Kapitola III

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE A JEJICH SYSTÉMY

V předešlých kapitolách jsme mluvili o komplexních funkcích několika komplexních proměnných. V této kapitole půjde výhradně o komplexní funkce jedné komplexní proměnné, ale zato budeme potřebovat řadu hlubších vět. Téměř všechno najde čtenář v knize Černého; některé věci zopakuji a připojím některé speciální dodatky. V množině $\boldsymbol{E}$ všech (konečných) komplexních čísel jsme zavedli zdálenost $\varrho(x, y) = |x - y|$; tím dostáváme metrický prostor $(\boldsymbol{E}, \varrho)$. Černý pracuje více v množině $\boldsymbol{S}$, která vzniká z $\boldsymbol{E}$ přidáním dalšího jednoho prvku, který budeme označovat ∞ (Černý, str. 20). V $\boldsymbol{S}$ můžeme zavést metriku ϱ^* (Černý, str. 23–25). Tím dostáváme metrický prostor $(\boldsymbol{S}, \varrho^*)$, jehož struktura je velmi názorná: streografická projekce dává izometrické zobrazení sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v $\boldsymbol{R}^3$ na prostor $(\boldsymbol{S}, \varrho^*)$.

V topologických úvahách z teorie funkcí komplexní proměnné je často vhodnější prostor $\boldsymbol{S}$ než $\boldsymbol{E}$; v $(\boldsymbol{S}, \varrho^*)$ nehraje bod ∞ žádnou zvláštní úlohu. Naopak, v úvahách kvantitativního rázu (a taková bude většina našich úvah) bude pro nás často vhodnější pracovat v $\boldsymbol{E}$, ale někdy bude nutné pracovat v $\boldsymbol{S}$. Uvědomme si některé shody i rozdíly mezi prostory $(\boldsymbol{E}, \varrho)$, $(\boldsymbol{S}, \varrho^*)$.

V mnohých otázkách nepotřebuji přímo metriku, nýbrž vystačím s pojmem okolí bodu. Je-li $a \in \boldsymbol{E}$, mohu za jeho ε-okolí ($\varepsilon > 0$) vzít kruh $|x - a| < \varepsilon$, ať pracuji v $(\boldsymbol{E}, \varrho)$ nebo v $(\boldsymbol{S}, \varrho^*)$. Za ε-okolí bodu ∞ v $(\boldsymbol{S}, \varrho^*)$ vezmu množinu $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ (včetně bodu ∞); viz Černý, str. 23. Množinu $M \subset \boldsymbol{E}$ nazvu **omezenou**, jestliže existuje konečné kladné číslo K tak, že je $|x| \leqq K$ pro všechna $x \in M$.

Poznamenejme ještě: Čtenáři je známo, že množinu $\boldsymbol{R}$ doplňujeme v reálné analýze dvěma prvky $+\infty$, $-\infty$. Černý se z dobrých důvodů tomuto označení vyhýbá; my se mu vyhýbat nebudeme, protože v našich úvahách tím nedojde k nedorozumění. Budeme tedy psát $|\infty| = +\infty$, kdežto Černý píše $|\infty| = \infty$. (Prvky $+\infty$, $-\infty$ ovšem neleží v $\boldsymbol{S}$; jak se definuje počítání s prvkem ∞, je uvedeno v Černém, str. 20.)

Jestliže M je omezená, má v $(\boldsymbol{S}, \varrho^*)$ týž uzávěr jako v $(\boldsymbol{E}, \varrho)$. Je-li $M \subset \boldsymbol{E}$ neomezená, dostanu její uzávěr v $(\boldsymbol{S}, \varrho^*)$ tak, že k uzávěru v $(\boldsymbol{E}, \varrho)$ přidám bod ∞. Čtenář si sám rozmyslí, jak se liší pojmy uzavřené množiny a otevřené množiny v $(\boldsymbol{E}, \varrho)$

a v (S, ϱ^*). Ježto sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ je kompaktní (viz **D II**, věta 156), je též (S, ϱ^*) kompaktní, a tedy každá uzavřená množina v (S, ϱ^*) je kompaktní (**D II**, pozn. 3 na str. 312). V (E, ϱ) je však množina kompaktní tehdy a jen tehdy, je-li omezená a uzavřená v (E, ϱ). Aby nedošlo k nedorozumění, budu místo „kompaktní v (E, ϱ)" říkat „omezená a uzavřená" (uzavřenost omezené množiny znamená v (E, ϱ) totéž co v (S, ϱ^*)).

O souvislých množinách jsem se zmínil na začátku kap. I. Ostatně o souvislých množinách v S pojednává Černý na str. 89 a násl. Důležitý bude pro nás tento pojem: Oblast (tj. otevřená souvislá množina) $M \subset S$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže $S - M$ je souvislá (ani v případě $M \subset E$ nesmíte místo $S - M$ vzít $E - M$).

Budiž f komplexní funkce jedné komplexní proměnné (její definiční obor i její hodnoty leží v S; bod ∞ není vyloučen). Je-li $a \in E$, $A \in E$, značí $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = A$ v (E, ϱ) totéž co v (S, ϱ^*). Pro $a \in E$ znamená $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = \infty$ totéž jako $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} |f(x)| = +\infty$ (v symbolice reálné analýzy). Pro $A \in S$ znamená pak $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \in M}} f(x) = A$ totéž jako $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ 1/z \in M}} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = A$ (speciálně: limita posloupnosti). Odtud se jako obvykle definuje spojitost funkce.

Snad tyto poznámky čtenáři postačí.

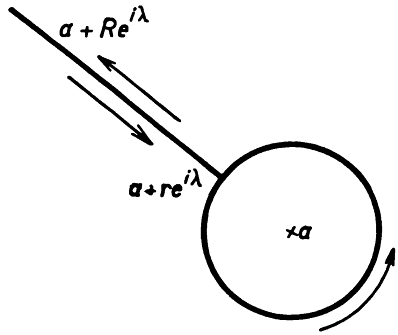
§ 1

Analytické funkce

Budeme nyní stále potřebovat pojem a vlastnosti analytického pokračování a analytických funkcí jedné komplexní proměnné. Vše potřebné se najde u Černého v kap. 15, 16, 17. Zopakuji hlavní věci a přidám některé doplňky. O křivkách jsem něco řekl v textu za větou 10 (kap. I, § 3). Je-li φ křivka, tj. spojité zobrazení omezeného intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ do E (Černý na str. 203 zavádí křivku jako spojité zobrazení $\langle \alpha, \beta \rangle$ do S — nebudeme to ale potřebovat), budeme ji často psát takto: $\varphi(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$. Znakem $\dot{-}\varphi$ označujeme potom křivku Φ, definovanou pro $-\beta \leqq t \leqq -\alpha$ rovnicí $\Phi(t) = \varphi(-t)$. Je-li ψ křivka $\psi(t)$, $\gamma \leqq t \leqq \delta$, a je-li $\psi(\gamma) = \varphi(\beta)$, bude $\varphi \dot{+} \psi$ značit křivku Θ, definovanou rovnicemi $\Theta(t) = \varphi(t)$ pro $\alpha \leqq t \leqq \beta$, $\Theta(t) = \psi(t + \gamma - \beta)$ pro $\beta \leqq t \leqq \delta - \gamma + \beta$. Je to velmi názorné.

Budiž $\varphi(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$, křivka a budiž ω spojitá rostoucí funkce v $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$, $\omega(\alpha_1) = \alpha$, $\omega(\beta_1) = \beta$. Potom lze definovat novou křivku ψ rovnicí $\psi(\tau) = \varphi(\omega(\tau))$,

$\alpha_1 \leqq \tau \leqq \beta_1$. Říkáme, že se křivky φ, ψ liší jen nepodstatně (Černý, str. 204). Budeme se hlavně zabývat takovými větami, vzorci apod., u kterých nezáleží na tom, kterou z křivek, nepodstatně se lišících, vezmeme. Často proto bude možno nahradit explicitní udání křivky obrázkem. Např. obr. 3 spolu s údajem, že bod $a + Re^{i\lambda}$ je počátečním (a současně koncovým) bodem křivky, znamená křivku $\varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \varphi_3$, kde $\varphi_1(t) = a - te^{i\lambda}$, $-R \leqq t \leqq -r$, $\varphi_2(t) = a + re^{it}$, $\lambda \leqq t \leqq \lambda + 2\pi$, $\varphi_3(t) = a + te^{i\lambda}$, $r \leqq t \leqq R$ — nebo křivku, lišící se od $\varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \varphi_3$ nepodstatně.



Obr. 3.

Samozřejmě budu užívat obrázku jen tam, kde není pochyby, že čtenář pozná, která křivka (vlastně která třída nepodstatně se lišících křivek) je míněna.

Budiž nyní dán bod $a \in E$ a funkce f meromorfní v jistém jeho okolí (Černý připouští též $a = \infty$). Dvojici (a, f) nazvu **analytickou dvojicí**. Zavedu mezi těmito dvojicemi rovnost: $(a, f) = (b, g)$ právě tehdy, když $a = b$ a $f(x) = g(x)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu a. To je vztah reflexní, symetrický a tranzitivní, takže se množina všech dvojic rozpadá na disjunktní třídy. Každou takovou třídu nazvu **analytickým elementem** (někteří autoři užívají názvu **germ**). Element, obsahující dvojici (a, f), označím $\mathscr{E}(a, f)$. Rovnost $\mathscr{E}(a, f) = \mathscr{E}(b, g)$ bude znamenat, že obě třídy jsou totožné, tj. že $a = b$ a že pro všechna x z některého okolí bodu a je $f(x) = g(x)$. Bod a nazýváme středem elementu $\mathscr{E}(a, f)$, číslo $f(a)$ hodnotou tohoto elementu. Jestliže f je holomorfní v některém okolí bodu a, říkáme, že $\mathscr{E}(a, f)$ je **holomorfní element**. Pro nás budou nejdůležitější holomorfní elementy. Mluvím obecně o meromorfních elementech, abych se příliš nevzdálil od knihy Černého. Čtenář, který zná teorii analytických funkcí z některé knihy, jednající jen o holomorfních elementech, může v tomto paragrafu slovo „meromorfní" nahradit slovem „holomorfní" — pro další text tím nic neztratí.

Budiž φ křivka $\varphi(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$. Budiž každému $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ přiřazen element $\mathscr{E}(\varphi(t), f^t)$; tím dostaneme systém elementů, který označíme

(1) $$\{\mathscr{E}(\varphi(t), f^t)\}_{t=\alpha}^{t=\beta}$$

(je to nutno chápat jako zobrazení intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ do množiny všech analytických elementů). Jestliže ke každému $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ existuje číslo $\delta_t > 0$ tak, že

$$(2) \qquad (t' \in \langle\alpha, \beta\rangle,\ |t' - t| < \delta_t) \Rightarrow (\mathscr{E}(\varphi(t'), f^{t'}) = \mathscr{E}(\varphi(t'), f^t)),$$

nazveme systém (1) **řetězcem elementů podél křivky** *φ; $\mathscr{E}(\varphi(\alpha), f^\alpha)$, $\mathscr{E}(\varphi(\beta), f^\beta)$ se nazývají počáteční a koncový element řetězce.* (Definice u Černého na str. 386 je jiná, ale podle (19) na str. 387 je ekvivalentní s naší definicí pomocí (2).)[1])

Element $\mathscr{E}(\varphi(t), f^t)$ neurčuje úplně funkci f^t, ale určuje hodnotu $f^t(\varphi(t))$. Tvrdím:

Je-li (1) řetězec podél φ, je funkce $g(t) = f^t(\varphi(t))$ spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Důkaz: V (1) vezměme určité funkce f^t. Zvolme $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Z (2) a z definice rovnosti elementů plyne, že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro $t' \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $|t' - t| < \varepsilon$ je $f^{t'}(\varphi(t')) = f^t(\varphi(t'))$, takže pro tato t' je $g(t') = f^t(\varphi(t'))$. Ze spojitosti funkce φ a funkce f^t plyne spojitost složené funkce g v bodě t (pro $t = \alpha$ zprava, pro $t = \beta$ zleva).

Je-li dána křivka $\varphi(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$, s počátečním bodem $a = \varphi(\alpha)$ a analytický element $\mathscr{E}(a, f)$, potom existuje nejvýše jeden řetězec (1) podél φ, který má počáteční element $\mathscr{E}(a, f)$ (Černý, str. 388). Existuje-li takový řetězec a je-li $\mathscr{E}(b, g)$ jeho koncový element, píšeme $\mathscr{E}(a, f) \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}(b, g)$ a říkáme, že $\mathscr{E}(b, g)$ je **pokračování elementu** $\mathscr{E}(a, f)$ **podél** φ. Jestliže přitom všechny elementy řetězce (1) jsou holomorfní, budeme mluvit o **holomorfním pokračování** a psát $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(b, g)$ (pro nás budou vlastně důležitá jen holomorfní pokračování).

Připojme ještě tuto poznámku:

Je-li f meromorfní (popříp. holomorfní) v kruhu $|x - a| < r$ $(0 < r \leqq +\infty)$, je-li φ křivka s počátečním bodem a s koncovým bodem b a probíhá-li φ v kruhu $|x - a| < r$, potom je

$$\mathscr{E}(a, f) \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}(b, f), \quad \textit{popříp.} \quad \mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(b, f).$$

Důkaz: Položíme-li v (1) $f^t = f$ pro všechna $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, dostaneme řetězec podél φ.

Dokážeme nyní větu, která je velmi příbuzná větě 206 u Černého; ale pro nás bude pohodlnější věta poněkud odlišná.

Věta 19. *Nechť $f, g, \ldots, h$ je konečný počet funkcí holomorfních v bodě $x_0 \in \boldsymbol{E}$. Nechť φ je křivka $\varphi(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$ $(-\infty < \alpha < \beta < +\infty)$, $\varphi(\alpha) = x_0$, $\varphi(\beta) = X_0$. Nechť*

$$(3) \qquad \mathscr{E}(x_0, f) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(X_0, F), \ldots, \mathscr{E}(x_0, h) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(X_0, H).$$

[1]) Velikost čísel δ_t závisí nejenom na systému (1) elementů, ale i na volbě funkcí f^t (v (2) musí být f_t definováno v jistém okolí bodu $\varphi(t')$), ale existence takových δ_t závisí jen na systému elementů (1).

Potom existují:

1) *Dělení* $\alpha < T_0 < T_1 < \ldots < T_N = \beta$.

2) *Otevřené kruhy* $K_0, K_1, \ldots, K_N$ *se středy* $x_0 = \varphi(T_0)$, $x_1 = \varphi(T_1), \ldots, x_N = \varphi(T_N) = X_0$.

3) *Funkce* $F^j, G^j, \ldots, H^j$ *holomorfní v* K_j $(j = 0, 1, \ldots, N)$ *tak, že platí (označme* φ_j *křivku* $\varphi(t)$, $T_{j-1} \leqq t \leqq T_j$):

4) $\langle \varphi_j \rangle \subset K_{j-1}$ *pro* $j = 1, \ldots, N$.

5) $F^{j-1}(x) = F^j(x), \ldots, H^{j-1}(x) = H^j(x)$ *pro všechna* $x \in K_{j-1} \cap K_j$ $(j = 1, \ldots, N)$.

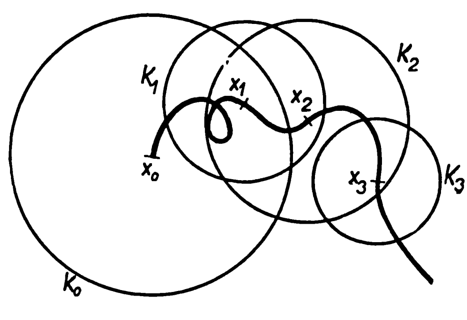
6) $F^0(x) = f(x), \ldots, H^0(x) = h(x)$ *v jistém okolí bodu* x_0, $F^N(x) = F(x), \ldots, H^N(x) = H(x)$ *v jistém okolí bodu* X_0.

Poznámka 1. Vypadá to složitě, ale je to velmi názorné, viz obr. 4. Naopak je jasné toto: Je-li φ křivka $\varphi(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$, $\varphi(\alpha) = x_0$, $\varphi(\beta) = X_0$, a existují-li rozdělení, kruhy a funkce 1), 2), 3) tak, že platí 4), 5), 6), potom platí (3). Volím-li totiž $f^t = F^{j-1}$ pro $T_{j-1} \leqq t \leqq T_j$ $(j = 1, \ldots, N)$, je $\{\mathscr{E}\varphi(t), f^t\}_{t=\alpha}^{t=\beta}$ řetězec podél φ a je $f^\alpha(x) = f(x)$ v jistém okolí bodu x_0, $f^\beta(x) = F(x)$ v jistém bodu X_0; podobně pro $g, \ldots, h$.

Důkaz věty 19. Podle (3) existují řetězce (holomorfní)

$$\{\mathscr{E}(\varphi(t), f^t)\}_{t=\alpha}^{t=\beta}, \ldots, \{\mathscr{E}(\varphi(t), h^t)\}_{t=\alpha}^{t=\beta}, \tag{4}$$

kde $f^\alpha = f, \ldots, h^\alpha = h$ v jistém okolí bodu $x_0 = \varphi(\alpha)$, $f^\beta = F, \ldots, h^\beta = H$ v jistém okolí bodu $X_0 = \varphi(\beta)$.



Obr. 4.

Budiž $r(t)$ supremum všech čísel $r > 0$, pro něž existují funkce $f_1^t, \ldots, h_1^t$, holomorfní v kruhu $|x - \varphi(t)| < r$, které v nějakém okolí bodu $\varphi(t)$ se rovnají funkcím $f^t, \ldots, h^t$. Beze změny řetězců (4) můžeme zřejmě předpokládat, že funkce $f^t, \ldots, h^t$ jsou holomorfní v kruhu $|x - \varphi(t)| < r(t)$. Abychom se vyhnuli symbolu $+\infty$, položme $R(t) = \min(1, r(t))$ (ač to není nutné — co platí v případě, je-li $r(t_0) = +\infty$

pro jisté $t_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$?). Dokažme, že $R(t)$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$. Budiž $t_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Zvolme $\varepsilon = \varepsilon(t_0) > 0$ tak malé, že z

$$(5) \qquad t \in \langle\alpha, \beta\rangle\,, \quad |t - t_0| < \varepsilon$$

plyne

$$(6) \qquad |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \frac{1}{2} R(t_0)\,, \quad \mathscr{E}(\varphi(t), f^t) = \mathscr{E}(\varphi(t), f^{t_0}), \ldots$$
$$\ldots, \mathscr{E}(\varphi(t), h^t) = \mathscr{E}(\varphi(t), h^{t_0})\,.$$

Zvolme t tak, že platí (5). f^{t_0} je holomorfní v kruhu, obsahujícím bod $\varphi(t)$; tedy je $f^t = f^{t_0}$ v jistém okolí bodu $\varphi(t)$. Tedy je zřejmě f^t holomorfní v kruhu $|x - \varphi(t)| < R(t_0) - |\varphi(t) - \varphi(t_0)|$ [2]) a podobně pro $g, \ldots, h$. Ale tento kruh obsahuje podle (6) bod $\varphi(t_0)$; v jistém okolí tohoto bodu je tedy $f^{t_0} = f^t$. Tedy je zřejmě f^{t_0} holomorfní v kruhu $|x - \varphi(t_0)| < R(t) - |\varphi(t) - \varphi(t_0)|$ a podobně pro $g, \ldots, h$. Tedy je předně (pravé strany jsou automaticky $\leqq 1$) $R(t) \geqq R(t_0) - |\varphi(t) - \varphi(t_0)|$, za druhé $R(t_0) \geqq R(t) - |\varphi(t) - \varphi(t_0)|$, tedy $|R(t) - R(t_0)| \leqq |\varphi(t) - \varphi(t_0)|$. Ježto φ je spojitá, plyne odtud spojitost funkce $R(t)$ v bodě t_0 (pro $t_0 = \alpha$ zprava, pro $t_0 = \beta$ zleva).

Kladná spojitá funkce $R(t)$ má v $\langle\alpha, \beta\rangle$ kladné minimum ϱ. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $t' \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $|t - t'| < \Delta$ bylo $|\varphi(t') - \varphi(t)| < \varrho$, a zvolme rozdělení $\alpha = T_0 < T_1 < \ldots < T_N = \beta$ tak, aby $T_j - T_{j-1} < \Delta$. Za kruhy K_j volme kruhy $|x - x_j| < \varrho$, kde $x_j = \varphi(T_j)$. Konečně volme $F^j = f^{T_j}, \ldots, H^j = h^{T_j}$ $(j = 0, 1, \ldots, N)$. Označíme-li ještě φ_j křivku $\varphi(t)$, $T_{j-1} \leqq t \leqq T_j$, jsou zřejmě splněny 4), 5), 6). (Bod 5 plyne z toho, že $\mathscr{E}(x_{j-1}, F^{j-1}) \underset{\varphi_j}{\longrightarrow} \mathscr{E}(x_j, F^j)$ a že φ_j probíhá v kruhu K_{j-1}, ve kterém F^{j-1} je holomorfní.)

Obraťme se nyní k pojmu **analytické funkce** (jedné komplexní proměnné).

Budiž $M \subset E$, $M \neq \emptyset$ oblast (u Černého se požaduje jen $M \subset S$). Všechny analytické elementy, jejichž středy leží v M, tvoří jistou množinu $\mathfrak{M}$. V této množině zaveďme tento vztah: Jsou-li $\mathscr{E}(a, f)$, $\mathscr{E}(b, g)$ elementy z $\mathfrak{M}$, pišme $\mathscr{E}(a, f) \sim \mathscr{E}(b, g)$, jestliže existuje křivka φ tak, že

$$(7) \qquad \langle\varphi\rangle \subset M\,, \quad \mathscr{E}(a, f) \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}(b, g)\,.$$

Vztah $\sim$ je reflexivní, symetrický a tranzitivní, a tedy vytváří rozklad množiny $\mathfrak{M}$ na třídy (dva elementy patří do téže třídy právě tehdy, když pro ně existuje křivka φ tak, že platí (7)). Každou takovou třídu $\mathfrak{F}$ nazveme analytickou funkcí v M. Je-li $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$, říkáme, že $\mathscr{E}(a, f)$ vytvořuje nebo určuje analytickou funkci $\mathfrak{F}$. Jestliže některý (a tedy každý) element $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$ lze analyticky pokračovat podél každé křivky ležící v M a mající počáteční bod a, říkáme, že $\mathfrak{F}$ je v M **neomezeně pokračovatelná**. Je-li $\mathfrak{F}$ (analytická v M) neomezeně pokračovatelná a jednoznačná v M (tj. existuje-li ke každému $a \in M$ jen jeden element o středu a, který patří k $\mathfrak{F}$),

[2]) Tento kruh se dotýká z vnitřku kružnice $|x - \varphi(t_0)| = R(t_0)$. Kreslete si to!

ztotožníme analytickou funkci $\mathfrak{F}$ s funkcí F takto definovanou: Pro každé $a \in M$ existuje právě jeden element $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$, který má střed a; klademe potom $F(a) = f(a)$. Tato funkce F je v M meromorfní (jsou-li všechny elementy z $\mathfrak{F}$ holomorfní, je F holomorfní v M); viz Černý, věta 212, str. 403. Důležitá je tato věta:

Je-li $\mathfrak{F}$ funkce analytická a neomezeně pokračovatelná v M a je-li $M \subset E$ jednoduše souvislá, je $\mathfrak{F}$ jednoznačná (Černý, věta 225, str. 433), *a tedy ji lze ztotožnit s funkcí F meromorfní v M (jsou-li všechny elementy z $\mathfrak{F}$ holomorfní, je F holomorfní v M).*

Budiž $\mathfrak{F}$ funkce analytická v M a budiž M_1 oblast, $M_1 \subset M$. Je-li $a \in M_1$, $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$, určuje tento element jednak funkci $\mathfrak{F}$ analytickou v M, jednak jistou funkci $\mathfrak{F}_1$ analytickou v M_1. $\mathfrak{F}_1$ se nazývá **větev analytické funkce** $\mathfrak{F}$ v M_1. Je-li $a \in M$, $b \in M$, $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$, $\mathscr{E}(b, g) \in \mathfrak{F}$, potom existuje křivka φ v M tak, že $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(b, g)$, ale nemusí existovat křivka ψ v M_1 tak, aby bylo $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\psi]{} \mathscr{E}(b, g)$; v tomto případě elementy $\mathscr{E}(a, f)$, $\mathscr{E}(b, g)$ určují dvě různé větve funkce $\mathfrak{F}$ (analytické v M) v oblasti M_1. V studiu analytické funkce $\mathfrak{F}$ v M je často výhodné volit M_1 tak, aby všechny větve funkce $\mathfrak{F}$ v M_1 byly jednoznačné; s příklady se často setkáme.

Budiž $\mathfrak{F}$ funkce analytická v oblasti $M \subset E$. Budiž $a \in M$. Potom může (ale nemusí) existovat element funkce $\mathfrak{F}$ o středu a a takových elementů může být více (i nekonečně mnoho): $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$, $\mathscr{E}(a, g) \in \mathfrak{F}$, $\mathscr{E}(a, h) \in \mathfrak{F}, \ldots$ Hodnoty těchto elementů, tj. čísla $f(a)$, $g(a)$, $h(a), \ldots$ nazveme hodnotami analytické funkce $\mathfrak{F}$ v bodě a (Černý, str. 398).

V knize Černého je vybudována teorie analytických funkcí obecně. My se v dalším textu nejčastěji setkáme s funkcemi v M analytickými a neomezeně pokračovatelnými, obsahujícími jen holomorfní elementy. Podle toho jsem vybral obsah tohoto paragrafu. Proto je jeho obsah poněkud nesourodý; např. jsem vůbec nemluvil o analytických elementech se středem ∞. Nám to vadit nebude, ale v obecné teorii analytických funkcí by to byl těžký nedostatek.

Ještě jedna připomínka. Čtenář zná pojem **pólu** (Černý, str. 313). Podle Černého, str. 443, nepočítá Černý póly meromorfní funkce mezi její **singulární body**. Pro nás bude však výhodnější počítat póly mezi singulární body.

§ 2

Existenční věta pro systémy lineárních rovnic

Jde o systémy rovnic tohoto typu (čárky značí derivace):

$$y'' = a(x)\, y + b(x)\, z + c(x)\, y' + d(x)\, z' + e(x)\, z'' + f(x)\,,$$
$$z''' = \alpha(x)\, y + \beta(x)\, z + \gamma(x)\, y' + \delta(x)\, z' + \varepsilon(x)\, z'' + \varphi(x)$$

apod., které lze (viz kap. II, počátek § 2) převést na systémy tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x)y_j + b_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{8}$$

Věta 20. *Buďte $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ konečná komplexní čísla. Nechť funkce $a_{kj}(x)$, $b_k(x)$ jsou holomorfní v kruhu $|x - x_0| < r$ $(0 < r \leqq +\infty)$. Potom existuje právě jeden systém mocninných řad tvaru*

$$y_k(x) = y_{k0} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{km}(x - x_0)^m \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{9}$$

konvergentních v kruhu $|x - x_0| < r$, které v tomto kruhu splňují rovnice (8).

Poznámka 1. Prosté členy y_{k0} v (9) říkají, že jsou splněny počáteční podmínky $y_k(x_0) = y_{k0}$.

Důkaz. Zavedu-li místo x, y_k za proměnnou a za neznámé funkce $x - x_0$, $y_k - y_{k0}$ (tím se změní $b_k(x)$ o $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}y_{j0}$), vidím, že smím předpokládat $x_0 = y_{10} = \ldots y_{n0} = 0$.

Nechť tedy

$$a_{kj}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{kji}x^i\,, \quad b_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_{ki}x^i \tag{10}$$

jsou konvergentní pro $|x| < r$. Mají-li řady

$$y_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{km}x^m \tag{11}$$

v jistém okolí počátku konvergovat a splňovat rovnice (8), musí být splněny rovnice, jež dostaneme dosazením řad (11) do (8). Poznamenejme, že zde nejde o poměrně složité úpravy podle věty 7, nýbrž prostě o násobení absolutně konvergentních řad[3]). Rovnice, o nichž jsem se zmínil, jsou

$$c_{k1} = b_{k0}\,, \quad mc_{km} = \sum_{i=0}^{m-2} \sum_{j=1}^{n} a_{kji}c_{j,m-1-i} + b_{k,m-1} \quad (m > 1)\,, \tag{12}$$

což dává právě jedno řešení pro čísla c_m. Dokážeme-li ještě, že řady (11) s těmito koeficienty konvergují pro $|x| < r$, bude věta dokázána.

---

[3]) Mocninná řada v jedné proměnné, konvergentní v otevřené množině, je v ní absolutně konvergentní, ježto neabsolutní konvergence může nastat jen v bodech konvergenční kružnice.

K tomu cíli zvolme libovolné číslo R intervalu $0 < R < r$; potom existuje K ($0 < K < +\infty$) tak, že

$$|a_{kji}| < \frac{K}{R^i}, \quad |b_{ki}| < \frac{K}{R^i}. \tag{13}$$

Vyšetřujeme systém rovnic

$$\frac{dY_k}{dx} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K}{R^i} x^i (Y_1 + \ldots + Y_n) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K}{R^i} x^i. \tag{14}$$

Předpokládejme na okamžik, že jsme našli řešení rovnic (14) (braných jako rovnice v reálném oboru), které má tvar

$$Y_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} x^m \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{15}$$

a vyhovuje rovnicím (14) v intervalu $0 < x < R$, přičemž řady (15) v tomto intervalu konvergují. Potom čísla C_{km} nutně vyhovují rovnicím tvaru (12), ale s čísly KR^{-i} místo a_{kji}, b_{ki}. Z nerovností (13) plyne pak $|c_{km}| \leqq C_{km}$, takže řady (11) konvergují v oboru $|x| < R$, a tedy v celém oboru $|x| < r$ (ježto R lze volit libovolně blízko číslu r), a důkaz bude hotov.

Hledejme tedy řešení rovnic (14). Tyto rovnice lze pro $0 < x < R$ psát ve tvaru

$$\frac{dY_k}{dx} = \frac{K}{1 - \frac{x}{R}} (Y_1 + \ldots + Y_n + 1).$$

Ježto nám jde o řešení tvaru (15), budeme hledat v intervalu $0 < x < R$ řešení nezáporná a taková, že $Y_k(x) \to 0$ pro $x \to 0_+$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Musí tedy býti $Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n$, neboť hledané funkce mají mít v intervalu $(0, R)$ stejnou derivaci a nulovou limitu pro $x \to 0_+$. Jde tedy o řešení rovnice

$$\frac{dY}{dx} = \frac{K}{1 - \frac{x}{R}} (nY + 1)$$

s podmínkami $Y(x) \geqq 0$, $Y(x) \to 0$ pro $x \to 0_+$. Počítejme:

$$\frac{1}{nY + 1} \frac{dY}{dx} = \frac{K}{1 - \frac{x}{R}},$$

$$\lg (nY + 1) = -RKn \lg \left(1 - \frac{x}{R}\right) + \text{konst}.$$

Pro $x \to 0_+$ dostaneme, že konst $= 0$. Tedy máme pro $0 < x < R$ řešení

$$Y(x) = \frac{1}{n}\left(\left(1 - \frac{x}{R}\right)^{-nRK} - 1\right).$$

Užijeme-li binomické řady, vidíme, že $Y(x)$ je vskutku mocninná řada bez prostého členu, konvergentní pro $0 < x < R$.

Poznámka 2. Důkaz této věty byl podstatně jednodušší než důkazy v kap. II. Daleko důležitější je však tento fakt: Jsou-li „koeficienty" $a_{kj}(x)$, $b_k(x)$ holomorfní v oboru $|x - x_0| < r$, dostáváme řešení, které je také holomorfní v celém oboru $|x - x_0| < r$. To má velmi důležitý důsledek, který odvodíme ve větě 21.

Přenesme ještě větu 20 na jednu lineární rovnici n-tého řádu.

Věta 20a. *Buďte $a_1(x), \ldots, a_n(x)$, $b(x)$ holomorfní v kruhu $|x - x_0| < r$ $(0 < r \leqq \leqq +\infty)$. Buďte $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ konečná komplexní čísla. Potom existuje právě jedna mocninná řada $y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x - x_0)^m$, která splňuje „počáteční podmínky"*

$$y(x_0) = y_0, \quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} = y_0', \ldots, \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

konverguje v kruhu $|x - x_0| < r$ a splňuje v tomto kruhu rovnici

(16) $$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_n(x)\,y = b(x).$$

Důkaz. Rovnici (16) lze převést na systém

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_1, \quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_2, \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}y_{n-2}}{\mathrm{d}x} = y_{n-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x} = -a_1(x)\,y_{n-1} - \ldots - a_{n-1}(x)\,y_1 - a_n(x)\,y + b(x),$$

na který užijeme věty 20.

Poznamenejme, že z počátečních podmínek plynou rovnosti

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = \frac{y_0'}{1!}, \ldots, c_{n-1} = \frac{y_0^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Věta 21. *Budiž φ křivka s počátečním bodem x_0, koncovým bodem X_0. Funkce a_{kj}, b_k $(k, j = 1, \ldots, n)$ buďte holomorfní v jistém okolí bodu x_0. Nechť existují pokračování*

$$\mathscr{E}(x_0, a_{kj}) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(X_0, A_{kj}), \quad \mathscr{E}(x_0, b_k) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(X_0, B_k).$$

Potom platí: Nechť funkce $y_1, \ldots, y_n$ dávají řešení systému (8) v jistém okolí bodu x_0. Potom existují pokračování $\mathscr{E}(x_0, y_k) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(X_0, Y_k)$ a funkce $Y_1, \ldots, Y_n$ dávají v jistém okolí bodu X_0 řešení systému

$$\frac{\mathrm{d}Y_k}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} A_{kj}(x)\, Y_j + B_k(x) \quad (k = 1, \ldots, n)\,.$$

Důkaz. Užijeme věty 19, kde funkce $f, g, \ldots, h$ budou teď funkce a_{kj}, b_k $(k, j = 1, 2, \ldots, n)$. Sestrojme dělení, kruhy a funkce podle 1), 2), 3), 4), 5), 6). Budiž $y_1, \ldots, y_n$ řešení systému (8) v jistém okolí bodu x_0. Ježto a_{kj}, b_k jsou holomorfní v K_0, jsou také $y_1, \ldots, y_n$ holomorfní v K_0 (věta 20). Sestrojme čísla $y_1(x_1), \ldots, y_n(x_1)$ (x_1 je střed kruhu K_1 a je $x_1 \in K_0$). Podle konstrukce dělení, kruhů a funkcí existují v K_1 holomorfní funkce $\bar{a}_{kj}(x), \bar{b}_k(x)$ tak, že v $K_0 \cap K_1$ je

$$\bar{a}_{kj} = a_{kj}\,, \quad \bar{b}_k = b_k\,. \tag{17}$$

Ježto křivka φ_1 (tj. $\varphi(t)$, $T_0 \leqq t \leqq T_1$) probíhá v K_0, je zřejmě

$$\mathscr{E}(x_0, a_{kj}) \xrightarrow[\varphi_1]{\text{hol}} \mathscr{E}(x_1, \bar{a}_{kj})\,, \quad \mathscr{E}(x_0, b_k) \xrightarrow[\varphi_1]{\text{hol}} \mathscr{E}(x_1, \bar{b}_k)\,. \tag{18}$$

Podle věty 20 existuje v K_1 holomorfní řešení $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ systému

$$\frac{\mathrm{d}\bar{y}_k}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj}(x)\, \bar{y}_j + \bar{b}_k(x)\,, \tag{19}$$

vyhovující počátečním podmínkám $\bar{y}_k(x_1) = y_k(x_1)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Ale v jistém okolí bodu x_1 platí rovnosti (17), takže $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_k$ dávají v jistém okolí bodu x_1 také řešení systému (8). Také $y_1, \ldots, y_n$ však dávají v jistém okolí bodu $x_1 \in K_0$ řešení systému (8) a vedle toho vyhovují v bodě x_1 týmž počátečním podmínkám $(\bar{y}_k(x_1) = y_k(x_1))$. Podle věty 20 (jednoznačnost) je tedy $\bar{y}_k(x) = y_k(x)$ v jistém okolí bodu x_1, a tedy v celé množině $K_0 \cap K_1$, takže $\mathscr{E}(x_0, y_k) \xrightarrow[\varphi_1]{\text{hol}} \mathscr{E}(x_1, \bar{y}_k)$. Zároveň dává systém $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ řešení systému (19) v celém K_1. Tím jsme se z K_0 dostali do K_1 a opakováním tohoto postupu dojdeme po N krocích k funkcím $Y_1, \ldots, Y_n$.

Poznámka 3. Věta 21 říká – zhruba řečeno – že u lineárních systémů se nemohou vyskytnout „pohyblivé singularity“: pokud lze podél nějaké křivky holomorfně pokračovat „koeficienty“ a_{kj}, b_k, lze podél ní holomorfně pokračovat i řešení systému (8).

Odvodím nyní některé věty, které asi většina čtenářů zná v reálném oboru. Pro jednoduchost předpokládejme, že koeficienty a_{kj}, b_k v (8) jsou holomorfní v nějaké jednoduše souvislé oblasti $M \subset E$ $(M \neq \emptyset)$. Potom každé řešení systému (8) v jistém okolí některého bodu $x_0 \in M$ lze podle věty 21 rozšířit na holomorfní řešení v celém M. Budeme proto v dalším mlčky předpokládat, že vyšetřovaná řešení jsou holomorfní v M. Píšeme-li systém n funkcí jako vektor o jednom sloupci („vektorová funkce"), lze (8) psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{B}\,, \tag{20}$$

kde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Zabývejme se napřed tzv. **homogenním systémem** (tj. $b_k = 0$)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{y}\,. \tag{21}$$

Jsou-li

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f_{1k} \\ \vdots \\ f_{nk} \end{pmatrix} \quad (k \geqq 1)$$

nějaké vektorové funkce a existují-li konstanty $c_1 \in E, \dots, c_k \in E$ tak, že aspoň jedno $c_j \neq 0$ a že

$$c_1\,\mathbf{f}_1(x) + \dots + c_k\,\mathbf{f}_k(x) = 0 \tag{22}$$

(nula vpravo značí nulový vektor) pro všechna x nějaké množiny P, budeme říkat, že $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ jsou **lineárně závislé** v P; jinak říkáme, že jsou lineárně nezávislé v P. Podotkněme: *jsou-li f_{jk} holomorfní v M a platí-li (22) v nějakém okolí nějakého bodu $x_0 \in M$, platí (22) v celém M.* Až do konce tohoto paragrafu budu místo „závislé (nezávislé) v M" říkat „závislé (nezávislé)". Rovnice (22) mezi vektory znamená totéž jako n rovnic mezi jejich „komponentami"

$$c_1 f_{j1}(x) + \dots + c_k f_{jk}(x) = 0 \quad (j = 1, \dots, n)\,. \tag{23}$$

Dokáži nyní těchto pět tvrzení:

1. *Jsou-li $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ (vektorové funkce) dvě řešení systému (21), c_1, c_2 komplexní čísla (konečná), je též $c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2$ řešení. Nulový vektor je řešením.*

2. *Máme-li n řešení*

$$\mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, n)\,, \tag{24}$$

potom determinant

$$(25) \qquad W_{y_1,\dots,y_n}(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x), \dots, y_{1n}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n1}(x), \dots, y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

je buďto ve všech bodech $x \in M$ různý od nuly, a potom jsou $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ lineárně nezávislé, nebo je ve všech bodech $x \in M$ roven nule, a potom jsou $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ lineárně závislé.

3. *Existuje systém n lineárně nezávislých řešení. Takovému systému říkáme* **fundamentální systém** *řešení.*

4. *Budiž $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ fundamentální systém řešení. Potom každé řešení $\mathbf{z}$ má tvar $\mathbf{z} = c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n$ s vhodnými komplexními konstantami c_j.*

5. *Budiž $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ fundamentální systém řešení; budiž $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ nějaký systém n řešení, takže*

$$\mathbf{z}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\mathbf{y}_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

s konstantními c_{ij}. Potom $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ je fundamentální systém tehdy a jen tehdy, když matice čísel c_{ij} je nesingulární (tj. její determinant není nula).

Důkaz. Bod 1 je jasný.

Bod 2: Výraz $c_1 \mathbf{y}_1(x) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(x)$ má komponenty

$$(26) \qquad \begin{array}{l} c_1\, y_{11}(x) + c_2\, y_{12}(x) + \dots + c_n\, y_{1n}(x)\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1\, y_{n1}(x) + c_2\, y_{n2}(x) + \dots + c_n\, y_{nn}(x)\,. \end{array}$$

Je-li systém $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ závislý, existují čísla $c_1, \dots, c_n$ (aspoň jedno $c_j \neq 0$) tak, že všechny komponenty (26) jsou rovny nule pro všechna $x \in M$. Tedy je $W_{y_1,\dots,y_n}(x) = 0$ pro všechna $x \in M$. Nechť naopak $W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) = 0$ aspoň pro jeden bod $x_0 \in M$. Potom existují čísla $c_1, \dots, c_n$ (aspoň jedno $c_j \neq 0$) tak, že komponenty (26) jsou v bodě x_0 rovny nule. To však znamená, že řešení

$$\mathbf{z} = c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n \quad \left(\text{píši } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right)$$

vyhovuje počátečním podmínkám $\mathbf{z}_1(x_0) = \dots = \mathbf{z}_n(x_0) = 0$, kterým vyhovuje též nulové řešení. Ježto (věta 20) je řešení jednoznačně určeno počátečními podmínkami, je $\mathbf{z}(x) = 0$, tj. $c_1 \mathbf{y}_1(x) + \dots + c_n \mathbf{y}_n(x) = 0$ pro všechna $x \in M$.

Bod 3 je nyní zřejmý: Zvolím bod $x_0 \in M$ a počáteční podmínky $y_{ij}(x_0)$ tak, aby $W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) \neq 0$, a užiji bodu 2 (např. $y_{ij}(x_0) = 1$ pro $i = j$, jinak $y_{ij}(x_0) = 0$).

Bod 4. Značme $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Zvolme bod $x_0 \in M$. Ježto $W_{y_1,\ldots,y_n}(x_0) \neq 0$, existují $c_1, \ldots, c_n$ tak, že $c_1\, y_{j1}(x_0) + \ldots + c_n\, y_{jn}(x_0) = z_j(x_0)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Tedy $\mathbf{z}$ vyhovuje v bodě x_0 týmž počátečním podmínkám jako $c_1\mathbf{y}_1 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n$, tedy $\mathbf{z} = c_1\mathbf{y}_1 + \ldots + c_n\mathbf{y}_n$.

Bod 5. Podle pravidla o násobení determinantů je $W_{z_1,\ldots,z_n} = \operatorname{Det}(c_{ij}) \,.\, W_{y_1,\ldots,y_n}$, a užije se bodu 2.

Dokážeme ještě jeden vzorec pro $W_{y_1,\ldots,y_n}(x)$, kde $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ jsou řešení (21). Pišme kratčeji $W(x)$ nebo W. Je $\mathrm{d}W/\mathrm{d}x = W_1 + \ldots + W_n$, kde W_j vznikne z W derivováním j-tého řádku. Užiji-li (21), dostanu

$$W_1 = \begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}y_{j1}\,, \ldots, \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}y_{jn} \\ y_{21}, \ldots, y_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}, \ldots, y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Odečtu-li od prvního řádku vhodnou lineární kombinaci ostatních, dostanu $W_1 = a_{11}W$ a obdobně $W_j = a_{jj}W$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\, W\,.$$

Odtud dostanu W takto: Položím

$$F(x) = W(x) \,.\, \exp\left(-\int_{x_0}^{x} (a_{11}(z) + \ldots + a_{nn}(z))\,\mathrm{d}z\right)$$

(integrál se bere přes jakoukoliv křivku v M s počátkem x_0 a koncem x). Potom

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} - (a_{11}(x) + \ldots + a_{nn}(x))\, W(x)\right).\exp\left(-\int_{x_0}^{x} (a_{11}(z) + \ldots + a_{nn}(z))\,\mathrm{d}z\right)$$

tedy $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0$, $F(x) = C$ (C je konstanta) a dosazením $x = x_0$ dostáváme $C = W(x_0)$.

Tedy

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^{x} (a_{11}(z) + \ldots + a_{nn}(z))\,\mathrm{d}z\right). \tag{27}$$

Obraťme se nyní k systému (20), tj.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}x} = \mathbf{A}(x)\,\mathbf{y} + \mathbf{B}(x)\,.$$

Okamžitě je patrné toto: *Je-li* $\mathbf{Y}$ *řešení systému* (20) (*jde vesměs o vektorové funkce*), *jsou všechna řešení dána výrazem* $\mathbf{y} + \mathbf{Y}$, *kde* $\mathbf{y}$ *probíhá všechna řešení „homogenního“ systému* (21). Znám-li fundamentální systém řešení $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ systému (21) mohu k hledání řešení systému (20) užít tzv. metody variace konstant takto: Položím, $\mathbf{Y} = C_1\mathbf{y}_1 + \ldots + C_n\mathbf{y}_n$, kde $C_1, \ldots, C_n$ jsou dosud neurčené holomorfní funkce (nikoliv vektorové funkce!), které hledáme tak, aby $\mathbf{Y}$ bylo řešením systému (20), tj. aby bylo

$$C_1'\mathbf{y}_1 + \ldots + C_n'\mathbf{y}_n + C_1\mathbf{y}_1' + \ldots + C_n\mathbf{y}_n' = \mathbf{A}(C_1\mathbf{y}_1 + \ldots + C_n\mathbf{y}_n) + \mathbf{B}\,.$$

Ježto $\mathbf{y}_j' = \mathbf{A}\mathbf{y}_j$, lze tuto podmínku psát jako systém rovnic $C_1'y_{j1} + \ldots + C_n'y_{jn} = b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Ježto $W_{y_1,\ldots,y_n}(x) \neq 0$, má tento systém holomorfní řešení $C_1', \ldots, C_n'$, k němuž existují holomorfní primitivní funkce $C_1, \ldots, C_n$.

Pro jednoduchost jsme předpokládali, že oblast M byla jednoduše souvislá, takže všechna řešení se skládala z funkcí holomorfních v M. Jak se tyto věty dají rozšířit analytickým pokračováním koeficientů a_{kj}, b_k a řešení, je vidět z věty 21.

Podívejme se ještě, jak lze přenést tvrzení 1 až 5 na rovnici n-tého řádu

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_n(x)\,y = 0\,, \tag{28}$$

které odpovídá systém

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_1\,, \quad \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_2, \ldots, \frac{\mathrm{d}y_{n-2}}{\mathrm{d}x} = y_{n-1}\,, \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\mathrm{d}x} = -a_n(x)\,y - a_{n-1}(x)\,y_1 - \ldots - a_1(x)\,y_{n-1}\,.$$

Zde $a_j(x)$ a také řešení rovnice (28) jsou komplexní funkce (ne vektorové). a_j buďte opět holomorfní v jednoduše souvislé oblasti $M \subset E$. Počáteční podmínky pro (28) mají tvar

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}\,,$$

kde $x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ jsou daná čísla. Funkce $f_1, \ldots, f_k$ nazývám ovšem lineárně závislé v M, jestliže existují čísla $c_1, \ldots, c_k$ (aspoň jedno $c_j \neq 0$) tak, že $c_1 f_1(x) + \ldots + c_k f_k(x) = 0$ pro všechna $x \in M$. Jestliže pro všechna $x \in M$ je $g(x) = \alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_k f_k(x)$ s konstantními α_j, platí obdobný vztah $g^{(j)}(x) = \alpha_1 f_1^{(j)}(x) + \ldots + \alpha_k f_k^{(j)}(x)$ mezi jejich derivacemi. Podle této poznámky čtenář ihned zjistí, že z 1 až 5 plynou tato tvrzení pro řešení rovnice (28):

1. *Jsou-li* y_1, y_2 *řešení,* c_1, c_2 *konečná komplexní čísla, je* $c_1y_1 + c_2y_2$ *řešení. Nulová funkce je řešení.*

2. *Jsou-li $y_1, y_2, \ldots, y_n$ řešení, potom tzv.* **Wronského determinant**

$$(30) \qquad W_{y_1,\ldots,y_n}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & \ldots, y_n(x) \\ y_1'(x), & \ldots, y_n'(x) \\ \multicolumn{2}{c}{\dotfill} \\ y_1^{(n-1)}(x), & \ldots, y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

je buďto ve všech bodech $x \in M$ různý od nuly, a potom jsou $y_1, \ldots, y_n$ lineárně nezávislé, nebo je ve všech bodech $x \in M$ roven nule, a potom jsou $y_1, \ldots, y_n$ lineárně závislé.

3. *Existuje n lineárně nezávislých řešení (název: fundamentální systém řešení).*

4. *Je-li $y_1, \ldots, y_n$ fundamentální systém řešení, má každé řešení z tvar $z = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ s vhodnými komplexními konstantami c_j.*

5. *Budiž $y_1, \ldots, y_n$ fundamentální systém řešení; budiž $z_1, \ldots, z_n$ nějaký systém řešení, takže*

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \quad (i = 1, \ldots, n)$$

s konstantními c_{ij}. Potom $z_1, \ldots, z_n$ je fundamentální tehdy a jen tehdy, když matice čísel c_{ij} je nesingulární.

Pro determinant (30) platí podle (27)

$$(31) \qquad W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(z)\,\mathrm{d}z\right).$$

Čtenář si sám rozmyslí, jak bude vypadat metoda variace konstant pro rovnici $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b$ (nebudeme to potřebovat).

Poznámka 4. Rovnici (lineární) 1. řádu lze řešit také následujícím způsobem, který je čtenáři asi běžný. Mám-li řešit rovnici $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a(x)\,y = 0$ s holomorfním $a(x)$, sestrojím funkci $A(x)$, primitivní k $a(x)$. Dosazením se ihned přesvědčíme, že $y(x) = \exp(-A(x))$ je řešení, a to nenulové, a tedy dává fundamentální systém (je $n = 1$). Rovnici $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a(x)\,y = b(x)$ můžeme potom řešit variací konstant (omezuji se zatím na jednoduše souvislou oblast $M \subset E$), tj. vlastně jejím přepsáním ve tvaru $(y(x) \exp(A(x)))' = b(x) \exp A(x)$.

Poznámka 5. Zvláště jednoduchý je případ systému (8) s konstantními a_{kj}, speciálně případ rovnice (16) s konstantními a_k. Nebudu zde tyto případy probírat; čtenář, který si přečte příslušné odstavce týkající se reálného oboru (např. ve známých knihách Stěpanova, Petrovského neb Pontrjagina), zjistí ihned, že všechny podstatné věci se beze změny přenášejí na komplexní obor. Uvedu jen případ rovnice

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

s konstantními a_k. Dosadím-li do levé strany $y(x) = e^{\xi x}$ (ξ konstanta), dostanu $e^{\xi x} P(\xi)$, kde $P(\xi) = \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\xi + a_n$. Tedy $e^{\varrho x}$ je řešením tehdy a jen tehdy, když $P(\varrho) = 0$. Jestliže ϱ je k-násobný kořen rovnice $P(\varrho) = 0$ ($k > 0$), dá se k němu sestrojit k řešení $e^{\varrho x}, xe^{\varrho x}, x^2 e^{\varrho x}, \ldots, x^{k-1} e^{\varrho x}$. Tak dostáváme vždy celkem n řešení a dá se dokázat, že tvoří fundamentální systém. Čtenář, který to nezná, může se pokusit o důkaz.

Příklad: U rovnice $y^{(5)} + 2y''' + y' = 0$ jde o rovnici $\xi^5 + 2\xi^3 + \xi = 0$, tj. $\xi(\xi^2 + 1)^2 = 0$ s jednoduchým kořenem 0 a dvěma dvojnásobnými i, $-i$. Fundamentální systém, který takto obdržíme, je $1, e^{ix}, xe^{ix}, e^{-ix}, xe^{-ix}$. Také $1, \cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x$ je fundamentální systém (užije se bodu 5).

§ 3

Funkce neomezeně pokračovatelné v prstenci

$0 < |x - x_0| < r$ [1]

Je-li $x_0 \in E$, $0 < r \leqq +\infty$, budeme znakem $U(x_0, r)$ značit množinu $|x - x_0| < r$, znakem $P(x_0, r)$ značit množinu $0 < |x - x_0| < r$ (tzv. prstencové okolí bodu x_0). Zobrazení množiny M do $P(x_0, +\infty)$ značí tedy konečnou komplexní funkci v oboru M, která nenabývá hodnoty x_0.

Budeme často dokazovat vzorce, obsahující hodnoty analytických funkcí v určitém bodě. Např. se můžeme ptát, zda v určitém bodě x platí mezi hodnotami čtyř analytických funkcí $\mathfrak{F}_j$ rovnost

$$\mathfrak{F}_j(x) \cdot \mathfrak{F}_2(x) = \mathfrak{F}_3(x) + \mathfrak{F}_4(x)\,.$$

Jsou-li $\mathfrak{F}_j$ mnohoznačné, nemá tato otázka smyslu, pokud neřeknu, které hodnoty funkcí $\mathfrak{F}_j$ v bodě x míním. Musíme tedy jednotlivé hodnoty funkcí $\mathfrak{F}_j$ nějak vhodně charakterizovat. Úloha bude usnadněna tím, že se pro další potřebu můžeme omezit na funkce analytické a neomezeně pokračovatelné v nějakém prstenci $P(x_0, r)$.

---

[1]) Od tohoto okamžiku až do konce bude písmeno i znamenat vždy imaginární jednotku.

Typické funkce tohoto druhu v $P(x_0, +\infty)$ jsou analytické funkce, označované obyčejně $\log(x - x_0)$, $(x - x_0)^s$, $s \in E$. (Je to ono trochu nedůsledné označení, na které jste ostatně zvyklí: funkce f se někdy značí $f(x)$, ačkoliv by toto označení mělo znamenat hodnotu funkce f v bodě x.) Všimněme si trochu těchto funkcí. Je-li $a \neq 0$ konečné číslo, existuje nekonečně mnoho čísel, kterým říkáme **hodnota argumentu** čísla a (viz Černý, str. 116–125). Je-li ξ jedna z těchto hodnot, jsou všechny dány výrazem $\xi + 2k\pi$, k celé. Hodnotou logaritmu čísla a nazýváme každé číslo $\lg |a| + i\xi$, kde lg značí reálný logaritmus a ξ je libovolná hodnota argumentu a. Podobně hodnotou s-té mocniny čísla a nazýváme každé číslo $\exp(s(\lg |a| + i\xi))$, kde opět ξ je libovolná hodnota argumentu a. Lze tedy každé hodnotě ξ argumentu přiřadit jednoznačně určitou hodnotu logaritmu a s-té mocniny; toho později použijeme. (Černý značí množinu všech hodnot s-té mocniny čísla a znakem $\mathfrak{M}_s(a)$.) Důležité jsou pojmy **jednoznačné větve** (zkratka j. v.) **argumentu, logaritmu a s-té mocniny** (Černý, str. 151 a násl.). Budiž f spojité zobrazení množiny $M \subset S$ do $P(0, +\infty)$. Říkáme, že funkce A (v oboru M) je j. v. argumentu $f(x)$ v množině M, jestliže pro každé $x \in M$ je $A(x)$ některá hodnota argumentu čísla $f(x)$ a jestliže mimoto je A spojitá v M. Podobně pro j. v. logaritmu $f(x)$ a s-té mocniny $f(x)$ (Černý, str. 152). Ježto např. neexistuje j. v. argumentu x na kružnici $|x| = 1$, jsou důležité existenční otázky. Je vidět, že z existence j. v. argumentu plyne existence j. v. logaritmu a s-té mocniny. Věta 96 v Černém říká mj.: Je-li f spojité zobrazení intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ do $P(0, +\infty)$, existuje v $\langle t_0, t_1 \rangle$ j. v. argumentu $f(x)$. Speciálně: Je-li $\varphi(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, křivka, a je-li F spojité zobrazení množiny $\langle \varphi \rangle$ do $P(0, +\infty)$, existuje jednoznačná větev A argumentu $F(\varphi(t))$ v intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ (viz Černý, str. 212–215). Rozdíl $\Delta_\varphi \arg F(x) = A(t_1) - A(t_0)$ nezávisí na volbě j. v. A a nazývá se **přírůstek argumentu** $F(x)$ podél křivky φ. Pro nás bude zvláště důležitý případ $F(x) = x - x_0$, takže jde o j. v. argumentu $\varphi(t) - x_0$ v intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$. Je-li $\langle \varphi \rangle \subset P(x_0, +\infty)$, lze sestrojit $\Delta_\varphi \arg(x - x_0)$. Je-li φ uzavřená křivka, je $\Delta_\varphi \arg(x - x_0) = 2\pi n$, kde n je celé číslo. Klademe potom $\operatorname{ind}_\varphi x_0 = n$; název: **index bodu x_0 vzhledem k φ.**

Je vám známo, že z hodnot logaritmu lze vytvořit analytickou funkci, zvanou $\log(x - x_0)$, takto: Vezmu libovolný bod $a \in P(x_0, +\infty)$ a libovolnou jednoznačnou větev $L(x)$ logaritmu $x - x_0$ v některém okolí bodu a (je zřejmé, že v dostatečně malém okolí bodu a existuje j. v. argumentu $x - x_0$, a tedy i j. v. logaritmu $x - x_0$). Víte, že L je holomorfní v jistém okolí bodu a. Tedy lze sestrojit $\mathscr{E}(a, L)$. Množina všech elementů $\mathscr{E}(a, L)$ právě popsaných je jistá analytická funkce v $P(x_0, +\infty)$, která je v tomto prstenci neomezeně pokračovatelná pomocí holomorfních elementů; tato funkce se právě nazývá $\log(x - x_0)$. Podobně množina elementů $\mathscr{E}(a, \exp(sL))$ je analytická funkce s obdobnými vlastnostmi. (Viz Černý, str. 396–397.) Tuto analytickou funkci budeme značit $(x - x_0)^s$. Je-li $M \subset P(x_0, +\infty)$ jednoduše souvislá oblast, jsou podle věty o monodromii (Černý, věta 225) všechny větve analytických funkcí $\log(x - x_0)$, $(x - x_0)^s$ v oblasti M jednoznačné, a tedy holomorfní. Imaginární část větve $\log(x - x_0)$ v M je ovšem jistá j. v.

argumentu $x - x_0$ v M. Označíme-li ji $A(x)$, jsou všechny jednoznačné větve $\log(x - x_0)$ a $(x - x_0)^s$ v M dány výrazy

$$\lg|x - x_0| + i\,A(x) + 2k\pi i\,,$$

$$\exp\left(s\left(\lg|x - x_0| + i\,A(x) + 2k\pi i\right)\right),$$

kde k je libovolná celočíselná konstanta. Odtud a z definice indexu plyne: *Budiž φ uzavřená křivka v $P(x_0, +\infty)$ s počátkem a; nechť* $\operatorname{ind}_\varphi x_0 = n$. *Nechť λ, resp. μ_s je nějaká jednoznačná větev* $\log(x - x_0)$, *resp.* $(x - x_0)^s$ *v jistém okolí bodu a; potom je*

$$(32)\qquad \begin{cases} \mathscr{E}(a, \lambda) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(a, \lambda + 2n\pi i)\,, \\ \mathscr{E}(a, \mu_s) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(a, \exp(2n\pi i s)\,.\,\mu_s)\,. \end{cases}$$

Přikročme nyní k obecnému případu.

Budiž dán bod $x_0 \in E$, číslo r $(0 < r \leqq +\infty)$ a funkce $\mathfrak{F}$, která je v $P(x_0, r)$ analytická a neomezeně pokračovatelná a má jen holomorfní elementy. Budu mluvit (aniž bych to vždy připomínal) jen o bodech, množinách a křivkách ležících v $P(x_0, r)$.

Často budeme potřebovat důsledek věty 231 z Černého, str. 446: *Budiž $\mathscr{E}(c, f) \in \mathfrak{F}$. Buďte φ, ψ dvě uzavřené křivky s počátkem c, a nechť* $\operatorname{ind}_\varphi x_0 = \operatorname{ind}_\psi x_0$. *Potom $\mathscr{E}(c, f)$ má totéž pokračování podél ψ jako podél φ, tj. je-li $\mathscr{E}(c, f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(c, g)$, je též $\mathscr{E}(c, f) \xrightarrow[\psi]{} \mathscr{E}(c, g)$.*

Tvrdím: *Je-li $\mathscr{E}(c, f) \in \mathfrak{F}$, je-li φ uzavřená křivka s počátkem c a je-li*

$$\operatorname{ind}_\varphi x_0 = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\varphi \arg(x - x_0) = 0\,,$$

je

$$(33)\qquad \mathscr{E}(c, f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(c, f)\,.$$

Důkaz: Vezměme pomocnou „konstantní“ křivku $\psi : \psi(t) = c$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$. Zřejmě $\operatorname{ind}_\psi x_0 = 0$, $\mathscr{E}(c, f) \xrightarrow[\psi]{} \mathscr{E}(c, f)$. Podle Černého (důsledek věty 231) platí (33).

Tvrdím nyní: *Nechť φ, ψ jsou křivky s počátkem a, s koncem b a nechť* $\Delta_\psi \arg(x - x_0) = \Delta_\varphi \arg(x - x_0)$; *nechť $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(b, g)$. Potom je též $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\psi]{} \mathscr{E}(b, g)$, tj pokračování elementu $\mathscr{E}(a, f)$ podél křivky, končící v b, závisí jen na přírůstku argumentu $x - x_0$ podél té křivky a nikoliv na ostatních vlastnostech křivky.*

Důkaz: $\Theta = \varphi \dot{-} \psi$ je uzavřená a zřejmě $\Delta_\Theta \arg(x - x_0) = 0$. Tedy $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\Theta]{} \mathscr{E}(a, f)$. Ježto $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(b, g)$, je $\mathscr{E}(b, g) \xrightarrow[\dot{-}\psi]{} \mathscr{E}(a, f)$, $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\psi]{} \mathscr{E}(b, g)$.

Zvolme nyní určitý element $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$ a určitou hodnotu α argumentu $a - x_0$. Po této volbě přiřadíme každé dvojici b, β kde $b \in P(x_0, r)$ a β je libovolná hodnota argumentu $b - x_0$, určitý element $\mathscr{E}^{b,\beta} \in \mathfrak{F}$. Půjde o zobrazení množiny všech uvedených dvojic b, β na množinu všech elementů z $\mathfrak{F}$ (které nemusí být prosté). Přiřazení provedu takto: Vezmu libovolný bod $b \in P(x_0, r)$ a libovolnou hodnotu β argumentu $b - x_0$. Sestrojím křivku φ s počátkem a a koncem b tak, že $\alpha + \Delta_\varphi \arg(x - x_0) = \beta$. [2]) Platí $\mathscr{E}(a,f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}$, kde $\mathscr{E}$ je jistý element z $\mathfrak{F}$ o středu b. Ten závisí jen na b a na $\Delta_\varphi \arg(x - x_0)$, tj. na β. Označme jej tedy $\mathscr{E}^{b,\beta}$. Při tomto označení je $\mathscr{E}(a,f) = \mathscr{E}^{a,\alpha}$ (pokračování podél „konstantní„ křivky $\varphi(t) = a$). Každý element $\mathscr{E} \in \mathfrak{F}$ lze psát ve tvaru $\mathscr{E}^{b,\beta}$ s některými b, β, neboť existuje φ tak, že $\mathscr{E}(a,f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}$.

Označme nyní hodnotu elementu $\mathscr{E}^{b,\beta}$ znakem $\mathfrak{F}^\beta(b)$; nazveme ji hodnotou funkce $\mathfrak{F}$ v bodě b, příslušnou k hodnotě β argumentu $b - x_0$. Dokážeme nyní dvě důležité vlastnosti.

I. *Je $\mathscr{E}^{b,\beta} \xrightarrow[\psi]{} \mathscr{E}^{c,\gamma}$, jestliže ψ je křivka s počátkem b, koncem c a taková, že $\Delta_\psi \arg(x - x_0) = \gamma - \beta$.*

Důkaz: Budiž ψ taková křivka. Zvolme křivku φ s počátkem a a koncem b tak, že $\Delta_\varphi \arg(x - x_0) = \beta - \alpha$ [2]). Potom

$$\Delta_{\varphi \dotplus \psi} \arg(x - x_0) = \beta - \alpha + \gamma - \beta = \gamma - \alpha\,,$$

takže $\mathscr{E}(a,f) \xrightarrow[\varphi+\psi]{} \mathscr{E}^{c,\gamma}$, a za druhé $\mathscr{E}(a,f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}^{b,\beta}$.

Odtud zřejmě $\mathscr{E}^{b,\beta} \xrightarrow[\psi]{} \mathscr{E}^{c,\gamma}$.

II. *Budiž $M \subset P(x_0, r)$ oblast, ve které existuje jednoznačná větev A argumentu $x - x_0$.* [3]) *Každému $x \in M$ přiřaďme číslo $H(x) = \mathfrak{F}^{A(x)}(x)$. Tvrdím, že H je holomorfní v M.*

Důkaz: Zvolme $b \in M$. Jest $\mathscr{E}^{b,A(b)} = \mathscr{E}(b, h)$, kde h je jistá funkce holomorfní v nějakém okolí bodu b. Zvolme $\delta > 0$ tak malé, že $U(b, \delta) \subset M$ a že h je holomorfní v $U(b, \delta)$; pro všechna $x \in U(b, \delta)$ je $|A(x) - A(b)| < \pi$. Dokáži, že $H(x) = \mathfrak{F}^{A(x)}(x)$ je holomorfní v $U(b, \delta)$.

Vezměme libovolný bod $c \in U(b, \delta)$ a libovolnou křivku $\varphi(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, s počátkem b a koncem c, ležící v $U(b, \delta)$. Tedy je $\mathscr{E}(b, h) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(c, h)$. Je

$$|\Delta_\varphi \arg(x - x_0)| = |A(c) - A(b)| < \pi$$

(neboť $\Delta_\varphi \arg(x - x_0)$ je přírůstek kterékoliv jednoznačné větve $\arg(\varphi(t) - x_0)$ na intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$). Tedy $\mathscr{E}(c, h) = \mathscr{E}^{c,\gamma}$, kde γ je hodnota $\arg(c - x_0)$ taková, že $|\gamma - A(b)| < \pi$ (viz I). Ale také $|A(c) - A(b)| < \pi$, tedy $|A(c) - \gamma| < 2\pi$, $\gamma =$

---

[2]) Taková φ existuje. Budiž totiž φ_0 libovolná křivka s počátkem a a koncem b. Je nutně $\alpha + \Delta_{\varphi_0} \arg(x - x_0) = \beta - 2k\pi$ pro některé celé k. Budiž Θ křivka $x_0 + (b - x_0)\, e^{ikt}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$. Potom $\Delta_\varphi \arg(x - x_0) = 2k\pi$ a stačí o požit $\varphi = \varphi_0 \dotplus \Theta$.

[3]) Existence je zaručena, když M je jednoduše souvislá.

$= A(c)$. Tedy $\mathcal{E}(c, h) = \mathcal{E}^{c, A(c)}$. Z toho plyne, že $h(c) = \mathfrak{F}^{A(c)}(c) = H(c)$ pro všechna $c \in U(b, \delta)$; protože h je v $U(b, \delta)$ holomorfní, platí totéž i o funkci H.

Význam věty II je v tom, že nám dovoluje sestrojovat holomorfní větve analytické funkce $\mathfrak{F}$ v každé oblasti $M \subset P(x_0, r)$, ve které existuje jednoznačná větev A argumentu $x - x_0$. Všechny jednoznačné větve argumentu $x - x_0$ v M jsou $A(x) + 2k\pi$, takže dostávám v M nekonečně mnoho větví $\mathfrak{F}^{A(x)+2k\pi}(x)$ (k celé), které ovšem nemusí být navzájem různé. Je zřejmé, že tím jsou dány všechny větve funkce $\mathfrak{F}$ v M: Vezměme totiž libovolný bod $c \in M$; elementy o středu c vytvořují všechny větve $\mathfrak{F}$ v M. Ale tyto elementy jsou právě všechny elementy $\mathcal{E}^{c, A(c)+2k\pi}$, které, jak snadno nahlédnete, vytvořují věte $\mathfrak{F}^{A(x)+2k\pi}(x)$.

Provedené přiřazení elementů z $\mathfrak{F}$ dvojicím b, β závisí na tom, který element $\mathcal{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$ a kterou hodnotu α argumentu $a - x_0$ jsme zvolili. Snadno byste zjistili toto: kdybychom provedli volbu jinak, dostáli bychom jenom tu změnu, že element $\mathcal{E}^{b, \beta}$ by nyní dostal označení $\mathcal{E}^{b, \beta + 2k\pi}$, kde celé číslo k nezávisí na b ani na β. Závislost našeho přiřazení na $\mathcal{E}(a, f)$, α je tedy málo závažná.

Vraťme se nyní speciálně k analytickým funkcím $\log(x - x_0)$, $(x - x_0)^s$ v prstenci $P(x_0, +\infty)$. Elementy $\mathcal{E}^{x, \xi}$ a hodnoty $\mathfrak{F}^{\xi}(x)$ zavedeme i zde. Ale zde se přímo vnucuje určitá volba výchozího elementu $\mathcal{E}(a, f)$ a čísla α. Vezmu $a = x_0 + 1$, načež smím vzít $\alpha = 0$ a za f vezmu v okolí bodu $x_0 + 1$ (např. v okolí o poloměru 1) onu větev $\log(x - x_0)$, která pro $x = x_0 + 1$ nabývá hodnoty 0 (popříp. onu větev $(x - x_0)^s$, která pro $x = x_0 + 1$ nabývá hodnoty 1). Označme tyto větve L, resp. M_s. Máme tedy pro logaritmus resp. pro mocninu rovnosti $\mathcal{E}^{x_0+1, 0} = \mathcal{E}(x_0 + 1, L)$, resp. $\mathcal{E}^{x_0+1, 0} = \mathcal{E}(x_0 + 1, M_s)$.

Element $\mathcal{E}^{b, \beta}$ je potom onen element, který vzniká pokračováním elementu $\mathcal{E}^{x_0+1, 0}$ podél jakékoliv křivky $\varphi(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$ (s počátkem $x_0 + 1$ a koncem b), pro kterou je

$$\Delta_\varphi \arg(x - x_0) = \beta .$$

Vypočtěme nyní hodnoty funkcí $\log(x - x_0)$, $(x - x_0)^s$ v bodě b, příslušné k hodnotě β argumentu $b - x_0$; ty hodnoty označím $\log_\beta(b - x_0)$, $(b - x_0)^s_\beta$ (index β jsem teď dal dolů).

Sestrojme (φ je křivka uvedená výše) řetězec

$$\{\mathcal{E}(\varphi(t), f^t)\}_{t=t_0}^{t=t_1} , \tag{34}$$

kde počáteční element je $\mathcal{E}(x_0 + 1, L)$, koncový je $\mathcal{E}^{b, \beta} = \mathcal{E}(b, f^{t_1})$. Řetězec se skládá z elementů funkce $\log(x - x_0)$, tj. $f^t(x) = \lg|x - x_0| + i\,\xi_t(x)$ v jistém okolí bodu $\varphi(t)$, kde $\xi_t(x)$ je pro každé x některá hodnota argumentu $x - x_0$. Víme (viz § 1, kap. III, str. 58), že funkce

$$f^t(\varphi(t)) = \lg|\varphi(t) - x_0| + i\,\xi_t(\varphi(t)) ,$$

a tedy i funkce $A(t) = \xi_t(\varphi(A))$ je spojitá v $\langle t_0, t_1 \rangle$, tedy je to jistá jednoznačná větev argumentu $\varphi(t) - x_0$; je $A(t_0) = 0$, takže $A(t_1) = \Delta_\varphi \arg(x - x_0) = \beta$. To znamená, že $f^{t_1}(\varphi(t_1)) = \log_\beta(b - x_0) = \lg|b - x_0| + i\beta$. Tedy: Hodnota $\log_\beta(b - x_0)$ je ona hodnota $\log(b - x_0)$, která má imaginární část β. Je to hodnota elementu $\mathscr{E}^{b,\beta}$, který vzniká z elementu $\mathscr{E}(x_0 + 1, L)$ pokračováním podél libovolné křivky φ (s počátkem $x_0 + 1$, koncem b), pro kterou $\Delta_\varphi \arg(x - x_0) = \beta$.

Obraťme se k mocnině. Vyjdeme z řetězce (34) a sestrojíme řetězec

$$\{\mathscr{E}(\varphi(t), \exp(sf^t(x))\}_{t=t_0}^{t=t_1}$$

(píši $f^t(x)$ místo f^t). Je to vskutku řetězec, ježto (34) je řetězec a $\exp(sf^t(x))$ je holomorfní funkce x v jistém okolí bodu $\varphi(t)$. Přitom

$$\exp(sf^{t_0}(\varphi(t_0))) = \exp(s\,L(x_0 + 1)) = \exp 0 = 1\,,$$

takže počáteční element je $\mathscr{E}(x_0 + 1, M_s)$. Koncový element je tedy $\mathscr{E}^{b,\beta}$. Počítejme: $(b - x_0)^s_\beta$ je hodnota $\mathscr{E}^{b,\beta}$, tj.

$$(b - x_0)^s_\beta = \exp(sf^{t_1}(\varphi(t_1))) = \exp(s\log_\beta(b - x_0)) =$$
$$= \exp(s(\lg|b - x_0| + i\beta))\,.$$

Tím je stanovena hodnota $(b - x_0)^s_\beta$. Element $\mathscr{E}^{b,\beta}$ vzniká z elementu $\mathscr{E}(x_0 + 1, M_s)$ pokračováním podél libovolné křivky φ (s počátkem $x_0 + 1$, koncem b), pro kterou $\Delta_\varphi \arg(x - x_0) = \beta$.

Věta 22. *Budiž $\mathfrak{F}$ analytická a neomezeně pokračovatelná v $P(x_0, r)$. Budiž $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$ a budiž φ_0 uzavřená křivka v $P(x_0, r)$ s počátečním (a tedy i koncovým) bodem a, pro kterou* $\operatorname{ind}_{\varphi_0} x_0 = 1$. *Tvrdím: Jestliže*

$$\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\varphi_0]{} \mathscr{E}(a, f)\,, \tag{35}$$

potom je $\mathfrak{F}$ jednoznačná.

Poznámka 1. K zjištění, zda $\mathfrak{F}$ je jednoznačná, postačí tedy provést pokračování jednoho elementu podle jedné uzavřené křivky φ_0 s $\operatorname{ind}_{\varphi_0} x_0 = 1$. Často bývá pohodlná „jednou proběhnutá kružnice“

$$\varphi_0(t) = x_0 + (a - x_0)\,e^{it}\,, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi\,.$$

Důkaz: Buď φ_0 nejdříve kružnice z poznámky 1. Podle druhé části věty 228 (Černý, str. 441) je $\mathfrak{F}$ jednoznačná. Z důsledku věty 231 (Černý, str. 446) plyne, že stejný výsledek dostaneme, vyjdeme-li z obecné křivky φ_0.

Všimněme si ještě několika věcí, které budeme potřebovat později. Buď $\mathfrak{F}$ analytická funkce, která je v oblasti $M \subset E$ neomezeně pokračovatelná holomorfními elementy.[4]) Ke každému $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$ sestrojme $\mathscr{E}(a, f')$ (f' označuje derivaci holomorfní

[4]) Tento případ nám v dalším postačí.

funkce f). Zřejmé je toto: Je-li $\{\mathscr{E}(\varphi(t), f^t)\}_{t=t_0}^{t=t_1}$ řetězec, je i $\{\mathscr{E}(\varphi(t), (f^t)')\}_{t=t_0}^{t=t_1}$ řetězec. Odtud je patrné, že všechny elementy $\mathscr{E}(a, f')$ tvoří jednu analytickou funkci – označíme ji $\mathfrak{F}'$, která je v oblasti M neomezeně pokračovatelná holomorfními elementy Dále je jasné, že z $\mathscr{E}(a, f) \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}(b, g)$ plyne $\mathscr{E}(a, f') \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}(b, g')$. Analytické funkci $\mathfrak{F}'$ se říká derivace funkce $\mathfrak{F}$. (Viz Černý, str. 422–423; u Černého je situace složitější hlavně proto, že připouští také elementy, které nejsou holomorfní.)

Víte, že funkce $\log x$ má derivaci $\frac{1}{x}$ (tj.: je-li L jednoznačná větev logaritmu v nějaké oblasti $M \subset \boldsymbol{E} - \{0\}$, je $\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$ pro všechna $x \in M$). Zabývejme se derivací funkce x^s. Vezměme nějaký bod $a \in \boldsymbol{E}$, $a \neq 0$. Budiž $M \subset \boldsymbol{E} - \{0\}$ nějaká oblast, která obsahuje bod a, v níž existuje jednoznačná větev argumentu x; vezměme jednu z těchto větví a označme ji A. Příslušná větev logaritmu je $\log_{A(x)} x$ $(x \in M)$ – má imaginární část $A(x)$. Příslušná větev x^s je tedy $x^s_{A(x)} = \exp(s \log_{A(x)} x)$. Z pravidla o derivování složené funkce (jde zde o holomorfní funkce) plyne pro $x \in M$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^s_{A(x)} = \frac{s}{x} \exp(s \log_{A(x)} x)\,. \tag{37}$$

Ježto $\frac{1}{x} = \exp(-\log x)$, kde za $\log x$ můžeme klást kteroukoli hodnotu logaritmu, je pravá strana v (37) rovna $s \exp((s - 1) \log_{A(x)} x)$, a tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^s_{A(x)} = s x^{s-1}_{A(x)}\,. \tag{38}$$

Odtud ihned $(x^s)' = sx^{s-1}$ a vztah (38) zároveň ukazuje toto: Mám-li nějakou jednoznačnou větev funkce x^s, která přísluší jednoznačné větvi A argumentu x, je derivací této větve funkce sx^{s-1}, která přísluší téže větvi argumentu x. Pochopitelně se vše zjednoduší, je-li s celé, neboť potom je x^s jednoznačná a vše je triviální.

Buď opět $\mathfrak{F}$ analytická funkce v oblasti $M \subset \boldsymbol{E}$, která je v M neomezeně pokračovatelná holomorfními elementy. Vezměme element $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$. Funkce f je holomorfní v nějakém $U(a, \delta)$. Podle věty 20 existuje ke každému $c \in \boldsymbol{E}$ právě jedna funkce $g(x)$ holomorfní v $U(a, \delta)$, pro niž platí $g(a) = c$ a

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)\,. \tag{39}$$

Odtud je patrné, že všechny funkce $g(x)$ splňující (39) dostanu z jedné z nich přičtením libovolné konstanty. Každé řešení rovnice (39) se nazývá primitivní funkcí k f v $U(a, \delta)$, element $\mathscr{E}(a, g)$ se nazývá **primitivní** k $\mathscr{E}(a, f)$. Element $\mathscr{E}(a, g)$ určuje analytickou funkci $\mathfrak{G}$ v oblasti M. Podle věty 21 je funkce $\mathfrak{G}$ v M neomezeně pokračovatelná holomorfními elementy a platí: Je-li φ křivka v M, $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(b, F)$, $\mathscr{E}(a, g) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(b, G)$, splňuje G v okolí $U(b)$ bodu b rovnici

$$\frac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x} = F(x),$$

tj. $\mathscr{E}(b, G)$ je element primitivní k $\mathscr{E}(b, F)$. Z toho plyne, že pro každý element funkce $\mathfrak{F}$ existuje element funkce $\mathfrak{G}$, který je k němu primitivní. Proto se funkci $\mathfrak{G}$ říká funkce **primitivní** k $\mathfrak{F}$ v M. Je-li $c \in \boldsymbol{E}$, je zřejmě $\mathfrak{G} + c$ také primitivní k $\mathfrak{F}$ v M (znakem $\mathfrak{G} + c$ míním ovšem množinu všech elementů tvaru $\mathscr{E}(b, G + c)$, kde $\mathscr{E}(b, G) \in \mathfrak{G}$). Dokážeme, že tím jsou všechny primitivní funkce k $\mathfrak{F}$ v M vyčerpány. Budiž $\mathfrak{G}_1$ taková funkce. Jak jsme zjistili, obsahuje $\mathfrak{G}_1$ primitivní element k $\mathscr{E}(a, f)$, tedy element $\mathscr{E}(a, g + c)$ pro jisté $c \in \boldsymbol{E}$. Zřejmě tedy $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G} + c$. Poznamenejme jenom, že různým hodnotám c nemusí odpovídat různé primitivní funkce: k funkci $\dfrac{1}{x}$ je v $P(0, +\infty)$ primitivní funkcí $\log x + c$ s libovolným $c \in \boldsymbol{E}$. Ale $\log x + 2k\pi i$ je táž analytická funkce jako $\log x$, kdežto $\log x + 1$ je jiná funkce než $\log x$.

Poznamenejme ještě, že *jsou-li $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ analytické funkce v oblasti $M \subset \boldsymbol{E}$, které jsou v M neomezeně pokračovatelné holomorfními elementy, je $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}'$ právě tehdy, když $\mathfrak{G}$ je primitivní k $\mathfrak{F}$.*

Důkaz. Je-li $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}'$, $\mathscr{E}(a, g) \in \mathfrak{Y}$, je $\mathscr{E}(a, g') \in \mathfrak{G}' = \mathfrak{F}$, tedy $\mathscr{E}(a, g)$ je element primitivní k $\mathscr{E}(a, g') \in \mathfrak{F}$. Naopak, je-li $\mathfrak{G}$ primitivní k $\mathfrak{F}$, zvolme element $\mathscr{E}(a, f) \in \mathfrak{F}$. existuje element $\mathscr{E}(a, g) \in \mathfrak{G}$ primitivní k $\mathscr{E}(a, f)$. Tedy $\mathscr{E}(a, g') = \mathscr{E}(a, f)$ vytvořuje $\mathfrak{F}$, tj. $\mathfrak{G}' = \mathfrak{F}$.

Uveďme nyní několik drobností o funkcích x^s, $\log x$. Je-li $a > 0$, $b > 0$ a jsou-li s, t reálná, platí pro reálný logaritmus a kladné hodnoty mocnin

$$\lg a + \lg b = \lg ab\,, \quad a^s b^s = (ab)^s\,, \quad a^s a^t = a^{s+t}\,.$$

Ptáme se, jaké analogické vztahy platí pro hodnoty analytických funkcí $\log x$, x^s. Výše jsme značili $\log_\alpha a$, a^s_α hodnoty těchto analytických funkcí, které přísluší k hodnotě α argumentu čísla a. Pro komplexní (konečná) a, b, s, t, $ab \neq 0$ potom platí:

$$\log_\alpha a + \log_\beta b = \log_{\alpha+\beta}(ab)\,, \quad a^s_\alpha b^s_\beta = (ab)^s_{\alpha+\beta}\,,$$

$$a^s_\alpha a^t_\alpha = a^{s+t}_\alpha\,, \quad \frac{a^s_\alpha}{b^s_\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)^s_{\alpha-\beta}\,, \quad \frac{a^s_\alpha}{a^t_\alpha} = a^{s-t}_\alpha\,,$$

$$\log_\alpha a - \log_\beta b = \log_{\alpha-\beta} \frac{a}{b}\,.$$

Důkaz. První vzorec: předně platí rovnost reálných částí a imaginární část vlevo i vpravo je $\alpha + \beta$. U druhého vzorce je vlevo $\exp(s \log_\alpha a) \,.\, \exp(s \log_\beta b) =$

$= \exp\left(s(\log_\alpha a + \log_\beta b\right) = \exp\left(s \log_{\alpha+\beta}(ab)\right)$ (podle prvního vzorce), ale to je právě pravá strana. Ostatní vztahy si čtenář analogicky jistě dokáže sám.

Připomeňme ještě některé kvantitativní vztahy. Pro reálné y je $|e^{iy}| = 1$, tedy pro $x \in E$ je $|e^x| = e^{\mathrm{Re}\,x}$. Je-li $x \in E$, $s \in E$, $x \neq 0$ a je-li α některá hodnota $\arg x$, je

$$x_\alpha^s = \exp\left(s(\lg|x| + i\alpha\right),$$

tedy

$$|x_\alpha^s| = \exp\left(\mathrm{Re}\,s \,.\, \lg|x| - \alpha \,\mathrm{Im}\,s\right) = |x|^{\mathrm{Re}\,s} \exp\left(-\alpha \,\mathrm{Im}\,s\right); \tag{40}$$

přitom $|x|^{\mathrm{Re}\,s}$ znamená zde hodnotu mocniny příslušnou k hodnotě 0 argumentu kladného čísla $|x|$; je to prostě kladná hodnota mocniny kladného čísla $|x|$ s reálným exponentem, tj. je to $|x|^{\mathrm{Re}\,s}$ ve smyslu známém z elementů diferenciálního počtu v reálném oboru.

Z (40) plynou následující vztahy, které budeme v dalším stále používat:

1) Je-li s reálné, je pro každou hodnotu α argumentu x

$$|x_\alpha^s| = |x|^{\mathrm{Re}\,s}.$$

2) Je-li $|\alpha| \leqq K_1$, $|\mathrm{Im}\,s| \leqq K_2$, je

$$|x|^{\mathrm{Re}\,s}\, e^{-K_1K_2} \leqq |x_\alpha^s| \leqq |x|^{\mathrm{Re}\,s}\, e^{K_1K_2}.$$

Připojme ještě triviální odhad

$$\big|\lg|x|\big| \leqq |\log_\alpha x| \leqq \big|\lg|x|\big| + |\alpha|$$

(při aplikacích nutno uvážit, že $\big|\lg|x|\big|$ je $\lg|x|$ pro $|x| \geqq 1$, ale $\lg\left|\dfrac{1}{x}\right|$ pro $0 < |x| \leqq 1$).

Místo levé nerovnosti píšeme také

$$|\log_\alpha x| \geqq \max\left(|\alpha|, \big|\lg|x|\big|\right) \geqq \frac{1}{2}\left(\big|\lg|x|\big| + |\alpha|\right).$$

V kruhu $|x| < 1$ existuje větev A argumentu $1 + x$ taková, že $|A(x)| < \frac{1}{2}\pi$. V tomto oboru dostaneme pomocí Taylorova rozvoje ihned

$$\log_{A(x)}(1 + x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m}$$

$$(1 + x)_{A(x)}^s = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{s}{m} x^m.$$

Proveďme nyní tuto úvahu. Jsou-li $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}(a, f_1)$, $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}(a, f_2)$ dva elementy (o témž středu), definuji jejich součet a součin vzorci

$$\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}(a, f_1 + f_2), \quad \mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}(a, f_1 f_2)$$

(Černý, str. 405). Je-li $c \in E$, pišme pro stručnost $c\,\mathscr{E}(a, f) = \mathscr{E}(a, cf)$ (mohli bychom ovšem také psát $\mathscr{E}(a, c)\,\mathscr{E}(a, f)$). Je-li nyní $\mathscr{E}_1 \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}'_1$, $\mathscr{E}_2 \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}'_2$, máme zřejmě

$$\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}'_1 + \mathscr{E}'_2\,, \quad \mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}'_1\mathscr{E}'_2\,.$$

Obecněji definujeme: Je-li $P(u_1, \ldots, u_k)$ nějaký polynom v k proměnných a jsou-li dány elementy $\mathscr{E}_j = \mathscr{E}_j(a, f_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, definujeme

$$P(\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_k) = \mathscr{E}(a, P(f_1, \ldots, f_k))\,, \tag{41}$$

např. $\mathscr{E}_1^2\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3 = \mathscr{E}(a, f_1^2 f_2 + f_3)$. Opět zřejmě platí: Je-li $\mathscr{E}_j \underset{\varphi}{\longrightarrow} \mathscr{E}'_j$ $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k)$, je $P(\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_k) \underset{\varphi}{\longrightarrow} P(\mathscr{E}'_1, \ldots, \mathscr{E}'_k)$.

Buďte nyní $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ dvě funkce analytické v oblasti M. Součtem $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ nazývá Černý systém všech analytických funkcí v M, určených elementy $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$, kde $\mathscr{E}_1 \in \mathfrak{F}_1$, $\mathscr{E}_2 \in \mathfrak{F}_2$ (samozřejmě musí $\mathscr{E}_2$ mít týž střed jako $\mathscr{E}_1$, aby $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$ bylo definováno). Podobně se definuje $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ (pomocí elementů $\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2$). Součet $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ (a rovněž $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$) se může skládat z jedné nebo několika nebo i nekonečně mnoha analytických funkcí, a to i tehdy, když $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ jsou neomezeně pokračovatelné v M (nejsou-li neomezeně pokračovatelné, může být systém $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$ také prázdný). Podobně pro $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$. Zde vznikají jisté obtíže: Je-li např. $\mathfrak{F} = x^{1/2}$ a beru-li 2 jako konstantní analytickou funkci, není $\mathfrak{F} + \mathfrak{F} = 2\mathfrak{F}$ (Černý, str. 408). Obdobně bychom se mohli pokusit definovat

$$P(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_k)\,, \tag{42}$$

kde

$$P(u_1, u_2, \ldots, u_k) \tag{43}$$

je daný polynom v k proměnných, ale zřejmě bychom narazili na stejné potíže: z rovnosti $P_1(u_1, \ldots, u_k) = P_2(u_1, \ldots, u_k)$ pro dva polynomy P_1, P_2 (tj. P_1 a P_2 jsou dva zápisy téhož polynomu) neplyne obecně rovnost $P_1(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k) = P_2(\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k)$.

Rozebereme-li výše uvedený případ $\mathfrak{F} + \mathfrak{F} \neq 2\mathfrak{F}$, vidíme, že na levé straně sčítáme mezi sebou i dva různé elementy téže funkce o stejném středu, kdežto vpravo vlastně sečteme dva stejné elementy o stejném středu. Tím je způsobeno (pro $\mathfrak{F} = x^{1/2}$), že v součtu vlevo je i funkce nula, kterou bychom vlastně očekávali u rozdílu $\mathfrak{F} - \mathfrak{F}$ (zde máme dokonce $\mathfrak{F} + \mathfrak{F} = \mathfrak{F} - \mathfrak{F}$). Výše uvedené definice součtu, součinu nám tedy způsobují jisté potíže, které se nám nehodí, chceme-li nějak uvažovat rovnost hodnot analytických funkcí. Zavedeme nyní poněkud modifikovanou definici součtu, součinu dvou analytických funkcí, obecně výrazu (42), která bude pro naše účely vhodnější. Omezíme se přitom na funkce analytické v $P(x_0, R)$ $(x_0 \in E$, $0 < R \leqq +\infty)$, které jsou v $P(x_0, R)$ neomezeně pokračovatelné holomorfními elementy.[4])

[4]) Tento případ nám v dalším postačí.

„Rozlišíme„ nejprve elementy dané analytické funkce o stejném středu následujícím způsobem. Zvolme pevně jeden její element $\mathscr{E}(a,f) \in \mathfrak{F}$ a jednu hodnotu α argumentu $a - x_0$. Viděli jsme, že každé hodnotě β argumentu $b - x_0$ $(b \in P(x_0, R))$ jsme jednoznačným způsobem přiřadili element $\mathscr{E}(b, g) \in \mathfrak{F}$ tak, že bylo

(44) $$\mathscr{E}(a,f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(b, g),$$

právě když φ je křivka v $P(x_0, R)$ a

(45) $$\beta = \alpha + \Delta_\varphi \arg(x - x_0).$$

Obecně ovšem mohou různým hodnotám β odpovídat stejné elementy (je to vidět na příkladu funkce konečnězačné). Máme však v každém případě zaručeno, že různým elementům o stejném středu b odpovídají různé systémy příslušných hodnot argumentu $b - x_0$. Zachovejme i výše zavedené označení, tj. $\mathscr{E}^{b,\beta}$ buď element $\mathscr{E}(b, g) \in \mathfrak{F}$, pro nějž platí (44) a (45).

Buď nyní dán polynom (43) a dále k funkcí $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_k$ analytických a neomezeně pokračovatelných holomorfními elementy v $P(x_0, R)$. Konečně nechť jsou dány pevně elementy

(46) $$\mathscr{E}(a_j, f_j) \in \mathfrak{F}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

a hodnoty

(47) $$\alpha_j \in \arg(a_j - x_0), \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Můžeme tedy každému $a \in P(x_0, R)$ a každé hodnotě α argumentu $a - x_0$ přiřadit výše uvedeným způsobem právě jeden element $\mathscr{E}_j^{a,\alpha} \in \mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Sestrojíme nyní určitou množinu elementů $\mathscr{E}^{a,\alpha}(a \in P(x_0, R)$, $\alpha \in \arg(a - x_0))$ a ukážeme, že tato množina je množinou právě všech elementů určité funkce analytické a neomezeně pokračovatelné holomorfními elementy v $P(x_0, R)$, kterou označíme (42). Provedeme to takto: položíme

(48) $$\mathscr{E}^{a,\alpha} = P(\mathscr{E}_1^{a,\alpha}, \ldots, \mathscr{E}_k^{a,\alpha})$$

pro každé $a \in P(x_0, R)$ a pro každou hodnotu α argumentu $a - x_0$. Je zřejmé, že máme-li dva polynomy P_1, P_2 a je-li $P_3 = P_1 + P_2$, $P_4 = P_1 P_2$, platí pro příslušné elementy

$$\mathscr{E}_{P_3}^{a,\alpha} = \mathscr{E}_{P_1}^{a,\alpha} + \mathscr{E}_{P_2}^{a,\alpha}, \quad \mathscr{E}_{P_4}^{a,\alpha} = \mathscr{E}_{P_1}^{a,\alpha} \cdot \mathscr{E}_{P_2}^{a,\alpha}$$

(čtenář jistě rozumí, jak je to míněno). Tvrdím nyní: Je-li φ křivka v $P(x_0, R)$ s počátkem b a koncem c a je-li $\beta + \Delta_\varphi \arg(x - x_0) = \gamma$, je

(49) $$\mathscr{E}^{b,\beta} \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}^{c,\gamma}.$$

To je vidět ihned za zavedení elementů $\mathscr{E}_j^{a,\alpha}$, neboť $\mathscr{E}_j^{b,\beta} \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}_j^{c,\gamma}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, a tedy

$$P(\mathscr{E}_1^{b,\beta}, \ldots, \mathscr{E}_k^{b,\beta}) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} P(\mathscr{E}_1^{c,\gamma}, \ldots, \mathscr{E}_k^{c,\gamma}) .$$

Odtud předně plyne, že elementy $\mathscr{E}^{a,\alpha}$ jsou právě všechny elementy jisté funkce analytické a neomezeně pokračovatelné holomorfními elementy v $P(x_0, R)$; tuto analytickou funkci označíme (42). Za druhé: vlastnost (49) ukazuje, že označení elementů $\mathscr{E}^{a,\alpha}$ je ve shodě s naším označením. Tím je také dána hodnota funkce (42) příslušná dvojici a, α: je to hodnota elementu $\mathscr{E}^{a,\alpha}$ v bodě a. Za třetí je patrné, že náš výsledek (tj. funkce (42)) bude záviset na volbě elementů (46) a hodnot (47). Např. je-li $\mathfrak{F}_1 = x^{1/2}$, $\mathfrak{F}_2 = x^{1/2}$ a volíme-li $\mathscr{E}(a_1, f_1) = \mathscr{E}(-1, -\exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-x))) = \mathscr{E}(a_2, f_2)$, kde $\operatorname{Log} x$ značí hlavní hodnotu $\log x$, a položíme-li $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$, je $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = 2x^{1/2}$. Pro $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = -\pi$ máme ale $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = 0$ (vše v $P(0, +\infty)$). Konečně je patrné, že volíme-li elementy (46) i hodnoty (47) (snadno nahlédneme, že stačí volit hodnoty (47)) všemi možnými způsoby, dostaneme jako výsledek právě systém všech analytických funkcí vytvořených všemi možnými elementy tvaru

$$P(\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_k), \quad \mathscr{E}_j \in \mathfrak{F}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, h, \tag{50}$$

tj. (42) ve smyslu dřívější definice aritmetických operací s analytickými funkcemi. Čtenář si jistě sám rozmyslí, jak a za jakých předpokladů zavést funkci (42), je-li (43) racionální funkce.

V tomto paragrafu jsme pro funkce

$$\log(x - x_0), \quad (x - x_0)^s \tag{51}$$

zavedli zcela určité přiřazení jejich elementů dvojicím b, β. Bylo $\mathscr{E}^{b,\beta} = \mathscr{E}(b, L(x))$ v prvém případě a $\mathscr{E}^{b,\beta} = \mathscr{E}(b, \exp(s\,L(x)))$ v případě druhém, kde L je jednoznačná větev logaritmu $x - x_0$ v jistém okolí bodu b, jejíž imaginární část je v bodě b právě rovna β. Protože v dalším budeme prakticky výhradně potřebovat výraz (42), kde $\mathfrak{F}_j$ jsou jednak funkce (51), jednak funkce holomorfní v $P(x_0, R)$ (u nichž je naše přiřazení jediné a triviální), domluvíme se, že výraz (42) budeme vždy chápat podle naší nové definice na základě popsaného přiřazení.

P ř í k l a d. Může se stát, že dva různé polynomy (43) dávají touž analytickou funkci. Buď

$$P_1(u) = u, \quad P_2(u_1, u_2) = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} u_2, \quad P_3(u) = u + 2\pi i .$$

Potom funkce $\mathfrak{F}_j = P_j(\log x)$, $j = 1, 3$, a $\mathfrak{F}_2 = P_2(\log x, \log x)$ jsou identické s $\log x$, a tedy totožné. Pro označení jejich elementů dostáváme v prvém a druhém případě

$$\mathscr{E}^{b,\beta} = \mathscr{E}(b, \log_{A(x)} x)$$

a ve třetím

$$\mathscr{E}^{b,\beta} = \mathscr{E}(b, \log_{A(x)+2\pi} x),$$

kde $A(x)$ je jednoznačná větev $\arg x$ v jistém okolí bodu b, $A(b) = \beta$.

Jisté potíže jsou také u analytických funkcí s lineární závislostí a nezávislotí. Omezíme-li se na funkci tvaru (42), kde $\mathfrak{F}_j$ jsou funkce tvaru (51) nebo funkce holomorfní v $P(x_0, R)$, můžeme definici ponechat v původním znění, tj. říkáme, že *funkce* $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ *tohoto typu jsou v* $P(x_0, R)$ **lineárně závislé**, *jestliže existují čísla* $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_n \in E$ *ne vesměs rovná nule taková, že funkce* $c_1\mathfrak{G}_1 + \ldots + c_n\mathfrak{G}_n$ *je nulová.* Zřejmě to totiž znamená, že pro každou volbu b, β ($b \in P(x_0, R)$, $\beta \in \arg(b - x_0)$) je $c_1\mathscr{E}_1^{b,\beta} + \ldots + c_n\mathscr{E}_n^{b,\beta}$ ($\mathscr{E}_j^{b,\beta} \in \mathfrak{G}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$) element tvořený nulovou funkcí, a to je zřejmě ekvivalentní s tím, že uvedené platí pro alespoň jednu volbu dvojice b, β. V opačném případě hovoříme o lineárně nezávislých funkcích $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$.

Poznámka 2. Základní úvahy tohoto paragrafu je možné interpretovat také takto: V Černém je na str. 440 uvedena věta 228, která speciálně říká:

Je-li $\mathfrak{F}$ neomezeně pokračovatelná analytická funkce v $P(x_0, R)$ ($x_0 \in E$, $0 < R < +\infty$), lze psát

$$\mathfrak{F}(x) = G(\log(x - x_0)), \tag{52}$$

kde G je funkce meromorfní v polorovině $\operatorname{Re} x < \lg R$.

Snadno nahlédneme, že je-li $\mathfrak{F}$ v $P(x_0, R)$ **neomezeně holomorfně pokračovatelná** (tj. jsou-li všechny její elementy se středy v $P(x_0, R)$ holomorfní), je G v uvedené polorovině dokonce holomorfní. Funkce G není pochopitelně určena jednoznačně: stejnou vlastnost mají funkce $G(x + 2k\pi i)$, k celé. Nyní můžeme přiřazení elementů funkce $\mathfrak{F}$ dvojicím b, β provést vztahem

$$\mathscr{E}^{b,\beta} = \mathscr{E}(b, G(L(x))),$$

kde L je jednoznačná větev $\log(x - x_0)$ v jistém $U(b)$, jejíž imaginární část má v bodě b hodnotu β, tj.

$$\mathscr{E}^{b,\beta} = \mathscr{E}(b, G(\log_{A(x)}(x - x_0))),$$

kde $A(x)$ je jednoznačná větev $\arg(x - x_0)$ v jistém $U(b)$, která v bodě b má hodnotu β. Různým volbám funkce G v (52) odpovídají obecně různá přiřazení přesně tak, jako jsme celé přiřazení určovali volbou jednoho elementu a příslušné hodnoty argumentu.

§ 4

Poznámky o lineární homogenní rovnici n-tého řádu

Počínaje tímto paragrafem budeme studovat především lineární homogenní rovnici n-tého řádu (derivace budu často značit čárkami)

$$y^{(n)} + A_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(x)\, y' + A_n(x)\, y = 0\,, \tag{53}$$

kde funkce $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou holomorfní v jisté oblasti $M \subset \boldsymbol{E}$. Často bude pro nás výhodné zavést tzv. lineární diferenciální operátor $\mathbf{L}$ rovnicí

$$\mathbf{L}(y) = y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n y\,. \tag{54}$$

Tento operátor přiřazuje zřejmým způsobem každé funkci y, holomorfní v nějaké oblasti $N \subset M$, novou funkci $\mathbf{L}(y)$, která je opět v oblasti N holomorfní. Rovnici (53) lze psát ve tvaru

$$\mathbf{L}(y) = 0 \tag{55}$$

(nula znamená ovšem nulovou funkci). Někdy je výhodné zavést operátor trochu obecnější:

$$\Lambda(y) = B_0 y^{(n)} + B_1 y^{(n-1)} + \ldots + B_{n-1} y' + B_n y$$

a rovnici $\Lambda(y) = 0$. Jsou-li $B_0, B_1, \ldots, B_n$ holomorfní v jisté oblasti $M \subset \boldsymbol{E}$ a je-li $B_0(x) \neq 0$ v této oblasti, lze dělením převést operátor Λ na operátor tvaru (54) s holomorfními $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v oblasti M.

Budeme vyšetřovat tzv. „záměnu nezávisle proměnné x“ lineární lomenou substitucí

$$x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0)\,, \tag{56}$$

neboli

$$t = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha}\,. \tag{57}$$

Doporučuji čtenáři, aby si osvěžil základní vlastnosti této lineární lomené transformace v Černém, str. 125 a 466. Domluvíme se, že funkci $f(x)$ definovanou v jistém $P(\infty, r)$, $r > 0$ nazýváme holomorfní v bodě ∞, jestliže funkce $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$

$\left(\text{definovaná tedy v } P\left(0, \frac{1}{r}\right)\right)$ je holomorfní v bodě 0 (tj. lze ji dodefinovat v bodě 0 tak, že vzniklá funkce je v bodě 0 holomorfní).[5]) Skoro zřejmé je následující lemma

Lemma 1. *Nechť lineární lomené zobrazení (56) převádí bod $t_0 \in S$ na bod $x_0 \in S$. Potom funkce $f(x)$ je holomorfní v bodě x_0, právě když funkce*

$$g(t) = f\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$$

je holomorfní v bodě t_0.

Důkaz. Protože (56) i (57) jsou homeomorfní zobrazení S na S, obsahuje každé okolí bodu x_0 obraz jistého okolí bodu t_0 a naopak. Buď f holomorfní v bodě $x_0 \in E$. Je-li i $t_0 \in E$, stačí použít větu o derivaci složené funkce, neboť $\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma t + \delta)^2} \neq 0$. Je-li $t_0 = \infty$, potřebujeme dokázat, že funkce

$$f\left(\frac{\beta t + \alpha}{\delta t + \gamma}\right)$$

je holomorfní v bodě 0, což je předchozí případ. Je-li konečně $x_0 = \infty$ a t_0 libovolné, máme z předpokladu, že funkce

$$h(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$$

je holomorfní v bodě 0, ukázat, že funkce

$$f\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = h\left(\frac{\gamma t + \delta}{\alpha t + \beta}\right)$$

je holomorfní v bodě t_0, což je již opět zahrnuto v právě dokázaném. Je-li konečně g holomorfní v bodě t_0, plyne z právě dokázaného, že

$$g\left(\frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha}\right) = f(x)$$

je holomorfní v bodě x_0.

Buď nyní funkce $y(x)$ holomorfní v jisté oblasti $N \subset S$. Vztahem

$$z(t) = y\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right), \tag{58}$$

[5]) Černý (str. 323) požaduje ještě, aby f byla definována i v bodě ∞.

kde $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0$, jsme podle předchozího lemmatu definovali funkci z holomorfní v jisté oblasti $N_2 \subset S$ (N_2 je obraz N_1 při zobrazení (57)). Nechť funkce $A_1, \ldots, A_n$ jsou také holomorfní v oblasti N_1.

Vyjádříme nyní hodnotu $\mathsf{L}(y)$ v bodě x pomocí hodnot $z(t), \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}t^n}$ v příslušném bodě t. K tomu cíli píši předně $A_j\left(\dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$ místo $A_j(x)$ a za druhé vypočtu

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} = \frac{\mathrm{d}^k z}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^k + R,$$

kde R obsahuje členy s derivacemi $\dfrac{\mathrm{d}^j z}{\mathrm{d}t^j}$ pro $j < k$. Tyto členy tvoří lineární formu v $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^{k-1} z}{\mathrm{d}t^{k-1}}$, jejíž koeficienty jsou polynomy v $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}, \ldots, \dfrac{\mathrm{d}^k t}{\mathrm{d}x^k}$. Pokud $t \in E$ a $\gamma t + \delta \neq 0$, je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta}{(\gamma t + \delta)^2},$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \Delta_1(\gamma t + \delta)^2, \quad \Delta_1 = \frac{1}{\Delta} \neq 0,$$

a odtud ihned

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2} = 2\Delta_1\gamma(\gamma t + \delta)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \Delta_2(\gamma t + \delta)^3$$

(zde může být $\Delta_2 = 0$),

$$\frac{\mathrm{d}^3 t}{\mathrm{d}x^3} = \Delta_3(\gamma t + \delta)^4, \ldots,$$

takže hodnota $\mathsf{L}(y)$ v bodě $x = \dfrac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ je rovna

$$(\Delta_1(\gamma t + \delta)^2)^n\left(\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}t^n} + B_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1} z}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + B_n(t)\, z\right),$$

kde každé $B_j(t)$ je lineární formou výrazů $A_1\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right), \ldots, A_n\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$, jejíž koeficienty jsou polynomy v $\gamma t + \delta$ a v $\frac{1}{\gamma t + \delta}$ (není pro nás důležité, jaká je struktura těchto polynomů a zda se tam mohou vyskytovat kladné i záporné mocniny $\gamma t + \delta$). Operátor $\boldsymbol{M}$ definovaný vztahem

$$\boldsymbol{M}(z) = \frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}t^n} + B_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1} z}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + B_n(t)\, z \tag{59}$$

nazvu operátorem vzniklým transformací operátoru $\boldsymbol{L}$ substitucí (56). Je ($\Delta_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1} \neq 0$)

$$\boldsymbol{L}(y) = (\Delta_1(\gamma t + \delta)^2)^n\, \boldsymbol{M}(z), \tag{60}$$

beru-li hodnotu vlevo v bodě x a vpravo v bodě t podle (56). Vyloučeny jsou jen hodnoty $t = \infty$, $\gamma t + \delta = 0$, neboli hodnoty $\gamma x - \alpha = 0$, $x = \infty$ (a ovšem ty hodnoty, pro které je porušena holomorfnost funkcí $A_j(x)$, $y(x)$).

Z (60) je vidět: Je-li y nějaká funkce, potom funkce z definovaná rovnicí (56) je řešením rovnice $\mathbf{M}(z) = 0$ tehdy a jen tehdy, je-li y řešením rovnice $\mathbf{L}(y) = 0$. Touto podmínkou (a podmínkou, že koeficient při n-té derivaci v $\mathbf{M}(z)$ je roven jedné) je operátor $\mathbf{M}$ (při daném $\mathbf{L}$ a dané substituci (56)) jednoznačně určen. Odtud plyne dále: vzniká-li $\mathbf{M}$ z $\mathbf{L}$ transformací (56), vzniká $\mathbf{L}$ z $\mathbf{M}$ transformací k ní inverzní. Konečně je zřejmé, že vzniká-li $\mathbf{M}$ z $\mathbf{L}$ transformací (56) a z $\mathbf{M}$ vzniká $\mathbf{N}$ transformací

$$t = \frac{\alpha' u + \beta'}{\gamma' u + \delta'}, \quad \alpha'\delta' - \beta'\gamma' \neq 0,$$

vznikne $\boldsymbol{N}$ z $\boldsymbol{L}$ transformací, kterou dostaneme složením dvou transformací (jež má tvar $x = \frac{Au + B}{Cu + D}$).

Buď nyní $P(x_0) \subset M$. Budeme říkat, že rovnice $\boldsymbol{L}(y) = 0$ je obyčejná v bodě $x_0 \in E$ (nebo že operátor je obyčejný v bodě x_0, nebo že bod x_0 je obyčejný bod operátoru $\boldsymbol{L}$ nebo rovnice $\boldsymbol{L}(y) = 0$), když koeficienty $A_j(x)$ v operátoru (54) jsou holomorfní v bodě x_0. Tuto definici převedeme též na bod $x_0 = \infty$ takto: k operátoru $\boldsymbol{L}$ sestrojíme operátor $\boldsymbol{M}$ transformací $x = \frac{1}{t}$ (která převádí obor $0 < |t| < r$ v obor $\frac{1}{r} < |x| < +\infty$); budeme říkat, že bod ∞ je obyčejný bod rovnice $\boldsymbol{L}(y) = 0$, jestliže bod 0 je obyčejným bodem rovnice $\boldsymbol{M}(z) = 0$.

Následující věta ukazuje, že obyčejný bod přechází lineární lomenou transformací opět v obyčejný bod.

Věta 23. *Nechť bod $x_0 \in S$ je obrazem bodu $t_0 \in S$ při transformaci* (56). *Nechť se operátor **L** touto transformací převádí v operátor **M**. Potom bod x_0 je obyčejným bodem operátoru **L** tehdy a jen tehdy, je-li t_0 obyčejný bod operátoru **M**.*

Důkaz. Buď předně x_0 obyčejný bod operátoru $\boldsymbol{L}$.

1) Je-li t_0, $x_0 \in E$, je $\gamma t_0 + \delta \neq 0$. Podle lemmatu 1 a podle tvaru koeficientů B_j v (57) je bod t_0 obyčejný bod operátoru $\boldsymbol{M}$.

2) Je-li $x_0 = \infty$, $t_0 \in E$, je $\gamma t_0 + \delta = 0$, tj. $t_0 = -\dfrac{\delta}{\gamma}$. Podle naší definice dostanu transformací $x = \dfrac{w}{1}$ rovnici obyčejnou v bodě 0. Bod $w = 0$ je při transformaci

$$w = \frac{\gamma t + \delta}{\alpha t + \beta}$$

obrazem bodu t_0. Postupným provedením těchto dvou transformací dostanu však stejnou rovnici jako při transformaci (56). Stačí tedy použít 1) pro transformaci $w = \dfrac{\gamma t + \delta}{\alpha t + \beta}$.

3) Je-li $t_0 = \infty$, x_0 libovolné, zavedeme transformaci $\tau = \dfrac{1}{t}$, a tedy $x = \dfrac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}$, a bodu $\tau = 0$ odpovídá bod $x = x_0$. Operátor $\boldsymbol{N}$, vzniklý z $\boldsymbol{L}$ substitucí

$$x = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau},$$

má podle 2) bod $\tau = 0$ za obyčejný bod. Podle definice má operátor $\boldsymbol{P}$, vzniklý z $\boldsymbol{N}$ substitucí $\tau = \dfrac{1}{t}$, bod $t_0 = \infty$ za obyčejný bod. Ale složením substitucí

$$x = \frac{\alpha + \beta\tau}{\gamma + \delta\tau}, \quad \tau = \frac{1}{t}$$

vzniká substituce (56) a podle předchozího výkladu je $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}$, a tedy operátor $\boldsymbol{M}$ je obyčejný v bodě t_0.

Předpokládáme-li, že operátor $\boldsymbol{M}$ je obyčejný v bodě t_0, dostaneme z právě dokázaného, že operátor $\boldsymbol{Q}$, vzniklý z $\boldsymbol{M}$ substitucí

$$t = \frac{\delta x - \beta}{-\gamma x + \alpha},$$

je obyčejný v bodě x_0. Protože je to transformace inverzní k (56), je podle předchozího $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{L}$, a $\boldsymbol{L}$ je tedy obyčejný v bodě x_0.

Poznámka 1. Buď $n = 2$ a uvažujme funkce A_1, A_2 holomorfní v $P(\infty, r)$. Kdy je rovnice (53) obyčejná v bodě ∞? Provedeme-li příslušné výpočty, dostaneme, že k tomu je nutné a stačí, aby rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} A_1\left(\frac{1}{t}\right)\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{t^4} A_2\left(\frac{1}{t}\right) z = 0$$

byla obyčejná v bodě nula. Odtud je přímo vidět, že k tomu nestačí, aby funkce A_1, A_2 byly holomorfní v bodě ∞. Nutná a postačující podmínka je, aby existovaly vlastní limity

$$\lim_{x\to\infty} (2x - x^2 A_1(x)), \quad \lim_{x\to\infty} x^4 A_2(x),$$

jak ihned zjistíme.

Chování řešení rovnice (53) v okolí obyčejného bodu nám popisuje věta 20a. V § 2 kap. III (text na str. 65–71) je dokonce vyloženo, jak se tato řešení chovají v libovolné jednoduše souvislé oblasti $N \subset \boldsymbol{E}$, jejíž všechny body jsou obyčejné. Pomocí věty 23 dostaneme stejnou informaci i pro oblasti $N \subset \boldsymbol{S}$.

Bude nás nyní zajímat otázka, jak vypadají řešení rovnice (53) v libovolné oblasti $M \subset \boldsymbol{E}$ (která nemusí být jednoduše souvislá), jestliže A_j v (53) jsou holomorfní v M. Zvolme nějaký bod $a \in M$; v jeho okolí $U(a, \delta) \subset M$ zvolme určitý fundamentální systém řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$; označme $y_{(c_1,\ldots,c_n)} = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ $(c_j \in \boldsymbol{E})$. Sestrojme elementy $\mathscr{E}(a, y_j)$, $\mathscr{E}(a, y_{(c_1,\ldots,c_n)})$. Ty vytvářejí analytické funkce $\mathfrak{Y}_j$, $\mathfrak{Y}_{(c_1,\ldots,c_n)}$ v oblasti M ($\mathfrak{Y}_j$ je ovšem $\mathfrak{Y}_{(c_1,\ldots,c_n)}$ pro $c_j = 1$, $c_k = 0$ pro $k \neq j$). Podle věty 21 jsou tyto analytické funkce neomezeně holomorfně pokračovatelné v M [6]). Ježto A_j jsou jednoznačné, platí toto (opět podle věty 21): Je-li φ křivka v M s počátkem a, koncem b a je-li

$$\mathscr{E}(a, y_j) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(b, Y_j), \quad j = 1, \ldots, n, \quad \mathscr{E}(a, y_{(c_1,\ldots,c_n)}) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(b, Y_{(c_1,\ldots,c_n)}),$$

jsou Y_j, $Y_{(c_1,\ldots,c_n)}$ v jistém $U(b, \Delta)$ opět řešení rovnice (53) a funkce $Y_1, \ldots, Y_n$ tvoří v tomto okolí fundamentální systém řešení. (Kdyby totiž bylo $d_1 Y_1 + \ldots + d_n Y_n = 0$ v nějakém okolí bodu b, dostali bychom pokračováním podél křivky $\dot{-}\varphi$ vzhledem k jednoznačnosti pokračování, že $d_1 y_1 + \ldots + d_n y_n = 0$ v jistém okolí bodu a – spor.)

Nyní je zřejmé, že každá jednoznačná větev funkce $\mathfrak{Y}_{(c_1,\ldots,c_n)}$ v oblasti $N \subset M$ dává holomorfní řešení rovnice (53) v N. Zobecníme proto pojem řešení rovnice (53) takto: Řešením rovnice (53) v M nazvu každou funkci $\mathfrak{Y}$ analytickou v M, jejíž každý element $\mathscr{E}(c, z)$ $(c \in M)$ má tu vlastnost, že z je v jistém okolí bodu c holomorf-

---

[6]) Tj. všechny jejich elementy o středech v M jsou holomorfní.

ním řešením (tj. řešením v dosavadním smyslu) rovnice (53). Tedy naše funkce $\mathfrak{Y}_{(c_1,\dots,c_n)}$ jsou řešení rovnice (53) v M. Snadno nahlédneme, že probíhají-li $c_1, c_2, \dots$ $\dots, c_n$ všechna čísla z E, jsou to všechna řešení této rovnice v M. Je-li totiž $\mathfrak{Z}$ nějaké řešení rovnice (53) v M, zvolme element $\mathscr{E}(c, Z) \in \mathfrak{Z}$, $c \in M$, takže funkce Z je řešením v jistém okolí $U(c, \delta)$. Zvolme křivku ψ v M s počátkem c, koncem a. Podle věty 21 je $\mathscr{E}(c, Z) \xrightarrow[\psi]{\text{hol}} \mathscr{E}(a, z)$, kde z je řešení v okolí bodu a, tedy $z = k_1 y_1 + \dots$ $\dots + k_n y_n$, a tudíž $\mathscr{E}(c, z) \in \mathfrak{Y}_{(k_1,\dots,k_n)}$, tedy $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}_{(k_1,\dots,k_n)}$. $\mathfrak{Z}$ bylo přítom libovolné řešení rovnice (53) v M.

Poznamenejme, že označení $\mathfrak{Y}_j$, $\mathfrak{Y}_{(c_1,\dots,c_n)}$ závisí na volbě bodu a a fundamentálního systému $y_1, \dots, y_n$. Při pokračování $\mathscr{E}(a, y_j) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(b, Y_j)$ $(j = 1, \dots, n)$ tvoří $Y_1, \dots, Y_n$ fundamentální systém řešení v nějakém okolí bodu b. Přesto se může stát, že např. $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_2$ (ve smyslu Černého knihy). Vezměme jako příklad rovnici

$$y'' + \frac{1}{x} y' = 0$$

v $E - \{0\}$. Je-li $L(x)$ nějaká jednoznačná větev $\log x$ v kruhu $|x - 1| < 1$, dávají funkce $y_1 = L(x)$, $y_2 = L(x) + 2\pi i$ fundamentální systém řešení v tomto kruhu. Přesto je $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_2$, neboť elementy $\mathscr{E}(1, L(x)) = \mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}(1, L(x) + 2\pi i) = \mathscr{E}_2$ vytvářejí v $E - \{0\}$ touž analytickou funkci – totiž funkci $\log x$. Tento zdánlivý nesouhlas vysvětlíme takto. Domluvili jsme se, že při počítání s analytickými funkcemi neomezeně holomorfně pokračovatelnými v jistém $P(x_0, r)$ budeme vycházet z naší nové definice na základě „očíslování" jejich elementů dvojicemi b, β, kde β znamená nějakou hodnotu argumentu $b - x_0$. U funkce $\log(x - x_0)$ i u funkce $(x - x_0)^s$ jsme toto přiřazení pevně zadali. V našem případě máme $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}^{1,0}$, $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}^{1,2\pi}$, tj. tyto elementy patří do funkce $\log x$, ale každý odpovídá jiné volbě argumentu čísla 1. Dále máme $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}(1, 2\pi i)$, a tedy můžeme shrnout: elementy $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ vytvářejí sice ve smyslu Černého jedinou analytickou funkci $\log x$, ale ve smyslu naší úmluvy a „očíslování" elementů vytváří $\mathscr{E}_1$ funkci $\log x$, element $\mathscr{E}_2$ pak funkci $\log x + 2\pi i$.

Znovu zdůrazněme: operace s analytickými funkcemi chápeme s přihlédnutím k „očíslování" jejich elementů, které pro funkce, s nimiž budeme pracovat, máme pevně zadáno. U našeho příkladu pak tedy funkce $\log x$, $\log x + 2\pi i$ tvořily fundamentální systém řešení uvedené rovnice.

Všimněme si ještě, že jsme zobecnili pojem řešení rovnice (53) na analytické funkce pomocí jejich elementů. Kdybychom totiž do levé strany (53) za y dosadili funkci analytickou v oblasti M (derivaci a sečítání analytických funkcí bereme ve smyslu definic v Černém, str. 405 a další), nedostali bychom jako výsledek jednu analytickou funkci. (Uvažujte např. rovnici $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ a řešení $x^{-1} \log x$.) Mohli bychom však zřejmým způsobem upravit definici výrazu

$$\mathfrak{Y}^{(n)} + A_1 \mathfrak{Y}^{(n-1)} + \dots + A_n \mathfrak{Y}$$

tak, aby vyhovovala našim potřebám, tj. postupovali bychom podobně jako v předchozím paragrafu a zavedli tento výraz jako analytickou funkci v příslušné oblasti M, která je vytvořena elementem (nebo obsahuje všechny elementy) tvaru

$$\mathscr{E}(a, y^{(n)} + A_1 y^{(n-1)} + \ldots + A_n y),$$

kde $\mathscr{E}(a, y) \in \mathfrak{Y}$. Nyní je jistě zřejmé, jaké obtíže nastanou při zavedení pojmu „analytické funkce $\mathfrak{Y}$ splňuje v M rovnici

$$\mathfrak{Y}^{(n)} + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{Y}^{(n-1)} + \ldots + \mathfrak{A}_n \mathfrak{Y} = 0\text{“},$$

kde $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ jsou funkce analytické a neomezeně holomorfně pokračovatelné v oblasti $M \subset E$. Pomocí úvah předchozího paragrafu bychom toto mohli provést např. pro $M = P(x_0, R)$.

Poznamenejme, že transformací $x = \dfrac{1}{t}$ můžeme (pomocí lemmatu 1 a věty 23) převést vše i do bodu ∞. Nebudeme to však potřebovat.

§ 5

Homogenní lineární rovnice s jednoznačnými koeficienty v okolí singulárního bodu

V minulém paragrafu jsme studovali řešení diferenciální rovnice (53) za předpokladu, že koeficienty $A_1, \ldots, A_n$ jsou holomorfní funkce v nějaké oblasti $M \subset S$. Je-li M dokonce jednoduše souvislá, viděli jsme v § 3, že každé řešení je holomorfní funkce v oblasti M. Vyšetříme v tomto a následujícím paragrafu podrobně případ $M = P(x_0, R)$, tj. budeme studovat operátor (54) a rovnici (53) za předpokladu

($\mathfrak{P}$): *funkce $A_1, \ldots, A_n$ jsou holomorfní v prstenci $P(x_0, R)$, $x_0 \in E$, $0 < R \leqq +\infty$.*

Poznamenejme, že jsou-li $A_1, \ldots, A_n$ holomorfní dokonce v $U(x_0, R)$, je předpoklad ($\mathfrak{P}$) zřejmě splněn – tento případ je již vyšetřen v § 2 této kapitoly. Posunutím dosáhneme toho, že $x_0 = 0$; při důkazech tedy bez dalšího tento předpoklad podržíme. Budeme dále používat výsledků § 2–4 této kapitoly.

Nechť tedy rovnice (53) splňuje předpoklad ($\mathfrak{P}$). Vezměme libovolný bod $a \in P(0, R)$ a nějaký fundamentální systém řešení $z_1, \ldots, z_n$ rovnice (53) v okolí bodu a. Označme γ křivku ae^{it}, $0 \leqq t \leqq 2\pi$. Podle věty 21 existují pokračování

$$\mathscr{E}(a, z_j) \xrightarrow[\gamma]{\text{hol}} \mathscr{E}(a, Z_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Protože funkce $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tvořily fundamentální systém, je

$$Z_j = \sum_{k=1}^{n} \mu_{jk} z_k\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

V maticové formě pro

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = (\mu_{jk})_{j,k=1,\ldots,n}$$

můžeme tyto vztahy zapsat ve tvaru

$$\mathbf{Z} = \mathbf{M}\mathbf{z}\,.$$

Protože funkce $Z_1, \ldots, Z_n$ tvoří také fundamentální systém, je matice $\mathbf{M}$ nesingulární. Hledejme nyní, jak zvolit původní fundamentální systém $z_1, z_2, \ldots, z_n$, aby matice $\mathbf{M}$ byla co nejjednodušší. Vezmeme-li místo $z_1, \ldots, z_n$ jiný fundamentální systém

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

je $y_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} z_k$, $j = 1, \ldots, n$, tj. $\mathbf{y} = \Lambda\mathbf{z}$, kde Λ může zřejmě být libovolná nesingulární matice. Podle věty 21 máme

$$\mathscr{E}(a, y_j) \xrightarrow[\gamma]{\text{hol}} \mathscr{E}(a, Y_j)\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

kde zřejmě

$$Y_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{jk} Z_k\,, \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

tj. pro

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

máme

$$\mathbf{Y} = \Lambda\mathbf{Z} = \Lambda\mathbf{M}\mathbf{z} = \Lambda\mathbf{M}\Lambda^{-1}\mathbf{y}\,.$$

Stačí tedy k dané matici $\mathbf{M}$ (nesingulární), odpovídající pevně zvolenému fundamentálnímu systému $z_1, \ldots, z_n$, zvolit (nesingulární) matici Λ (a tím i určit fundamentální systém $y_1, \ldots, y_n$) tak, aby matice $\Lambda\mathbf{M}\Lambda^{-1}$ měla co nejjednodušší tvar. K tomu účelu použijeme z teorie matic následující větu (Jordanovu)[1]):

---

[1]) Viz např. I. M. Gelfand, Lineární algebra, Praha 1954.

Budiž $\mathbf{M}$ libovolná čtvercová matice. Potom existuje nesingulární čtvercová matice Λ tak, že

$$
\Lambda \mathbf{M} \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1, & \ldots, & 0 \\ \ldots, & \mathbf{J}_2, & \ldots \\ 0, & \ldots, & \mathbf{J}_r \end{pmatrix} {}^{2)}, \tag{61}
$$

kde čtvercová matice $\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_r$ $(r \geqq 1)$ mají tvar

$$
\begin{pmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1}, & \ldots, & a_{pp} \end{pmatrix} \quad (p \geqq 1),
$$

kde $a_{jj} = a_{pp} = \lambda \neq 0$, $a_{j,j+1} = 1$ $(1 \leqq j \leqq p - 1)$, $a_{ij} = 0$ pro ostatní i, j, tj. některý z tvarů

$$
(\lambda), \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{atd.}
$$

Přitom pro různé indexy t, s mohou $\mathbf{J}_t, \mathbf{J}_s$ mít buďto různá p nebo totéž p a rovněž různá λ nebo totéž λ. Matice $\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_r$ jsou až na pořadí jednoznačně určeny maticí $\mathbf{M}$.

Všimněme si ještě této okolnosti: Jestliže v (61) matice $\mathbf{J}_s$ má p_s řádek, potom rovnicí

$$
\mathbf{Y} = \Lambda \mathbf{M} \Lambda^{-1} \mathbf{y}
$$

jsou $Y_1, \ldots, Y_{p_1}$ (resp. $Y_{p_1+1}, \ldots, Y_{p_1+p_2}$ atd.) vyjádřeny pomocí $y_1, \ldots, y_{p_1}$ (resp. $y_{p_1+1}, \ldots, y_{p_1+p_2}$ atd.). Matici (61) na základě toho poněkud ještě upravíme. Nechť $\lambda \neq 0$,

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & \lambda \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \lambda^2, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^p, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \end{pmatrix}
$$

(p-řádkové čtvercové matice). Potom je

$$
\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & \lambda^{-p} \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \lambda^{-p+1}, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{-1}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \end{pmatrix}
$$

---

[2]) Matice $\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_r$ jsou „navěšeny" na hlavní diagonále, tj. existují $p_1, p_2, \ldots, p_r$ přirozená tak, že $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_r$, a je-li $\Lambda \mathbf{M} \Lambda^{-1} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, je

$$
\mathbf{J}_k = (a_{ij})_{i,j=p_1+\ldots+p_{k-1}+1,\ldots,p_1+\ldots+p_k}
$$

a ostatní a_{ij} jsou rovny nule.

a

$$\mathbf{BAB}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda, & 0, & 0, & \ldots, & \ldots, & 0 \\ \lambda, & \lambda, & 0, & \ldots, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda, & \lambda, & \ldots, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \ldots\lambda, & \lambda \end{pmatrix}.$$

(Přesvědčte se o tom!) Provedeme-li ještě tuto úpravu[3]) (musíme takto upravit každou matici $\mathbf{J}_s$, $1 \leqq s \leqq r$ – tomu odpovídá změna fundamentálního systému $y_1, \ldots, y_n$ v jednotlivých skupinách $y_1, \ldots, y_{p_1}$; $y_{p_1+1}, \ldots, y_{p_1+p_2}$ atd.), dostaneme nový fundamentální systém (označíme ho opět y, ač je obecně jiný), při němž pokračování

$$\mathscr{E}(a, y_j) \xrightarrow[y]{\text{hol}} \mathscr{E}(a, Y_j), \quad j = 1, \ldots, n$$

je dáno takto: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se rozděluje na r $(r \geqq 1)$ skupin, z nichž první se transformuje podle vzorců

$$(62) \qquad \begin{aligned} Y_1 &= \lambda y_1 \\ Y_2 &= \lambda(y_1 + y_2) \qquad \lambda \neq 0, \quad p \geqq 1 \\ Y_3 &= \lambda(y_2 + y_3) \\ &\ldots \\ Y_p &= \lambda(y_{p-1} + y_p) \end{aligned}$$

(pro $p = 1$ se tyto rovnice redukují na jedinou, $Y_1 = \lambda y_1$).

Je-li $r > 1$, je druhá skupina

$$\begin{aligned} Y_{p+1} &= \mu y_{p+1} \\ Y_{p+2} &= \mu(y_{p+1} + y_{p+2}) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \mu \neq 0, \quad q \geqq 1 \\ Y_{p+q} &= \mu(y_{p+q-1} + y_{p+q}) \end{aligned}$$

atd. Přitom může být $p = q$ i $p \neq q$ a rovněž $\lambda = \mu$ i $\lambda \neq \mu$.

Celkem můžeme shrnout, že v jistém okolí bodu a existuje fundamentální systém $y_1, \ldots, y_n$, pro který platí rovnice (62) – a obdobné rovnice pro další skupiny. Každý element $\mathscr{E}(a, y_j)$ určuje funkci $\mathfrak{Y}_j$ analytickou a neomezeně pokračovatelnou holomorfními elementy v $P(0, R)$, která je ve smyslu předchozího paragrafu řešením rovnice (53) v $P(0, R)$. Budeme se zabývat analytickou povahou těchto funkcí. Zjistíme, že se dají všechny jednoduše vyjádřit funkcemi $x^s (s \in E)$, $\log^k x$ $(k \geqq 0$ celé$)$

---

[3]) Hodnoty λ u matic $\mathbf{J}_s$ jsou nenulové, neboť naše matice $\mathbf{M}$ je nesingulární.

a funkcemi holomorfními v $P(0, R)$ (tj. Laurentovými řadami konvergentními v $P(0, R)$ – o Laurentových řadách viz Černý, kap. 12, hlavní odstavce 1–4). Při operacích s analytickými funkcemi se důsledně budeme držet výsledků § 3.

Při dalším studiu jistě stačí, když se omezíme na prvou skupinu (viz (62)) $\mathfrak{Y}_1, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{Y}^{\pi}$. Náš postup bude asi tento: budeme se snažit postupně přecházet k jiným funkcím tak, aby vztahy (62) přecházely stále v jednodušší. Nejprve se pokusíme zbavit se činitele λ. Abychom neměli složité označení, rozumějme symbolem x^s jednoznačnou větev v jistém okolí bodu a, jejíž hodnota v bodě a přísluší (nějaké pevně zvolené) hodnotě α argumentu a. Potom je

$$\mathscr{E}(a, x^s) \xrightarrow[\gamma]{\text{hol}} \mathscr{E}(a, x^s \exp(2\pi i s)) .$$

Zvolíme-li číslo ϱ tak, že $\exp(2\pi i\varrho) = \lambda$ $\left(\text{tj. } \varrho = \dfrac{1}{2\pi i} \log \lambda\text{, kde } \log \lambda \text{ znamená}\right.$

$\left.\text{některou hodnotu logaritmu čísla } \lambda\right)$, je

$$\mathscr{E}(a, x^{-\varrho}) \xrightarrow[\gamma]{\text{hol}} \mathscr{E}\left(a, \frac{1}{\lambda} x^{-\varrho}\right).$$

Položme tedy

$$u_j = y_j x^{-\varrho}, \quad j = 1, \ldots, p . \tag{63}$$

Elementy $\mathscr{E}(a, u_j)$ určují analytické funkce $\mathfrak{U}_j$ v $P(0, R)$, které jsou v $P(0, R)$ zřejmě neomezeně pokračovatelné holomorfními elementy. Nechť $\mathscr{E}(a, u_j) \xrightarrow[\gamma]{\text{hol}} \mathscr{E}(a, U_j)$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Podle (62), (63) a volby ϱ je vidět, že

$$U_1 = u_1 , \quad U_j = u_{j-1} + u_j \quad (1 < j \leqq p) . \tag{64}$$

Podle věty 22 je tedy u_{j-1} holomorfní v $P(0, R)$; pišme $\mathfrak{U}_1 = \varphi_1$ (znaky $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ budu označovat funkce holomorfní v $P(0, R)$, tj. vlastně Laurentovy řady, které v $P(0, R)$ konvergují). Pro názornost vyšetříme funkci $\mathfrak{U}_2$ samostatně, a teprve potom provedeme indukci.

Pro zjednodušení zápisu zavedeme funkci $\xi(x) = \dfrac{1}{2\pi i} \log x$. Zřejmě pro jakoukoliv jednoznačnou větev ξ_1 funkce ξ v okolí bodu a máme

$$\mathscr{E}(a, \xi_1) \xrightarrow[\gamma]{\text{hol}} \mathscr{E}(a, \xi_1 + 1) .$$

Z (64) je vidět, že při pokračování podél γ se u_2 změní o $u_1 = \varphi_1$. Stejnou vlastnost má funkce $\varphi_1 \,.\, \xi_1$, kde ξ_1 označíme tu větev ξ, která v bodě a má hodnotu $\dfrac{1}{2\pi i}\log_\alpha a$ $\left(\text{tj. reálnou část } \dfrac{\alpha}{2\pi}\right)$. Položme tedy

$$u_2 = \xi_1\varphi_1 + v_2 \,. \tag{65}$$

$\mathscr{E}(a, v_2)$ je element jisté funkce $\mathfrak{V}_2$ neomezeně pokračovatelné holomorfními elementy v $P(0, R)$. Nechť $\mathscr{E}(a, v_2) \xrightarrow[\gamma]{\text{hol}} \mathscr{E}(a, V_2)$. Doufáme, že $V_2 = v_2$, tj. že $\mathfrak{V}_2$ je jednoznačná, a tedy holomorfní v $P(0, R)$. Dokažme to. Je

$$U_2 = u_1 + u_2 = \varphi_1 + \xi_1\varphi_1 + v_2 \,.$$

Za druhé z (65) máme

$$U_2 = (\xi_1 + 1)\,\varphi_1 + V_2$$

a srovnáním ihned $v_2 = V_2$. Je tedy $\mathfrak{V}_2 = \varphi_2$ funkce holomorfní v $P(0, R)$ a

$$u_2 = \xi_1\varphi_1 + \varphi_2 \,,$$

a tedy

$$\mathfrak{U}_2 = \xi\varphi_1 + \varphi_2 \,,$$

přesně řečeno: klademe-li $P_2(u, v, w) = \dfrac{1}{2\pi i}\, uv + w$, je ve smyslu úmluvy § 3 $\mathfrak{U}_2 = P_2(\log x, \varphi_1, \varphi_2)$. Doporučuji čtenáři, aby provedl ještě další krok: Položí-li

$$u_3 = \frac{\xi_1^2 - \xi_1}{2}\,\varphi_1 + \xi_1\varphi_2 + v_3 \,,$$

zjistí obdobně, že v_3 podél γ přejde samo v sebe, tedy

$$\mathfrak{U}_3 = \binom{\xi}{2}\varphi_1 + \xi\varphi_2 + \varphi_3 \,.$$ [4]

Provedeme nyní indukční krok. Nechť $1 \leqq k < p$ a nechť je dokázáno, že

$$u_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \binom{\xi_1(x)}{k - j}\,\varphi_j(x) \tag{66}$$

(to platí pro $k = 1$), tedy

$$\mathfrak{U}_k = \sum_{j=1}^{k} \binom{\xi}{k - j}\,\varphi_j$$

[4]) Klademe pro nezáporné celé k $\dbinom{\xi}{k} = \dfrac{\xi(\xi - 1)\ldots(\xi - k + 1)}{k!}$ a podobně v ostatních případech.

(míněno ve smyslu § 3 této kapitoly, tj. $\mathfrak{U}_k = P_k(\log x, \varphi_1, \ldots, \varphi_k)$, kde

$$P_k(u, v_1, \ldots, v_k) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{u}{2\pi i} \atop k - j \right) v_j) .$$

Položme

$$u_{k+1}(x) = \sum_{j=1}^{k} \binom{\xi_1(x)}{k + 1 - j} \varphi_j(x) + v_{k+1} , \tag{67}$$

takže $\mathscr{E}(a, v_{k+1})$ je elementem jisté funkce $\mathfrak{Y}_{k+1}$. Nechť

$$\mathscr{E}(a, v_{k+1}) \xrightarrow[\varphi]{\text{hol}} \mathscr{E}(a, V_{k+1}) .$$

Je podle (67)

$$U_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \binom{\xi_1 + 1}{k + 1 - j} \varphi_j + V_{k+1}$$

a podle (64) a (67) a (66)

$$U_{k+1} = u_k + u_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} \left(\binom{\xi_1}{k + 1 - j} + \binom{\xi_1}{k - j} \right) \varphi_j + v_{k+1} .$$

Protože zřejmě (ověřte!)

$$\binom{\xi_1}{k + 1 - j} + \binom{\xi_1}{k - j} = \binom{\xi_1 + 1}{k + 1 - j} ,$$

vychází skutečně $v_{k+1} = V_{k+1}$, tj. element $\mathscr{E}(a, v_{k+1})$ definuje v $P(0, R)$ podle věty 22 jednoznačnou analytickou funkci $\mathfrak{Y}_{k+1} = \varphi_{k+1}$. Podle (67) tedy je

$$u_{k+1}(x) = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{\xi_1(x)}{k + 1 - j} \varphi_j(x)$$

a vztah (66) je indukcí dokázán pro všechna k, $0 < k \leqq p$.

Násobíme-li ještě $u_k(x)$ jednoznačnou větví funkce x^ϱ v okolí bodu a, která v bodě a má hodnotu příslušnou hodnotě α argumentu a, dostaneme tento konečný výsledek:

$$\mathfrak{Y}_k = x^\varrho \sum_{j=1}^{k} \binom{\xi}{k - j} \varphi_j(x) , \quad k = 1, 2, \ldots, p , \tag{68}$$

čemuž je třeba rozuměti takto: Položme

$$P_k(u, v, w_1, \ldots, w_k) = u \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{v}{2\pi i} \atop k - j \right) w_j .$$

Potom (ve smyslu § 3 této kapitoly) je

$$\mathfrak{Y}_k = P_k(x^\varrho, \log x, \varphi_1, \ldots, \varphi_k)\,.$$

Poznamenejme, že tím máme každému $b \in P(0, R)$ a každé hodnotě β argumentu b přiřazen určitý element $\mathscr{E}^{b,\beta}_{\mathfrak{Y}_k}$, a tím i hodnotu

$$\mathfrak{Y}^\beta_k(b) = b^\varrho_\beta \sum_{j=1}^{k} \binom{\frac{1}{2\pi i} \log_\beta b}{k-j} \varphi_j(b)\,.$$

Podobně můžeme zřejmě postupovat u ostatních skupin. Protože elementy $\mathscr{E}^{a,\alpha}_{\mathfrak{Y}_j} = \mathscr{E}(a, y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tvořily fundamentální systém v okolí bodu a, tvoří $\mathscr{E}^{b,\beta}_{\mathfrak{Y}_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, fundamentální systém (pro každou volbu b, β) v okolí bodu b.

Abychom zjednodušili náš zápis, pišme místo $\mathfrak{Y}_k$ jednoduše y_k. Naše výsledky můžeme formulovat následující větou.

Věta 24. *Buď dána rovnice*

$$y^{(n)} + A_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + A_n(x)\, y = 0\,, \tag{69}$$

kde funkce $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou holomorfní funkce v jistém prstenci $P(x_0, R)$, $x_0 \in E$, $0 < R \leqq +\infty$. Potom existuje systém n analytických funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ neomezeně holomorfně pokračovatelných v $P(x_0, R)$ s těmito vlastnostmi:

a) *Funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ splňují rovnici (69) a jsou lineárně nezávislé.*

b) *Systém funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se rozpadne na r disjunktních skupin ($r \geqq 1$), přirozené) o $p_1, p_2, \ldots, p_r$ ($p_j > 0$) členech tak, že existují čísla ϱ_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, a funkce $\varphi_{ij}(x)$ holomorfní v prstenci $P(x_0, R)$ tak, že pro $k = p_1 + \ldots + p_{j-1} + i$ ($i = 1, 2, \ldots, p_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$) platí*

$$y_k = (x - x_0)^{\varrho_j} \sum_{=1}^{i} \binom{\xi(x)}{i - s} \varphi_{sj}(x)\,,$$

$$\textit{kde } \xi(x) = \frac{1}{2\pi i} \log(x - x_0)\,.$$

c) *Při pokračování podél kružnice $\gamma : ae^{it}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$, $a \in P(x_0, R)$ přechází funkce y_k, $k = p_1 + \ldots + p_{j-1} + i$ ve funkci*

$$\lambda_j y_k \qquad \textit{pro} \quad i = 1\,,$$

$$\lambda_j(y_{k-1} + y_k) \quad \textit{pro} \quad i = 2, 3, \ldots, p_j\,,$$

$$\lambda_j = \exp(2\pi i \varrho_j),\ j = 1, 2, \ldots, r.$$

Poznámka 1. Tvrzení c) této věty je nutno rozumět ve smyslu § 3 této kapitoly, tj. označíme-li $\mathscr{E}_k^{b,\beta}$ element funkce y_k o středu b příslušný hodnotě β argumentu $b - x_0$, je pro $k = p_1 + \ldots + p_{j-1} + i$

$$\mathscr{E}_k^{b,\beta+2\pi} = \lambda_j \mathscr{E}_k^{b,\beta} \qquad \text{pro} \quad i = 1\,,$$

$$\mathscr{E}_k^{b,\beta+2\pi} = \lambda_j(\mathscr{E}_{k-1}^{b,\beta} + \mathscr{E}_k^{b,\beta}) \quad \text{pro} \quad i = 2, 3, \ldots, p_j\,,$$

$j = 1, 2, \ldots, r$.

Stejným způsobem je nutné chápat bod a), tj. nezávislost funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Doporučuji čtenáři, aby si celý výklad tohoto paragrafu pročetl ještě jednou a důsledně si označoval všechny elementy podle § 4 této kapitoly.

§ 6

Fuchsova věta

Vyšetřujeme lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} + A_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + A_n(x)\, y = 0\,,$$

kde funkce $A_1, \ldots, A_n$ splňují předpoklad ($\mathfrak{P}$) předchozího paragrafu, tj. jsou to funkce holomorfní v jistém prstenci $P(x_0, R)$, $x_0 \in E$, $0 < R \leqq +\infty$. Věta 24 ukazuje, že tato rovnice má v $P(x_0, R)$ fundamentální systém funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ analytických a neomezeně pokračovatelných holomorfními elementy v $P(x_0, R)$, který se skládá z r skupin ($r \geqq 1$), kde první skupina o p členech ($p \geqq 1$) má tvar

$$y_1 = (x - x_0)^\varrho\, \varphi_1(x)\,, \tag{70}$$

$$y_k = (x - x_0)^\varrho \sum_{j=1}^{k} \binom{\xi}{k - j} \varphi_j(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, p\,,$$

kde $\varrho \in E$, $\xi = \dfrac{1}{2\pi i} \log (x - x_0)$ a funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ jsou funkce holomorfní v $P(x_0, R)$. Ostatní skupiny (je-li $r > 1$) mají podobný tvar (obecně s jiným ϱ). Vyskytuje se v nich celkem n funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ holomorfních v $P(x_0, R)$, tj. n Laurentových řad v tomto prstenci konvergentních. Případ, kdy žádná z funkcí φ_j nemá v bodě x_0 podstatnou singularitu, bude asi nejjednodušší. V tomto paragrafu se pokusíme tento případ charakterizovat. Uvažme, že mají-li funkce φ_j prvé skupiny v bodě x_0 nejvýše póly, můžeme tyto póly odstranit tím, že místo $(x - x_0)^\varrho$, $\varphi_j(x)$ píšeme $(x - x_0)^{\varrho - m}$, $(x - x_0)^m\, \varphi_j(x)$ s vhodným celým m, $j = 1, 2, \ldots, p$. Lze tedy v tomto případě dokonce předpokládat, že funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ jsou holomorfní v celém $U(x_0, R)$ (provedeme uvedenou úpravu ve všech skupinách).

Abychom se mohli stručně vyjadřovat, zavedeme dvě pojmenování, která nejsou v literatuře zcela obvyklá, ale pro naše účely budou výhodná. Je-li $\varrho \in E$, nazvu funkci

$$(x - x_0)^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$$

pseudopotenční v bodě x_0, je-li napsaná mocninná řada konvergentní v nějakém okolí bodu x_0. Součet konečného počtu funkcí tvaru

$$(x - x_0)^\varrho \log^m (x - x_0) \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$$

($\varrho \in E$, m celé, $m \geqq 0$) nazvu **pseudoregulární v bodě** x_0, jsou-li všechny mocninné řady v ní vystupující konvergentní v nějakém okolí bodu x_0 (v jednotlivých sčítancích mohou být různá ϱ, m a různé mocninné řady). Poznamenejme, že všechny tyto funkce chápeme ve smyslu § 3 této kapitoly jako funkce analytické v některém $P(x_0, \delta)$, $\delta > 0$, v němž všechny příslušné řady konvergují.

Uveďme několik jednoduchých vlastností funkcí pseudoregulárních a pseudopotenčních v bodě 0 (přenesení do libovolného bodu $x_0 \in E$ je snadné; pro stručnost vynecháváme slova „v bodě 0").

1. *Lineární kombinace* $c_1 y_1 + \ldots + c_k y_k$ [1] ($c_k \in E$) *pseudoregulárních funkcí je opět pseudoregulární funkce.*

2. *Součin dvou funkcí pseudopotenčních je funkce pseudopotenční, součin dvou funkcí pseudoregulárních je opět pseudoregulární.*

3. *Budiž y pseudopotenční funkce, ne nulová. Potom platí: Je-li z pseudopotenční, je* $\frac{z}{y}$ *pseudopotenční; je-li z pseudoregulární, je* $\frac{z}{y}$ *pseudoregulární.*

Důkaz: Je-li $z = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $y = x^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$, můžeme předpokládat, že $d_0 \neq 0$ (jinak změním σ o celé číslo). Potom zřejmě (ve smyslu § 3 této kapitoly – viz str. 80–82)

$$\frac{z}{y} = x^{\varrho - \sigma} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k}$$

a poslední podíl lze vyjádřit v $U(0, \delta)$ konvergentní mocninnou řadou. Zbytek důkazu je triviální.

4. *Derivace pseudoregulární (resp. pseudopotenční) funkce je funkce pseudoregulární (resp. pseudopotenční).*

---

[1]) Součet chápeme ve smyslu § 3 této kapitoly.

Důkaz: Derivováním člen po členu plyne (vzhledem k lokálně stejnoměrné konvergenci všech řad)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\log^k x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\varrho+n}\right) = \log^k x \sum_{n=0}^{\infty} (\varrho + n)\, c_n x^{\varrho+n-1} + k \log^{k-1} x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\sigma+n-1}\,,$$

kde pro $k = 0$ poslední člen odpadne.

5. *Primitivní funkce k funkci pseudoregulární je pseudoregulární.*

Důkaz: Pro $n + \varrho \neq -1$, $k \geqq 0$ celé najdeme opětovanou integrací per partes, že

$$x^{n+\varrho+1}\left(\frac{\log^k x}{n+\varrho+1} - \frac{k\log^{k-1}x}{(n+\varrho+1)^2} + \frac{k(k-1)\log^{k-2}x}{(n+\varrho+1)^3} + \ldots + \frac{(-1)^k k!}{(n+\varrho+1)^{k+1}}\right)$$

je primitivní funkce k $x^{n+\varrho}\log^k x$. Ježto $n + \varrho + 1 \to \infty$ pro $n \to \infty$, je k funkci

$$\sum_{\substack{n=0\\ n\neq -\varrho-1}}^{\infty} \log^k x \,.\, c_n \,.\, x^{n+\varrho}$$

primitivní funkce

$$x^{\rho}\log^k x \sum_{\substack{n=0\\ n\neq -\varrho-1}}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{n+\varrho+1} - kx^{\varrho}\log^{k-1} x \sum_{\substack{n=0\\ n\neq -\varrho-1}}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{(n+\varrho+1)^2} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k k!\, x^{\varrho} \sum_{\substack{n=0\\ n\neq -\varrho-1}}^{\infty} \frac{c_n x^{n+1}}{(n+\varrho+1)^{k+1}}\,,$$

(protože $n + \varrho + 1 \to +\infty$, konvergují tyto řady ve stejném $U(0)$ jako řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ můžete tedy derivovat člen po členu). K tomu stačí ještě popřípadě připojit člen (je-li $-\varrho - 1$ nezáporné celé číslo)

$$c_{-\varrho-1}\,\frac{\log^{k+1} x}{k+1}\,,$$

což je primitivní funkce k $c_{-\varrho-1}\,\dfrac{\log^k x}{x}$.

6. *Je-li y pseudopotenční a není-li to nulová funkce, potom*

$$\frac{y^{(m)}}{y}$$

($m \geqq 0$ *celé*) *je holomorfní* (*tedy jednoznačná*) *v jistém* $P(0, \delta)$ *a má v bodě* 0 *pól řádu nejvýše* m, *popřípadě žádnou singularitu.*

Důkaz: Nechť $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\varrho}$, $c_0 \neq 0$. Potom $y^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+\varrho-m}$ s jistými d_n, a tedy

$$\frac{y^{(m)}}{y} = \frac{1}{x^m} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n+\varrho}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\varrho}};$$

poslední podíl je vzhledem k $c_0 \neq 0$ holomorfní v jistém $P(0, \delta)$.

7. *Buď y pseudoregulární a buď dán omezený interval $I \subset \boldsymbol{R}_1$. Potom existuje kladná konstanta C, číslo δ, $0 < \delta < 1$, a celé kladné číslo m tak, že pro $x \in P(0, \delta)$ a pro libovolnou hodnotu argumentu x z intervalu I nepřesáhne absolutní hodnota příslušné hodnoty funkce y veličinu*

$$C|x|^{-m}.$$ [2]

Důkaz. Zřejmě stačí uvažovat jen y tvaru

$$x^\varrho \log^k x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

Stačí nyní uvážit, že součet řady je omezen konstantou v jistém okolí počátku, a využít odhadů pro x_ϱ a $\log x$ na str. 79.

Obraťme se nyní k naší rovnici

$$y^{(n)} + A_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + A_n(x)\, y = 0 \tag{71}$$

splňující předpoklad

($\mathfrak{P}$): *A_j jsou holomorfní v $P(x_0, R)$, $x_0 \in \boldsymbol{E}$, $0 < R \leqq +\infty$.*

Budeme říkat, že rovnice (71) je **Fuchsova typu v bodě** x_0, když všechna její řešení v $P(x_0, R)$ jsou pseudoregulární v bodě x_0.

Cílem tohoto paragrafu je

1) *Udat jednoduchou nutnou a postačující podmínku pro to, aby rovnice* (71) *byla Fuchsova typu v bodě x_0.*

2) *V případě rovnice Fuchsova typu v bodě x_0 udat metodu k nalezení fundamentálního systému řešení v $P(x_0, R)$.*

Z věty 24 víme nyní, že existuje fundamentální systém řešení $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rovnice (71) v $P(x_0, R)$, který se rozpadne na r ($r \geqq 1$) skupin, přičemž prvá skupina má tvar (70), kde funkce $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, p$ jsou holomorfní v $P(x_0, R)$. Pro $r > 1$ mají

---

[2]) Zřejmě můžeme δ zmenšit, C a m zvětšit podle potřeby.

ostatní skupiny podobný tvar. Celkem zde máme n funkcí $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ holomorfních v $P(x_0, R)$. Pro stručnost budeme takovému fundamentálnímu systému říkat **„kanonický systém“** (není jednoznačně určen).

Lemma 1. *Tyto dvě podmínky jsou ekvivalentní:*

1) *Rovnice je Fuchsova typu v bodě $x_0 \in E$.*

2) *Žádná z funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ v kanonickém systému nemá v bodě x_0 podstatnou singularitu.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti buď $x_0 = 0$. Platí-li 2), jsou všechny funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tvořící kanonický systém pseudoregulární (vynechávám slova „v bodě nula“) a totéž podle vlastnosti 1) pseudoregulárních funkcí platí i o jejich libovolné lineární kombinaci, a tedy i o každém řešení naší rovnice.

Nechť platí 1). Bez újmy na obecnosti se omezíme na první skupinu v (70). Funkce y_1 je pseudoregulární, a tedy pseudopotenční. Odtud plyne, že funkce φ_1 má v počátku nejvýše pól. Nechť již je dokázáno, že pro jisté k, $1 < k \leqq p$, mají všechny funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k-1}$ v počátku nejvýše pól. Je

$$\varphi_k(x) = y_k x^{-\varrho} - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{\xi}{k-j} \varphi_j(x) . \tag{72}$$

Předpokládáme, že platí 1), tj. rovnice (71) je Fuchsova typu. Je tedy y_k pseudoregulární a podle (72) je také φ_k pseudoregulární (ježto $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ mají v počátku nejvýše pól, lze pro vhodné celé s psát $\varphi_j(x) = x^{-s} \psi_j(x)$, kde ψ_j jsou holomorfní v $U(0, R)$). Podle vlastnosti 7) pseudoregulárních funkcí je tedy v jistém $P(0, \delta)$

$$|\varphi_k(x)| < C|x|^{-m} , \tag{73}$$

kde $C > 0$ a přirozené m jsou konstantní (podle vlastnosti 7), máme tento odhad pouze pro pevný interval, v němž bereme hodnotu argumentu x; protože $\varphi_k(x)$ je jednoznačná, stačí uvažovat interval $\langle 0, 2\pi \rangle$). Ze vztahu (73) plyne, že funkce $x^m \varphi_k(x)$ má v počátku jen odstranitelnou singularitu; lze ji tedy definovat tak, aby byla v $U(0, \delta)$ holomorfní, a tedy $\varphi_k(x)$ má v počátku nejvýše pól násobnosti m (viz Černý, věta 177, str. 314 a tvrzení (68) na str. 317). Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka 1. Nebylo toto lemma samozřejmé? Nikoliv: na první pohled se nezdá být vyloučeno, že by se podstatné singularity funkcí φ_j v (70) mohly „vyrušit“ tak, že by y_k bylo pseudoregulární.

Hlavním cílem tohoto paragrafu je tato **věta Fuchsova**:

Věta 25. *Nechť funkce $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou holomorfní v $P(x_0, R)$ ($x_0 \in E$, $0 < R \leqq \leqq +\infty$). Potom rovnice (71) je Fuchsova typu v bodě x_0 tehdy a jen tehdy, když je splněna tato* **Fuchsova podmínka**:

funkce A_j má v bodě x_0 nejvýše pól řádu j, $j = 1, 2, \ldots, n$ (tj. buďto pól řádu $\leqq j$ nebo ji lze dodefinovat na funkci holomorfní v $U(x_0, R)$).

Tuto větu budeme dokazovat indukcí podle řádu n rovnice (71). Abychom mohli provést indukční krok, potřebujeme nějak převést danou rovnici n-tého řádu na rovnici řádu $n - 1$. Z teorie diferenciálních rovnic v reálném oboru je snad známo, že k cíli vede substituce $y = y_1 z$, kde y_1 je jedno řešení dané rovnice. Potřebujeme tedy nalézt vhodně funkci y_1. Bude asi výhodné zvolit y_1 co nejjednodušší, tj. pokusíme se dokázat existenci alespoň jednoho pseudopotenčního řešení, tj. ukážeme:

Lemma 2. *Je-li rovnice (71), kde $A_1, \ldots, A_n$ splňují předpoklad ($\mathfrak{P}$), Fuchsova typu v bodě x_0, existuje alespoň jedno nenulové pseudopotenční řešení.*

Důkaz. Zvolme podle věty 24 kanonický systém a nechť (70) je jeho prvá skupina. Podle lemmatu 1 má funkce φ_1 v bodě x_0 nejvýše pól a z (70) je vidět, že y_1 je pseudopotenční.

Lemma 3. *Splňuje-li rovnice (71), kde $A_1, \ldots, A_n$ splňují předpoklad ($\mathfrak{P}$), Fuchsovu podmínku v bodě x_0, existuje alespoň jedno nenulové pseudopotenční řešení.*

Důkaz. Nechť rovnice (71), tj. rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n-k} y^{(k)} = 0$$

(klademe $A_0 \equiv 1$) splňuje Fuchsovu podmínku v bodě 0. Jsou tedy funkce A_{n-k} holomorfní v $P(0, R)$ a mají v bodě 0 pól řádu nejvýše $n - k$. Můžeme tedy psát

$$x^n A_{n-k} = x^k (b_{k0} + b_{k1} x + b_{k2} x^2 + \ldots),$$

kde řada konverguje v $U(0, R)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Vynásobíme-li rovnici (71) x^n (to nevadí, neboť bod 0 nepatří do $P(0, R)$), lze psát

$$x^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{(k)} (b_{k0} + b_{k1} x + \ldots) = 0. \tag{74}$$

Hledejme řešení pseudopotenční, tj. tvaru[3])

$$y = x^\varrho (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots), \quad a_0 \neq 0. \tag{75}$$

K tomu, aby (75) bylo řešením rovnice (74) aspoň v dostatečně malém $P(0, \delta)$, je nutné a stačí, aby platilo:

1. Mocninná řada v (75) je konvergentní v $U(0, \delta)$.

---

[3]) Sledujte pozorně důkaz; z něho vyplyne i početní postup, vhodný pro nalezení pseudopotenčních řešení rovnice (74).

2. V rovnici

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(\varrho + m)(\varrho + m - 1)\dots(\varrho + m - n + 1)\, x^{\varrho+m} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\varrho + j)(\varrho + j - 1)\dots(\varrho + j - k + 1)\, x^{\varrho+j} \sum_{l=0}^{\infty} b_{kl}x^l = 0$$

jsou vlevo po formálním vynásobení koeficienty při všech mocninách x rovny nule (dělíme-li x^ϱ, dostaneme mocninnou řadu, a pro mocninné řady příslušnou větu známe — viz věta 10 neb důsledek věty 4). Tato podmínka se skládá z nekonečně mnoha rovnic

$$(76)\qquad a_m\{(\varrho + m)(\varrho + m - 1)\dots(\varrho + m - n + 1) +$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}(\varrho + m)(\varrho + m - 1)\dots(\varrho + m - k + 1)\, b_{k0}\} +$$
$$+\sum_{j=0}^{m-1} a_j \sum_{k=0}^{n-1}(\varrho + j)(\varrho + j - 1)\dots(\varrho + j - k + 1)\, b_{k,m-j} = 0$$

($m = 0, 1, 2, \dots$). Pro $m = 0$ je $\sum_{k=0}^{m-1}$ prázdný součet a znamená nulu; pro $k = 0$ znamená $(\varrho + j)(\varrho + j - 1)\dots(\varrho + j - k - 1)$ jedničku (prázdný součin). Pro zkrácení zaveďme tzv. **charakteristický polynom** naší rovnice vztahem

$$F(\zeta) = \zeta(\zeta - 1)\dots(\zeta - n + 1) + \sum_{k=0}^{n-1}\zeta(\zeta - 1)\dots(\zeta - k + 1)\, b_{k0}\,.$$

Zřejmě je to polynom n-tého stupně; koeficient při ζ^n je 1. Rovnici $F(\zeta) = 0$ budeme říkat charakteristická rovnice diferenciální rovnice (71). Systém rovnic (76) lze psát ve tvaru ($a_0 \neq 0$!)

$$(77)\qquad F(\varrho) = 0\,,$$
$$a_m F(\varrho + m) = -\sum_{j=0}^{m-1} a_j \sum_{k=0}^{n-1}(\varrho + j)(\varrho + j - 1)\dots(\varrho + j - k + 1)\, b_{k,m-j}\,,$$
$$m = 1, 2, \dots$$

Poznamenejme, že polynom $F(\zeta)$ získáme nejsnadněji takto: do levé strany v (74) dosadíme $y = x^\zeta$, načež koeficient při nejnižší mocnině x je právě $F(\zeta)$.

Zatím máme tento výsledek: *Funkce* (75), *kde je* $a_0 \neq 0$, *je v* $P(0, \delta) \subset P(0, R)$ *řešením rovnice* (74) *právě tehdy, když:*

I. *Řada* $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ *je konvergentní v* $U(0, \delta)$.

II. *Číslo* ϱ *a koeficienty* a_m *splňují soustavu rovnic* (77).

Ukážeme nejprve, že podmínku I lze vynechat. *Nechť ϱ a koeficienty a_m splňují rovnice* (77). *Potom $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ konverguje v jistém $U(0, \delta)$.*

Důkaz. ϱ je kořenem rovnice $F(\varrho) = 0$. Ježto F má tvar

$$F(\zeta) = \zeta^n + c_1\zeta^{n-1} + \ldots + c_n,$$

existuje jistě celé $m_0 > 1$ tak, že je

$$|F(\varrho + m)| > \tfrac{1}{2}m^n \quad \text{pro} \quad m \geqq m_0. \tag{78}$$

Pro $k = 0, 1, \ldots, n - 1$; $j = 0, 1, \ldots, m - 1$ $(m \geqq 1)$ je

$$|(\varrho + j)(\varrho + j - 1) \ldots (\varrho + j - k + 1)| < B(j + 1)^k \leqq Bm^{n-1}, \tag{79}$$

kde $B > 0$ závisí jen na ϱ, n (nikoliv na j, k, m). Z konvergence řad

$$x^{n-k}A_{n-k} = \sum_{l=0}^{\infty} b_{kl}x^l$$

v $U(0, R)$ plyne podle věty 9 nerovnost

$$|b_{kl}| \leqq \frac{B'}{r^l}, \quad l = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{80}$$

kde můžeme volit $r = \frac{1}{2}R$ pro $R < +\infty$, $r = 1$ pro $R = +\infty$; přitom $B' > 0$ závisí na r, ale ne na k, l. Pro $m \geqq m_0$ je podle (77)–(80)

$$|a_m| \leqq \sum_{j=0}^{m-1} |a_j|\, nBm^{n-1} \frac{B'}{r^{m-j}} \frac{2}{m^n},$$

tedy

$$r^m|a_m| \leqq C \sum_{j=0}^{m-1} r^j|a_j| \quad (m \geqq m_0) \tag{81}$$

s jistou konečnou konstantou $C > 0$. Chceme nyní na základě (81) majorizovat řadu $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ pomocí geometrické řady.

Existuje nejprve $D > 0$ tak, že pro $j = 0, 1, 2, \ldots, m_0 - 1$ je

$$r^j|a_j| \leqq D.$$

Je-li $E > 1$, je tím spíše pro tato j

$$r^j|a_j| \leqq DE^j. \tag{82}$$

Tvrdím nyní: *zvolím-li E dosti velké* (*ukážeme, že stačí $E > C + 1$*), *potom* (82) *platí pro všechna $j \geqq 0$.*

Důkaz provedeme indukcí: nechť pro jisté $m \geqq m_0$ platí, že (82) je splněno pro $j = 0, 1, \ldots, m - 1$ (to je jistě pravda pro $m = m_0$). Podle (81) a (82) tedy je

$$r^m|a_m| \leqq C \sum_{j=0}^{m-1} DE^j = CD \frac{E^m - 1}{E - 1} \leqq DE^m,$$

pokud $E > C + 1$. Platí tedy (82) pro všechna $j \geqq 0$, a tedy řada $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ má majorantní řadu

$$\sum_{m=0}^{\infty} D \left(\frac{E|x|}{r}\right)^m,$$

která konverguje pro $|x| < \frac{r}{E}$. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Nyní ihned dokončíme důkaz našeho lemmatu. Rovnice $F(\zeta) = 0$ má alespoň jeden kořen a nejvýše n kořenů. Jistě tedy existuje kořen ϱ takový, že $F(\varrho + m) \neq 0$ pro $m = 1, 2, \ldots$ Zvolme libovolně $a_0 \neq 0$ (třeba $a_0 = 1$). Potom rovnice (77) dovolují postupně právě jedním způsobem určit hodnoty $a_1, a_2, \ldots$; výše jsme ukázali, že příslušná řada konverguje v jistém $U(0, \delta)$. Ukážeme ještě, že *tato řada konverguje v celém* $U(0, R)$.

Skutečně: každé řešení rovnice (71) je neomezeně pokračovatelné holomorfními elementy v $P(0, R)$ (věta 21). Platí to tedy o nalezeném řešení

$$y = x^{\varrho} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

a tedy i o funkci

$$\psi(x) = x^{-\varrho} y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m. \tag{83}$$

To je ovšem (věta 22) funkce holomorfní v $P(0, R)$ a zřejmě i v $U(0, R)$. Je tedy

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$$

v $U(0, R)$, (83) platí v $P(0, \delta)$. Je tedy nutně (důsledek věty 4) $a_m = b_m$ $m = 0, 1, \ldots,$ tj. řada (83) konverguje v $U(0, R)$, a tedy (75) je řešením rovnice (74) v $P(0, R)$.

Všimněme si, že jsme současně dokázali:

Lemma 4. *Nechť A_j, $j = 1, \ldots, n$ jsou holomorfní v $P(0, R)$ a splňují v počátku Fuchsovu podmínku. Všechna nenulová pseudopotenční řešení rovnice (74) v $P(0, R)$ dostaneme ve tvaru*

$$y(x) = x^{\varrho} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

kde ϱ, a_0, a_1, ... je kterékoliv řešení rovnice (77), $a_0 \neq 0$. Řada $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ je potom konvergentní pro $|x| < R$ a každé nenulové pseudopotenční řešení rovnice (74) v nějakém $P(0, \delta)$ $(0 < \delta < R)$ je větví (v $P(0, \delta)$) některého z popsaných řešení.

Přejděme k důkazu věty 25. Jak jsme již uvedli, budeme postupovat indukcí.

Buď nejprve $n = 1$, tj. uvažujeme rovnici

$$y' + A_1(x)\, y = 0\,, \tag{84}$$

kde funkce $A_1(x)$ je holomorfní v $P(0, R)$ (bez újmy na obecnosti předpokládáme $x_0 = 0$). Je-li rovnice (84) Fuchsova typu v počátku, je každé její řešení v počátku pseudoregulární. Podle lemmatu 2 však existuje nenulové pseudopotenční řešení y_1 (tj. není identicky rovno nule) a každé jiné řešení je jeho konstantním násobkem, tj. všechna řešení rovnice (84) jsou pseudopotenční. Z (84) tedy plyne

$$A_1(x) = -\frac{y'}{y}$$

v jistém okolí počátku (zřejmě dokonce v $P(0, R)$), a tedy podle vlastnosti 6 má funkce A_1 v počátku nejvýše pól řádu 1, tj. (84) splňuje Fuchsovu podmínku v počátku. Nechť naopak (84) splňuje Fuchsovu podmínku v počátku. Podle lemmatu 3 existuje netriviální pseudopotenční řešení y_1; každé jiné řešení je tedy jeho konstantním násobkem, tj. je pseudopotenční a tím spíše pseudoregulární.

Přistupme nyní k indukci. Nechť věta 25 „platí pro všechny rovnice"

$$y^{(n-1)} + B_1(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + B_{n-1}(x)\, y = 0\,, \tag{85}$$

kde koeficienty jsou funkce holomorfní v $P(0, R)$, tj. nechť tato rovnice je Fuchsova typu v počátku, právě když splňuje Fuchsovu podmínku v počátku. Uvažujme rovnici

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(x)\, y^{(n-k)} = 0\,, \quad \text{kde} \quad A_0(x) = 1 \tag{86}$$

a kde $A_k(x)$, $k = 0, \ldots, n$, splňují předpoklad ($\mathfrak{P}$). Splňuje-li rovnice (86) Fuchsovu podmínku, nebo je-li Fuchsova typu (vše míněno v počátku – pro zkrácení použijeme tohoto způsobu vyjadřování), existuje (podle lemmatu 2, resp. lemmatu 3) její nenulové pseudopotenční řešení y_1. Položme

$$y = y_1 z\,.[4] \tag{87}$$

[4]) Operace s analytickými funkcemi chápeme ve smyslu § 3 této kapitoly. Podle věty 24 jsou totiž všechna řešení polynomy v x^ϱ, $\log x$ a funkcích holomorfních v $P(0, R)$.

Je zřejmé, že y vyhovuje v jistém $P(0, \delta)$, $\delta > 0$ rovnici (86), právě když funkce z určená vztahem (87) vyhovuje rovnici

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} z^{(j)} y_1^{(n-j-k)} = 0\,, \tag{88}$$

tj. rovnici

$$\sum_{j=0}^{n} b_{n-j} z^{(j)} = 0\,, \tag{89}$$

kde

$$b_{n-j} = \sum_{k=0}^{n-j} A_k \binom{n-k}{j} y_1^{(n-j-k)}\,. \tag{90}$$

Pro $j = 0$ vyjde z (90) $b_n = \sum_{k=0}^{n} A_k y_1^{(n-k)} = 0$, neboť y_1 je řešením rovnice (86); pro $j = n$ máme

$$b_0 = A_0 y_1 = y_1\,.$$

Položíme-li $\frac{dz}{dx} = v$, plyne z (89) rovnost

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_{n-1-j}}{y_1} v^{(j)} = 0\,.\ ^{5}) \tag{91}$$

Nyní ukážeme, *že rovnice* (91) *je Fuchsova typu, právě když je rovnice* (86) *Fuchsova typu.* Skutečně: Je-li (86) Fuchsova typu, existuje fundamentální systém řešení složený z pseudoregulárních funkcí a zřejmě ho můžeme zvolit tak, že obsahuje naši funkci y_1. Nechť tedy tento fundamentální systém je tvořen funkcemi

$$y_1, y_2, \ldots, y_n\,.$$

Nyní je zřejmé, že rovnice (91) má řešení

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \ldots, \left(\frac{y_n}{y_1}\right)', \tag{92}$$

která jsou podle vlastností 3 a 4 pseudoregulárních funkcí (y_1 je pseudopotenční) opět pseudoregulární. Tvrdím, že tyto funkce jsou lineárně nezávislé v $P(0, R)$. Je-li totiž

$$c_2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' + \ldots + c_n \left(\frac{y_n}{y_1}\right)' = 0$$

[5]) Z (90) a z vlastnosti 6 pseudopotenčních funkcí plyne, že rovnice (91) splňuje předpoklad ($\mathfrak{P}$).

v $P(0, R)$, je také

$$c_2 \frac{y_2}{y_1} + \ldots + c_n \frac{y_n}{y_1} = -c_1$$

s vhodnou konstantou c_1, a tedy i

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$$

v $P(0, R)$. Odtud plyne $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, neboť $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém. Rovnice (91) má tedy fundamentální systém (92) složený z pseudoregulárních funkcí, tj. je Fuchsova typu.

Nechť rovnice (91) je Fuchsova typu. Existuje tedy její fundamentální systém složený z pseudoregulárních funkcí:

$$v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \, .$$

Rovnice (89) má tedy řešení

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, 1 \, ,$$

kde z_j je některá funkce primitivní k v_j, $j = 1, 2, \ldots, n - 1$. Podle vlastnosti 5 jsou to funkce pseudoregulární. Odtud máme ihned, že funkce

$$y_1 z_1, y_1 z_2, \ldots, y_1 z_{n-1}, y_1$$

jsou řešení rovnice (86) a že jsou to funkce pseudoregulární. Stačí ještě ukázat, že tvoří fundamentální systém. Je-li

$$c_1 y_1 z_1 + c_2 y_1 z_2 + \ldots + c_{n-1} y_1 z_{n-1} + c_n y_1 = 0 \, ,$$

je také

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_{n-1} z_{n-1} + c_n = 0 \, , \tag{93}$$

a tedy (derivujeme)

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_{n-1} v_{n-1} = 0 \, .$$

Odtud plyne $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$ a (93) dává i $c_n = 0$. Má tedy rovnice (86) fundamentální systém složený z funkcí pseudoregulárních, tj. je Fuchsova typu.

Konečně ukážeme, že rovnice (86) splňuje Fuchsovu podmínku, právě když rovnice (91) splňuje Fuchsovu podmínku (stále míníme vše v počátku). Z (90) plyne: koeficient $\dfrac{b_{n-1-j}}{y_1} = B_{n-1-j}$ u j-té derivace v rovnici (91) je roven

$$\sum_{k=0}^{n-j-1} A_k \binom{n-k}{j+1} \frac{y_1^{(n-j-1-k)}}{y_1} \, . \tag{94}$$

Odtud je patrné: mají-li funkce A_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, v počátku pól násobnosti nejvýše k, má B_{n-1-j} v počátku pól násobnosti nejvýše $n - 1 - j$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. (Použijeme vlastnosti 6 pseudoregulárních funkcí.)

Z (94) plyne:

$$A_{n-j-1} = B_{n-j-1} - \sum_{k=0}^{n-j-2} A_k \binom{n-k}{j+1} \frac{y_1^{(n-j-1-k)}}{y_1}, \tag{95}$$

$j = 0, 1, \ldots, n - 1$; napíšeme ještě vztah $\sum_{k=0}^{n} A_k y_1^{(n-k)} = 0$ ve tvaru

$$A_n = - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \frac{y_1^{(n-k)}}{y_1}. \tag{96}$$

Nechť nyní funkce B_{n-j-1} mají v počátku nejvýše pól řádu maximálně $n - j - 1$, $j = 0, \ldots, n - 1$. Z (95) dostaneme postupně pro $j = n - 1, n - 2, \ldots, 1, 0$, že funkce A_{n-j-1} mají také v počátku nejvýše pól řádu maximálně $n - j - 1$, a z (96) dostaneme analogické tvrzení pro A_n (stále využíváme vlastnosti 6 pseudoregulárních funkcí).

Tím je zřejmě proveden indukční krok, neboť jsme ukázali, že rovnice (86) splňuje Fuchsovu podmínku (resp. je Fuchsova typu), právě když rovnice (91) splňuje Fuchsovu podmínku (resp. je Fuchsova typu), a podle indukčního předpokladu splňuje rovnice (91) Fuchsovu podmínku, právě když je Fuchsova typu.

Z lemmatu 4 plyne, že řešení soustavy rovnic (77) dává všechna nenulová pseudopotenční řešení rovnice (71), volíme-li $a_0 \neq 0$. Zvolíme-li $a_0 = 1$ (tím neztratíme přehled o všech řešeních systému (77) s $a_0 \neq 0$), dostaneme řešení

$$y = x^\varrho(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots);$$

budeme říkat, že y **patří k exponentu** ϱ. Dokážeme:

Lemma 5. *Nechť $y_1, y_2, \ldots, y_k$ jsou pseudopotenční funkce patřící k navzájem různým exponentům $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$:*

$$y_j = x^{\varrho_j}(1 + a_{1j} x + a_{2j} x^2 + \ldots),$$

$j = 1, 2, \ldots, k$, kde řady konvergují v $P(0, R)$. Potom funkce $y_1, y_2, \ldots, y_k$ jsou lineárně nezávislé v $P(0, R)$.

D ů k a z: Sestrojme determinant

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_k \\ y_1', & y_2', & \ldots, & y_k' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(k-1)}, & y_2^{(k-1)}, & \ldots, & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}.$$

Kdyby bylo $c_1 y_1 + \ldots + c_k y_k = 0$ ($c_j \in E$, alespoň jedno $c_j \neq 0$), bylo by

$$c_1 y_1^{(p)} + \ldots + c_k y_k^{(p)} = 0\,, \quad p = 0, 1, \ldots, k-1\,,$$

pro všechna $x \in P(0, R)$ a odtud $W(x) = 0$ pro všechna $x \in P(0, R)$. Derivováním dostaneme

$$y_j^{(p)} = x^{\varrho_j - p}(\varrho_j(\varrho_j - 1) \ldots (\varrho_j - p + 1) + o(1))\,,$$

kde $o(1)$ označuje funkci (jistou mocninnou řadu bez prostého členu), která má limitu nula pro $x \to 0$. Pro jistý exponent A tedy je

$$W(x) = x^A . \begin{vmatrix} 1 + o(1), & \ldots, & 1 + o(1) \\ \varrho_1 + o(1), & \ldots, & \varrho_k + o(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varrho_1(\varrho_1 - 1) \ldots (\varrho_1 - k + 2) + o(1), & \ldots, & \varrho_k(\varrho_k - 1) \ldots (\varrho_k - k + 2) + o(1) \end{vmatrix} .$$

Pro $x \to 0$ má determinant za limitu jistý determinant, který snadno převedeme (vhodným postupným přičítáním řádků) na Vandermondův determinant, který se nerovná nule, neboť $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ jsou navzájem různá. V jistém prstenci $0 < |x| < \delta$ je tedy $W(x) \neq 0$. Důkaz je hotov.

Poznámka 1. Rozeberme podrobněji systém rovnic (77). Při důkazu lemmatu 3 jsme viděli, že ke zvolenému kořeni ϱ rovnice $F(\varrho) = 0$ a k zvolenému $a_0 \neq 0$ můžeme z rovnic (77) nalézt hodnoty $a_1, a_2, \ldots$ jistě v tom případě, když $F(\varrho + m) \neq 0$ pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ Jestliže tedy charakteristická rovnice $F(\zeta) = 0$ má n jednoduchých kořenů, z nichž žádné dva se neliší o celé číslo, dostaneme pseudopotenční řešení

$$y_j = x^{\varrho_j}(1 + a_{1j}x + a_{2j}x^2 + \ldots) \tag{97}$$

($j = 1, 2, \ldots, n$), jež podle lemmatu 5 tvoří fundamentální systém. Je dále zřejmé, že k vícenásobnému kořeni rovnice $F(\zeta) = 0$ nalezneme nejvýše jedno pseudopotenční řešení, které k němu přísluší.

Vyšetřeme tedy případ skupiny kořenů charakteristické rovnice $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ ($p \geqq 2$), pro niž platí

$$\varrho_2 = \varrho_1 - k_1\,, \quad \varrho_3 = \varrho_2 - k_2, \ldots, \varrho_p = \varrho_{p-1} - k_p \quad (p \geqq 2)\,,$$

kde $k_1, \ldots, k_p$ jsou celá kladná čísla. Předpokládejme ještě, že skupina je úplná v tom smyslu, že neexistuje již žádný další kořen rovnice $F(\zeta) = 0$ tvaru $\varrho_1 + m$ s celým m (každý kořen pochopitelně počítáme jen jednou, i když je vícenásobný). Ptáme se nyní po existenci řešení $y_1, y_2, \dots, y_p$ tvaru (97) pro $j = 1, 2, \dots, p$. Bez újmy na obecnosti volme v rovnicích (77) vždy $a_0 = 1$.

Rovnice (77) pro $\varrho = \varrho_1$ určují jednoznačně y_1, neboť $F(\varrho_1 + m) \neq 0$ pro $m = 1, 2, \dots$ podle volby ϱ_1. Dosaďme teď do rovnic (77) $\varrho = \varrho_2$. Ježto $F(\varrho_2 + m) \neq 0$ pro $1 \leqq m \leqq k_1 - 1$, určuje prvých $k_1 - 1$ rovnic jednoznačně $a_0 = 1, a_1, a_2, \dots \dots, a_{k_1-1}$. Další rovnice má vlevo $a_{k_1} F(\varrho_2 + k_1) = a_{k_1} F(\varrho_1) = 0$. Zde jsou možné dva případy. Je-li pravá strana od nuly různá, neexistuje y_2. Je-li však pravá strana rovna nule, bude tato rovnice splněna ať volím a_{k_1} jakékoliv, načež další rovnice (pro $m > k_1$) již určují a_m jednoznačně.[6] V tomto případě existuje řešení y_2; zároveň je vidět, že není jednoznačně určeno. Budiž y_2 jedno určité řešení patřící k ϱ_2; jak vypadají ostatní? Máme-li další řešení

$$\tilde{y}_2 = x^{\varrho_2}(1 + \tilde{a}_{12}x + \tilde{a}_{22}x^2 + \dots) \tag{98}$$

patřící k ϱ_2, $y_2 \neq \tilde{y}_2$, je nutně $a_{j2} = \tilde{a}_{j2}$ pro $0 \leqq j < k_1$, ale $\tilde{a}_{k_1 2} = a_{k_1 2} + c$, kde $c \neq 0$. Je tedy $\tilde{y}_2 - y_2$ pseudopotenční řešení, začínající členem

$$cx^{\varrho_2 + k_1} = cx^{\varrho_1},$$

tj. je to nutně cy_1, tedy $\tilde{y}_2 = y_2 + cy_1$, a ovšem i naopak, funkce $y_2 + cy_1$ (pro libovolné c, i pro $c = 0$) je řešením naší rovnice tvaru (98). Tedy: Existuje-li řešení y_2, patřící k exponentu ϱ_2 (což poznáme podle řešitelnosti k_1-té rovnice (77) pro $\varrho = \varrho_2$), jsou všechna řešení, patřící k tomuto exponentu, dána vzorcem $y_2 + cy_1$.

Máme-li již zjištěno, zda existuje y_2, a je-li $p > 2$, můžeme se ptát, zda existuje řešení y_3, příslušné k ϱ_3, a jak z jednoho takového řešení (když existuje) určíme všechna taková řešení. Dosaďme do (77) $\varrho = \varrho_3$, $a_0 = 1$. Hodnoty koeficientů $a_0, a_1, \dots \dots, a_{k_2-1}$ jsou určeny jednoznačně. Je však $a_{k_2} F(\varrho_3 + k_2) = a_{k_2} F(\varrho_2) = 0$, tedy buďto rovnice pro a_{k_2} není řešitelná, y_3 tedy neexistuje, nebo mohu volit a_{k_2} libovolně; potom $a_{k_2+1}, \dots, a_{k_2+k_1-1}$ jsou určena jednoznačně, $a_{k_2+k_1} F(\varrho_3 + k_2 + k_1) = a_{k_2+k_1} F(\varrho_1) = 0$. Pravá strana $(k_2 + k_1)$-té rovnice závisí ovšem na volbě a_{k_2}: jestliže bylo a_{k_2} zvoleno tak, aby pravá strana byla rovna nule (což nemusí být možné), potom $a_{k_2+k_1}$ lze volit libovolně a další a_m $(m > k_2 + k_1)$ jsou již určena jednoznačně. Čtenář si sám může (jako cvičení) rozvážit toto: Jestliže y_3 (patřící k ϱ_3) existuje, ale neexistuje řešení y_2, patřící k ϱ_2, potom všechna řešení patřící k ϱ_3 jsou dána výrazem $y_3 + c_1y_1$ $(c_1 \in E)$. Jestliže existuje řešení y_3, patřící k ϱ_3, i řešení y_2, patřící k ϱ_2, potom všechna řešení, patřící k ϱ_3, jsou dána výrazem $y_3 + c_2y_2 + c_1y_1$ $(c_1, c_2 \in E)$. Obdobně dále pro $\varrho_4, \dots, \varrho_p$. Nebudeme to však potřebovat; půjde nám (v příští kapitole) o rovnice druhého řádu, takže vystačíme s případem $p = 2$.

Poznámka 2. Píšeme-li naši rovnici ve tvaru (86), kde A_j jsou holomorfní v $P(0, R)$ a splňují Fuchsovu podmínku v počátku, umožňuje nám lemma 3 a postup důkazu

---

[6]) Skutečnost, že nastane prvý nebo druhý případ, je nezávislá na volbě (nenulového) a_0. Hodnoty $a_1, a_2, \dots, a_{k_1-1}$ se pouze násobí stejným nenulovým činitelem.

věty 25 nalézt fundamentální systém: Podle lemmatu 3 najdeme nenulové pseudopotenční řešení y_1 a pomocí rovnic

$$y = y_1 z\,, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = v$$

redukujeme řešení naší rovnice na řešení rovnice (91) řádu $n - 1$, která rovněž vyhovuje Fuchsově podmínce (obecně může jít o menší prstenec, kde jsou koeficienty této rovnice holomorfní – y_1 je ve jmenovateli). Tak můžeme postupovat dále, až najdeme fundamentální systém rovnice (86) v jistém prstenci $P(0, \delta)$, $\delta > 0$. Rozšíření na $P(0, R)$ nedělá obvykle potíže. Nevýhoda je tato: U většiny důležitých rovnic jsou A_j poměrně jednoduchá, naproti tomu koeficienty rovnice (91) obsahují funkci y_1 a její derivace a ty už bývají složité (a navíc musíme ještě vytvářet zpětně řešení původní rovnice pomocí primitivních funkcí). Dosti výhodná je tato metoda pro $n = 2$, rovnice pro v je potom 1. řádu a lze ji obvykle snadno řešit.

Poznámka 3. Další způsob nám dává věta 24 v kombinaci s lemmatem 3. Pro jednoduchost provedeme výklad pro rovnici 2. řádu (podrobně ji ukážeme na příkladu Gaussovy rovnice v následující kapitole). Nechť rovnice

$$y'' + A_1 y' + A_2 y = 0 \tag{99}$$

(splňující Fuchsovu podmínku v počátku, A_1, A_2 holomorfní v jistém $P(0, R)$) nemá fundamentální systém složený ze dvou pseudopotenčních funkcí (charakteristická rovnice tedy má nutně kořeny, které se liší o celé číslo).

Z věty 24 tedy dostaneme, že existuje fundamentální systém řešení této rovnice tvaru

$$\begin{aligned} y_1 &= x^\varrho \varphi_1(x)\,, \\ y_2 &= x^\varrho(\log x \,.\, \varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = y_1 \log x + x^\varrho \varphi_2(x)\,, \end{aligned}$$

kde $\varphi_1(x)$ je holomorfní v okolí počátku, $\varphi_1(0) \neq 0$, φ_2 má v počátku nejvýše pól (druhé řešení jsme pro jednoduchost násobili $2\pi i$ – nebude nám to vadit). y_1 najdeme podle lemmatu 3 jako pseudopotenční řešení příslušné kořenu ϱ charakteristické rovnice (ze dvou kořenů $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_2 = \varrho_1 - m$, $m \geqq 0$ celé, volíme $\varrho = \varrho_1$; je-li $m > 0$, nemůže řešení příslušné $\varrho = \varrho_2$ v právě zkoumaném případě existovat). Dosaďme y_2 do naší rovnice. Vychází

$$y_1'' \log x + 2y_1' \frac{1}{x} - y_1 \frac{1}{x^2} + A_1 y_1' \log x + A_1 y_1 \frac{1}{x} +$$

$$+ A_2 y_1 \log x + (x^\varrho \varphi_2(x))'' + A_1(x^\varrho \varphi_2(x))' + A_2 x^\varrho \varphi_2(x) = 0\,.$$

Ježto y_1 je řešení, odpadnou členy s $\log x$, takže levá strana má tvar $x^\varrho\, \Psi(x)$, kde Ψ

je Laurentova řada, v níž vystupují také dosud blíže neurčené koeficienty b_n Laurentovy řady

$$\varphi_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n x^n .$$

Snažíme se nalézt b_n tak, aby bylo $\Psi(x) \equiv 0$ a aby všechna b_n se záporným n byla až na konečný počet nulová. Existenci takových b_n nám ovšem zaručuje věta 24.

Příklad. Snadno zjistíme, že u rovnice $x^3y''' + x^2y' = 0$ jsou kořeny charakteristické rovnice $\varrho_1 = 2$, $\varrho_2 = 1$, $\varrho_3 = 0$ a že existuje y_1, y_3 a neexistuje y_2. Najděte metodou poznámky 3 další řešení, lineárně nezávislé na y_1, y_3.

Rozšíříme ještě pojem funkce pseudopotenční, resp. pseudoregulární na bod ∞ takto: Řekneme, že funkce f je **pseudopotenční** resp. **pseudoregulární v bodě** ∞, je-li funkce $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ pseudopotenční, resp. pseudoregulární v bodě 0. Srovnáme-li tento pojem s definicí funkce holomorfní v bodě ∞, vidíme, že funkce f je holomorfní v bodě ∞, právě když je pro vhodné kladné R rozvinutelná v oboru $R < |x| < +\infty$ v řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-k}$; u funkcí pseudopotenčních přistupuje činitel tvaru $\left(\frac{1}{x}\right)^\varrho = x^\sigma$ $(\sigma = -\varrho)$, funkce pseudoregulární je pak vyjádřitelná v oboru tohoto tvaru jako lineární kombinace funkcí pseudopotenčních, kde ještě přistupují faktory tvaru $\left(\log \frac{1}{x}\right)^n = (-1)^n \log^n x$ (n nezáporné celé). Podstatný rozdíl oproti bodu 0 je tedy pouze v té řadě, která místo podle mocnin x postupuje podle mocnin $\frac{1}{x}$.

Analogii k lemmatu 1 v § 4 dává:

Lemma 6. *Funkce f je pseudopotenční, resp. pseudoregulární v bodě $x_0 \in \boldsymbol{S}$, právě když funkce*

$$g(t) = f\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$$

$(\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta \neq 0)$ *je pseudopotenční, resp. pseudoregulární v bodě $t_0 \in \boldsymbol{S}$, kde*

$$x_0 = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta} .$$

Důkaz. Nechť $x_0, t_0 \in \boldsymbol{E}$. Vzhledem k lemmatu 1 v § 4 a vlastnostem funkcí pseudopotenčních a pseudoregulárních stačí uvažovat členy $(x - x_0)^\varrho$, $\log (x - x_0)$. V jistém okolí bodu t_0 lze psát

$$x - x_0 = \alpha_1(t - t_0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\alpha_1} (t - t_0)^{k-1} = \alpha_1(t - t_0)\left(1 + U(t)\right),$$

kde $\alpha_1 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0} = \frac{\Delta}{(\gamma t_0 + \delta)} \neq 0$ a kde lze $U(t)$ vyjádřit mocninnou řadou bez prostého členu. V dosti malém okolí bodu t_0 je $|U(t)| < 1$, tj. $\operatorname{Re}(1 + U(t)) > 0$; lze tedy pro toto t volit $|\arg(1 + U(t))| < \frac{1}{2}\pi$. Příslušné hodnoty $(1 + U)^\varrho$, $\log(1 + U)$ jsou pak určeny řadami

$$(100) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\varrho}{m} U^m(t), \quad \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{U^m(t)}{m}.$$

Zvolíme-li nyní určitou hodnotu $\arg \alpha_1$ (a tím i hodnotu α_1^ϱ, $\log \alpha_1$) a zavedeme-li

$$\arg(x - x_0) = \arg \alpha_1 + \arg(t - t_0) + \arg(1 + U(t)),$$

je zřejmé, že spojité změně $\arg(t - t_0)$ (v nějaké oblasti nebo podél nějaké křivky v $E - \{t_0\}$) odpovídá spojitá změna $\arg(x - x_0)$ (čtenář mně jistě rozumí). Pro příslušné hodnoty t, x (v dosti malém prstenci $P(t_0, \delta)$) je pak

$$(x - x_0)^\varrho = \alpha_1^\varrho (t - t_0)^\varrho (1 + U(t))^\varrho,$$

$$\log(x - x_0) = \log(t - t_0) + \log \alpha_1 + \log(1 + U(t)),$$

kde lze do řad (100) dosadit za $U(t)$ řadu, která – jak jsme viděli – nemá prostý člen (viz větu 7 a poznámku k této větě) a obě tyto funkce vyjádřit ve tvaru, z něhož je patrné, že jsou to funkce pseudopotenční nebo pseudoregulární v bodě t_0.

Zbytek důkazu je skoro doslova stejný jako u lemmatu 1.

Uvažujme rovnici

$$(101) \qquad L(y) = y^{(n)} + A_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + A_n(x)\, y = 0,$$

kde funkce $A_1, \ldots, A_n$ splňují v bodě $x_0 \in S$ předpoklad ($\mathfrak{P}$) (tj. jsou holomorfní v jistém $P(x_0, R)$, $0 < R < +\infty$). Není-li tato rovnice obyčejná v bodě x_0, říkejme, že je **singulární v bodě** x_0, nebo že bod x_0 je **singulárním bodem** této rovnice. Singulární body dané rovnice budou tedy vždy body izolované. Vzhledem k větě 23 je skoro zřejmá:

Věta 25. *Nechť $t_0 \in S$, $x_0 = \dfrac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta}$ a nechť rovnice* (101) *přechází substitucí*

$$(102) \qquad x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

v rovnici

$$(103) \qquad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + B_1(t) \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + B_n(t)\, y = 0.$$

Bod x_0 je singulárním bodem rovnice (101), *právě když bod t_0 je singulárním bodem rovnice* (103).

Mezi singulárními body jsme podrobněji studovali body, v nichž je daná rovnice Fuchsova typu. Pomocí lemmatu 6 lze snadno dokázat následující větu.

Věta 26. *Přechází-li substitucí* (102) *rovnice* (101) *v rovnici* (103) *a je-li* $x_0 = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta}$, *je rovnice* (101) *Fuchsova typu v bodě x_0, právě když je rovnice* (103) *Fuchsova typu v bodě t_0.*

Poznámka 3. Tuto větu lze také dokázat pomocí Fuchsovy věty, tj. ve tvaru: (101) splňuje Fuchsovu podmínku v bodě x_0, právě když (103) splňuje Fuchsovu podmínku v bodě t_0. Je ovšem potřeba vyšetřit závislost $B_j(t)$ v (103) na $A_j(x)$.

V příštím paragrafu budeme potřebovat ještě jednu transformaci rovnice (101), kterou se její tvar mnohdy zjednoduší. Až do konce tohoto paragrafu předpokládejme, že rovnice (101) je Fuchsova typu v bodě x_0, a pro jednoduchost buď $x_0 = 0$.

Zaveďme transformaci

$$y = x^{\lambda}(c_0 + c_1 x + \ldots)\, z\,, \tag{104}$$

kde $c_0 \neq 0$ a mocninná řada je konvergentní v jistém okolí bodu 0. Splňuje-li y v okolí bodu 0 rovnici (101), splňuje funkce z definovaná vztahem (104) v jistém okolí počátku zřejmě opět lineární diferenciální rovnici n-tého řádu (po dosazení a „vykrácení" $x^{\lambda}(c_0 + c_1 x + \ldots)$). Ze vztahu (104) vyplývá, že y je pseudoregulární v počátku, právě když z je pseudoregulární v počátku. Platí tedy věta:

Věta 27. *Přejde-li rovnice* (101) *transformací* (104) *v rovnici*

$$N(z) = z^{(n)} + C_1(x)\, z^{(n-1)} + \ldots + C_n(x)\, z = 0\,, \tag{105}$$

je rovnice (101) *Fuchsova typu v počátku, právě když rovnice* (105) *je Fuchsova typu v počátku.*

Vyšetříme na závěr tohoto paragrafu otázku, jak se mění kořeny charakteristické rovnice při transformacích tvaru (102) a (104). K tomu poznamenejme, že jsme vlastně zavedli pouze charakteristickou rovnici „v počátku". Domluvíme se tedy, že *je-li rovnice* (101) *Fuchsova typu v bodě $x_0 \in S$, rozumíme její charakteristivkou rovnicí v bodě x_0 charakteristickou rovnici* (*v počátku*) *rovnice* (103) *po substituci* $x = x_0 + t$, *je-li* $x_0 \in E$, *a po substituci* $x = \frac{1}{t}$, *je-li* $x_0 = \infty$.

Připomeňme si, jak vlastně dostaneme charakteristickou rovnici rovnice (101) v bodě $x_0 \in E$. Píšeme-li

$$(x - x_0)^n A_{n-k}(x) = (x - x_0)^k \sum_{j=0}^{\infty} b_{kj}(x - x_0)^j \tag{106}$$

a rovnici (101) ve tvaru

$$(107) \qquad (x - x_0)^n y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} (x - x_0)^k y^{(k)} \sum_{j=0}^{\infty} b_{kj}(x - x_0)^j = 0 ,$$

dostaneme charakteristickou rovnici rovnice (101) dosazením $y = (x - x_0)^\zeta$ do (107), vydělením $(x - x_0)^\zeta$ a limitním přechodem $x \to x_0$.

Věta 28. *Přechází-li rovnice* (101) *substitucí* (102) *v rovnici* (103), *je charakteristická rovnice* (101) *v bodě* $x_0 = \dfrac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta}$ *stejná jako charakteristická rovnice* (103) *v bodě* t_0.

Důkaz. Stačí se omezit na případ $x_0, t_0 \in E$. V jistém okolí bodu t_0 máme

$$(108) \qquad x - x_0 = \alpha_1(t - t_0) + \alpha_2(t - t_0)^2 + \dots ,$$

kde $\alpha_1 = \dfrac{\Delta}{(\gamma t_0 + \delta)^2} \neq 0$. Nyní

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} , \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}x^2}$$

atd., obecně

$$\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} = \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^k + \dots ,$$

kde následují členy obsahující $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \dots, \dfrac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}t^{k-1}}$. Odtud je patrné, že dosazení $y = (x - x_0)^\zeta$, dělení $(x - x_0)^\zeta$ a limitní přechod $x \to x_0$ u (107) vede ke stejnému výsledku jako dosazení (108) do (107), potom dosazení $y = (t - t_0)^\zeta$, dělení $(t - t_0)^\zeta$ a limitní přechod pro $t \to t_0$. Dostaneme tedy v obou případech stejnou charakteristickou rovnici. Zbývající případy (tj. $x_0 = \infty$, $t_0 \in E$, $x_0 \in S$, $t_0 = \infty$) dostaneme podobně z definice jako stejné případy u lemmatu 1 v § 4.

Transformujeme-li nyní rovnici (101) pomocí (104), dostaneme pro z rovnici (pro jednoduchost pišme $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \dots$)

$$(109) \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k (x^{n-k} A_{n-k}(x)) \frac{(x^\lambda \varphi(x) z)^{(k)}}{x^\lambda \varphi(x)} = 0 .$$

Odtud je ihned patrné, že má-li rovnice (101) charakteristickou rovnici v bodě 0 tvaru $F(\zeta) = 0$, má rovnice (109) charakteristickou rovnici v bodě 0 $F(\zeta + \lambda) = 0$. Použitím věty 27 dostaneme tedy následující větu:

Věta 29. *Je-li* $F(\zeta) = 0$ *charakteristická rovnice* (101) *v bodě* $x_0 \in S$ *a přejde-li* (101) *transformací*

$$y = (x - x_0)^\lambda (c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots)\, z \quad pro \quad x_0 \in E\,,$$

resp.

$$y = x^{-\lambda}\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots\right) z \quad pro \quad x_0 = \infty$$

v rovnici

$$(110) \qquad z^{(n)} + B_1(x)\, z^{(n-1)} + \ldots + B_n(x)\, z = 0\,,$$

je tato rovnice opět Fuchsova typu v bodě x_0 *a má charakteristickou rovnici* $F(\zeta + \lambda) = 0$.

Poznamenejme ještě, že místo (102) bychom mohli uvažovat obecnější substituci $x = \varphi(t)$, kde $x_0 = \varphi(t_0)$, φ je holomorfní v bodě t_0, $\varphi'(t_0) \neq 0$.[6] Prakticky doslovným přepisem bychom dostali zobecnění vět a lemmat tohoto paragrafu, které shrneme touto větou:

Věta 30. *Nechť* $x_0, t_0 \in S$, *funkce* φ *nechť je holomorfní v bodě* t_0, $\varphi'(t_0) \neq 0$, $x_0 = \varphi(t_0)$. *Potom funkce* f *je holomorfní* (*pseudopotenční, resp. pseudoregulární*) *v bodě* x_0, *právě když funkce* $g(t) = f(\varphi(t))$ *je holomorfní* (*pseudopotenční, resp. pseudoregulární*) *v bodě* t_0. *Přejde-li rovnice* (101) *substitucí* $x = \varphi(t)$[7]) *v rovnici* (103), *je* (101) *obyčejná* (*singulární Fuchsova typu*) *v bodě* x_0, *právě když je* (103) *obyčejná* (*singulární Fuchsova typu*) *v bodě* t_0. *Je-li* (101) *Fuchsova typu v bodě* x_0, *pak charakteristická rovnice* (101) *v* x_0 *je stejná jako charakteristická rovnice* (103) *v* t_0.

[6]) Je-li $t_0 = \infty$, klademe $\varphi'(t_0) = g'(0)$, kde $g(t) = \varphi\left(\frac{1}{t}\right)$.

[7]) Čtenář jistě chápe, co je tím míněno.