohla řešit jednoduché otázky aritmetiky, ty složitější pak spadají do *Aritmetického traktátu*, kde se jim al-Chvárizmí věnuje systematicky a s utvořením metody – příslušného algoritmu.

Musíme podotknout a včas uvést na pravou míru, že se nejedná o algebru, na kterou jsme ze sekundárního vzdělávání zvyklí, tj. že se nejedná o symbolické počty. Al-Chvárizmího *Algebraický traktát* teprve stojí na jejich počátku. Spíše

[30] Srv. [CP], str. 98–125; zde nikoli ve tvaru výpočtu či algoritmu, ale pouze slovně.
[31] Srv. [Kvasz], str. 21.
[32] Příklady viz [MEM].
[33] Srv. [Popper], str. 116–118.
[34] Viz [A09], str. 139.

než o algebře v novodobém smyslu pojednává o tom, jak rychleji a efektivněji řešit *geometrické úlohy* – a to, samozřejmě, také jinými prostředky, než jaké řecká matematika používala. *Algebraický traktát* stojí na počátku disciplíny, která se později nazývá **geometrická algebra**. Za všemi „rovnicemi" je nutno vidět dělení polností, věci dědictví a další majetkové záležitosti a i v této optice o nich uvažovat.

Algebraický traktát se nám zachoval v arabštině jako *Al-Kitáb al-muchtasar fí hisáb al-džebr wa-l-muqábala*, v latinském překladu je znám jako *Liber algebræ et almucabalæ continens demontrationes aequationum regularum Algebræ* (autorství je připisováno Robertu z Chesteru). Arabské slovo al-džebr, jehož latinizovaná podoba **algebra** se udržela dodnes, i když už s posunutým významem, znamená *přenos odčítaných výrazů z jedné strany rovnice na druhou tak, abychom nahradili odčítání přičítáním.* Výraz al-muqábala, latinizovaně **almucabala**, je krácení. Pro Evropu se naukou algebry a almukabaly rozuměla dnešními pojmy nauka o (algebraických) rovnicích prvního, druhého i vyšších stupňů o jedné, ale i více neznámých.

Poznamenejme, že podobně jako slovo *algoritmus* (algorithmus, argorismus, algorismus, alchorismus) má díky frázi „po způsobu Algorizmiho" původ ve jménu arabského učence, termín *algebra* označuje mj. způsob práce s rovnicemi v původním smyslu, tj. al-džebr a al-muqábaly.

V samotném *Algebraickém traktátu* se setkáváme se studiem rovnic kvadratických s kladnými přirozenými koeficienty (místy i racionálními koeficienty), řešenými v oboru kladných celých čísel. Hlavním cílem bylo často získat kvadrát (tj. majetek), nikoli kořen. Kvadrát přitom vyjadřoval, jak velkou část pole, půdy, kdo při dělení dědictví získá.

Kvadratické rovnice, na které se nejčastěji v souvislosti s obsahem *Algebraického traktátu* všeobecně odkazuje, však nebyly jedinou součástí tohoto spisu. O tom, že *Algebraický traktát* byl předstupněm pro *Aritmetický traktát*, svědčí praktické oddíly – o algebraickém násobení čísel a zvětšování a zmenšování. Stejně tak můžeme pohlížet i na hledání kořene jako na jednu z možností, jak ve speciálních případech odmocňovat.[35]

Vedle tohoto aritmetického uplatnění textu najdeme dále úlohy založené na metodě výpočtu trojčlenky (oddíl o obchodování) a úlohy metrické geometrie, v nichž al-Chvárizmího výsledky, uvedené v předchozím textu, můžeme uplatnit. Geometrické úlohy al-Chvárizmí přebírá jednak od Eukleida, jednak od Archimeda.

Podle [BK] byla součástí textu ještě také *Kniha o závětích*, kterou celý spis gradoval. Ta se věnuje dělení majetku podle pravidel islámského kanonického práva šari'a. Činí tak pomocí aplikací algebry na problematiku dělení dědictví. V ruském vydání [A83] je najdeme, v českém vydání [A08], ani [09] není.[36]

[35] Odmocňování je totiž v *Aritmetickém traktátu* předznamenáno, ne však v nejstarších překladech–výkladech dopracováno. Domníváme se tedy, že se al-Chvárizmí mohl odvolávat na svůj dřívější *Algebraický traktát.*

[36] Více viz [BK], str. 128 a 134–135.

8.2 Preambule

Algebraický traktát je zahájen slovy: „Ve jménu Boha milosrdného a slitovného". Tedy stejně jako jakékoli počínání, které má být v souladu s islámskou vírou. Hned poté následuje vlastní autorova modlitba oslavující Boha, přinášející zvěsti o významu učenců pro poznání a připomínající imáma al-Ma'múna, u kterého al-Chvárizmí působil:

[Bůh vložil do al-Ma'múna] *„lásku k vědě a tužbu obklopit se učenci, rozprostřít nad nimi ochranná křídla a pomáhat jim objasňovat to, co je jim nejasné a usnadňovat obtížné."* [37]

Za účelem pomoci učencům na imámově dvoře pak sepsal *Knihu o algebře a almukabale, obsahující jednoduché i složité otázky aritmetiky.*

8.3 Jednotka a čísla

Jak jsme se zmínili v pasáži, věnované *Aritmetickému traktátu*, víme už, že *Algebraický traktát* se jednotkou rovněž zaobírá, ne však tak důkladně. Všechna čísla jsou sestavena z jednotek a jednotka je přítomna v každém čísle. Jednotky jsou čísla větší než jedna a menší než deset. Čísla, se kterými se zde zachází, jsou tak akorát, ani ne moc velká – největší je zmíněn řád tisíce a operace s ním, ani ne moc malá – uvažují se pouze zlomky s jednotkami ve jmenovateli. I to svědčí o využití spisu pro běžné praktické účely.

8.4 Kvadratické rovnice – geometrická algebra

Čísla algebry (v dnešních pojmech číselné proměnné a číselné konstanty) al-Chvárizmí rozděluje do tří druhů:

1. kořen (arabsky džízr, ve zvyku dnešní notace x),
2. kvadrát (arabsky mál, dnešní notací x^2, jinak též majetek) a
3. dané určité číslo (arabsky dirham, tj. arabská mince, dnes konstanta c, d, atd.), které se nevztahuje ani ke kořenu, ani ke kvadrátu.

V následujících šesti oddílech (vlastně šesti případech) rozlišuje al-Chvárizmí úlohy vedoucí na řešení toho, čemu dnes říkáme kvadratická rovnice. Pracuje přitom v oboru kladných celých čísel jak pro proměnné, tak pro koeficienty. Činí tak proto, že všechny úlohy musí být geometrií zdůvodnitelné, což znamená, že musí být v principu (metricky) geometrizovatelné, tj. „kreslitelné".

K popisu práce s tímto matematickým jevem zde budeme užívat velkou zkratku – dnešní značení a dnešní pojmy rovnice, neznámá, koeficient, umocňování, odmocňování, atd., ale i zápis čísel v desítkové poziční soustavě, z důvodu snazšího porozumění.[38] O to více je nutné být obezřetný a mít stále na

[37] Viz [A09], str. 138–139. Zde zároveň vidíme, že dedikace mecenáši (či z dnešního pohledu grantu) je už na konci 9. století běžná.

[38] Pro porovnání uveďme znění Prvního oddílu *Algebraického traktátu* v českém překladu,

paměti, že se „sčítají“, „odčítají“ a jinak upravují plošné obsahy pozemků či že se stanovuje délka strany tak, aby došlo k jejich spravedlivému rozdělení.

První oddíl řeší rovnice tvaru

$$ax^2 = bx.$$

Úkolem je převést obdélník o stranách x a ax na obdélník o stranách x a b (obr. 3a).

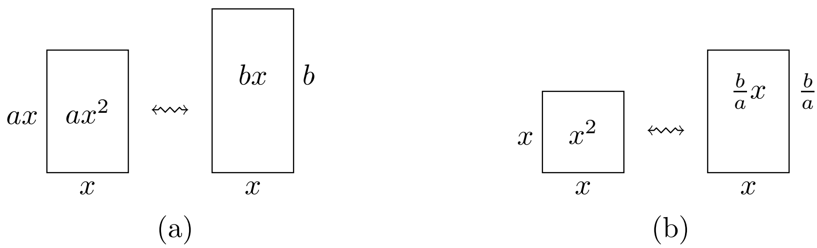
Nejprve zmenšíme oba obdélníky $a$krát (obr. 3b), tj. provedeme

$$x^2 = \frac{b}{a}x.$$

Aby si obsahy obou obdélníků (o stejné jedné straně) byly rovny, musí mít i druhou stranu stejně dlouhou, tj.

$$x = \frac{b}{a}.$$

Z algebraického, symbolického, pohledu se jedná o *krácení*. Tyto úpravy jsou zcela v oboru kladných celých čísel korektní – délky úseček jsou kladná čísla.



Obr. 3 Geometrie 1. oddílu

Příklady, které k tomu al-Chvárizmí podává, jsou následující:

$$x^2 = 5x, \quad \frac{1}{3}x^2 = 4x \quad \text{a} \quad 5x^2 = 10x.$$

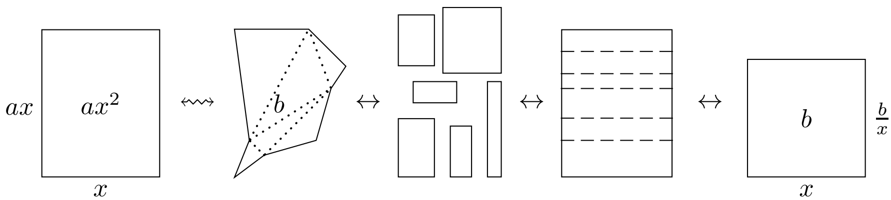
Druhý oddíl se věnuje *odmocňování*, tj. najít kořen x, jehož kvadrát je roven danému číslu nebo jeho části, tj.

$$ax^2 = b,$$

kde se pojem rovnice, natož kvadratické, vůbec nevyskytuje:
Co se týče kvadrátů rovných kořenům; to pokud například řekneš: Kvadrát je roven pěti svým kořenům, potom je kořen kvadrátu pět a kvadrát dvacet pět, což je rovno pěti jeho kořenům. Pokud řekneš: Třetina kvadrátu je rovna čtyřem kořenům, potom celý kvadrát je roven dvanácti kořenům, to znamená, že je roven sto čtyřiceti čtyřem a jeho kořen dvanácti. Pokud například řekneš: Pět kvadrátů je rovno deseti kořenům, pak jeden kvadrát je roven dvěma kořenům, kořen kvadrátu je dva a kvadrát čtyři. Tímto způsobem, ať je kvadrátů mnoho či málo, převede se vše na jeden kvadrát a stejně se pracuje s jim rovnými kořeny, které se převedou tak, jako se převedl kvadrát. Viz [A09], str. 140.

kde podíl $\frac{b}{a}$ má tvar druhé mocniny nějakého kladného přirozeného čísla.

Máme tedy obdélník (či čtverec) o obsahu ax^2 a na něj máme převést obsah (triangulovatelného) útvaru o obsahu b, tj. rovinného útvaru, jehož obvod je složen z úseček. V souladu s řeckou matematikou provedeme triangulaci tohoto útvaru, tj. rozdělíme ho na trojúhelníky. Tyto trojúhelníky umíme převést na obdélníky (obsah trojúhelníku je roven polovině obsahu obdélníku nad danou stranou trojúhelníku a příslušnou výškou). Obdélníky je dále nutno převést na obdélník o jedné straně stejné. I to řecká matematika zvládneme pomocí tzv. gnómonu. Po jejich sečtení už zbývá jen převést výsledný obdélník na čtverec, jehož stranu hledáme. K tomu využijeme buď Eukleidovu větu, nebo Pythagorovu větu.[39] Metodu ilustruje obr. 4:



Obr. 4 Geometrie 2. oddílu

Upravujeme tedy

$$x^2 = \frac{b}{ax} \cdot x,$$

a odtud je délka hledané strany

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Doprovodné příklady:

$$x^2 = 9, \quad 5x^2 = 80 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}x^2 = 18.$$

Třetí oddíl *umocňuje*: cílem je *najít kvadrát kořenu* rovnice

$$bx = c.$$

Proč je lineární rovnice zařazena mezi kvadratické, můžeme rekonstruovat takto:

Nad úsečkou délky bx sestrojíme čtverec b^2x^2 a nad c čtverec c^2. Protože si mají být čtverce rovny, je i

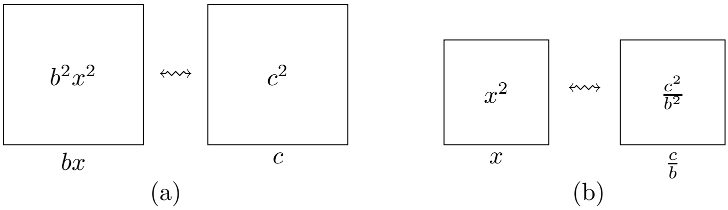
$$x^2 = \frac{c^2}{b^2} \; (= d),$$

[39] K celému postupu podrobně viz [EuZ], str. 19–24.

a tedy podle předcházejícího oddílu

$$x = \sqrt{d} = \sqrt{\frac{c^2}{b^2}} = \frac{c}{b}.$$

I zde můžeme ukázat geometrickými prostředky, o co se jedná (obr. 5):



Obr. 5 Geometrie 3. oddílu

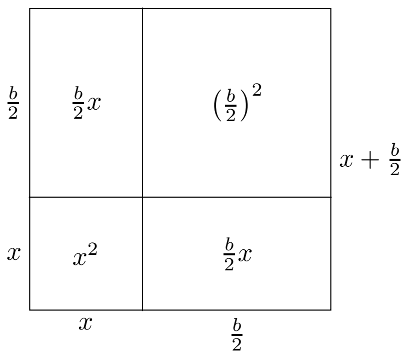
Příklady:

$$x = 3, \quad 4x = 20, \quad \frac{1}{2}x = 10.$$

Čtvrtý oddíl se zabývá rovnicí tvaru

$$x^2 + bx = c.$$

První až třetí oddíl jsou, jak al-Chvárizmí později píše, jasné a není nutné je příliš zdůvodňovat. Pro čtvrtý a další oddíl ale geometrický názor k představení algebraických kalkulací potřebuje. Zde tedy v podobě obr. 6:



Obr. 6 Geometrie 4. oddílu

Z obrázku je patrno, že čtverec o straně $x + \frac{b}{a}$ se skládá ze dvou čtverců a dvou obdélníků, tj.

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \underbrace{x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{b}{2}x}_{=c},$$

takže když jsou si rovny čtverce, jsou si rovny i příslušné strany, tj.

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c},$$

a odtud už máme

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

Doprovodné příklady:

$$x^2 + 10x = 39, \quad 2x^2 + 10x = 48 \text{ (nejprve krátíme dvěma) a } \quad \frac{1}{2}x^2 + 5x = 28.$$

Pátý oddíl probírá rovnici tvaru

$$ax^2 + c = bx.$$

Postupovat máme takto:[40]

Vezmeme čtverec $ABCD$, jehož délku x předem neznáme, o obsahu x^2. K němu přikreslíme obdélník $ADEF$, jehož obsah je c. Vznikne nám tak obdélník $BCEF$ o obsahu bx, tzn. s jednou stranou BC délky x a druhou stranou BF délky b. Ten kolmo rozpůlíme v bodě H, takže délka úsečky CH je $\frac{b}{2}$. Kolmici na CE v bodě H prodloužíme o délku DH, čímž vznikne bod K. Povšimněme si, že čtverec FK má obsah $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Zbývající bod obdélníka EK pojmenujme M a na úsečku KM položme úsečku KL, která je stejně dlouhá jako HK. Potom úsečka LM je rovna x. Neboli obsah čtverce HL je roven zbytku čtverce FK bez obdélníka DF, protože obdélník EL je roven obdélníku AH. Obsah čtverce HL je tedy $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$. Hledaná strana x pak má délku

$$x = \frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c},$$

tj. CD nebo CG. Náčrtek pro tento druh úloh představuje obr. 7a, resp. 7b.

V příkladu

$$x^2 + 21 = 10x$$

si al-Chvárizmí neopomene povšimnout, že vychází dva různé kladné celé kořeny

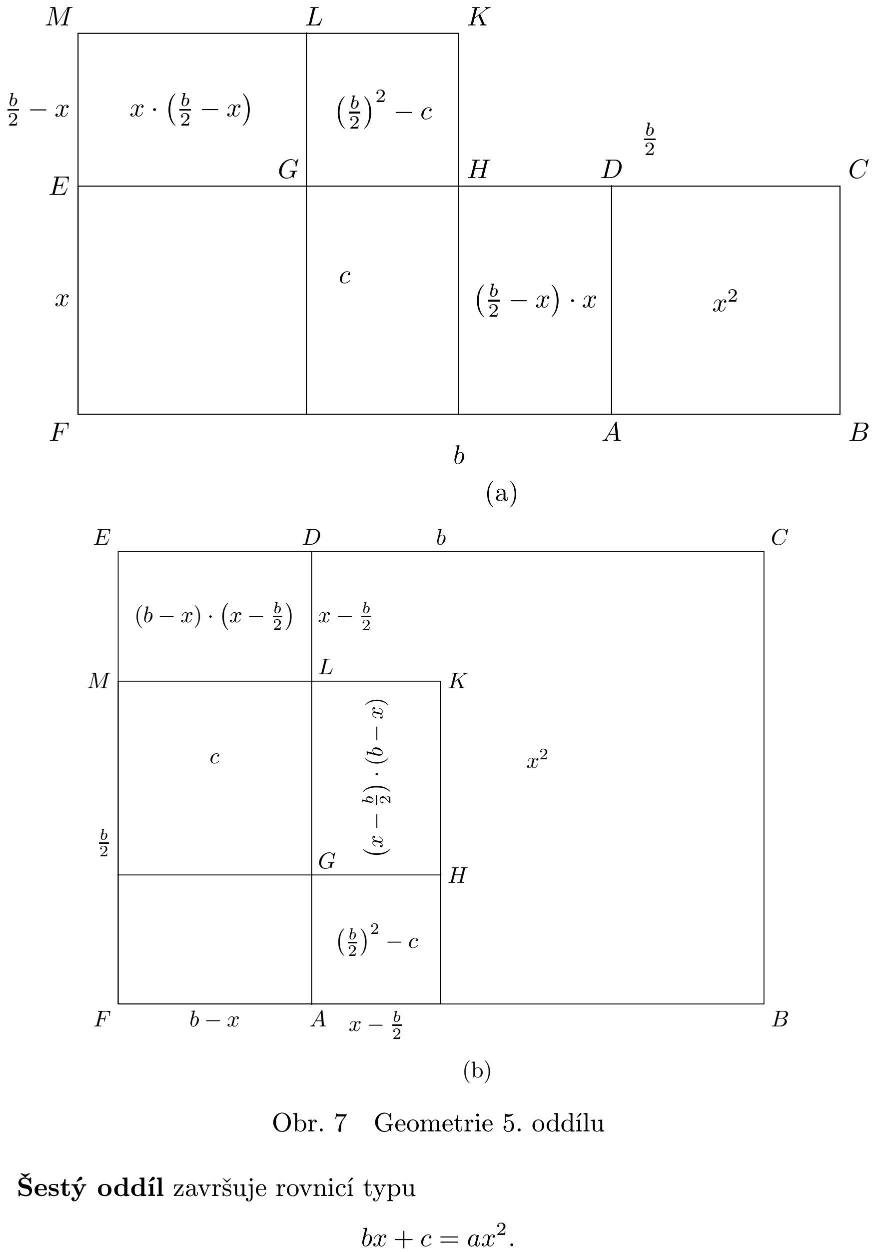
$$x_1 = 3 \quad \text{a} \quad x_2 = 7.$$

Rovněž zde provádí i rozbor počtu řešení kvadratické rovnice včetně případu, kdy rovnice nemá žádné, dvě či jedno řešení. Upozorněme, že jedno řešení

---

[40] Při značení čtverců a obdélníků používáme místy značení známé z Eukleidových *Základů*. Srv. [A09], str. 147–149.

přitom ještě neznamená nutně zdvojený kořen, protože počítáme v oboru kladných přirozených čísel. Podle [BK] je prvním, kdo na tento jev upozorňuje.



Obr. 7 Geometrie 5. oddílu

Šestý oddíl završuje rovnicí typu

$$bx + c = ax^2.$$

Je zřejmé, že i pro tento oddíl můžeme provést geometrické zdůvodnění. Jedná se o zobecnění následujícího příkladu – viz [A09], str. 150,

$$3x + 4 = x^2.$$

První tři oddíly jsou z hlediska arabského (geometrického) algebraického kalkulu zcela neproblematické, zbylé tři vyžadují důkazy. Ty jsou prováděny převodem na geometrii Eukleidových *Základů*. Al-Chvárizmí tak činí z toho důvodu, že díky metodě překrývání ploch, která pochází patrně od Pythagora, je podle Thomase L. Heathe libovolný planimetrický problém redukovatelný na řešení kvadratické rovnice s kladnými koeficienty a naopak.[41] K tomu slouží právě načrtnuté obrázky 3–7.

Poznamenejme, že se al-Chvárizmí na Eukleida přímo neodvolává, pouze *Základy* ve svých důkazech užívá, obzvláště II. knihu. Úsečky či plošné útvary zde figurují jen jako pomůcka lepší názornosti. To, o co al-Chvárizmímu jde, jsou čísla. Vlastní algebraický důkaz ve smyslu propojení geometrie a algebry, jak známe od Descarta, to ještě ale zdaleka není. Nicméně geometrie se v arabském středověkém světě ukazuje v úplně novém světle – jako užitá, aplikovaná matematika, kterou užíváme k vybudování další, nové matematické disciplíny – algebry.

Příklady k těmto oddílům obsahuje později podaný *Oddíl o šesti úlohách* a *Oddíl o rozličných úlohách*. První z nich doprovází typovými příklady s podrobným vysvětlením prvních šesti oddílů a rozebírá tak možnosti při řešení kvadratické rovnice v oboru kladných přirozených čísel. Oddíl o rozličných úlohách je již sbírkou řešených úloh ke stejné problematice. Některé z nich jsou i praktického rázu a dnešními slovy je můžeme označit za *slovní úlohy* vedoucí na řešení kvadratické rovnice.

8.5 Počítání s dvojčleny

Po řešení kvadratických rovnic následuje oddíl o násobení dvojciferných čísel. V jazyce dnešní matematiky se jedná o úpravu algebraických výrazů typu

$$(a \pm x) \cdot (b \pm x).$$

Co se po nás chce? Výraz máme chápat takto:

$$(a + x) \cdot (b + x) = a \cdot b + a \cdot x + \underbrace{x \cdot b}_{= b \cdot x} + x \cdot x, \tag{a}$$

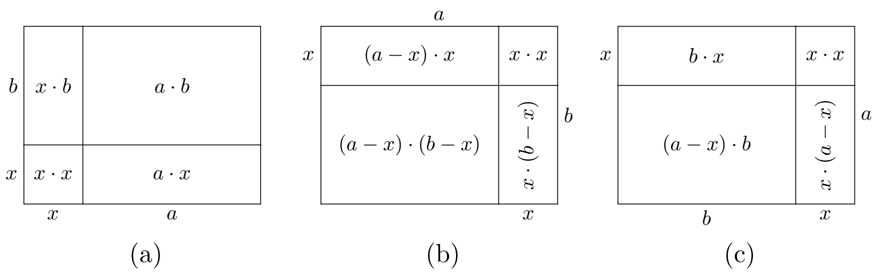
$$(a - x) \cdot (b - x) = a \cdot b - a \cdot x - \underbrace{x \cdot b}_{= b \cdot x} + x \cdot x, \tag{b}$$

$$(a - x) \cdot (b + x) = a \cdot b + a \cdot x - b \cdot x - x \cdot x. \tag{c}$$

K vysvětlení by nám měl postačit obr. 8:

---

[41] Viz [Heath], str. 125.



Obr. 8 Geometrie pro dvojčleny (a), (b), (c)

Významně zde přitom vystupuje číslo 10. Speciálně tedy pro běžné potřeby máme

$$(10 \pm x) \cdot (10 \pm x) = \underbrace{10 \cdot 10}_{=100} \pm 10 \cdot x \pm \underbrace{x \cdot 10}_{=10 \cdot x} \pm x \cdot x.$$

K vysvětlení slouží příklady, které al-Chvárizmí připojuje (psané v dnešní notaci):

$$(10+1) \cdot (10+2), \quad (10-1) \cdot (10-1) \quad \text{a} \quad (10+2) \cdot (10-1)$$

– propojují (geometrickou) algebru s aritmetikou. Můžeme je číst jako příklady pro užití *velké násobilky*, neboli jak se lze snadno zpaměti dobrat součinu čísel o málo se lišících od čísla 10.

Následují je příklady ryze algebraického typu

$$(10-x) \cdot 10, \quad (10+x) \cdot (10+x), \quad (10-x).(10-x).$$

Zajímavý je přitom příklad se zlomky

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right),$$

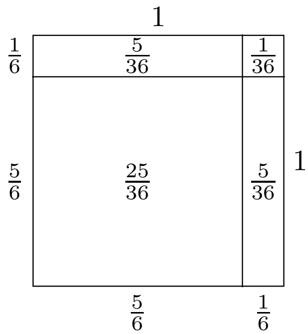
který al-Chvárizmí řeší nejen algebraicky, tj.

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{25}{36},$$

ale i aritmeticky

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

Když si uvědomíme, že se jedná o úlohu na výpočet změny obsahu čtverce o straně, jehož strana se o šestinu zmenší, máme jako doklad následující obr. 9:



Obr. 9

Oddíl o násobení al-Chvárizmí zakončuje úpravou algebraických výrazů

$$(10-x)\cdot(10+x),\quad (10-x)\cdot x,\quad \left(10+\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-5x\right)$$

a

$$(10+x)\cdot(x-10)=(x+10)\cdot(x-10).$$

Je zřejmé, že tato pasáž *Algebraického traktátu* podává návod na *násobení dvouciferných čísel*. Ten má oporu v řecké geometrii a svou povahou, ačkoli by měla spíše spadat pod *Aritmetický traktát*, má opodstatněné místo zde, nevyžaduje totiž užití desítkové poziční soustavy.

Další postřeh, který je nutno zmínit, je ten, že nejspíše ještě v této době nebyla samozřejmá komutativnost násobení a sčítání – proč by jinak al-Chvárizmí zmiňoval poslední uvedenou rovnost při úpravě algebraických výrazů?

8.6 Další úpravy algebraických výrazů

Oddíl o zvětšování a zmenšování se věnuje dvěma jevům

1. počítání s odmocninami a
2. počítání s polynomy.

Dokládají to tvrzení o úpravách výrazů s odmocninami

$$(\sqrt{200}-10)+(20-\sqrt{200})=10;^{43}$$
$$(20-\sqrt{200})-(\sqrt{200}-10)=30-2\sqrt{200},\quad \text{kde } 2\sqrt{200}=\sqrt{800}.$$

Následují dvě tvrzení o úpravách kvadratických polynomů:

$$(100+x^2-20x)+(50+10x-2x^2)=150-x^2-10x$$

[43] Srv. [A09], str. 154.

a

$$(100 + x^2 - 20x) - (50 + 10x - 2x^2) = 50 - 3x^2 - 30x.$$

K těmto tvrzením je později ve spise přiloženo vysvětlení podle obrázku (viz [A09], str. 157–159), tedy pomocí Eukleidovy geometrie.

Dalšími početními úkony s odmocninami jsou násobení kořenu kvadrátu, polovina kořenu kvadrátu, podíl kořenů (podíl odmocnin), násobení kořenů mezi sebou (násobení odmocnin) a násobení různých násobků různých kořenů mezi sebou (např. $2\sqrt{9} \cdot 3\sqrt{4}$).

8.7 Obchodování s trojčlenkou

Obchod jako předmět *Algebraického traktátu* se plně odráží ve výkladu a počítání s trojčlenkou, tj. přímou a nepřímou úměrou:[44]

Věz, že dělení se lidí o něco, stejně jako nákup i prodej, výměna i nájem a jiné mají co do činění se čtvero čísly, stanovenými tázajícím a to s mírou, cenou, množstvím a hodnotou. Číslo, odpovídající míře, stojí proti číslu odpovídajícímu hodnotě a číslo odpovídající ceně proti číslu odpovídajícímu množství. Z těchto čtyř čísel jsou vždy tři známé a jedno je neznámé a o něm hovořící říká „kolik“ a táže se tázající.

Tento oddíl al-Chvárizmí doporučuje užívat nejen v otázkách obchodování, ale i výměny, objemu, váhy nebo mzdy.

Pokud tázající říká: Pracující, který má měsíční výdělek deset dirhamů, pracoval šest dní. Jaký je jeho díl, víš-li, že šest dní je jedna pětina měsíce a díl dirhamů je takový, jako je díl odpracovaného [času] *z měsíce.*

Pravidlo je následující: Jestliže, jak bylo řečeno, měsíc je třicet dní, což je míra, deset dirhamů je cena, šest dní je množství a [ptáme se], *jaký je díl, to jest hodnota. Vynásob cenu, to jest deset, množstvím, které stojí proti tomu, to jest šest, obdržíš šedesát a děl třiceti, to jest známým číslem a to mírou; obdržíš dva dirhamy a to je hodnota.*[45]

Poznamenejme, že tímto oddílem končí překlad *Algebraického traktátu* podaný Robertem z Chesteru. V českém vydání [A08] i [A09] je ještě *Oddíl o měření*, ve kterém se podle Donalda E. Knutha[46] porovnává *Mishnat ha-Middot*, sepsaný židovským rabínem **Nehemjanem**, s al-Chvárizmího **Algebraickým traktátem**.

8.8 Arabská metrická geometrie

Oddíl o měření propojuje geometrii s algebrou a uvádí do arabského světa **Archimedovy** výsledky z oblasti obsahu ploch rovinných i objemu prostorových geometrických útvarů. Al-Chvárizmí nejprve zavádí plošné míry

[44] Viz [A09], str. 178.
[45] Viz [A09], str. 179.
[46] Viz [Knuth], str. 3–4.

přes plochu čtverce. Jednotkovou plochu sice má jako násobek stran obrazce se stejnými stranami a úhly (tj. obecně jako plochu pravidelného polygonu), uvažuje však o čtverci. Od plochy čtverce je pak schopen odvodit délku strany jako kořen (tj. odmocninu) plochy. Dále má vztah pro obsah trojúhelníku pomocí výšky a poloviny základny, pro obsah kosočtverce pomocí součinu úhlopříček.

Vlastnosti kruhu a jeho částí jsou rozvedeny pečlivěji. Obvod kruhu řeší al-Chvárizmí podobně jako Archimedes přes $3\frac{1}{7}$násobek průměru (tj. pomocí násobku číslem 3,142857), pro astronomy ale speciálně přes 62 832násobek průměru dělený 20 000 (tj. z dnešního pohledu přesnějším násobením číslem 3,1416), což je přesnější hodnota transcendentálního čísla π. Je ovšem zřejmé, že pojem transcendentálního čísla se v jazyce arabské matematiky 9. století principiálně nemůže ustanovit, neboť jazyk matematiky k tomu ještě není vybaven svými výrazovými prostředky.

Každý kruh má tu vlastnost, že vynásobíš-li průměr třemi a jednou sedminou, obdržíš obvod, který ji ohraničuje. Tento vztah je důležitý. Geometři mají k této otázce další dva vztahy. Jeden je: Vynásobíš průměr sám sebou a deseti a nalezneš z tohoto kořen a obdržíš obvod. Druhý vztah pro astronomy: Vynásobíš průměr šedesáti dvěma tisíci osmi sty třiceti dvěma a poté dělíš dvaceti tisíci a podíl je obvod. Vše je to podobné jedno druhému. Dělíš-li obvod třemi a jednou sedminou, obdržíš průměr.

Z obvodu dostane průměr obráceným postupem. Plochu kruhu počítá z průměru a obvodu jako jeden z případů (pravidelného) mnohoúhelníku (který v kruhu skrytě jako limitní případ vidí). Rovněž se zabývá mírami kruhové výseče pomocí míry oblouku a délky tětivy.

Následuje stručný přehled tvrzení o objemu prostorových těles pomocí plochy podstavy a jejich výšky. Některá z nich al-Chvárizmí přebírá i od Eukleida. Tvrzení

Co se týče jehlanu trojúhelného, čtvercového a kruhového, mají tu vlastnost, že součin třetiny plochy jejich podstavy s výškou je objem.[47]

al-Chvárizmí přebírá z XII. knihy Eukleidových *Základů*.[48]

8.9 Pythagorova věta pro pravoúhlý trojúhelník

Al-Chvárizmí ve svém výkladu neopomine ani *Pythagorovu větu* o rovnosti součtu čtverců sestrojených nad odvěsnami *pravoúhlého trojúhelníku* se čtvercem sestrojeným nad přeponou. Ovšem ve znění více algebraickém:

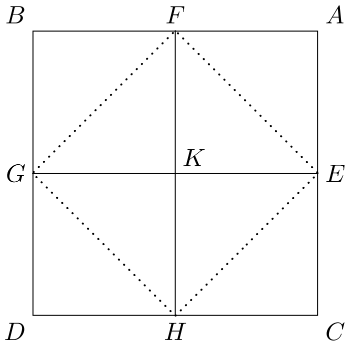
Každý pravoúhlý trojúhelník má tu vlastnost, jestliže vynásobíš obě kratší strany samy sebou, pak součet těchto součinů je roven součinu nejdelší strany samy se sebou.[49]

[47] Viz [A09], str. 182.
[48] Viz poznámka Petra Vopěnky [A09], str. 182. Srv. [Servít], str. 271.
[49] Viz [A09], str. 182.

U geometra **Eukleida** přitom máme:

V pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírajících.[50]

Rovněž důkaz je jiný, než jaký známe z Eukleidových *Základů*. Al-Chvárizmí konstruuje čtverec, který rozdělí na osm stejných pravoúhlých trojúhelníků a Pythagorovu větu dokazuje pro jeden z nich. Důkaz je učiněn pomocí obsahů vzniklých trojúhelníků a čtverců (viz obr. 10).



Obr. 10 Důkaz Pythagorovy věty podle al-Chvárizmího

Al-Chvárizmí: *Důkaz je následující: Sestroj čtvercový obrazec se stejnými stranami a úhly $ABCD$, dále rozpůl stranu AC bodem E a sestroj kolmici do bodu G, dále rozpůlíme stranu AB bodem F a spustíme kolmici do bodu H. Obrazec $ABCD$ se skládá ze čtyř obrazců se stejnými stranami a úhly, a to AK, CK, BK, DK. Dále vedeme čáru z bodu E do bodu F půlící obrazec AK a vzniknou dva trojúhelníkové obrazce, jmenovitě AFE a EKF. Je jasné, že AF je polovina AB a AE je ji rovna a je to polovina AC a čára FE je spojuje pod pravým úhlem. Rovněž tak sestrojíme čáry od F ke G, od G k H a od H k E. Všechny kvadráty určují osm trojúhelníků. Je jasné, že čtyři dohromady dají velký obrazec AD. [Dále] je zřejmé, že čára AF [vynásobená] sama sebou je plocha dvou trojúhelníků, a čára AE [vynásobená] sama sebou je plocha stejných trojúhelníků. Proto součet těchto ploch jsou čtyři trojúhelníky a strana EF [vynásobená] sama se sebou určuje plochu dalších čtyř trojúhelníků. Proto je zřejmé, že součet součinu AF sama se sebou a součinu AE sama se sebou je roven součinu FE sama se sebou. A to jest to, co jsme chtěli dokázat.*[51]

Pro porovnání uvádíme též i důkaz Eukleidových *Základů*.

Eukleides: *Trojúhelníkem pravoúhlým buď ABC, maje pravý úhel BAC; pravím, že čtverec na BC rovná se (součtem) čtvercům na BA a na AC.*

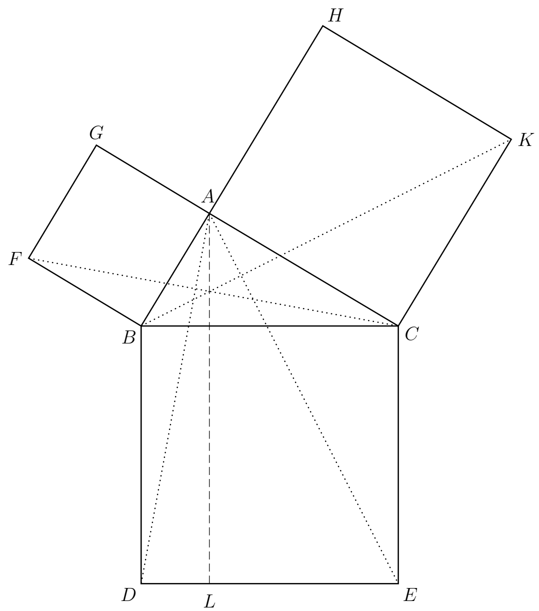
Nuže buď narýsován na BC čtverec $BDEC$, na BA, AC, pak GB, HC, a z bodu A vedena buď $AL \parallel BD$ nebo CE a spojnice AD, FC. A ježto $\triangleleft BAC$ i BAG jsou pravé, tož na jakési úsečce BA a při bodě na ní A dvě úsečky

[50] Viz [Servít], str. 24, příp. [EuZ], str. 79.

[51] Viz [A09], str. 182–183.

AC, AG na rozličných stranách tvoří stýkavé úhly rovné dvěma pravým, tedy CA, AG činí úsečku; z téže příčiny ovšem též BA, AH činí úsečku (I. XIV.). A ježto $\sphericalangle DBC = FBA$, oba totiž jsou pravé; společný přičtěmež ABC; tedy celý $\sphericalangle DBA = FBC$. A ježto $DB = BC$ a $FB = BA$, jsou ovšem DB, BA oběma FB, BC jednotlivě rovny, a $\sphericalangle DBA = FBC$; tedy základna $AD = FC$ a $\triangle ABD = FBC$; a dvakrát větší než $\triangle ABD$ jest rovnoběžník BL; neboť mají touž základnu a jsou mezi týmiž rovnoběžkami BD, AL (I. XLI.); a dvakrát větší než $\triangle FBC$ je čtverec GB, neboť mají touž základnu a jsou mezi týmiž rovnoběžkami FB, GC. (Dvojnásobky pak týchž veličin jsou si rovny.) Tedy též rovnoběžník BL rovná se čtverci GB.

Podobně ovšem vedením spojnic AE, BK dokáže se, že též rovnoběžník CL rovná se čtverci HC. Celý tedy čtverec $BDEC$ rovná se součtu obou čtverců GB, HC. I jest čtverec $BDEC$ narýsován na BC, a GB, HC na BA, AC. Tedy $BC^2 = BA^2 + AC^2$.[52]



Obr. 11 Důkaz Pythagorovy věty podle Eukleida

Poznamenejme, že krása Eukleidova původního důkazu spočívá nejen v obecnosti trojúhelníku, pro který tvrzení platí, ale rovněž v metodě. Důkaz vychází od pravoúhlého trojúhelníku, jehož vlastnost (Pythagorova věta) se zde zkoumá, a konstrukce oněch čtverců nad odvěsnami. Dochází k tomu pomocí vlastností střídavých úhlů, rovnosti trojúhelníků o stejných základnách mezi týmiž rovnoběžkami a vztahu rovnoběžníku a trojúhelníku o stejné straně mezi týmiž rovnoběžkami. Užívá přitom metodu překrývání ploch.[53]

[52] Viz [EuZ], str. 79.

[53] Srv. [Heath], str. xl–xli.

8.10 Geometrie rovinných útvarů

Al-Chvárizmí dále rozlišuje pět čtyřúhelníků – čtverec, obdélník, kosočtverec, kosodélník a obecný čtyřúhelník. Pro ně uvádí na názorných příkladech vztahy pro výpočet jejich plochy.

Co se týče ostatních čtyřúhelníků, definování jejich plochy se převádí na pravidla výpočtu ploch trojúhelníků s pomocí úhlopříček.[54]

Tomu rozumějme tak, že čtyřúhelník máme triangulovat a jeho plochu počítat přes plochu jednotlivých dílků – malých trojúhelníků. Poznamenejme, že pro výpočty na obecných plošných útvarech se tato metoda v numerické matematice užívá hojně i dnes. Stojí rovněž i v teoretických základech teorie integrálu.

Rozdělení trojúhelníků a výpočtu jejich plochy věnuje dosti pozornosti. Rozlišuje trojúhelníky pravoúhlé, ostroúhlé a tupoúhlé. Trojúhelníky mezi sebou porovnává podle jejich obsahu ve vztahu k Pythagorově větě (ostroúhlé trojúhelníky mají součet kvadrátů kratších stran větší než kvadrát nejdelší strany, u tupoúhlých trojúhelníků je tomu naopak). Zde můžeme spatřovat náznaky pro kosinovou větu, ale musíme v souladu s Ladislavem Kvaszem konstatovat, že stejně jako v dřívějších poznámkách k takovémuto novodobému vyjádření není jazyk matematiky dostatečně vyvinutý. U ostroúhlých trojúhelníků uvádí i vlastnosti pro rovnoramenný a rovnostranný trojúhelník. Obsah tupoúhlého trojúhelníka máme provádět pomocí výšky spuštěné na nejdelší stranu (aby pata výšky nebyla vně trojúhelníku).

8.11 Aplikovaná algebra (v geometrii)

V posledních závěrečných příkladech al-Chvárizmí řeší výpočet objemu komolého jehlanu se čtvercovou podstavou (s poznámkou pro kruhovou podstavu) a výpočet délky čtverce vepsaného do rovnoramenného trojúhelníku (výpočet velikosti pozemku). Příklady jsou doprovodné, ukazují, za jakým účelem a proč jsme se zabývali algebrou (řešením kvadratických rovnic) a propojovali ji s geometrií.

9 Jazyk Algebraického traktátu

Podstatou algebraických manipulací není názor, vhled, ale cit pro kalkulaci.

Nejde o to výsledek vidět (jako v geometrii), ale spíše získat cit pro to, jak k němu dospět, získat cit pro různé úpravy, transformace a triky, získat cit pro možnosti, které nám jazyk nabízí. Tyto možnosti nejsou aktualizované, nejsou odkryté pohledu. V jazyce algebry *je vždy vyzdvihnutý pouze jeden výraz, ten, který právě upravujeme.*[55]

Oproti aritmetickému jazyku má jazyk algebry *explicitní symbol pro proměnnou.* Geometrie má proměnnou skrytou jakožto úsečku neurčité délky. Tato

[54] Viz [A09], str. 185.
[55] Viz [Kvasz], str. 30.

skrytost přesto stačí ke schopnosti jazyka geometrie dokázat *všeobecné tvrzení*. Na rozdíl od geometrie ale jazyk algebry má v sobě explicitně obsažený i *návod*, jak k výsledku dospět.

Dalším přínosem, který algebra má v sobě vnitřně, je schopnost dokázat modální situace – nemožnost řešení či násobnost řešení, jak jsme tomu byli svědky i u počtu řešení kvadratické rovnice.

Jazyk algebry je prvním jazykem, který je s to dokázat neřešitelnost konkrétní úlohy.[56]

Jazykem geometrie nemáme jak *ukázat* nemožnost jako takovou, v algebraickém jazyce ji *vyjádříme*.

Co se týká *expresivní síly* jazyka algebry ve vztahu ke geometrickému jazyku, shledáváme algebru svobodnější – nemusí se omezovat pouze na mocniny dvou či tří jako prostorem omezená geometrie, která tím vyjadřuje plošný obsah či objem, může pracovat s libovolně velkými mocninnými řády.[57] Musíme si ale uvědomit, že pro mocniny vyšší než 3 již nemáme interpretaci a srovnání v geometrickém názoru. Přesto algebrou lze řešit to, co jazykem (syntetické, řecké) geometrie sotva zvládneme zformulovat. Na druhou stranu jazyk algebry uvízne na problému kvadratury kruhu, na pojmu transcendentního čísla. Ačkoli se al-Chvárizmího algebra vypořádává s obsahem kruhu a obvodem kružnice, činí tak pouze aproximativně. Nicméně můžeme zde poukázat na to, že se jedná o podobný ontologický problém jako s nulou v případě *Aritmetického traktátu* – číslo π představuje veličinu, o které nelze v jazyce algebry nic říci, je to číslo, které nesplňuje žádný algebraický vztah.[58]

Přesah algebry do nezávislosti na interpretaci nese sebou i *explanatorickou sílu* jazyka algebry. Fakt, že eukleidovskou konstrukcí nelze provést trisekci úhlu či zdvojení krychle, ale algebrou ano, dokládá podle Ladislava Kvasze právě tuto sílu.

Poslední schopností jazyka algebry je vytvořit vlastní *univerzální analytickou metodu*. U al-Chvárizmího tato schopnost jazyka teprve začíná, plně se však rozvíjí hlavně od dob Reného Descarta.

10 Závěr

Al-Chvárizmího traktáty dokázaly přivést do Evropy novou **aritmetiku**, založenou na indické matematice kalkulací s velkými čísly, a **algebru** založenou v řecké matematice geometrického názoru. Jsou velmi důležitým svědectvím vývoje matematiky a přichází s naprosto novým přelomovým způsobem uvažování, ve kterém názor je nahrazen odvozením, manipulací s čísly či (budoucími skutečnými) symboly.

[56] Viz [Kvasz], str. 32.

[57] Srv. expresivitu jazyka aritmetiky a algebry v potencialitě libovolně velkých řádů desítkové (příp. šedesátkové) poziční soustavy u *Aritmetického traktátu* a libovolně velkých řádů mocnin u *Algebraického traktátu*.

[58] Srv. [Kvasz], str. 37.

Středověká arabská aritmetika představuje znalost indického aritmetického kalkulu, který dokáže velmi rychle předpovědět výsledek počítání s velkými čísly. Při znalosti algebraického kalkulu bylo možné pouhou kalkulací se znaky předpovědět řešení složité úlohy. Své zdůvodnění přitom opírá o řeckou geometrii. K jejich vzájemnému plnohodnotnému propojení s geometrií, o kterou se algebraický kalkul opíral, dochází až s nástupem doby René Descarta:

Všechny úlohy geometrie lze snadno převést na takové termy, k jejichž sestrojení stačí znát pouze délky některých úseček.[59]

Díky proniknutí algebry do geometrie tak můžeme *navrhnout* (geometrickou) konstrukci a dále otevřít geometrii (algebraických) objektů, které nemohla syntetická řecká geometrie uchopit.

LITERATURA

[A83] Al-Chorezmi M. ibn M., *Matěmatičeskje traktaty*, Izdavateľstvo „FAN“ Uzbeckoj SSR, Taškent, 1983.

[A09] Al-Chvárizmí, *Aritmetický a algebraický traktát*, 2. vydání, OPS, Nymburk, 2009.

[A08] Al Chvárizmí, *Aritmetický a algebraický traktát*, 1. vydání, OPS, Nymburk, 2008.

[Met] Aristotelés, *Metafyzika*, Nakladatelství Petr Rezek, Praha, 2003; Překlad A. Kříž.

[BK] Baštinec J., Kubištová Z., *Muhammad ibn Músa al-Chorezmi*, in: Matematika v proměnách věků I. Dějiny matematiky (Bečvář J., Fuchs E., eds.), sv. 11, str. 125–141, Prometheus, Praha, 1998.

[MEM] Bečvář J., Bečvářová M., Vymazalová H., *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie*, Prometheus, Praha, 2003.

[MSE] Bečvář J. et al., *Matematika ve středověké Evropě*, Prometheus, Praha, 2001.

[Beč-Eu] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady*, Prometheus, Praha, 2002.

[Benedict] Benedict S. R., *A Comparative Study of the Early Treatises Introducting into Europe the Hindu Art of Reckoning*, University of Michigan, Ann Arbor, MI, 1914.

[Ben-Rek] Benediktová Větrovcová M., *Pokus o rekonstrukci obsahu původního arabského Aritmetického traktátu*, in: [A09], str. 85–109, 2009.

[Ben-Fil] ———, *Filosofické aspekty al-Chvárizmího Aritmetického a algebraického traktátu*, Acta FF (2010) (Přijato do tisku).

[CP] Criastannus de Prachaticz, *Algorismus prosaycus. Základy aritmetiky*, OIKOYMENH, Praha, 1999.

[EuZ] Eukleides, *Základy I–IV*, OPS, Nymburk, 2008.

[59] René Descartés: *La Géométrie*, Paris 1637. Citováno dle [Vopěnka], str. 77.

[Heath] Heath T. L., *Works of Archimedes*, C. J. Clay and sons, Cambridge University Press Warehouse, Cambridge, 1897.

[HW] *House of Wisdom*, Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/House_of_Wisdom, 2010 (Rev. 2010-10-20).

[Isidor] Isidor ze Sevilly, *Etymologiæ I–III. Etymologie I–III*, OIKOYMENH, Praha, 2000.

[Karpinski] Karpinski L. C., *Two Twelfth Century Algorisms*, Isis **3** (1921), 396–413.

[Knuth] Knuth D. E., *Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science*, Report No. STAN-CS-80-786. Department of Computer Science, Stanford University, Stanford, CA, 1980.

[Kvasz] Kvasz L., *Patterns of Change*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2008.

[DBV] Lewis B., *Dějiny Blízkého východu*, Nakladatelství Lidové noviny, Praha, 1996.

[Patočka] Patočka J., *Aristotelés. Přednášky z antické filosofie*, Vyšehrad, Praha, 1994.

[Popper] Popper K. R., *Conjectures and Refutations*, Routledge, London–New York, 2002.

[Servít] Servít F., *Eukleidovy Základy*, Jednota českých matematiků a fysiků, Praha, 1907.

[DI] Strnad J., Filipský J., Holman J., Vavroušková S., *Dějiny Indie*, Nakladatelství Lidové noviny, Praha, 2003.

[Šišma] Šišma P., *Arabská matematika*, in: [MSE], 2001.

[Vopěnka] Vopěnka P., *Pojednání o prvních krocích matematiky kalkulací*, in: [A09], str. 7–83, 2009.

[Upanišady] Zbavitel D., *Upanišady*, DharmaGaia, Praha, 2004.