Kapitola I

HOLOMORFNÍ FUNKCE NĚKOLIKA PROMĚNNÝCH

Než přistoupíme k vlastnímu předmětu této kapitoly, dohodneme se se čtenářem o některých označeních a definicích. Ale napřed si přečtete úvod. Ježto hlavním podkladem bude pro nás kniha Černého, přizpůsobíme označení podle možnosti této knize. Ježto však se často musíme odvolávat na **D II**, uvedeme též odchylky mezi označením v Černém a v **D II**. Základní množinové označení je v Černém, str. 13–17. V **D II** se rozdíl množin značí $A \dot{-} B$, průnik se někdy značí AB.

Množinu všech (konečných) komplexních čísel značíme (jako Černý) $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{E}^k = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \ldots \times \boldsymbol{E}$ (k „činitelů"). V **D II** je označení K, K_k. Množina všech (konečných) reálných čísel se u Černého i v **D II** značí E_1. Aby to bylo přehlednější, budeme psát $\boldsymbol{R}$ místo E_1, $\boldsymbol{R}^k = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \ldots \times \boldsymbol{R}$ (v **D II** E_k). Symbol $\{a_1, \ldots, a_p\}$ (Černý, str. 13) se v **D II** píše s tučnou kulatou závorkou.

Předpokládám, že čtenář zná něco z teorie metrických prostorů (**D II**, kap. VI). V $\boldsymbol{R}^k$ zavedeme metriku ϱ takto: jeli $x = [x_1, \ldots, x_k] \in \boldsymbol{R}^k$, $y = [y_1, \ldots, y_k] \in \boldsymbol{R}^k$, klademe

$$\varrho(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_k - y_k)^2)^{1/2}\,.$$

V $\boldsymbol{E}^k$ zavedeme metriku obdobně: je-li $x = [x_1, \ldots, x_k] \in \boldsymbol{E}^k$, $y = [y_1, \ldots, y_k] \in \boldsymbol{E}^k$ (nyní jsou tedy x_j, y_j komplexní), klademe

$$\xi(x, y) = (|x_1 - y_1|^2 + \ldots + |x_k - y_k|^2)^{1/2}\,.$$

Pišme $x_j = x_{j1} + ix_{j2}(x_{j1}, x_{j2} \in \boldsymbol{R})$ a přiřaďme bodu $[x_1, \ldots, x_k] \in \boldsymbol{E}^k$ bod $[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{k1}, x_{k2}] \in \boldsymbol{R}^{2k}$. Je jasné, že takto dostáváme **izometrické zobrazení** $\boldsymbol{E}^k$ na $\boldsymbol{R}^{2k}$; všechny metrické (a tedy i topologické) vlastnosti „reálných" prostorů $\boldsymbol{R}^k$ lze okamžitě převést na prostory $\boldsymbol{E}^k$. Budeme zatím pracovat jen s prostory $\boldsymbol{R}^k$, $\boldsymbol{E}^k$ a s prostory do nich vnořenými (**D II**, str. 227). **Uzávěr** množiny $M \subset \boldsymbol{R}^k$ (v prostoru $\boldsymbol{R}^k$) označíme $\overline{M}$; stejně budeme označovat uzávěr množiny $M \subset \boldsymbol{E}^k$ (nedorozumění je vyloučeno). Je-li $M \subset P \subset \boldsymbol{R}^k$, můžeme brát P jako prostor vnořený do $\boldsymbol{R}^k$; uzávěr M v prostoru P je $\overline{M} \cap P$. Podobně je pro $M \subset P \subset \boldsymbol{E}^k$ (viz **D II**, str. 258 až 259). Slovem „funkce" budu zatím rozumět konečnou komplexní (tedy speciálně i reálnou) funkci.

V **D II**, str. 311 byl zaveden pojem **kompaktnosti**. *Množina* $M \subset R^k$ *je kompaktní tehdy a jen tehdy, když je omezená a uzavřená. Funkce, která je spojitá v kompaktní množině M, je v M omezená a stejnoměrně spojitá* (**D II**, věta 169, část 1. a 2.).

Čtenář zná pojem **stejnoměrná konvergence** a větu: *Jsou-li* f_n *spojité v M a je-li*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \tag{α}$$

stejnoměrně v M, je také f spojitá v M. Zobecníme pojem stejnoměrné konvergence. Nechť $M \subset R^k$ a nechť pro každé $x \in M$ platí (α). Budeme říkat, že tato konvergence je **lokálně stejnoměrná** v M, jestliže ke každému bodu $a \in M$ existuje jeho okolí $U(a)$ tak, že v množině $M \cap U(a)$ je konvergence stejnoměrná. Ježto spojitost v bodě je lokální vlastnost, dostáváme toto zobecnění citované věty:

Jestliže f_n *jsou spojité v M a jestliže konvergence v* (α) *je lokálně stejnoměrná v M, je f spojitá v M.*

Podotkněme ještě toto:

Nechť platí (α) *lokálně stejnoměrně v M; nechť* $K \subset M$ *je kompaktní. Potom konvergence v* (α) *je stejnoměrná v K.*

Důkaz: Ke každému $x \in M$, a tedy i ke každému $x \in K$, existuje okolí $U(x)$ tak, že konvergence je stejnoměrná v $M \cap U(x)$, tedy i v $K \cap U(x)$. Podle Borelovy věty (**D II**, věta 158) existuje konečný počet těchto okolí $U(x)$, který pokrývá K, tj. $K = \bigcup_{m=1}^{n} K \cap U(x_m)$ pro vhodné body $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z K. Odtud plyne stejnoměrná konvergence v K.

Důležitý bude pro nás pojem souvislé množiny. Dvě množiny A, B v prostoru R^k (nebo obecněji v libovolném metrickém prostoru) se nazývají **oddělené**, když $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ (**D II**, str. 320). To lze říci také takto: A, B jsou oddělené tehdy a jen tehdy, když jsou disjunktní a uzavřené v prostoru $A \cap B$. Místo „uzavřené“ lze také říci „otevřené“ (ježto doplněk uzavřené množiny je otevřený a naopak).

Množina se nazývá **souvislá**, jestliže není sjednocením dvou neprázdných oddělených množin. To je definice 33 z **D II**, str. 321, až na to, že se v **D II** nepočítá prázdná množina mezi souvislé. Přizpůsobili jsme se nyní definici z knihy Černého; rozdíly vzniklé přibráním prázdné množiny mezi množiny souvislé jsou triviální. Každá z následujících tří podmínek je nutná a postačující pro to, aby M byla souvislá:

1. *Je-li*

$$M = A \cup B\,, \quad A \cap B = \emptyset \tag{β}$$

a jsou-li A, B uzavřené v M, je

$$\textit{buďto} \quad A = \emptyset \quad \textit{nebo} \quad A = M\,. \tag{γ}$$

2. *Platí-li* (β) *a jsou-li* A, B *otevřené v* M, *platí* (γ).

3. *Platí-li* (β) *a je-li* A *současně otevřená i uzavřená v* M, *platí* (γ).

Otevřená souvislá množina se nazývá **oblast**.

Řadu věcí jsem formuloval v R^k; je jistě zbytečné, abych je opakoval pro E^k. Od kap. III budeme pracovat ještě s dalším prostorem, totiž s uzavřenou Gaussovou rovinou S (Černý, str. 20). Příslušné doplňky umístíme do kap. III.

Ještě dvě poznámky k označení. V prvních kapitolách budeme často mluvit o řadách s mnoha „sumačními indexy" $i, j, k, l, m, \ldots$ apod. Čtenář si jistě sumační index i nesplete s imaginární jednotkou; v kap. I, II a v kap. III, § 1, § 2 se nám písmeno i ve významu imaginární jednotky vyskytne jen zřídka: V textu za větou 10 (kružnice $a + re^{it}$), ve větě 11 a 12 a na samém konci § 2 v kap. III. Potom se však situace mění; proto počínajíc § 3 v kap. III znamená písmeno i až do konce vždy imaginární jednotku.

Druhá poznámka: exponenciální funkci budeme často (ne vždy) značit exp; budeme tedy psát buďto $\exp(x)$, nebo $\exp x$ nebo e^x.

§ 1

Zobecněné řady

Znáte pojem **nekonečné řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s komplexními členy (tj. $a_n \in E$), pojem **konvergence, divergence, absolutní konvergence** a nejjednodušší věty o nich. Pro nás bude zvláště důležitá tato věta: *Jestliže řada je absolutně konvergentní se součtem* s, *potom řada, vznikající z ní libovolným přerovnáním, je také absolutně konvergentní a má opět součet* s (Černý, věta 45 nebo **D II**, věta 37).

Zobecníme tento pojem. Je-li $\mathfrak{N}$ spočetná množina a je-li každému $n \in \mathfrak{N}$ přiřazeno komplexní číslo $a_n \in E$, mluvíme o **zobecněné řadě**

$$\sum_{n \in \mathfrak{N}} a_n \tag{1}$$

(množina $\mathfrak{N}$ je buďto nekonečná nebo konečná a může být i prázdná). Ježto $\mathfrak{N}$ je spočetná, můžeme ji (obecně různými způsoby) srovnat v nekonečnou nebo konečnou prostou posloupnost

$$\mathfrak{N} = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\} \tag{2}$$

a sestrojit řadu

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots \tag{3}$$

(může jít také o součet konečného počtu členů, popříp. i o „prázdný součet" – když $\mathfrak{N} = \emptyset$). Jestliže řada (3) je absolutně konvergentní a má součet s, budeme říkat, že zobecněná řada (1) je absolutně konvergentní a má součet s; píšeme pak často $\sum_{n \in \mathfrak{N}} a_n = s$. Přitom součet konečného počtu členů považujeme též za absolutně konvergentní řadu (prázdný součet klademe roven nule). K této definici jsme oprávněni. Jestliže totiž řada (3) je absolutně konvergentní a má součet s, potom podle citované věty o přerovnání platí: Srovnám-li $\mathfrak{N}$ jakýmkoliv způsobem v prostou posloupnost tvaru (2), dostanu sice zpravidla různé řady (3), ale všechny budou absolutně konvergentní a budou mít týž součet.

Jako lehké cvičení dokažte: Řada (1) je absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy, když existuje kladné (konečné) číslo K s touto vlastností: Vezmu-li jakýkoliv konečný počet navzájem různých prvků $n_1, n_2, \ldots, n_p$ množiny $\mathfrak{N}$, je

$$|a_{n_1}| + |a_{n_2}| + \ldots + |a_{n_p}| < K . \tag{4}$$

O zobecněných řadách je pojednáno v **D II**, kap. III, § 3. Zopakujme nejdůležitější věci.

Věta A (**D II**, věta 39). *Budiž (1) absolutně konvergentní zobecněná řada se součtem s. Rozložme $\mathfrak{N}$ na disjunktní části:*

$$\mathfrak{N} = \bigcap_{v \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{N}_v \quad (\mathfrak{N}_v \cap \mathfrak{N}_w = \emptyset \ pro \ v \neq w) , \tag{5}$$

kde $\mathfrak{Y}$ je nějaká spočetná množina. Potom pro každé $v \in \mathfrak{Y}$ je zobecněná řada $\sum_{n \in \mathfrak{N}_v} a_n$ absolutně konvergentní; označme s_v její součet. Dále je absolutně konvergentní zobecněná řada $\sum_{v \in \mathfrak{Y}} s_v$ a má součet s.

Názorně řečeno: Abych dostal součet absolutně konvergentní řady (1), mohu rozdělit její členy do „skupin" podle (5), stanovit součet členů každé skupiny a potom tyto součty sečtu; dostanu součet řady (1).

Tato důležitá věta má jeden nedostatek: abych jí mohl použít, musím o řadě vědět, že je absolutně konvergentní. Tomu se dá často odpomoci větou **B**, ke které se nyní obrátíme. Budeme se nyní speciálně zabývat zobecněnými řadami (1) s členy $a_n \geqq 0$, přičemž připouštíme i hodnotu $a_n = +\infty$. Podotkněme, že množinu reálných čísel často doplňujeme dvěma „nevlastními" prvky: „kladným" prvkem $+\infty$ a „záporným" $-\infty$. Součet konečného počtu reálných čísel, z nichž aspoň jedno je $+\infty$ a žádné není $-\infty$, definujeme jako $+\infty$. „Obyčejná" nekonečná řada s nezápornými členy

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \quad (0 \leqq a_n \leqq +\infty) \tag{6}$$

má potom vždy součet, definovaný jako limita částečných součtů:

$$a_1 + a_2 + \ldots = s = \lim_{n \to \infty} s_n , \quad s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

(Slovy „obyčejná řada“ rozumím – na rozdíl od zobecněné řady – řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve smyslu **D II**, kap. III, § 1, kde tedy je určeno pořadí členů, a_9 je devátý člen. Čtenáři jistě nebude vadit, jestliže se někdy vyskytne $\sum_{n=0}^{\infty}$, $\sum_{n=2}^{\infty}$ apod.)

Je-li řada (6) konvergentní (tj. $s < +\infty$), je ovšem absolutně konvergentní, a tedy zůstává absolutně konvergentní s týmž součtem při každém přerovnání. A tedy i naopak: je-li (6) divergentní, tj. $s = +\infty$, je součet řady libovolně přerovnané opět $+\infty$. To nás opravňuje k následujícímu zobecnění pojmu součtu zobecněné řady (1) v případě $0 \leqq a_n \leqq +\infty$: Budiž $\mathfrak{N}$ spočetná množina a každému $n \in \mathfrak{N}$ budiž přiřazeno číslo a_n, $0 \leqq a_n \leqq +\infty$. Srovnejme $\mathfrak{N}$ v prostou posloupnost (2); potom součet řady (3) nazýváme součtem zobecněné řady (1). Platí pak tato věta (v **D II** je dokázána ještě trochu obecnější věta 39a):

Věta B. *Budiž* (1) *zobecněná řada s nezápornými členy* $(0 \leqq a_n \leqq +\infty)$. *Nechť* $\mathfrak{V}$ *je spočetná množina. Rozložme* $\mathfrak{N}$ *na disjunktní množiny* $\mathfrak{N}_v(v \in \mathfrak{Y})$ *podle* (5). *Označme* $s_v = \sum_{n \in \mathfrak{N}_v} a_n$, $s = \sum_{v \in \mathfrak{Y}} s_v$ *(tyto součty ovšem existují). Potom řada* (1) *má součet* s.

Význam věty B je v této okolnosti: Chci zjistit, zda řada

$$\sum_{n \in \mathfrak{N}} a_n \quad (a_n \in E) \tag{7}$$

je absolutně konvergentní. Sestrojím řadu

$$\sum_{n \in \mathfrak{N}} |a_n| \,. \tag{7a}$$

Jestliže pomocí věty B zjistím, že (7a) má konečný součet, potom řada (7) je absolutně konvergentní (všimněte si nutné a postačující podmínky (4)).

Někdy je účelné sestrojit k řadě (7) místo řady (7a) tzv. řadu **majorantní** k (7), tj. zobecněnou řadu

$$\sum_{n \in \mathfrak{N}} b_n \,, \tag{8}$$

kde $b_n \geqq |a_n|$. Je-li (8) absolutně konvergentní, je zřejmě (viz podmínku (4)) i (7) absolutně konvergentní. Užitečnost majorantní řady je v tom, že b_n můžeme volit do značné míry libovolně. Toho se dá často užít k sestrojení majorantní řady, jejíž struktura je podstatně jednodušší než struktura řady (7).

§ 2

Mocninné řady v několika proměnných

Nechť k je přirozené číslo. Nechť každé posloupnosti $i_1, i_2, \ldots, i_k$ celých nezáporných čísel je přiřazeno číslo $a_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \in E$. Nechť je konečně dán bod $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k] \in E^k$.

Potom zobecněnou řadu

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 0}^{\infty} a_{i_1, i_2, \ldots, i_k} (\xi_1 - \alpha_1)^{i_1} \ldots (\xi_k - \alpha_k)^{i_k} \tag{9}$$

nazýváme mocninnou řadou o středu α. Čísla $a_{i_1, \ldots, i_k}$ nazýváme koeficienty řady. Jako množina $\mathfrak{N}$ z (1) je zde míněna množina všech uspořádaných k-tic $[i_1, i_2, \ldots, i_k]$ celých nezáporných čísel.[1] Na písmena $\xi_1, \ldots, \xi_k$ se díváme jako na „proměnné", tj. budeme vyšetřovat, pro která komplexní $\xi_1, \ldots, \xi_k$ je (9) absolutně konvergentní a jaké vlastnosti má součet této řady jako funkce k komplexních proměnných. „Posunutím" $\xi_j - \alpha_j = x_j$ lze řadu (9) převést na řadu

$$\sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k} \tag{10}$$

o středu v počátku.

Budeme většinou mluvit o řadách tvaru (10); čtenář sám snadno převede naše výsledky na obecnější řady (9). Mocninné řady v jedné proměnné ($k = 1$) zná čtenář z nauky o komplexních funkcích jedné komplexní proměnné; viz např. Černý, kap. 12. V případě $k = 1$ se však tyto řady vyšetřují obyčejně jako „obyčejné", nikoliv jako zobecněné řady – to nám však nebude vadit, ježto se omezíme na otázky absolutní konvergence, a při nich je lhostejné, zda (v případě $k = 1$) mluvím o obyčejné či o zobecněné řadě. K mocninným řadám (též pro $k > 1$) viz též **D II**, kap. XI. Zopakuji některé věci a přidám některé doplňky.

Věta 1. *Je-li* (10) *absolutně konvergentní v bodě* $u = [u_1, \ldots, u_k]$ (*tj. pro* $x_1 = u_1, \ldots, x_k = u_k$), *potom je řada* (10) *i řada*

$$\sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} |a_{i_1, \ldots, i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}| \tag{11}$$

absolutně konvergentní a po libovolném uspořádání v obyčejnou řadu též stejnoměrně konvergentní v oboru

$$|x_1| \leq |u_1|, \ldots, |x_k| \leq |u_k| \,. \tag{12}$$

Součty řad (10), (11) *tedy jsou funkce spojité v oboru* (12).

---

[1]) V řadě (9) budeme též někdy užívat označení $\sum_{i_1, \ldots, i_k \geq 0}$, a podobně v obdobných případech.

Důkaz. V oboru (12) je řada $\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} |a_{i_1,\ldots,i_k} u_1^{i_1}, \ldots u_k^{i_k}|$ majorantní k řadě (10) i (11).

Věta 2. *Je-li* (10) *absolutně konvergentní v bodě* $[x_1, \ldots, x_k]$, *kde* $x_1 x_2 \ldots x_k \neq 0$, *potom existuje číslo* C $(0 < C < +\infty)$ *tak, že*

$$|a_{i_1,\ldots,i_k}| \leqq \frac{C}{|x_1|^{i_1} \ldots |x_k|^{i_k}}. \tag{13}$$

Důkaz. Členy řady (10) musí v bodě $[x_1, \ldots, x_k]$ tvořit omezenou množinu.

Znáte pojem **derivace** komplexní funkce jedné komplexní proměnné $\left(\text{znak } f'(x)\right.$ nebo $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)$; viz např. Černý, kap. 9. Obvyklým způsobem se pak definují **parciální derivace** komplexní funkce několika komplexních proměnných: Např. hodnota parciální derivace $\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1}$ v bodě $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ je definována jako hodnota derivace funkce $g(x_1) = f(x_1, a_2, \ldots, a_k)$ v bodě $x_1 = a_1$. Obvyklým způsobem se zavádějí parciální derivace vyšších řádů a jejich označení.

Věta 3. *Řada* (10) *budiž absolutně konvergentní v oblasti*

$$|x_1| < R_1, \ldots, |x_k| < R_k \quad (0 < R_j \leqq +\infty)\,; \tag{14}$$

budiž tam $f(x_1, \ldots, x_k)$ *její součet. Potom řada*

$$\sum_{i_1 \geqq 1, i_2 \geqq 0, \ldots, i_k \geqq 0} i_1 a_{i_1,\ldots,i_k} x_1^{i_1 - 1} x_2^{i_2} \ldots x_k^{i_k} \tag{15}$$

je též absolutně konvergentní v oblasti (14) *a má tam součet* $\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1}$.

Důkaz viz v **D II**, věta 230.

Poznámka 1. Věta 3 říká, že řadu (10) lze v oblasti (14) derivovat „člen po členu" podle x_1. Totéž platí ovšem pro $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$. Indukcí okamžitě plyne, že f má v oboru (14) parciální derivace všech řádů a že se dostanou postupným derivováním řady (10) člen po členu. Z toho je též vidět, že tyto derivace jsou záměnné $\left(\text{např. } \frac{\partial^3 f}{\partial x_1\, \partial x_3\, \partial x_1} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1\, \partial x_1\, \partial x_3}\right)$, ježto to platí o derivacích jednotlivých členů řady (10).

Věta 4. *Řada (10) budiž absolutně konvergentní v nějakém okolí počátku; budiž $f(x_1, \ldots, x_k)$ její součet. Potom*

$$(16) \qquad a_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{1}{i_1! \ldots i_k!} \left[\frac{\partial^{i_1+\ldots+i_k} f(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_k^{i_k}} \right]_{[x_1,\ldots,x_k]=[0,\ldots,0]}$$

(pro $i_1 = \ldots = i_k = 0$ čti $a_{0,\ldots,0} = f(0, \ldots, 0)$).[2]

Důkaz. Derivujte řadu (10) i_1-kráte podle $x_1, \ldots, i_k$-kráte podle x_k (člen po členu), a potom dosaďte $x_1 = \ldots = x_k = 0$.

Důsledek. Označme opět $f(x_1, \ldots, x_k)$ součet řady (10), pokud je absolutně konvergentní. Potom platí: $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$ identicky v nějakém okolí počátku $[0, \ldots, 0]$ tehdy a jen tehdy, když všechna $a_{i_1,\ldots,i_k}$ jsou rovna nule.

Vedle tohoto důsledku dokážeme dále obecnější větu 5. V **D II** je dokázána tato věta 224 (pro $k = 1$): *Nechť $\sum_{i \geqq 0} a_i(x - \alpha)^i = f(x)$ je absolutně konvergentní pro $|x - \alpha| < \varrho$ $(0 < \varrho \leqq +\infty)$ a nechť $0 < R < \varrho$. Potom platí: je-li aspoň jeden koeficient a_i různý od nuly, leží v kruhu $|x - \alpha| \leqq R$ nejvýše konečný počet bodů x, pro něž $f(x) = 0$.*

Odtud okamžitě plyne: *Nechť $\sum_{i \geqq 0} a_i(x - \alpha)^i = f(x)$ je absolutně konvergentní pro $|x - \alpha| < \varrho$ $(0 < \varrho \leqq +\infty)$. Nechť existuje množina $\mathfrak{M} \subset E$ s těmito vlastnostmi:*

1) Množina $\mathfrak{M}$ má aspoň jeden hromadný bod v kruhu $|x - \alpha| < \varrho$. 2) V každém bodě $x \in \mathfrak{M}$ je $f(x) = 0$. Potom všechny koeficienty a_i jsou rovny nule.

Tuto větu zobecníme na případ $k > 1$:

Věta 5. *Nechť řada*

$$(17) \qquad \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(x_1 - \alpha_1)^{i_1} \ldots (x_k - \alpha_k)^{i_k}$$

je absolutně konvergentní v oblasti

$$(18) \qquad |x_1 - \alpha_1| < r_1, \ldots, |x_k - \alpha_k| < r_k \quad (0 < r_j \leqq +\infty);$$

budiž tam $f(x_1, \ldots, x_k)$ její součet. Pro $j = 1, 2, \ldots, k$ budiž $\mathfrak{M}_j$ množina komplexních čísel z kruhu $|x_j - \alpha_j| < r_j$, která má v (otevřeném) kruhu $|x_j - \alpha_j| < r_j$ aspoň jeden hromadný bod. Nechť pro každý bod $[x_1, \ldots, x_k] \in \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \ldots \times \mathfrak{M}_k$ je $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$. Potom všechny koeficienty $a_{i_1,\ldots,i_k}$ jsou rovny nule.

Důkaz. Pro $k = 1$ je to citovaná věta. Budiž tedy $k > 1$ a předpokládejme, že věta je správná pro funkce $k - 1$ proměnných. Nechť $f(x_1, \ldots, x_k)$ splňuje předpokla-

---

[2]) Často se nám bude hodit mluvit o „nulté derivaci" funkce f, čímž rozumíme funkci f.

dy věty 5. Jestliže platí (18), lze podle věty A přerovnat řadu (17) v absolutně konvergentní řadu

(19) $$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_k \geqq 0} A_{i_k}(x_1, \ldots, x_{k-1}) (x_k - \alpha_k)^{i_k},$$

kde řada

(20) $$A_{i_k}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \sum_{i_1, \ldots, i_{k-1} \geqq 0} a_{i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k}(x_1 - \alpha_1)^{i_1} \ldots (x_{k-1} - \alpha_{k-1})^{i_{k-1}}$$

je absolutně konvergentní pro

(21) $$|x_1 - \alpha_1| < r_1, \ldots, |x_{k-1} - \alpha_{k-1}| < r_{k-1}.$$

Dosaďme za $x_1, \ldots, x_{k-1}$ libovolné body z $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_{k-1}$ (tj. $x_j \in \mathfrak{M}_j$). Potom řada v (19) je mocninná řada v $x_k - \alpha_k$, absolutně konvergentní pro $|x_k - \alpha_k| < r_k$, a její součet se rovná nule pro všechna $x_k \in \mathfrak{M}_k$. Podle případu $k = 1$ jsou koeficienty řady (19) rovny nule, tj. $A_{i_k}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = 0$ pro všechna $i_k \geqq 0$. To platí pro každé $[x_1, \ldots, x_{k-1}] \in \mathfrak{M}_1 \times \ldots \times \mathfrak{M}_{k-1}$. Tedy podle (20) a podle indukčního předpokladu je $a_{i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k} = 0$ pro všechna $i_1 \geqq 0, \ldots, i_{k-1} \geqq 0$, a to při každém $i_k \geqq 0$. Důkaz je hotov.

Příklad. Jestliže $f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k \geqq 0} a_{i_1, \ldots, i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k}$ je absolutně konvergentní v okolí počátku a jestliže existují $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_k > 0$ tak, že $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$ pro všechny systémy kladných čísel $x_1 < \delta_1, \ldots, x_k < \delta_k$, potom všechny koeficienty se rovnají nule.

Věta 6. *Nechť řada*

(22) $$\sum_{i_1, \ldots, i_k \geqq 0} a_{i_1, \ldots, i_k} x_1^{i_1} \ldots x_k^{i_k} = f(x_1, \ldots, x_k)$$

je absolutně konvergentní v oblasti

(23) $$|x_1| < R_1, \ldots, |x_k| < R_k \quad (0 < R_j \leqq +\infty).$$

Budiž $|\alpha_1| < R_1, \ldots, |\alpha_k| < R_k$. Potom v oblasti

(24) $$|x_1 - \alpha_1| < R_1 - |\alpha_1|, \ldots, |x_k - \alpha_k| < R_k - |\alpha_k|$$

lze $f(x_1, \ldots, x_k)$ rozvinout v absolutně konvergentní řadu o středu $[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$:

(25) $$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{j_1, \ldots, j_k \geqq 0} b_{j_1, \ldots, j_k}(x_1 - \alpha_1)^{j_1} \ldots (x_k - \alpha_k)^{j_k},$$

kde

(26) $$b_{j_1, \ldots, j_k} = \frac{1}{j_1! \ldots j_k!} \left[\frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_k} f(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_k^{j_k}}\right]_{x_1 = \alpha_1, \ldots, x_k = \alpha_k}.$$

Poznámka 2. Obor $|x_1 - \alpha_1| < R_1 - |\alpha_1|$ je celé E, je-li $R_1 = +\infty$. Je-li $R_1 < +\infty$, je to kruh o středu α_1, a jeho hranice $|x_1 - \alpha_1| = R_1 - |\alpha_1|$ je kružnice, která se z vnitřku dotýká kružnice $|x_1| = R_1$. Načrtněte si to!

Důkaz. V oboru (24) je podle předpokladu

$$\sum_{i_1 \geqq 0, \ldots, i_k \geqq 0} |a_{i_1,\ldots,i_k}| \left(|x_1 - \alpha_1| + |\alpha_1|\right)^{i_1} \ldots \left(|x_k - \alpha_k| + |\alpha_k|\right)^{i_k} < +\infty \,. \tag{27}$$

Sestrojme řadu

$$\sum |a_{i_1,\ldots,i_k}| \binom{i_1}{j_1} |x_1 - \alpha_1|^{j_1} |\alpha_1|^{i_1 - j_1} \ldots \binom{i_k}{j_k} |x_k - \alpha_k|^{j_k} |\alpha_k|^{i_k - j_k} \tag{28}$$

se sumačním oborem

$$i_1 \geqq 0, \ldots, i_k \geqq 0\,, \quad 0 \leqq j_1 \leqq i_1, \ldots, 0 \leqq j_k \leqq i_k\,. \tag{29}$$

Podle věty B (užiji binomické poučky) má řada (28) týž součet jako (27). Tedy je řada

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_k} \binom{i_1}{j_1} (x_1 - \alpha_1)^{j_1} \alpha_1^{i_1 - j_1} \ldots \binom{i_k}{j_k} (x_k - \alpha_k)^{j_k} \alpha^{i_k - j_k}$$

se sumačním oborem (29) absolutně konvergentní. Použiji teď na ni věty A. Sčítám-li napřed podle $j_1, \ldots, j_k$ při pevných $i_1, \ldots, i_k$, dostanu řadu (22) se součtem $f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_k)$. Sčítám-li napřed podle $i_1, \ldots, i_k$ při pevných $j_1, \ldots, j_k$, dostanu v oboru (24) vyjádření $f(x_1, \ldots, x_k)$ mocninnou řadou (absolutně konvergentní) o středu $[\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_k]$, tj. řadou tvaru (25). Vzorec (26) plyne potom z věty 4 (použité na řadě s libovolným středem).

Obraťme se k početním výkonům. Sčítání a násobení mocninných řad je triviální (viz **D II**, věta 233). Věnujeme se nyní složitějšímu úkolu – dosazování mocninných řad do mocninné řady. Věta 7, kterou teď dokáži, plyne snadnou úpravou věty 234 v **D II** a jeden speciální případ je v **D II** v příkl. 1 k větě 234. Pro ulehčení čtenáři provedu však úplný důkaz.

Věta 7. *Budiž*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r=0}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_r} x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r} = f(x_1, \ldots, x_r) \tag{30}$$

absolutně konvergentní v oboru $|x_p| \leqq R_p$ $(0 < R_p < +\infty;\ p = 1, \ldots, r)$. *Nechť řady*

$$\sum_{j_1,\ldots,j_q=0}^{\infty} b^{(p)}_{j_1,\ldots,j_q} u_1^{j_1} \ldots u_q^{j_q} = \varphi_p(u_1, \ldots, u_q) \quad (p = 1, \ldots, r) \tag{31}$$

konvergují absolutně pro $|u_j| \leqq \varrho_j$ $(0 < \varrho_j < +\infty;\ j = 1, \ldots, q)$. *Potom lze funkci*

$$(32) \qquad f(\varphi_1(u_1, \ldots, u_q), \ldots, \varphi_r(u_1, \ldots, u_q))$$

rozvinout v oboru

$$(33a) \qquad |u_j| \leqq \varrho_j \ (j = 1, \ldots, q),$$

$$(33b) \qquad \sum_{j_1, \ldots, j_q = 0}^{\infty} |b^{(p)}_{j_1, \ldots, j_q} u_1^{j_1} \ldots u_q^{j_q}| \leqq R_p \quad (p = 1, \ldots, r)$$

v absolutně konvergentní mocninnou řadu v proměnných $u_1, \ldots, u_q$ *o středu v počátku. Rozvoj funkce* (32) *se provede tak, že do každého členu řady* (30) *se za* $x_1, \ldots$ $\ldots, x_r$ *dosadí řady* (31) *a provede se vynásobení, načež všechny členy, které tak dostaneme, tvoří absolutně konvergentní řadu, kterou podle věty A upravíme v mocninnou řadu v proměnných* $u_1, \ldots, u_q$.

Důkaz. Nechť platí (33a, b), takže řady (31) jsou absolutně konvergentní a $|\varphi_p(u_1, \ldots, u_q)| \leqq R_p$. Tedy funkce (32) se rovná

$$\sum_{i_1, \ldots, i_r = 0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_r} \varphi_1^{i_1}(u_1, \ldots, u_q) \ldots \varphi_r^{i_r}(u_1, \ldots, u_q) =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_r = 0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_r} \Big(\sum_{j_1, \ldots, j_q = 0}^{\infty} b^{(1)}_{j_1, \ldots, j_q} u_1^{j_1} \ldots u_q^{j_q} \Big)^{i_1} \ldots \Big(\sum_{j_1, \ldots, j_q = 0}^{\infty} b^{(r)}_{j_1, \ldots, j_q} u_1^{j_1} \ldots u_q^{j_q} \Big)^{i_r}.$$

V každém členu proveďme vynásobení mocninných řad (je to součin $i_1 + \ldots + i_r$ mocninných řad) podle pravidla o násobení absolutně konvergentních řad:

$$\sum_{m \in \mathfrak{M}} A_m \cdot \sum_{n \in \mathfrak{N}} B_n = \sum_{\substack{[m,n] \\ m \in \mathfrak{M} \\ n \in \mathfrak{N}}} A_m B_n .$$

Stačí dokázat, že zobecněná řada S, kterou takto obdržíme, je absolutně konvergentní, neboť potom ji podle věty A můžeme přerovnat v mocninnou řadu. Ale absolutní konvergence řady S plyne (podle podmínky (4)) z toho, že součet absolutních hodnot libovolného konečného počtu členů této řady je nejvýše roven číslu

$$\sum_{i_1, \ldots, i_r} |a_{i_1, \ldots, i_r}| \Big(\sum_{j_1, \ldots, j_q} |b^{(1)}_{j_1, \ldots, j_q} u_1^{j_1} \ldots u_q^{j_q}| \Big)^{i_1} \ldots \Big(\sum_{j_1, \ldots, j_q} |b^{(r)}_{j_1, \ldots, j_q} u_1^{j_1} \ldots u_q^{j_q}| \Big)^{i_r},$$

což je podle (33b) konečné číslo.

Poznámka 3. 1. Schází-li v řadách (31) prostý člen (tj. $b^{(p)}_{0, \ldots, 0} = 0$), platí (33b) v jistém okolí počátku (použijeme spojitosti — viz větu 1).

2. Totéž platí, je-li $|b^{(p)}_{0, \ldots, 0}| < R_p$ $(p = 1, 2, \ldots, r)$. Naproti tomu, je-li $|b^{(p)}_{0, \ldots, 0}| >$ $> R_p$ pro některé p, není (33b) nikdy splněno a obsah věty je prázdný.

Pro nás bude nejdůležitější případ $b^{(p)}_{0,\ldots,0} = 0$. Čtenář jistě dovede vyslovit příslušnou větu, kde místo (30) je řada se středem $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ a místo (31) jsou řady se (společným) středem $[\beta_1, \ldots, \beta_q]$.

Zavedeme nyní pojem **dominantní** mocninné řady. Řadu

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_k}(x_1 - \alpha_1)^{i_1} \ldots (x_k - \alpha_k)^{i_k} \tag{34}$$

nazvu dominantní řadou k řadě

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_k}(x_1 - \alpha_1)^{i_1} \ldots (x_k - \alpha_k)^{i_k}, \tag{35}$$

jestliže

$$|a_{i_1,\ldots,i_k}| \leqq b_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Potom zřejmě řada

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_k}|x_1 - \alpha_1|^{i_1} \ldots |x_k - \alpha_k|^{i_k} \tag{36}$$

je majorantní k řadě (35) v E^k (tj. pro libovolná konečná $x_1, \ldots, x_k$). Je-li v některém bodě $[x_1, \ldots, x_k]$ řada (34) absolutně konvergentní, je v něm absolutně konvergentní i řada (35). (Někteří autoři užívají místo slova „dominantní" slova „majorantní". Nebudeme tak činit, aby nevzniklo nedorozumění.) Je důležité umět k dané řadě (35) nalézt dominantní řadu (34) pokud možná jednoduchého tvaru a takovou, abychom z jejích vlastností mohli soudit na některé vlastnosti řady (35). Vezmeme typický příklad. Nechť (35) je absolutně konvergentní pro $|x_1 - \alpha_1| = R_1, \ldots, |x_k - \alpha_k| = R_k$ $(0 < R_j < +\infty)$. Potom podle věty 2 existuje dominantní řada tvaru

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} C\left(\frac{x_1 - \alpha_1}{R_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\frac{x_k - \alpha_k}{R_k}\right)^{i_k}, \tag{37}$$

kde C je vhodné kladné konečné číslo. Tvrdím:

Řada (37) *je pro* $|x_j - \alpha_j| < R_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ *absolutně konvergentní a má součet*

$$\frac{C}{\left(1 - \dfrac{x_1 - \alpha_1}{R_1}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{x_k - \alpha_k}{R_k}\right)}. \tag{38}$$

Důkaz. V řadě s nezápornými členy

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} C\left(\frac{|x_1 - \alpha_1|}{R_1}\right)^{i_1} \ldots \left(\frac{|x_k - \alpha_k|}{R_k}\right)^{i_k} \tag{39}$$

sčítáme napřed podle i_1, potom podle i_2 atd. (tj. užijeme k-kráte věty B). Pro $|x_j - \alpha_j| < R_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ dostaneme, že (39) má konečný součet

$$\frac{C}{\left(1 - \frac{|x_1 - \alpha_1|}{R_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{|x_k - \alpha_k|}{R_k}\right)} .$$

Tedy je (37) absolutně konvergentní a obdobným užitím věty A dostanu součet (38).

Podotkněme: Je-li (34) dominantní k (35) a je-li některé $a_{i_1,\ldots,i_k} = 0$, mohu v (34) místo $b_{i_1,\ldots,i_k}$ psát nulu a řada zůstane dominantní. Příklad pro $k = 1$: Nechť $\sum_{n=2}^{\infty} a_m x^n$ je absolutně konvergentní pro $x = R$ $(0 < R < +\infty)$. Potom k ní existuje dominantní řada tvaru $\sum_{n=2}^{\infty} C \left(\frac{x}{R}\right)^n$, která pro $|x| < R$ má součet $C \frac{x^2}{R^2} \cdot \left(1 - \frac{x}{R}\right)^{-1}$.

Uveďme ještě jeden důsledek věty 7:

Věta 8. *Buďte dány mocninné řady*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r=0}^{\infty} a_{i_1,\ldots,i_r} x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r} , \tag{40}$$

$$\sum_{j_1,\ldots,j_q=0}^{\infty} b^{(p)}_{j_1,\ldots,j_q} u_1^{j_1} \ldots u_q^{j_q} \quad (p = 1, \ldots, r) .\text{[3]} \tag{41}$$

Buďte k těmto řadám dány řady dominantní

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r=0}^{\infty} A_{i_1,\ldots,i_r} x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r} \quad (A_{i_1,\ldots,i_r} \geqq |a_{i_1,\ldots,i_r}|) , \tag{42}$$

$$\sum_{j_1,\ldots,j_q=0}^{\infty} B^{(p)}_{j_1,\ldots,j_q} u_1^{j_1} \ldots u_q^{j_q} \quad (B^{(p)}_{j_1,\ldots,j_q} \geqq |b^{(p)}_{j_1,\ldots,j_q}|;\ p = 1, \ldots, r) . \tag{43}$$

Buďte dále $U_1, \ldots, U_q, X_1, \ldots, X_r$ konečná kladná čísla taková, že

$$\sum_{j_1,\ldots,j_q=0}^{\infty} B^{(p)}_{j_1,\ldots,j_q} U_1^{j_1} \ldots U_q^{j_q} \leqq X_p \quad (p = 1, \ldots, r) , \tag{44}$$

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r=0}^{\infty} A_{i_1,\ldots,i_r} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r} < +\infty . \tag{45}$$

Potom platí

I. *Řada* (40) *je absolutně konvergentní pro* $|x_j| \leqq X_j$ $(j = 1, \ldots, r)$, *řady* (41) *jsou absolutně konvergentní pro* $|u_j| \leqq U_j$ $(j = 1, \ldots, q)$.

---

[3]) O jejich konvergenci nic nepředpokládám; konverguje-li některá z nich absolutně v některém bodě $[x_1, \ldots, x_r]$, popříp. $[u_1, \ldots, u_q]$, označíme její součet $f(x_1, \ldots, x_r)$, popříp. $\varphi_p(u_1, \ldots, u_q)$.

II. *Pro* $|u_j| \leqq U_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ *je hodnota* $f(\varphi_1(u_1, \ldots, u_q), \ldots, \varphi_r(u_1, \ldots, u_q))$ *rovna součtu absolutně konvergentní mocninné řady v proměnných* $u_1, \ldots, u_q$ *o středu v počátku; tuto řadu dostaneme podle předpisu, obsaženého ve větě 7.*

Důkaz. I je zřejmé, neboť (45) a (44) jsou pro $|x_j| \leqq X_j$, popříp. $|u_j| \leqq U_j$ majorantní k (40) a (41). II plyne z věty 7, neboť

$$\sum_{j_1, \ldots, j_q = 0}^{\infty} |b^{(p)}_{j_1, \ldots, j_q} u_{j_1}^{j_1} \ldots u_q^{j_q}| \leqq \sum_{j_1, \ldots, j_q = 0}^{\infty} B^{(p)}_{j_1, \ldots, j_q} U_1^{j_1} \ldots U_q^{j_q} \leqq X_p .$$

§ 3

Holomorfní funkce

Budiž M otevřená, $M \subset E$. Funkce f (jedné komplexní proměnné) se nazývá **holomorfní** v M, jestliže platí:

(I) f má v každém bodě $x \in M$ derivaci (Černý, str. 236).

Platí pak tato věta (viz Černý, věta 172 a 179): *f je holomorfní v otevřené množině $M \subset E$ tehdy a jen tehdy, jestliže platí:*

(II) *Každý bod $\alpha \in M$ má okolí, v němž je f rozvinutelná v absolutně konvergentní mocninnou řadu o středu α.*

Při zobecnění na funkce k proměnných vyjdeme z formulace (II). Přitom budeme často psát $x = [x_1, \ldots, x_k]$, $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_k)$ apod.

Definice. *Budiž M otevřená množina, $M \subset E^k$. Funkci f (k komplexních proměnných) nazýváme* **holomorfní v** *M, jestliže v jistém okolí každého bodu $\alpha \in M$ je f rozvinutelná v absolutně konvergentní mocninnou řadu o středu α. Řekneme, že funkce je* **holomorfní v bodě** *$\alpha \in E^k$, je-li holomorfní v jistém okolí bodu α.*

Je-li tedy $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k] \in M$, požadujeme, aby v jistém okolí U bodu α bylo

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k} (x_1 - \alpha_1)^{i_1} \ldots (x_k - \alpha_k)^{i_k} , \tag{46}$$

přičemž řada vpravo je absolutně konvergentní v U.

Věta 9. *Nechť f je holomorfní v otevřené množině M. Potom f je spojitá v M a její parciální derivace všech řádů existují v M a jsou holomorfní v M.*

Důkaz. Věta 1, věta 3 a poznámka k ní.

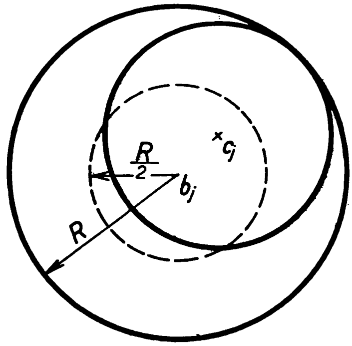
Věta 10. *Budiž f holomorfní v oblasti $M \subset E^k$, $M \neq \emptyset$. Potom jsou tyto tři výroky ekvivalentní:*

I. $f(x) = 0$ *pro všechna* $x \in M$.

II. $f(x) = 0$ *pro všechna x z jistého okolí některého bodu oblasti M.*

III. *f a všechny její derivace všech řádů jsou rovny nule v některém bodě oblasti M.*

Důkaz. Z I plyne II; z II plyne III; z III plyne II podle věty 4. Zbývá dokázat, že z II plyne I. Nechť tedy $a \in M$ a nechť $f(x) = 0$ v jistém okolí[4]) bodu a. Budiž A



Obr. 1.

množina všech bodů $\alpha \in M$, majících tu vlastnost, že $f(x) = 0$ v jistém okolí[4]) bodu α. Zřejmě je A otevřená. Dokáži-li ještě, že A je uzavřená v M, bude dokázáno, že $A = \emptyset$ nebo $A = M$. Ale $a \in A$, tedy $A = M$ a důkaz bude hotov. Nechť tedy $b = [b_1, \ldots, b_k] \in M$ je bodem uzávěru množiny A. Máme dokázat $b \in A$. V jistém okolí $|x_1 - b_1| < R, \ldots, |x_k - b_k| < R$ $(0 < R < +\infty)$ je

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} \beta_{i_1,\ldots,i_k}(x_1 - b_1)^{i_1} \ldots (x_k - b_k)^{i_k}, \tag{47}$$

kde řada vpravo je absolutně konvergentní. Existuje bod $[c_1, \ldots, c_k] \in A$ tak, že $|c_j - b_j| < \frac{1}{2} R$ $(j = 1, \ldots, k)$ (viz obr. 1). V oblasti

$$|x_j - c_j| < R - |c_j - b_j| \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{48}$$

lze psát (podle věty 6)

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} \gamma_{i_1,\ldots,i_k}(x_1 - c_1)^{i_1} \ldots (x_k - c_k)^{i_k}, \tag{49}$$

[4]) Míním: pro všechny body x z toho okolí.

kde řada vpravo je absolutně konvergentní. Ale v jistém okolí bodu $[c_1, \ldots, c_k]$ je identicky $f(x) = 0$, tedy podle věty 4 je $\gamma_{i_1,\ldots,i_k} = 0$, tedy $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$ v celé oblasti (48), která obsahuje (vzhledem k $|c_j - b_j| < \frac{1}{2} R$) jisté okolí bodu $[b_1, \ldots, b_k]$. Tedy $[b_1, \ldots, b_k] \in A$.

Poznámka 1. Z teorie holomorfních funkcí jedné komplexní proměnné znáte tzv. **větu o jednoznačnosti.** *Je-li funkce f holomorfní v oblasti $\Omega \subset E$ a je-li $f(z) = 0$ pro každý bod z jisté množiny $M \subset \Omega$, která má v Ω hromadný bod, je $f(z) = 0$ v celé oblasti Ω* (viz Černý, věta 187). Pro holomorfní funkce několika komplexních proměnných máme však doposud dokázány mnohem slabší věty 10 a 5.

Příklady funkcí $f_1(x_1, x_2) = x_1x_2$, $f_2(x_1, x_2) = (x_1 - x_2^2)^2$ pro $k = 2$ ukazují, že zde je situace mnohem složitější a uvedenou větu nelze mechanicky převést. Uveďme, že lze např. dokázat, že množina M nulových bodů funkce f holomorfní a nerovné identicky nule v oblasti $\Omega \subset E^k$ má „$2k$-rozměrnou Lebesgueovu míru" nula (množinu M můžeme zobrazit do prostoru R^{2k} a určit v tomto prostoru $2k$-rozměrnou Lebesgueovu míru tohoto obrazu). Lze také odvodit řadu výsledků o „geometrickém" charakteru této množiny. K těmto otázkám viz příklady na závěr § 1, kap. II (str. 43).

K dalším úvahám budeme potřebovat pojem křivkového integrálu. Potřebné údaje se najdou v Černém, kap. 8 (křivky), kap. 10 (Stieltjesův a křivkový integrál). Prozatím však vystačíme s několika jednoduchými poznámkami. **Křivkou** φ nazveme libovolnou spojitou komplexní funkci (konečnou), definovanou v libovolném intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ ($\alpha < \beta$ konečná reálná čísla). Černý (str. 203) připouští též hodnotu $\varphi(t) = \infty$, ale my to zatím nebudeme potřebovat. Množinu $\varphi(\langle \alpha, \beta \rangle)$ označuje Černý též $\langle \varphi \rangle$. Např. je-li $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle 0, 2\pi \rangle$, $\varphi(t) = a + re^{it}$ ($r > 0$), je $\langle \varphi \rangle$ kružnice $|x - a| = r$, a $\varphi(t)$ „probíhá tuto kružnici jednou v kladném smyslu". Body $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ se nazývají počáteční a koncový bod křivky φ. Křivka se nazývá uzavřená, jestliže její koncový bod splývá s počátečním: $\varphi(\beta) = \varphi(\alpha)$. Je-li $\langle \varphi \rangle \subset M$, říkáme, že φ je křivka v M, nebo že φ probíhá množinu M.

U Černého na str. 254 je definován **křivkový integrál** $\int_\varphi F(z)\,dz$, kde F je konečná komplexní funkce definovaná na $\langle \varphi \rangle$. *Je-li F spojitá na $\langle \varphi \rangle$ a má-li φ konečnou délku, potom tento integrál existuje* (Černý, věta 146). Budeme potřebovat několik vět o integrálech funkcí závislých na parametrech.

Věta C. *Nechť $M \subset E^n$ je otevřená a φ je křivka s konečnou délkou. Nechť $F(\xi, z) = F(\xi_1, \ldots, \xi_n, z)$ (konečná komplexní funkce $n + 1$ komplexních proměnných) je spojitá v oboru $\xi \in M$, $z \in \langle \varphi \rangle$. Potom funkce ($n$ proměnných) $G(\xi) = \int_\varphi F(\xi, z)\,dz$ je spojitá v M.*

Důkaz. Je to věta analogická větě 155 u Černého, kde však ξ_j jsou reálné a M je otevřený interval. Okamžitě zjistíte, že důkaz věty C je zcela analogický i při našich předpokladech.

Dále je u Černého tato věta 158:

Nechť $M \subset E$ je otevřená a křivka φ má konečnou délku. Nechť funkce $F(\zeta, z)$, $\dfrac{\partial F(\zeta, z)}{\partial \zeta}$ (dvou komplexních proměnných) jsou spojité v oboru $z \in \langle\varphi\rangle$, $\zeta \in M$. Potom funkce $G(\zeta) = \int_\varphi F(\zeta, z)\,\mathrm{d}z$ je holomorfní v M a je

$$\frac{\mathrm{d}G(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} = \int_\varphi \frac{\partial F(\zeta, z)}{\partial \zeta}\,\mathrm{d}z$$

pro všechna $\zeta \in M$.

Odtud odvodíme:

Věta D. *Nechť $M \subset E^n$ je otevřená, φ je křivka s konečnou délkou. Nechť*

$$F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, z)\,, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, z) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

jsou spojité v oboru $z \in \langle\varphi\rangle$, $[\zeta_1, \ldots, \zeta_n] \in M$. Potom funkce

$$G(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \int_\varphi F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, z)\,\mathrm{d}z$$

je spojitá v M a má v M spojité derivace

$$\frac{\partial G(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{\partial \zeta_j} = \int_\varphi \frac{\partial F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, z)}{\partial \zeta_j}\,\mathrm{d}z\,. \tag{50}$$

Důkaz. Zvolme libovolný bod $\zeta^0 = [\zeta_1^0, \ldots, \zeta_n^0] \in M$. Potom množina $M_1 \subset E$ těch bodů ζ_1, pro něž je $[\zeta_1, \zeta_2^0, \ldots, \zeta_n^0] \in M$, je otevřená a na funkci $F_1(\zeta_1, z) = F(\zeta_1, \zeta_2^0, \ldots, \zeta_n^0, z)$ lze aplikovat větu 158 z Černého. Tedy platí pro $j = 1$ vzorec (50) v těch bodech $[\zeta_1, \zeta_2^0, \ldots, \zeta_n^0]$, pro něž je $\zeta_1 \in M_1$, tedy speciálně v bodě ζ^0, což byl libovolný bod z M. Podobně pro $j = 2, \ldots, n$. Spojitost G a $\dfrac{\partial G}{\partial \zeta_j}$ v M plyne pak z věty C.

Odvodíme nyní vzorec obdobný **Cauchyovu vzorci** (Černý, věta 160), ale jen pro speciální oblasti a speciální křivky.

Věta 11. *Nechť funkce $f(x_1, \ldots, x_k)$ (k komplexních proměnných) je spojitá a má spojité parciální derivace 1. řádu v oblasti*

$$|x_1 - \alpha_1| < R_1, \ldots, |x_k - \alpha_k| < R_k \quad (0 < R_j \leqq +\infty)\,. \tag{51}$$

Zvolme čísla r_j ($j = 1, \ldots, k$), $0 < r_j < R_j$. Potom v oblasti

$$|x_1 - \alpha_1| < r_1, \ldots, |x_k - \alpha_k| < r_k \tag{52}$$

platí rovnost

$$f(x_1, \ldots, x_k) =$$

(53)
$$= \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{K_1} \left(\int_{K_2} \cdots \int_{K_k} \frac{f(z_1, \ldots, z_k)}{(z_1 - x_1) \ldots (z_k - x_k)} \, dz_k \right) \ldots dz_2 \, dz_1 .$$

Přitom K_j je křivka $\alpha_j + r_j e^{it}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

Důkaz provedu pro $k = 3$. Zvolme bod $[x_1, x_2, x_3]$ v oblasti $|x_j - \alpha_j| < r_j$, $j = 1, 2, 3$ (tento bod bude nyní pevný). Podle Cauchyova vzorce je

$$f(z_1, z_2, x_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_3} \frac{f(z_1, z_2, z_3)}{z_3 - x_3} \, dz_3$$

v oboru $|z_1 - \alpha_1| < R_1$, $|z_2 - \alpha_2| < R_2$. V tomto oboru je funkce (dvou proměnných z_1, z_2) $f(z_1, z_2, x_3)$ spojitá a má spojité derivace 1. řádu $\frac{\partial f}{\partial z_1}$, $\frac{\partial f}{\partial z_2}$ (podle věty D). Podle Cauchyova vzorce je v oboru $|z_1 - \alpha_1| < R_1$

$$f(z_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_2} \frac{f(z_1, z_2, x_3)}{z_2 - x_2} \, dz_2 ,$$

a funkce (jedné proměnné) $f(z_1, x_2, x_3)$ je (podle věty D) v oboru $|z_1 - \alpha_1| < R_1$ spojitá a má v něm spojitou derivaci. Podle Cauchyova vzorce je tedy

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{f(z_1, x_2, x_3)}{z_1 - x_1} \, dz_1 .$$

Postupným dosazováním dostaneme

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{K_1} \left(\int_{K_2} \frac{f(z_1, z_2, x_3)}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)} \, dz_2 \right) dz_1 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{K_1} \left(\int_{K_2} \left(\int_{K_3} \frac{f(z_1, z_2, z_3) \, dz_3}{(z_1 - x_1)(z_2 - x_2)(z_3 - x_3)} \right) dz_2 \right) dz_1 .$$

Kdo není spokojen s tímto důkazem, může se pokusit o indukci podle k.

Věta 12. *Nechť funkce $f(x_1, \ldots, x_k)$ je spojitá a má spojité parciální derivace* **1.** *řádu v oblasti*

(54)
$$|x_j - \alpha_j| < R_j \quad (j = 1, \ldots, k; \; 0 < R_j \leqq +\infty) .$$

Potom lze f rozvinout v oblasti (54) *v absolutně konvergentní řadu*

(55) $$f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k} (x_1 - \alpha_1)^{i_1} \ldots (x_k - \alpha_k)^{i_k},$$

kde

(56)
$$a_{i_1, \ldots, i_k} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{K_1} \left(\int_{K_2} \ldots \left(\int_{K_k} \frac{f(z_1, \ldots, z_k) \, dz_k}{(z_1 - \alpha_1)^{i_1 + 1} \ldots (z_k - \alpha_k)^{i_k + 1}} \right) \ldots dz_2 \right) dz_1 \;;$$

K_j *je křivka* $\alpha_j + r_j e^{it}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$, *kde* r_j *je libovolné číslo intervalu* $(0, R_j)$.

Jestliže pro

(57) $$z_1 \in \langle K_1 \rangle, \ldots, z_k \in \langle K_k \rangle$$

je

(58) $$|f(z_1, \ldots, z_k)| \leqq C \quad (0 < C < +\infty)\,,$$[5]

je

(59) $$|a_{i_1, \ldots, i_k}| \leqq \frac{C}{r_1^{i_1} \ldots r_k^{i_k}}.$$

Důkaz. Zvolme $r_1, \ldots, r_k$ $(0 < r_j < R_j)$. V oblasti

(60) $$|x_j - \alpha_j| < r_j \quad (j = 1, \ldots, k)$$

platí (53). Zvolme bod $x = [x_1, \ldots, x_k]$ v oboru (60). V oboru

(61) $$z_1 \in \langle K_1 \rangle, \ldots, z_k \in \langle K_k \rangle$$

je

(62) $$\frac{1}{z_j - x_j} = \frac{1}{(z_j - \alpha_j) - (x_j - \alpha_j)} = \frac{1}{z_j - \alpha_j} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x_j - \alpha_j}{z_j - \alpha_j}}.$$

Zde je $\left| \dfrac{x_j - \alpha_j}{z_j - \alpha_j} \right| = \dfrac{|x_j - \alpha_j|}{r_j} = q_j < 1$, kde q_j (při daném x_j) je konstanta. Tedy lze psát

(63) $$\frac{1}{(z_1 - x_1) \ldots (z_k - x_k)} = \sum_{i_1 = 0}^{\infty} \frac{(x_1 - \alpha_1)^{i_1}}{(z_1 - \alpha_1)^{i_1 + 1}} \cdots \sum_{i_k = 0}^{\infty} \frac{(x_k - \alpha_k)^{i_k}}{(z_k - \alpha_k)^{i_k + 1}}.$$

---

[5]) Existence takového C plyne ze spojitosti funkce f.

Vzhledem k absolutně konvergentní majorantě

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty} \frac{1}{r_1} q_1^{i_1} \ldots \frac{1}{r_k} q_k^{i_k}$$

můžeme řadu (63) pojímat také jako zobecněnou řadu $\sum\limits_{i_1,\ldots,i_k=0}^{\infty}$, která je v oboru (57) absolutně konvergentní a po libovolném přerovnání v obyčejnou řadu též stejnoměrně konvergentní. Po takovém přerovnání násobíme omezenou funkcí $f(z_1, \ldots, z_k)$ a integrujeme člen po členu. Tím dostáváme vzorce (55), (56) – až na to, že místo zobecněné řady v (55) máme obyčejnou řadu, vzniklou z ní přerovnáním. Ale z (56), (58) plyne (59). Odtud ihned plyne, že zobecněná řada v (55) je absolutně konvergentní v oboru (60). Tím je vzorec (55) plně dokázán, zatím ovšem jen v oboru $|x_j - \alpha_j| < r_j$. Avšak r_j mohu volit libovolně „blízko" k R_j a koeficienty $a_{i_1,\ldots,i_k}$ jsou podle věty 4 jednoznačně určeny derivacemi funkce f v bodě $[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]$. Tedy integrál v (56) nezávisí na číslech r_j (pokud $0 < r_j < R_j$), takže (55), (56) platí v celém oboru (54).

Poznámka 2. To, že z odhadu (58) v oboru (57) plyne (59), je důležité; často se s tím setkáme.

Věta 13. *Budiž $M \subset E^k$ otevřená množina. Potom funkce $f(x_1, \ldots, x_k)$ je holomorfní v M (tj. rozvinutelná v jistém okolí každého bodu $\alpha \in M$ v absolutně konvergentní mocninnou řadu o středu α) tehdy a jen tehdy, když f je v M spojitá a má v M spojité parciální derivace* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$.

Důkaz. Věta 1, věta 3 a poznámka k ní, věta 12.

Věta 13 podává důležitou charakteristiku holomorfních funkcí. Požadavek spojitosti by se dal vynechat, ale důkaz by byl obtížnější.

Dodatek. *Nechť f je holomorfní v oblasti* (54). *Potom podle věty* 12 *platí vzorec* (55) *s absolutně konvergentní řadou vpravo v celé oblasti* (54).

Důkaz: Podle věty 13 je f spojitá v (54) a má tam spojité parciální derivace 1. řádu, takže lze užít věty 12.

Věta 14. *Nechť funkce $f_n(x) = f_n(x_1, \ldots, x_k)$ jsou holomorfní v otevřené množině $M \subset E^k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ a nechť*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

lokálně stejnoměrně v M. Potom platí: Funkce f je holomorfní v M a je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{64}$$

lokálně stejnoměrně v M.

Odtud ovšem indukcí plyne: Označíme-li

$$D = \frac{\partial^{i_1 + \ldots + i_k}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_k^{i_k}}, \quad \textit{je} \quad \lim_{n \to \infty} D f_n(x) = D f(x)$$

lokálně stejnoměrně v M.

Důkaz. Zvolme bod $\alpha = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k] \in M$. Množinu $|x_j - \alpha_j| < r$ budeme značit $K(r)$, její uzávěr $\overline{K(r)}$. Zvolme ϱ $(0 < \varrho < +\infty)$ tak, aby oblast $K(3\varrho)$ ležela v M. Dokážeme, že f je holomorfní v $K(\varrho)$ a konvergence v (64) je stejnoměrná v $K(\varrho)$. Tím bude věta dokázána.

V $K(3\varrho)$ je (podle dodatku k větě 13)

$$f_n(x) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} a_{i_1, \ldots, i_k}^{(n)} (x_1 - \alpha_1)^{i_1} \ldots (x_k - \alpha_k)^{i_k}.$$

Ježto funkce f_n jsou v $\overline{K(2\varrho)}$ omezené a tvoří stejnoměrně konvergentní posloupnost, existuje $C (0 < C < +\infty)$ tak, že je $|f_n(x)| \leqq C$ pro všechna $x \in \overline{K(2\varrho)}$ a všechna n; odtud podle (59) (beru $r_j = 2\varrho$) plyne

$$(65) \qquad |a_{i_1, \ldots, i_k}^{(n)}| \leqq C \cdot (2\varrho)^{-i_1 - \ldots - i_k}.$$

Označme dále

$$\sigma_m = \sup_{x \in K(2\varrho)} |f_m(x) - f(x)|, \quad \varepsilon_n = \sup_{m \geqq n} \sigma_m.$$

Následkem stejnoměrné konvergence je $\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \ldots$, $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Z definice ε_n plyne, že $|f_m(x) - f_n(x)| \leqq 2\varepsilon_n$ pro $m \geqq n$, $x \in \overline{K(2\varrho)}$. Podle (59) plyne odtud, že

$$(66) \qquad |a_{i_1, \ldots, i_k}^{(n)} - a_{i_1, \ldots, i_k}^{(m)}| \leqq 2\varepsilon_n \cdot (2\varrho)^{-i_1 - \ldots - i_k} \quad \text{pro} \quad m \geqq n.$$

Podle Bolzanovy-Cauchyovy podmínky existuje tedy

$$a_{i_1, \ldots, i_k} = \lim_{n \to \infty} a_{i_1, \ldots, i_k}^{(n)}, \quad \text{a je} \quad |a_{i_1, \ldots, i_k}| \leqq C(2\varrho)^{-i_1 - \ldots - i_k},$$

$$|a_{i_1, \ldots, i_k}^{(n)} - a_{i_1, \ldots, i_k}| \leqq 2\varepsilon_n \cdot (2\varrho)^{-i_1 - \ldots - i_k}$$

(viz (65), (66)).

Řada

$$F(x) = \sum_{i_1, \ldots, i_k \geqq 0} a_{i_1, \ldots, i_k} (x_1 - \alpha_1)^{i_1} \ldots (x_k - \alpha_k)^{i_k}$$

má v $K(\varrho)$ absolutně konvergentní majorantu $\left(\text{je } \frac{|x_j - \alpha_j|}{2\varrho} < \frac{1}{2}\right)$

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k \geqq 0} C \cdot 2^{-i_1-\ldots-i_k} = 2^k C,$$

tedy je F holomorfní v $K(\varrho)$. Dále je v $K(\varrho)$

$$|f_n(x) - F(x)| \leqq \sum_{i_1,\ldots,i_k \geqq 0} 2\varepsilon_n \cdot 2^{-i_1-\ldots-i_k} = 2^{k+1}\varepsilon_n,$$

tedy $F(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Konečně je v $K(\varrho)$

$$\left|\frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right| =$$

$$= \left|\sum_{i_1 \geqq 1, i_2 \geqq 0,\ldots,i_k \geqq 0} i_1(a^{(n)}_{i_1,\ldots,i_k} - a_{i_1,\ldots,i_k})(x_1 - \alpha_1)^{i_1-1} \cdot (x_2 - \alpha_2)^{i_2} \ldots (x_k - \alpha_k)^{i_k}\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i_1 \geqq 1, i_2 \geqq 0,\ldots,i_k \geqq 0} 2\varepsilon_n \cdot \tfrac{1}{2}\varrho^{-1} \cdot i_1 \cdot 2^{-i_1+1-i_2-\ldots-i_k} =$$

$$= 2\varepsilon_n \cdot \varrho^{-1} \cdot 2^{k-1} p, \quad \text{kde} \quad p = \sum_{i_1=1}^{\infty} \frac{i_1}{2^{i_1}} < +\infty.$$

Tedy je konvergence v (64) stejnoměrná v $K(\varrho)$. (Dovedete vypočítat p? Ale nepotřebujeme to.)

Poznámka 3. Důkaz věty 14 by šel ovšem také provést analogicky jako pro $k = 1$ (Černý, věta 173) pomocí vět 11 a 13 (proveďte podrobně jako cvičení!).

Věta 15. *Nechť funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ je holomorfní v otevřené množině $N \subset E^r$. Nechť funkce $\varphi_p(u_1, \ldots, u_q)$ $(p = 1, \ldots, r)$ jsou holomorfní v otevřené množině $M \subset E^q$. Nechť pro každý bod $[u_1, \ldots, u_q] \in M$ leží bod $[\varphi_1(u_1, \ldots, u_q) \ldots, \varphi_r(u_1, \ldots \ldots, u_q)]$ v množině N. Potom funkce*

$$F(u_1, \ldots, u_q) = f(\varphi_1(u_1, \ldots, u_q), \ldots, \varphi_r(u_1, \ldots, u_q))$$

je holomorfní v M.

Důkaz. Zvolme bod $[a_1, \ldots, a_q] \in M$ a položme $b_p = \varphi_p(a_1, \ldots, a_q)$ $(p = 1, \ldots, r)$; tedy $[b_1, \ldots, b_r] \in N$. V jistém okolí bodu $[b_1, \ldots, b_r]$ je tedy f součtem absolutně konvergentní řady

$$f(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_r \geqq 0} B_{i_1,\ldots,i_r}(x_1 - b_1)^{i_1} \ldots (x_r - b_r)^{i_r}.$$

Ale v jistém okolí bodu $[a_1, \ldots, a_q]$ je pro $p = 1, \ldots, r$

$$(67)\qquad \varphi_p(u_1, \ldots, u_q) - b_p = \varphi_p(u_1, \ldots, u_q) - \varphi_p(a_1, \ldots, a_q) =$$
$$= \sum_{j_1,\ldots,j_q \geqq 0} A^{(p)}_{j_1,\ldots,j_q}(u_1 - a_1)^{j_1} \ldots (u_q - a_q)^{j_q},$$

kde vpravo je absolutně konvergentní řada bez prostého členu. Podle věty 7 a poznámky k ní je v jistém okolí bodu $[a_1, \ldots, a_q]$

$$F(u_1, \ldots, u_q) =$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_r = 0}^{\infty} B_{i_1,\ldots,i_r}(\varphi_1(u_1, \ldots, u_q) - b_1)^{i_1} \ldots (\varphi_r(u_1, \ldots, u_q) - b_r)^{i_r},$$

kde za $\varphi_p(u_1, \ldots, u_q) - b_p$ lze dosadit řady (67) a výraz vpravo přerovnat v absolutně konvergentní řadu tvaru $\sum_{j_1,\ldots,j_r=0}^{\infty} C_{j_1,\ldots,j_q}(u_1 - a_1)^{j_1} \ldots (u_q - a_q)^{j_q}$. Tedy je F holomorfní v M.

Věta 16. *Buďte F, G holomorfní v otevřené množině $M \subset E^r$. Potom funkce $F + G$, $F - G$, FG jsou též holomorfní v M. Je-li $G(x) \neq 0$ pro všechna $x \in M$, je též $F \cdot G^{-1}$ holomorfní v M.*

Důkaz. Zvolme bod $a = [a_1, \ldots, a_r]$. Funkce F, G lze v jistém okolí bodu a vyjádřit jako součty absolutně konvergentních mocninných řad o středu a. Totéž platí tedy podle (triviální) věty 233 z **D II** pro funkce $F + G$, FG. Nechť nyní $G(x) \neq 0$ pro všechna $x \in M$, tedy též $G(a) \neq 0$. Pišme

$$G(x) = G(a)\left(1 + \frac{G(x) - G(a)}{G(a)}\right).$$

Funkce (jedné proměnné)

$$f(v) = \frac{1}{G(a)} \cdot \frac{1}{1 + v} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{G(a)}(-1)^j v^j \quad (|v| < 1)$$

je holomorfní pro $|v| < 1$. V jistém okolí $U(a, \delta) \subset M$ je $\left|\frac{G(x) - G(a)}{G(a)}\right| < 1$, takže podle věty 15 $\left(\text{dosadíme } v = \frac{G(x) - G(a)}{G(a)}\right)$ je tedy funkce

$$f\left(\frac{G(x) - G(a)}{G(a)}\right) = \frac{1}{G(a)\left(1 + \frac{G(x) - G(a)}{G(a)}\right)} = \frac{1}{G(x)}$$

holomorfní v $U(a, \delta)$. Větu o podílu převedu nyní na větu o součinu $\left(\frac{F}{G} = F \cdot \frac{1}{G}\right)$.

Poznámka 4. Z věty 16 nyní ihned dostaneme následující tvrzení: *Buďte* $P(u, v, \dots, w)$ *a* $Q(u, v, \dots, w)$ *polynomy, nechť funkce* $f(x), g(x), \dots, h(x)$ *jsou holomorfní v otevřené množině* $M \subset E^r$ *a nechť dále pro všechna* $x \in M$ *je* $Q(f(x), g(x), \dots, h(x)) \neq 0$. *Potom je funkce*

$$\frac{P(f(x), g(x), \dots, h(x))}{Q(f(x), g(x), \dots, h(x))}$$

holomorfní v množině M.