Kapitola IV

GAUSSOVA ROVNICE

§ 1

Zavedení Gaussovy rovnice

Budeme vyšetřovat operátor

$$\mathbf{L}(y) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + A(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + B(x)\,y \tag{1}$$

a rovnici

$$\mathbf{L}(y) = 0 \tag{2}$$

a budeme hledat, která rovnice (2) vyhovují těmto požadavkům:

1. *Funkce A, B jsou holomorfní v množině $S - M$, kde M je nějaká konečná množina.*

2. *V každém bodě $x_0 \in S$ splňuje $\mathbf{L}$ Fuchsovu podmínku (neboli: všechna její řešení jsou v x_0 pseudoregulární).*

Tedy předně mají A, B mít v $M - \{\infty\}$ nejvýše póly. Za druhé jsou funkce A, B holomorfní v jistém $P(\infty, r)$. Proto lze provést transformaci operátoru $\mathbf{L}$ substitucí $x = \frac{1}{t}$ pro $\frac{1}{r} < |x| < \infty$, tj. pro $0 < |t| < r$. Provedeme-li to podle § 4, kap. III (str. 89), dostaneme transformovaný operátor

$$\mathbf{M}(z) = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} A\left(\frac{1}{t}\right)\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{t^4} B\left(\frac{1}{t}\right) z\,. \tag{3}$$

Ježto $\mathbf{M}$ má splňovat Fuchsovu podmínku v nule, musí jeho koeficienty mít v bodě 0 nejvýše póly; to tedy platí i o funkcích $A\left(\frac{1}{t}\right)$, $B\left(\frac{1}{t}\right)$, tj. $A(x)$, $B(x)$ musí mít v bodě

∞ nejvýše póly. Definujeme-li hodnoty funkcí A, B v bodech, kde nejsou definovány, jako příslušné limity v těchto bodech (takže ve svých pólech budou mít funkce A, B hodnotu ∞), budou takto dodefinované funkce A, B meromorfní v S, tedy racionální.

Za tohoto předpokladu budeme hledat rovnice, které v každém bodě $x_0 \in S$ splňují Fuchsovu podmínku (samozřejmě ji splňují v každém obyčejném bodě).

Hledejme napřed rovnice[1]), pro které všechny body z S jsou obyčejné. To znamená předně, že A, B jsou polynomy, a za druhé, že koeficienty operátoru $\mathbf{M}$ mají pro $t \to 0$ konečnou limitu. Odtud vidíme, že má být

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} A\left(\frac{1}{t}\right) = 2\,, \quad \text{tedy} \quad \lim_{x\to\infty} x\,A(x) = 2\,,$$

tedy polynom A má být omezený a má mít v bodě ∞ hodnotu 0. Tedy $A(x) = 0$ identicky a z prvního koeficientu by plynulo, že $\lim\limits_{t\to 0} \frac{2}{t}$ je konečná, což je spor. Takové rovnice tedy neexistují.

Hledejme nyní rovnice, které mají jediný singulární bod, který lineární lomenou substitucí umístím do ∞. Tedy A, B jsou polynomy a Fuchsova podmínka v ∞ vyžaduje, aby

$$\lim_{t\to 0}\left(2 - \frac{1}{t} A\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} B\left(\frac{1}{t}\right)$$

existovaly a byly konečné. Z toho ihned odvodíte, že $A(x) = B(x) = 0$, takže jediná rovnice tohoto typu je $y'' = 0$ (řešení $c_1 + c_2 x$).

Hledejme rovnice, které mají nejvýše dva singulární body, které umístíme do $0, \infty$. Tedy (Fuchsova podmínka v nule) $A(x) = \dfrac{P(x)}{x}$, $B(x) = \dfrac{Q(x)}{x^2}$, kde P, Q jsou polynomy. Fuchsova podmínka v ∞ vyžaduje existenci konečných limit

$$\lim_{t\to 0}\left(2 - P\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad \lim_{t\to 0} Q\left(\frac{1}{t}\right).$$

To však znamená, že P, Q jsou konstanty, a dospíváme k tzv. **Eulerovým rovnicím** $y'' + \dfrac{a}{x} y' + \dfrac{b}{x^2} y = 0$. Zjistěte: Jsou-li ϱ, σ kořeny charakteristické rovnice, máme pro $\varrho \neq \sigma$ fundamentální systém řešení x^ϱ, x^σ, pro $\varrho = \sigma$ pak $x^\varrho, x^\varrho \log x$.

---

[1]) Stále míním rovnice s racionálními A, B, které všude v S splňují Fuchsovu podmínku.

Vyšetřujme nyní rovnice, které mají nejvýše tři singulární body, jež umístím do $0, 1, \infty$. Tedy (Fuchsova podmínka v 0 a v 1)

$$A(x) = \frac{P(x)}{x(1-x)}, \quad B(x) = \frac{Q(x)}{x^2(1-x)^2},$$

kde P, Q jsou polynomy. Fuchsova podmínka v ∞ žádá, aby existovaly konečné limity (přesvědčte se o tom)

$$\lim_{t \to 0} \left(2 - \frac{t\,P\left(\frac{1}{t}\right)}{t-1} \right), \quad \lim_{t \to 0} \frac{t^2\,Q\left(\frac{1}{t}\right)}{(t-1)^2}.$$

To však znamená totéž jako existence konečných limit $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} P(x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} Q(x)$, což neznamená nic jiného, než že polynom P je nejvýše prvního, Q nejvýše druhého stupně, takže všechny rovnice hledaného druhu jsou dány vzorcem

$$x^2(1-x)^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x(1-x)(p_0 + p_1 x) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2)\, y = 0 \tag{4}$$

($p_0, p_1, q_0, q_1, q_2 \in E$). Budeme těmto rovnicím říkat **Riemannovy rovnice** (obyčejně se tak říká rovnicím, kde vystupují libovolná a, b, c místo našich $0, 1, \infty$).

Počet parametrů $p_0, \ldots, q_2$ můžeme ještě snížit jednoduchou úpravou. Budiž ϱ, popříp. σ jeden z kořenů charakteristické rovnice v bodě 0, popříp. 1. Transformujme $\boldsymbol{L}(y)$ transformací $z(x) = x^{-\varrho}(1-x)^{-\sigma}\, y(x)$; dostaneme operátor $\boldsymbol{N}(z) = z'' + A_1 z' + B_1 z$.

Je jasné, že studium rovnice $\boldsymbol{L}(y) = 0$ lze převést na studium rovnice $\boldsymbol{N}(z) = 0$. Přitom A_1, B_1 jsou lineární funkce A, B, jejichž koeficienty jsou polynomy v $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$. Tedy jsou všechny body z $\boldsymbol{S} - \{0, 1, \infty\}$ obyčejné pro $\boldsymbol{N}$ a v bodech $0, 1, \infty$ splňuje rovnice $\boldsymbol{N}(z) = 0$ Fuchsovu podmínku. Mimo to jeden kořen charakteristické rovnice v bodě 0 je $\varrho - \varrho = 0$ a obdobně v bodě 1 je jeden kořen charakteristické rovnice nulový.

Omezíme se proto na rovnice (4), které mají v 0 i v 1 jeden kořen charakteristické rovnice rovný nule. Sestrojme charakteristickou rovnici v bodě 0:

$$\zeta(\zeta - 1) + \zeta p_0 + q_0 = 0.$$

Tedy: má být $q_0 = 0$, načež druhý kořen je $1 - p_0$. Hledejme charakteristickou rovnici v bodě 1. Koeficienty rovnice (4) si myslím rozvinuty podle mocnin $1 - x$

(uvážím, že $x = 1 - (1 - x)$), dosadím do levé strany $y = (1 - x)^\zeta$ a počítám koeficient při nejnižší mocnině $1 - x$; vyjde ihned charakteristická rovnice

$$\zeta(\zeta - 1) - (p_0 + p_1)\,\zeta + q_0 + q_1 + q_2 = 0\,.$$

Zde je $q_0 = 0$ a jeden kořen má být 0. Tedy $q_2 = -q_1$, druhý kořen je $p_0 + p_1 + 1$. Je tedy $q_1 x + q_2 x^2 = q_1(1 - x)\,x$, v rovnici (4) lze dělit $x(1 - x)$ a máme rovnici

$$x(1 - x)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + (p_0 + p_1 x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q_1 y = 0\,. \tag{5}$$

Abych vyšetřil bod ∞, sestrojím rovnici $M(z) = 0$, kde $M(z)$ je operátor (3),

$$A(x) = \frac{p_0 + p_1 x}{x(1 - x)}\,, \quad B(x) = \frac{q_1}{x(1 - x)}\,.$$

Po snadném výpočtu dostáváme rovnici

$$t^2(t - 1)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \big((2 - p_0)\,t^2 - (2 + p_1)\,t\big)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + q_1 z = 0\,,$$

jejíž charakteristická rovnice v nule je $\zeta^2 + (p_1 + 1)\,\zeta - q_1 = 0$. Označím-li její kořeny α, β, je $p_1 + 1 = -\alpha - \beta$, $q_1 = -\alpha\beta$. Píši-li ještě $p_0 = \gamma$, dostávám z (5) tzv. **Gaussovu rovnici**

$$x(1 - x)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \big(\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,x\big)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \alpha\beta y = 0\,. \tag{6}$$

Číslům α, β, γ (v tomto pořadí) budeme říkat parametry rovnice (6).

Při označení (6) jsou kořeny charakteristické rovnice

v bodě 0: $0, 1 - \gamma$;

v bodě 1: $0, \gamma - \alpha - \beta$;

v bodě ∞: α, β.

Všimněme si, že rovnice je symetrická v α, β.

Věta 31. *Rovnice* (6) *je* (*při libovolných* $\alpha, \beta, \gamma \in E$) *nejobecnější homogenní lineární diferenciální rovnice* 2. *řádu, která má tyto vlastnosti:*

1. *Dělíme-li její koeficienty výrazem* $x(1 - x)$, *dostanu funkce holomorfní v* $S - \{0, 1, \infty\}$.

2. *V bodech* $0, 1, \infty$ *je splněna Fuchsova podmínka.*

3. *Charakteristická rovnice v bodě* 0 *i v bodě* 1 *má jeden kořen nulový.*

Rovnici (6) budeme nyní podrobně studovat.

§ 2

Řešení Gaussovy rovnice řadami

Hledejme napřed řešení v $P(0, 1)$. Začneme s pseudopotenčními řešeními. Kořeny charakteristické rovnice v nule jsou $0, 1 - \gamma$. Není-li $1 - \gamma$ celé kladné, tj. je-li $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, existuje řešení tvaru

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (a_0 = 1)\,. \tag{7}$$

Dosaďme do rovnice (6); dostáváme rovnice

$$k(\gamma + k - 1)\, a_k = (\alpha + k - 1)(\beta + k - 1)\, a_{k-1} \tag{8}$$
$$(k = 1, 2, \ldots;\; a_0 = 1)\,.$$

Ježto $\gamma + k - 1 \neq 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$, dostáváme

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + k - 1)\,.\,\beta(\beta + 1)\ldots(\beta + k - 1)}{1\,.\,2\ldots k\,.\,\gamma(\gamma + 1)\ldots(\gamma + k - 1)} \tag{9}$$

pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ (Pro $k = 0$ znamená $\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + k - 1)$ prázdný součin, tj. jedničku; podobně v analogických případech.) Tím dostáváme řešení, které se označuje $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ a říká se mu **hypergeometrická řada s parametry** α, β, γ $(\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots)$:

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + k - 1)\,.\,\beta(\beta + 1)\ldots(\beta + k - 1)}{1\,.\,2\ldots k\,.\,\gamma(\gamma + 1)\ldots(\gamma + k - 1)}\, x^k\,. \tag{10}$$

Je-li α nebo β celé nekladné, redukuje se tato řada na polynom a dává řešení v celé rovině. V ostatních případech má řada poloměr konvergence 1 (užijeme podílového kritéria). Může se však stát, že rovnice (8) mají řešení i pro některé celé $\gamma \leqq 0$. Podle § 6, kap. III (str. 113) víme, že potom řada (7) dává řešení. Zkoumejme tedy případ, že $\gamma = -n$, n celé, $n \geqq 0$. Koeficient při a_k v (8) je vždy různý od nuly, vyjma pro $k = 1 - \gamma = 1 + n$. Rovnice (8) určují tedy (spolu s podmínkou $a_0 = 1$) jednoznačně koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$, a to vzorcem (9). Rovnice pro a_{n+1} má vlevo nulu, vpravo

$$(\alpha + n)(\beta + n)\, a_n = \frac{\alpha(\alpha + 1)\ldots(\alpha + n)\,\beta(\beta + 1)\ldots(\beta + n)}{1\,.\,2\ldots n\,.\,(-n)(-n + 1)\ldots(-1)}\,. \tag{11}$$

Aby rovnice pro $a_{n+1} = a_{1-\gamma}$ byla řešitelná, je nutno a stačí, aby buďto α, nebo β bylo celé číslo „intervalu“ $-n \leqq t \leqq 0$, tj. $\gamma \leqq t \leqq 0$ (pro $\gamma = 0$ se tento „interval“ redukuje na bod). Je-li tato podmínka splněna, je rovnice pro a_{n+1} splněna identicky.

Ježto druhý kořen charakteristické rovnice je $1 - \gamma > 0$, existuje řešení $z(x) = = x^{1-\gamma} + d_1x^{2-\gamma} + d_2x^{3-\gamma} + \ldots$ $(1 - \gamma = 1 + n)$. Odečteme-li od hledaného řešení $a_{1+n}\, z(x)$, můžeme bez újmy obecnosti předpokládat $a_{n+1} = 0$, načež rovnice (8) pro $k = n + 2, n + 3, \ldots$ (levé strany jsou $k(k - n - 1)\, a_k$) mají řešení $a_{n+2} = = a_{n+3} = \ldots = 0$. Dostáváme tedy toto řešení (píši opět $-\gamma$ místo n):

$$y = \sum_{k=0}^{-\gamma} \frac{\alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + k - 1)\, \beta(\beta + 1) \ldots (\beta + k - 1)}{1 \,.\, 2 \ldots k \,.\, \gamma(\gamma + 1) \ldots (\gamma + k - 1)}\, x^k \,. \tag{12}$$

Tedy máme celkem tento výsledek:

Věta 32. *Rovnice* (6) *má řešení tvaru* (7) *právě v těchto případech:*

1) $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ *Potom je řešením řada* (10).

2) $\gamma \leqq 0$ *celé a současně buďto* α, *nebo* β *je celé číslo intervalu* $\gamma \leqq t \leqq 0$. *Potom je řešením polynom* (12).

Z § 6, kap. III (str. 113) plyne: v případě 1) je (10) jediné řešení tvaru (7); v případě 2) se dostanou všechna řešení tvaru (7) z řešení (12) přičtením funkce $c\, z(x)$ $(c \in \boldsymbol{E})$, kde $z(x)$ je řešení tvaru $x^{1-\gamma}(1 + d_1x + d_2x^2 + \ldots)$ (které je jediné).

Obraťme se k druhému kořenu $1 - \gamma$. Transformujme operátor $\mathbf{L}$, příslušný ke Gaussově rovnici, tj.

$$\mathbf{L}(y) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)\, x}{x(1 - x)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{\alpha\beta}{x(1 - x)}\, y \,,$$

zavedením funkce $z = x^{\gamma - 1} y$. Tím se $\mathbf{L}(y)$ transformuje v $\mathbf{M}(z)$, kde podle § 6, kap. III (str. 119) má $\mathbf{M}(z)$ jednoznačné koeficienty v $\boldsymbol{S}$, holomorfní v $\boldsymbol{S} - \{0, 1, \infty\}$, a splňuje všude v $\boldsymbol{S}$ Fuchsovu podmínku. $\left(\text{Poznamenejme, že koeficient pri } \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} \text{ je } 1.\right)$ Tedy je $\mathbf{M}(z) = 0$ Riemannova rovnice a kořeny její charakteristické rovnice jsou v bodě 0 podle § 6, kap. III (str. 119)

$$0 + \gamma - 1 = \gamma - 1 \,, \quad (1 - \gamma) + (\gamma - 1) = 0 \,,$$

v bodě 1 jsou 0, $\gamma - \alpha - \beta$ (uvažme, že každá větev $x^{\gamma - 1}$ v okolí bodu 1 má tvar $(1 - (1 - x))^{\gamma - 1} = \alpha_0 + \alpha_1(1 - x) + \alpha_2(1 - x)^2 + \ldots$, $\alpha_0 \neq 0$) a v bodě ∞ jsou $\alpha - (\gamma - 1) = \alpha - \gamma + 1$, $\beta - \gamma + 1$. Rovnice $\mathbf{M}(z) = 0$ je tedy Gaussova s parametry $\alpha - \gamma + 1$, $\beta - \gamma + 1$, $1 - (\gamma - 1) = 2 - \gamma$. Užijeme-li na rovnici $\mathbf{M}(z) = 0$ věty 32, dostaneme ihned tuto větu:

Věta 33. *Rovnice* (6) *má řešení tvaru*

$$y = x^{1-\gamma}(1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots) \tag{13}$$

právě v těchto případech:

1) *Je-li* $2 - \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, *tj.* $\gamma \neq 2, 3, 4, \ldots$, *existuje řešení*

$$(14) \qquad y = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma;\ x)\,.$$

2) *Je-li* $\gamma = 2, 3, 4, \ldots$, *existuje řešení tvaru* (13) *právě tehdy, je-li buďto* α *nebo* β *rovno některému celému číslu intervalu* $1 \leqq t \leqq \gamma - 1$. *Potom máme řešení*

$$(15) \quad y = x^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\gamma-2} \frac{(\alpha - \gamma + 1) \ldots (\alpha - \gamma + k)(\beta - \gamma + 1) \ldots (\beta - \gamma + k)}{1 \,.\, 2 \ldots k \,.\, (2 - \gamma) \ldots (k + 1 - \gamma)} x^k\,.$$

Z vět 32 a 33 plyne tento:

Důsledek. 1) *Není-li* γ *celé, má rovnice* (6) *v* $P(0, 1)$ *řešení* (10), (13), *jež zřejmě tvoří fundamentální systém.*

2) *Je-li* $\gamma = 1$, *splývají řešení* (10), (14); *charakteristická rovnice má dvojnásobný kořen a existuje až na konstantního činitele jediné pseudopotenční řešení.*

3) *Je-li* $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$, *existuje řešení* (14); *pseudopotenční řešení* (7) *existuje jen ve zvláštních případech, uvedených ve větě* 32.

4) *Je-li* $\gamma = 2, 3, 4, \ldots$, *existuje řešení* (10); *řešení* (13) *existuje jen ve zvláštních případech, uvedených ve větě* 33.

Budeme nyní na závěr vyšetřovat řešení v případech, kdy neexistuje fundamentální systém složený z pseudopotenčních funkcí. Ježto případ $\gamma \leqq 0$ lze převést substitucí $z = x^{\gamma-1}y$ (která převádí γ v $2 - \gamma$) na případ $\gamma \geqq 2$, stačí vyšetřit případy $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$ V tom případě existuje pseudopotenční řešení (10). Existuje-li druhé pseudopotenční řešení (14) a není-li $\gamma = 1$, tvoří tato dvě řešení fundamentální systém (patří k různým exponentům $0, 1 - \gamma$). V ostatních případech je (10) až na konstantní činitel jediné pseudopotenční řešení a my budeme hledat další řešení — teď už nikoliv pseudopotenční.

Jde nám tedy o tento případ:

Buďto $\gamma = 1$ *nebo* $\gamma = 2, 3, 4, \ldots$ *a podmínka z* 2) *ve větě* 33 *není splněna*, tj. jde o případ, kdy α, β, γ splňují tyto podmínky:

(A) γ *je celé,* $\gamma \geqq 1$; *ani* α *ani* β *není celé číslo „intervalu"* $1 \leqq t \leqq \gamma - 1$. (Pro $\gamma = 1$ je tento „interval" prázdný — to je v pořádku, neboť pro $\gamma = 1$ máme jen jedno pseudopotenční řešení, až na konstantní činitel). Víme (viz § 6, kap. III, str. 114):

V tomto případě existuje řešení tvaru

$$(16) \qquad y = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \log x + G(x)\,,$$

kde Laurentova řada

$$G(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n x^n \tag{17}$$

má v počátku nejvýše pól. Pro lepší přehled pišme též

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n x^n \quad (c_n = 0 \text{ pro } n < 0)\,.$$

(Pro $n \geqq 0$ jsou ovšem c_n koeficienty z (10), $c_0 = 1$.)

Ježto od řešení (16) smíme odečíst libovolný násobek $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$, můžeme se omezit na případ, že $d_0 = 0$. Dosadím (16) do rovnice (6); členy s $\log x$ vypadnou (neboť $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ je řešením rovnice (6)). Vlevo zbude Laurentova řada; položíme-li její koeficienty rovny nule, dostaneme systém rovnic

$$\begin{aligned}(2n-1)\,c_n - (2n-3)\,c_{n-1} + n(n-1)\,d_n - (n-1)(n-2)\,d_{n-1} +\\ + \gamma c_n - (\alpha+\beta+1)\,c_{n-1} + n\gamma d_n -\\ - (\alpha+\beta+1)(n-1)\,d_{n-1} - \alpha\beta d_{n-1} = 0\,,\end{aligned}$$

neboli

$$n(n-1+\gamma)\,d_n - (\alpha+n-1)(\beta+n-1)\,d_{n-1} = f_n\,, \tag{18}$$

kde

$$f_n = -(2n-1+\gamma)\,c_n + (2n+\alpha+\beta-2)\,c_{n-1}\,. \tag{19}$$

Hledáme řešení systému (18) s podmínkou $d_0 = 0$, ve kterém nejvýše konečně mnoho d_n se záporným n se nerovná nule. Zjistíme-li, že takové řešení je jen jedno, dává nám hledanou řadu (17), která, jak víme, konverguje v $P(0, 1)$.

Z (19) plyne

$$f_n = 0 \quad \text{pro} \quad n < 0\,; \quad \text{pro} \quad \gamma = 1 \quad \text{je též} \quad f_0 = 0\,.$$

Ježto $d_0 = 0$, lze z rovnic (18) jednoznačně vypočítat d_n pro $n > 0$. Dále je jasné, že při pevném γ jsou koeficienty

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\ldots n\,.\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} \tag{20}$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$) spojité funkce α, β. Počítejme napřed d_n ($n > 0$) pro necelá α, β, takže $c_n \neq 0$. Srovnání (18), (19) nám naznačuje, že bude vhodné zavést čísla $\lambda_n = \dfrac{d_n}{c_n}$ $(n \geqq 0)$, načež (18) lze vzhledem k (19), (20) psát

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{2n-1+\gamma}{n(n-1+\gamma)} + \frac{2n+\alpha+\beta-2}{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)} =$$
$$= \frac{1}{\alpha+n-1} + \frac{1}{\beta+n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{\gamma+n-1}$$

(rozklad na částečné zlomky). Ježto $\lambda_0 = 0$, dostáváme

$$(21)\quad d_n = c_n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{\beta+k} - \frac{1}{1+k} - \frac{1}{\gamma+k} \right) \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zatím byl tento vzorec dokázán pro necelá α, β. Ale ze spojitosti c_n plyne podle (18) indukcí spojitost d_n jako funkce α, β, takže ostatní případy lze řešit limitním přechodem. Jediný případ, který zasluhuje zmínky, jen ten, že $\alpha + k = 0$ (popříp. $\beta + k = 0$) pro některé celé k, $0 \leqq k \leqq n - 1$. Napíšeme napřed vzorec (21) s hodnotou α' místo α $(0 < |\alpha' - \alpha| < 1)$, vykrátíme koeficient $\alpha' + k$ (který je činitelem v c_n), a potom přejdeme k limitě $\alpha' \to \alpha$.

Ještě máme vypočítat d_{-n} pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Položme $d_{-n} = D_n$. Ježto $d_0 = 0$, dostáváme z (18), (19) podmínky

$$(22)\qquad (1-\alpha)(1-\beta)\, D_1 = \gamma - 1\,,$$

$$(23)\qquad (1+n-\alpha)(1+n-\beta)\, D_{n+1} = n(1+n-\gamma)\, D_n \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Přitom pro všechna dosti velká n má být $D_n = 0$. Je-li však $n \geqq \gamma$ a je-li $D_{n+1} = 0$, plyne z (23) $D_n = 0$. Odtud plyne

$$(24)\qquad D_\gamma = D_{\gamma+1} = D_{\gamma+2} = \ldots = 0\,.$$

Pro $\gamma = 1$ je tím již nalezeno řešení. Pro $\gamma > 1$ jsou v důsledku rovnic (24) splněny rovnice (23) pro $n \geqq \gamma$, ale také rovnice pro $n = \gamma - 1$, ježto vlevo je $D_\gamma = 0$, vpravo $1 + n - \gamma = 0$. Jde tedy ještě o to, splnit rovnici (22) a rovnice (23) pro $1 \leqq n \leqq \gamma - 2$. V těchto rovnicích je koeficient vlevo $(1 + n - \alpha)$ $(1 + n - \beta)$ pro $n = 0, 1, \ldots, \gamma - 2$. Tvrdím, že $1 + n - \alpha \neq 0$ (a podobně $1 + n - \beta \neq 0$) pro tato n. Je-li $\alpha = n + 1$, znamená to, že α je celé číslo intervalu $1 \leqq t \leqq \gamma - 1$, což je ve sporu s (A); podobně pro β. Tedy rovnice (22) a rovnice (23) pro $n = 1, 2, \ldots, \gamma - 2$ mají právě jedno řešení; snadno najdete, že je

$$(25)\qquad D_n = \frac{-(n-1)!\,(1-\gamma)(2-\gamma)\ldots(n-\gamma)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)(1-\beta)(2-\beta)\ldots(n-\beta)}$$

pro $n \geqq 1$ (pro $n \geqq \gamma$ dává (25) $D_n = 0$, jak to má být).

Tím je úplně určena řada

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n + \sum_{n=1}^{\gamma-1} D_n x^{-n}$$

(ovšem $\sum_{n=1}^{0} = 0$) a úkol je vyřešen.

Tedy jsme získali úplný přehled o řešeních Gaussovy rovnice v prstenci $P(0, 1)$. Není-li γ celé, máme fundamentální systém řešení

$$\begin{aligned} y_1 &= F(\alpha, \beta, \gamma; x), \\ y_2 &= x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x). \end{aligned} \tag{26}$$

Pro $\gamma = 1$ tato řešení splývají a máme další řešení tvaru (16). Pro $\gamma = 2, 3, 4, \ldots$ máme řešení (10) a k tomu buďto řešení (12), nebo řešení (16) (který z obou případů nastane, o tom nás poučí věta 33). Pro $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$ máme řešení (14) a k tomu buďto řešení (15), nebo řešení analogické k (16) (nebudu je vypisovat).

Řešení v prstenci $P(1, 1)$ (tj. $0 < |1 - x| < 1$) dostaneme, transformujeme-li operátor $\mathbf{L}$ (viz (1)) substitucí $x = 1 - t$; okamžitě dostaneme rovnici

$$(z(t) = y(1 - t), \quad y(x) = z(1 - x))$$

$$(1 - t)\, t \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)(1 - t)) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \alpha\beta z = 0,$$

což je Gaussova rovnice s parametry α, β, $\alpha + \beta - \gamma + 1$. Jestliže $\gamma - \alpha - \beta$ není celé, máme fundamentální systém

$$\begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - x), \\ &(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; 1 - x), \end{aligned} \tag{27}$$

Ještě sestrojíme řešení v prstenci $P(\infty, 1)$, tj. $1 \leqq |x| < +\infty$. Transformujme operátor $\mathbf{L}$ (viz (1)) substitucí $x = \dfrac{1}{t}$. Ale $\mathbf{L}$ je (až na činitel $x(1 - x)$) operátor v (5), kde $p_0 = \gamma$, $p_1 = -(\alpha + \beta + 1)$, $q_1 = -\alpha\beta$. Transformovaný operátor $\mathbf{M}$ jsme vypočítali v § 1 (str. 120); je

$$t^2(t - 1)\, \mathbf{M}(z) = t^2(t - 1) \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + (t^2(2 - \gamma) + (\alpha + \beta - 1)\, t) \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} - \alpha\beta z.$$

To je Riemannova rovnice. Snadno sestrojíte charakteristickou rovnici v bodě 0 a v bodě 1. Dostaneme kořeny α, β v bodě 0; 0, $\gamma - \alpha - \beta$ v bodě 1. Charakteristickou rovnici v bodě ∞ dostaneme, transformujeme-li $\mathbf{M}$ substitucí $t = \dfrac{1}{x}$, ale tím dostaneme $\boldsymbol{L}$. Tedy kořeny charakteristické rovnice operátoru $\boldsymbol{M}$ v ∞ jsou kořeny charakteristické rovnice operátoru $\boldsymbol{L}$ v 0; tedy jsou to $0, 1 - \gamma$. Transformujeme $\boldsymbol{M}$ zavedením $\zeta = t^{-\alpha}z$. Dostaneme operátor $\boldsymbol{N}$, kde kořeny jsou $0, \beta - \alpha$ v bodě 0; $0, \gamma - \alpha - \beta$ v bodě 1; $\alpha, \alpha - \gamma + 1$ v bodě ∞. Tedy rovnice pro ζ je Gaussova s parametry $\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1$. Ze všech řešení ζ rovnice $\boldsymbol{N}(\zeta) = 0$ dostaneme všechna řešení rovnice $\boldsymbol{M}(z) = 0$ tím, že klademe $z(t) = t^{\alpha}\,\zeta(t)$, a z nich dostaneme všechna řešení rovnice $\boldsymbol{L}(y) = 0$ tím, že klademe $y = x^{-\alpha}\,\zeta\left(\frac{1}{x}\right)$.

Tedy: sestrojíme všechna řešení ζ rovnice s parametry $\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1$ v $P(0, 1)$ a položíme $y = x^{-\alpha}\,\zeta\left(\frac{1}{x}\right)$. Speciálně: není-li $\beta - \alpha$ celé, dostaneme fundamentální systém řešení v $P(\infty, 1)$:

$$x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1;\ \frac{1}{x}\right), \tag{28}$$

$$x^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1;\ \frac{1}{x}\right).$$

Cvičení. Existuje $3! = 6$ lineárních lomených substitucí, které převádějí trojici bodů $\{0, 1, \infty\}$ v sebe. Využili jsme již tří substitucí $x = t$, $x = 1 - t$, $x = \frac{1}{t}$, jež nám daly řešení Gaussovy rovnice v prstencích $P(0, 1)$, $P(1, 1)$, $P(\infty, 1)$. Abychom využili dalších tří, provedeme na Gaussovu rovnici $\boldsymbol{L}(y) = 0$ s parametry α, β, γ transformaci $x = \frac{t}{t-1}$; tím dostaneme řešení, v nichž se vyskytnou řady postupující podle mocnin $t = \frac{x}{x-1}$, $1 - t = \frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{t} = \frac{x-1}{x}$, které budou konvergovat pro $0 < \left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$, tj. $x \neq 1$, $\operatorname{Re} x < \frac{1}{2}$, resp. pro $|1 - x| > 1$, resp. pro $0 < \left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$, tj. $x \neq 0$, $\operatorname{Re} x > \frac{1}{2}$ (a ovšem stále $x \neq \infty$). Ježto jsme se v předcházejícím textu naučili provádět transformace $x = 1 - t$, $x = \frac{1}{t}$, rozložme naši transformaci takto: napřed položíme $x = 1 - u$ a pro $z(u) = y(1 - u)$ dostaneme (Gaussův) operátor s parametry $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \alpha + \beta - \gamma + 1$. Dále transformujeme $u = \frac{1}{v}$, $\eta(v) = z\left(\frac{1}{v}\right)$ a $\eta(v) = v^{\alpha_1}\,\zeta(v)$; víme, že pro ζ dostaneme operátor s parametry $\alpha_2 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_1 - \gamma_1 + 1$, $\gamma_2 = \alpha_1 - \beta_1 + 1$. Konečně transformujeme $v = 1 - t$ $\left(\text{takže vskutku } x = \frac{t}{t-1},\ \lambda(t) = \zeta(1 - t)\right)$. Pro λ dostaneme operátor s parametry $\alpha_3 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_3 = \beta_2 = \gamma - \beta$, $\gamma_3 = \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 + 1 = \gamma$. Položím potom $y(x) = (1 - x)^{-\alpha} \lambda \left(\frac{x}{x - 1}\right)$. Jestliže čísla $\gamma, \gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ jsou necelá, obdržíme tyto tři fundamentální systémy:

$$(29) \qquad (1 - x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma; \frac{x}{x - 1}\right),$$

$$x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha - \gamma + 1, 1 - \beta, 2 - \gamma; \frac{x}{x - 1}\right)$$

pro $x \neq 0, \infty$, $\operatorname{Re} x < \frac{1}{2}$;

$$(30) \qquad (1 - x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{1 - x}\right),$$

$$(1 - x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma - \alpha. \beta - \alpha + 1; \frac{1}{1 - x}\right)$$

pro $x \neq 0$, $|1 - x| > 1$;

$$(31) \qquad x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha + \beta - \gamma + 1; \frac{x - 1}{x}\right),$$

$$x^{\beta-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma - \beta, 1 - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1; \frac{x - 1}{x}\right)$$

pro $x \neq 1, \infty$, $\operatorname{Re} x > \frac{1}{2}$.

Čtenář si sám promyslí podrobnosti a doplní také podle potřeby „očíslování" (ač zde na něm mnoho nezáleží). V prvním řádku je nutno volit jistou větev mocnin $1 - x$, podobně v třetím řádku jistou větev mocnin x (je celkem jedno, kterou), aby výrazy dávaly analytické funkce. Volíme-li např. v prvním řádku onu větev $(1 - x)^{-\alpha}$, která pro $x = 0$ má hodnotu 1, zjistíte, že pro malá $|x|$ má tato funkce tvar $1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$, a podobně druhá funkce má tvar $x^{1-\gamma}(1 + d_1x + d_2x^2 + \ldots)$ při obdobné volbě $(1 - x)^{\gamma-\alpha-1}$. Tedy první řádek v (29) splývá potom s fundamentálním systémem (26). Podobně u druhého a třetího řádku (vyšetřete!).

§ 3

Funkce $\Gamma(s)$ a $B(p, q)$

Řada věcí o obou funkcích je uvedena v knize V. Jarník, Integrální počet II (dále jen I II), kap. XVIII. Protože v této knize využívá jen prostředků teorie funkcí reálné proměnné a protože budeme potřebovat i některé další vlastnosti obou funkcí, probereme pro pohodlí čtenáře vše znovu.

Funkci gamma definujeme pro $s \in \boldsymbol{E}$, $\operatorname{Re} s > 0$ vztahem

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \, \mathrm{d}x \tag{32}$$

(kde pochopitelně bereme $\arg x = 0$).

Poznamenejme výslovně, že tento integrál zavádíme pomocí rozkladu integrálu na reálnou a imaginární část vztahem ($\operatorname{Re} f(x) = f_1(x)$, $\operatorname{Im} f(x) = f_2(x)$)

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x) \, \mathrm{d}x + i \int_a^b f_2(x) \, \mathrm{d}x \,,$$

pokud ovšem integrály vpravo existují (jakožto Newtonovy integrály – viz Černý, str. 566 a další). Vesměs nám půjde o integraci spojitých funkcí (a tedy můžeme používat i znalostí Lebesgueova integrálu).

Nejprve snadno ukážeme, že integrál (32) skutečně definuje – dokonce holomorfní – funkci $\Gamma(s)$ v polorovině $\operatorname{Re} s > 0$. K existenci integrálu stačí uvážit, že pro každé $\varepsilon > 0$ je pro všechna $s \in \boldsymbol{E}$, $\varepsilon \leqq \operatorname{Re} s \leqq \frac{1}{\varepsilon}$

$$|e^{-x} x^{s-1}| = e^{-x} x^{\operatorname{Re} s - 1} \leqq \begin{cases} e^{-x} x^{1/\varepsilon - 1} & \text{pro} \quad x \in \langle 1, +\infty) \\ x^{\varepsilon - 1} & \text{pro} \quad x \in (0, 1\rangle \end{cases}$$

Funkce $e^{-x/2} x^{1/\varepsilon - 1}$ má pro $x \to +\infty$ limitu nula a je tedy v intervalu $\langle 1, +\infty)$ omezena jistou konstantou $K = K(\varepsilon)$ (závislou na ε). Klademe-li tedy $g(x) = x^{\varepsilon - 1}$ v intervalu $(0, 1\rangle$, $g(x) = K(\varepsilon) \, e^{-x/2}$ v intervalu $(1 + \infty)$, je $|e^{-x} x^{s-1}| \leqq g(x)$ v $(0, +\infty)$ a integrál $\int_0^\infty g(x) \, \mathrm{d}x$ zřejmě existuje. Pro s z uvedeného oboru existuje tedy i integrál (32) (obvyklé srovnávací kritérium – viz např. Černý, věta 299, str. 580). Protože „integrální majoranta“ byla společná pro všechna uvažovaná s $\left(\varepsilon \leqq \operatorname{Re} s \leqq \frac{1}{\varepsilon}\right)$, mohli bychom odtud také odvodit spojitost funkce $\Gamma(s)$ atd.

Budeme postupovat ale trochu jinak. Zvolme čísla $\varrho, R,\ 0 < \varrho < 1 < R < +\infty$ a buď

$$\varphi_\varrho(s) = \int_\varrho^1 e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x\,, \quad \Psi_R(s) = \int_1^R e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Z věty C, § 3, kap. I (nebo Černý, věta 158) ihned dostaneme, že funkce $\varphi_\varrho(s)$, $\Psi_R(s)$ jsou celé funkce. Buď $\varepsilon > 0$. Je-li $\operatorname{Re} s \leqq \dfrac{1}{\varepsilon}$, je

$$\left| \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x - \psi_R(s) \right| \leqq \int_R^\infty e^{-x} x^{1/\varepsilon - 1}\,\mathrm{d}x \leqq K(\varepsilon) \int_R^\infty e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = 2K(\varepsilon)\, e^{-R/2}\,,$$

kde $K(\varepsilon)$ je jistá konstanta (viz výše), závislá jen na $\varepsilon > 0$. Tedy

$$\lim_{R \to +\infty} \psi_R(s) = \int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x \tag{33}$$

stejnoměrně pro $\operatorname{Re} s \leqq \dfrac{1}{\varepsilon}$ pro každé $\varepsilon > 0$, tj. lokálně stejnoměrně v E. Integrál v (33) je tedy (věta 14 nebo Černý, věta 173) celá funkce.[1]) Podobně: je-li $\varepsilon > 0$, je

$$\left| \int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x - \varphi_\varrho(s) \right| \leqq \int_0^\varrho x^{\varepsilon - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon}\, \varrho^\varepsilon\,,$$

a tedy

$$\lim_{\varrho \to 0+} \varphi_\varrho(s) = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x \tag{34}$$

stejnoměrně pro $\operatorname{Re} s \geqq \varepsilon > 0$ pro každé $\varepsilon > 0$, tj. lokálně stejnoměrně v polorovině $\operatorname{Re} s > 0$. Integrál v (34) tedy je funkce proměnné s holomorfní v polorovině $\operatorname{Re} s > 0$. Celkem *funkce gamma je holomorfní v polorovině* $\operatorname{Re} s > 0$.

Poznámka 1. Probrali jsme celý důkaz podrobněji, neboť stejného postupu použijeme na několika dalších místech.

Všimněme si, že jsme omezení $\operatorname{Re} s > 0$ upotřebili pouze při důkazu vztahu (34). Zkoumejme limitu v (34) podrobněji. Celé funkce $\varphi_\varrho(s)$ můžeme vyjádřit ještě jinak. Protože v E je

$$e^{-z} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^k}{k!}$$

[1]) Pokud by čtenáři činilo potíže, že ve větě 14 máme posloupnost funkcí a zde systém funkcí závislý na parametru R, může volit postupně $R = 1, 2, 3, \ldots$ (a $\varrho = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$) atd.

a řada konverguje v E lokálně stejnoměrně, máme pro pevně zvolené ϱ intervalu $(0, 1)$

$$e^{-x}x^{s-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+s-1}}{k!}$$

stejnoměrně v intervalu $\langle \varrho, 1 \rangle$ pro každé pevné $s \in E$. Je tedy (např. Černý, věta 156) pro $s \neq 0, -1, -2, \ldots$

$$\varphi_\varrho(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_\varrho^1 x^{k+s-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(s+k)}(1 - \varrho^{s+k}).$$

Buď nyní $\operatorname{Re} s \geqq \varepsilon > 0$, kde ε je pevně zvoleno. Potom

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varrho^{s+k}}{k!\,(s+k)} \right| \leqq \varrho^\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varrho^k}{k!\,\varepsilon} = \frac{\varrho^\varepsilon}{\varepsilon} e^\varrho,$$

a tedy

(35) $$\lim_{\varrho \to 0+} \varphi_\varrho(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(s+k)}$$

stejnoměrně v oboru $\operatorname{Re} s \geqq \varepsilon > 0$, tj. lokálně stejnoměrně v polorovině $\operatorname{Re} s > 0$. Celkem tedy lze psát pro $s \in E$, $\operatorname{Re} s > 0$

(36) $$\Gamma(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(s+k)} + \int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x,$$

přičemž integrál v (36) je dokonce funkce celá. Zvolíme-li nyní $\varepsilon > 0$ a uvažujeme-li s v oboru $\min_{k=0,1,2,\ldots} |s + k| \geqq \varepsilon$ (nakreslete!), konverguje řada v (36) zřejmě stejnoměrně v tomto oboru, a tedy (ε bylo libovolné kladné číslo) řada v (36) vyjadřuje funkci holomorfní v oboru $E - \{0, 1, 2, \ldots\}$. Je ale ihned vidět, že v bodech $s = 0, -1, -2, \ldots$ má součet řady jednoduché póly, a tedy můžeme shrnout: *vztah* (36) *dává analytické pokračování funkce gamma do celé komplexní roviny; funkce gamma je funkce meromorfní, která má póly (a to jednoduché) pouze v nekladných celých číslech.* Z (36) konečně plyne

(37) $$\operatorname*{res}_{s=-k} \Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Obraťme se nyní k funkci beta. Je definována pro $p, q \in E$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$ tzv. **Eulerovým integrálem prvého druhu**

(38) $$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

Podobně jako výše zjistíme, že v uvedeném oboru integrál skutečně existuje. Jaký je nyní vztah mezi oběma funkcemi? Buď $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} q > 0$. Pomocí věty Fubiniovy a zavedením zobecněných polárních souřadnic[2]) dostaneme

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r} r^{p+q-1} \cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$= \Gamma(p+q)\, 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \Gamma(p+q)\,B(p,q)\,^{3})\,,$$

tj.

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p,q)\,. \tag{39}$$

Uveďme ještě, že z (32) dostaneme pro $s \in E$, $\operatorname{Re} s > 0$ integrací per partes

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s) \tag{40}$$

a zřejmě $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$, tj. spolu s (40) máme

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{41}$$

Protože funkce gamma je meromorfní, platí (40) v E (viz věta o jednoznačnosti – Černý, věta 187). Ostatně můžeme na základě vztahu (40) funkci gamma pokračovat z poloroviny $\operatorname{Re} s > 0$ do celé komplexní roviny a odvodit i všechny její vlastnosti, které jsme odvozovali ze vztahu (36).[4])

Dokážeme nyní, že $\Gamma(s) \neq 0$ v E. Vzhledem k (40) stačí ukázat, že $\Gamma(s) \neq 0$ pro $s \in E$, $\operatorname{Re} s > 0$. Buď M množina všech $s \in E$, $\operatorname{Re} s > 0$, pro něž je $\Gamma(s) = 0$. Množina M je zřejmě uzavřená v polorovině $\operatorname{Re} s > 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby $0 < \varepsilon < 1$ a aby bylo $\Gamma(z) \neq 0$ pokud $|z-1| < \varepsilon$ (využijeme spojitosti funkce gamma v bodě 1 a (41) pro $n = 1$). Buď $s \in M$. Je-li nyní $\operatorname{Re} p > 0$, $|p - s| < \varepsilon$, platí pro číslo $q = 1 - p + s$ vztah $\operatorname{Re} q > 0$ a $|q-1| < \varepsilon$, tj. podle volby ε je $\Gamma(q) \neq 0$. Podle (39) a (40) je

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \Gamma(p+q)\,B(p,q) = \Gamma(s+1)\,B(p,q) = s\,\Gamma(s)\,B(p,q) = 0\,,$$

---

[2]) $x = r\cos^2\varphi$, $y = r\sin^2\varphi$, $r \in (0, +\infty)$, $\varphi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$. Jacobiho determinant vyjde $2r\sin\varphi$ . . $\cos\varphi$.

[3]) Substituce $t = \cos^2\varphi$.

[4]) Stačí pro každé přirozené n klást pro $\operatorname{Re} s > -n$ $\Gamma(s) = \dfrac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}$. Vztah (40) pro $s \in E$ chápeme jako rovnost dvou meromorfních funkcí v tomto bodě.

tj. $\Gamma(p) = 0$. Je-li tedy $s \in M$, $|p - s| < \varepsilon$, $\operatorname{Re} p > 0$, je $p \in M$, tj. množina M je otevřená v polorovině $\operatorname{Re} s > 0$. Protože ale tato polorovina je oblast, je nutně $M = \emptyset$ (viz str. 33). Je tedy $\Gamma(s) \neq 0$ v E a vztah (39) lze přepsat ve tvaru

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \operatorname{Re} q > 0. \tag{42}$$

Dále jsme také ukázali, že funkce $\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ je celá funkce, jejíž jediné (jednonásobné) nulové body jsou v nekladných celých číslech.

Vyšetřeme ještě integrál v (32) poněkud jinak. Položme pro n přirozené

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{pro} \quad x \in \langle 0, n \rangle, \\ 0 & \text{pro} \quad x \geqq n. \end{cases}$$

Snadno nahlédneme, že tato posloupnost je neklesající posloupnost spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, +\infty)$ [5]) a že $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = e^{-x}$. Pokud $\operatorname{Re} s > 0$, máme dle (32), (42) a (40) dle Lebesgueovy věty

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{s-1}\, dx =$$

$$= \lim_{n \to \infty} n^s \int_0^1 t^{s-1} (1 - t)^n\, dt = \lim_{n \to \infty} n^s B(s, n + 1) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} n^s \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(n + 1)}{\Gamma(s + n + 1)} = \lim_{\infty \to n} \frac{n^s n!}{s(s + 1) \dots (s + n)}.$$

Snadno zjistíme, že získaný vztah

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n \to \infty} \frac{s(s + 1) \dots (s + n)}{n!\, n^s} \tag{43}$$

platí pro všechna $s \in E$. (Proveďte!)

---

[5]) Pro $u \in (0, 1)$ je

$\lg(1 - u) + \dfrac{u}{1 - u} = -u - \dfrac{u^2}{2} - \dfrac{u^3}{3} - \dots + u + u^2 + \dots \geqq 0$, a tedy funkce $\left(1 - \dfrac{x}{\alpha}\right)^\alpha =$ $= \tau_x(\alpha)$ má kladnou derivaci $\dfrac{d}{d\alpha} \tau_x(\alpha)$ pokud $0 < x < \alpha$.

Ze vztahu (43) odvodíme nyní důležité vyjádření funkce $\dfrac{1}{\Gamma(s)}$ nekonečným součinem. Z (43) plyne

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n\to\infty} sn^{-s} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{k}\right).$$

Odtud je zřejmé, že limita

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{k}\right)$$

nemůže např. pro $s > 0$ být vlastní. Pišme tedy

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n\to\infty} se^{-s\lg n + s\sum_{k=1}^{n} 1/k} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k}.$$

Protože (viz **D II**, str. 80) existuje vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \lg n\right) = C$$

(tzv. **Eulerova konstanta**), bude existovat vlastní a nenulová

$$\lim_{n\to\infty} e^{-s\lg n + s\sum_{k=1}^{n} 1/k} = e^{Cs},$$

a tedy také vlastní

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k},$$

kterou označíme $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k}$. Celkem tedy je

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{Cs} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k}. \tag{44}$$

(Čtenáři, který zná teorii nekonečných součinů – viz **D II** kap. III. § 7 a Weierstrassovu větu o rozvoji celé funkce v nekonečný součin[6]), jsou tyto úvahy jistě běžné.)

Odvodíme ještě několik důležitých vztahů pro funkci gamma. Buď s reálné, $0 < s < 1$. Uvažujme součin

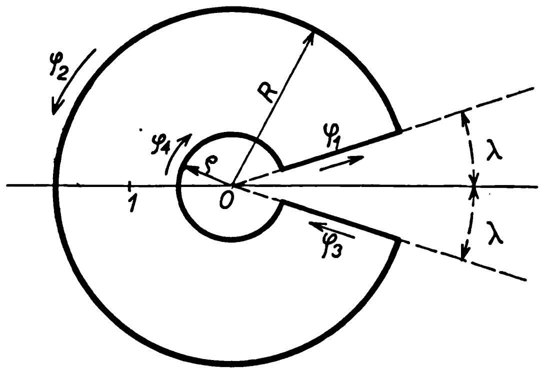
$$\Gamma(s)\,\Gamma(1 - s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx \int_0^\infty e^{-y}y^{-s}\,dy.$$

[6]) Tato věta má být obsažena v pokračování Černého knihy. Jinak viz Saks-Zygmund, Analytic Functions, Warszawa 1952 nebo I. Černý, Úvod do theorie funkcí komplexní proměnné (skriptum) SPN, 1960.

Použijeme-li Fubiniovy věty a substituce $x = u$, $y = uv$, dostáváme vztah

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1 - s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u(1+v)} v^{-s}\, du\, dv = \int_0^\infty \frac{v^{-s}}{1 + v}\, dv\,.$$

Vypočtěme poslední integrál (viz také **J II**, kap. VII, § 5, str. 277; podobný příklad



Obr. 5.

viz Černý, str. 349–351). Zvolme kladná čísla λ, ϱ, R, $\varrho < 1$, $R > 1$, $0 < \lambda < \frac{1}{2}\pi$ a buď

$$\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotminus \varphi_3 \dotminus \varphi_4\,,$$

kde

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= te^{i\lambda} && \text{pro} \quad t \in \langle \varrho, R\rangle\,,\\
\varphi_2(t) &= Re^{it} && \text{pro} \quad t \in \langle \lambda, 2\pi - \lambda\rangle\,,\\
\varphi_3(t) &= te^{-i\lambda} && \text{pro} \quad t \in \langle \varrho, R\rangle\,,\\
\varphi_4(t) &= \varrho e^{it} && \text{pro} \quad t \in \langle \lambda, 2\pi - \lambda\rangle
\end{aligned}$$

(viz obr. 5). Buď $L(z)$ jednoznačná větev logaritmu z v oboru $E - \langle 0, +\infty)$ taková, že $0 < \operatorname{Im} L(z) < 2\pi$. Z residuové věty (Černý, věta 184) dostaneme

$$\int_\varphi F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} \frac{e^{-sL(z)}}{1 + z} = 2\pi i e^{-\pi i s}\,, \tag{45}$$

kde $F(z) = \dfrac{e^{-sL(z)}}{1 + z}$.

Nyní zřejmě máme

$$\left| \int_{\varphi_2} F(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqq 2\pi R \frac{e^{-s\lg R}}{R-1},$$

$$\left| \int_{\varphi_4} F(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqq 2\pi \varrho \frac{e^{-s\lg R}}{1-\varrho}$$

a

$$\lim_{\lambda\to 0+} \int_{\varphi_1} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varrho^R \frac{x^{-s}}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{\lambda\to 0+} \int_{\varphi_2} F(z)\,\mathrm{d}z = e^{-2\pi i s} \int_\varrho^R \frac{x^{-s}}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

kde $\arg x = 0$. Ze vztahu (45) dostaneme postupným provedením limitních přechodů pro $\lambda \to 0_+$, $\varrho \to 0_+$ a $R \to +\infty$ vzhledem k právě uvedeným vztahům

$$\left(1 - e^{-2\pi i s}\right) \int_0^\infty \frac{x^{-s}}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\pi i e^{-\pi i s},$$

tj.

$$\int_0^\infty \frac{x^{-s}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Celkem jsme pro $s \in (0, 1)$ ukázali platnost vztahu

$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \tag{46}$$

Obě strany jsou však meromorfní funkce, a tedy podle věty o jednoznačnosti (Černý, věta 187) platí (46) pro všechny $s \in \boldsymbol{E}$.

Poznámka 2. Z (40) a (44) dostaneme také

$$\frac{1}{\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)} = -\frac{1}{s\,\Gamma(s)\,\Gamma(-s)} = s \prod_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k} \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{s}{k}\right) e^{s/k} =$$

$$= s \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right).$$

Kdybychom nyní znali rozvoj funkce $\sin z$ v nekonečný součin, dostali bychom jiné odvození vztahu (46). Naopak, ze vztahu (46) odtud vyplývá

$$\sin \pi s = \pi s \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right), \tag{47}$$

což je zmíněný rozvoj funkce sinus. (47) pro $s = \frac{1}{2}$ dává postupně

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2n-1)^2 (2n+1)}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2n)^2},$$

tj.

$$(48) \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2 \sqrt{2n+1}},$$

což je tzv. **Wallisova formule**

Odvodíme ještě jedno integrální vyjádření funkce gamma. Zavedeme si však ještě dříve jisté speciální typy křivek, které nemají konečnou délku, a integrál přes tyto křivky.

Buď φ spojité zobrazení kompaktního intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ do $\boldsymbol{S}$. Budeme uvažovat pouze ta zobrazení, pro něž platí:

a) pro všechna dostatečně malá $\varepsilon > 0$ má křivka $\varphi/_{\langle \alpha+\varepsilon, \beta-\varepsilon \rangle}$ konečnou délku;

b) existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že křivky $\varphi/_{\langle \alpha, \alpha+\varepsilon_0 \rangle}$, $\varphi/_{\langle \beta-\varepsilon_0, \beta \rangle}$ jsou buď úsečky nebo polopřímky.

Máme-li nyní takovouto křivku φ, definujeme integrál

$$\int_{\varphi} F(z)\, dz$$

pouze v tom případě, že F je spojitá a konečná na obrazu intervalu (α, β) a existuje vlastní

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0+} \int_{\varphi/\langle \alpha+\varepsilon_1, \beta-\varepsilon_2 \rangle} F(z)\, dz\,,$$

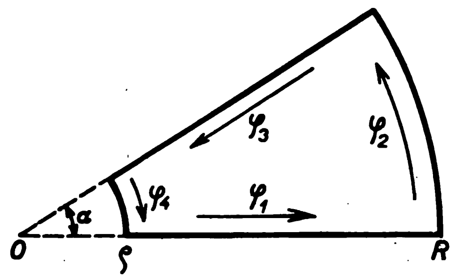
tj. existuje číslo I takové, že ke každému $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, pro něž je $0 < \varepsilon_1 < \delta$, $0 < \varepsilon_2 < \delta$, je také

$$\left| \int_{\langle \alpha+\varepsilon_1, \beta-\varepsilon_2 \rangle} F(z)\, dz - I \right| < \varepsilon\,.$$

Poznamenejme, že lze analogicky zavést křivkový integrál z analytické funkce přes dráhy uvažovaného typu (pro křivky s konečnou délkou viz Černý, str. 428–432). Musíme mít ovšem na paměti, že k určení tohoto integrálu máme ještě zvolit pevně jeden element analytické funkce se středem na křivce, který lze podél křivky pokračovat holomorfními elementy.

Všimněme si nyní, že (32) je vlastně integrál právě popsaného tvaru. Pokusme se integrační dráhu modifikovat. Zvolme $R > 0$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$, $0 < \varrho < R$ a uvažujme křivku (viz obr. 6)

$$\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotminus \varphi_3 \dotminus \varphi_4 ,$$



Obr. 6.

kde

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t && \text{pro} \quad t \in \langle \varrho, R \rangle , \\ \varphi_2(t) &= Re^{it} && \text{pro} \quad t \in \langle 0, \alpha \rangle , \\ \varphi_3(t) &= te^{i\alpha} && \text{pro} \quad t \in \langle \varrho, R \rangle , \\ \varphi_4(t) &= \varrho e^{it} && \text{pro} \quad t \in \langle 0, \alpha \rangle . \end{aligned}$$

Značí-li $L(z)$ hlavní hodnotu $\log z$, je zřejmě pro $s \in E$, $\operatorname{Re} s > 0$

$$\int_\varphi e^{-z+(s-1)L(z)} \, dz = 0$$

(volbou větve logaritmu jsme současně provedli volbu jednoho elementu analytické funkce $e^{-z}z^{s-1}$ se středem na integrační dráze a zapsali jeho pokračování podél φ). Položíme-li $F(z) = e^{-z+(s-1)L(z)}$, máme zřejmě

$$\left| \int_{\varphi_2} F(z) \, dz \right| \leqq \alpha R e^{-R\cos\alpha} R^{\operatorname{Re} s - 1} e^{\alpha|\operatorname{Im} s|} ,$$

$$\left| \int_{\varphi_4} F(z) \, dz \right| \leqq \alpha \varrho^{-\varrho\cos\alpha} \varrho^{\operatorname{Re} s - 1} e^{\alpha|\operatorname{Im} s|} ,$$

a odtud dostaneme snadno

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\varphi_2} F(z) \, dz = \lim_{\varrho \to 0+} \int_{\varphi_4} F(z) \, dz = 0$$

dokonce lokálně stejnoměrně v oboru $\operatorname{Re} s > 0$. Protože

$$\lim_{\substack{\varrho \to 0+ \\ R \to +\infty}} \int_{\varphi_1} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \Gamma(s)\,,$$

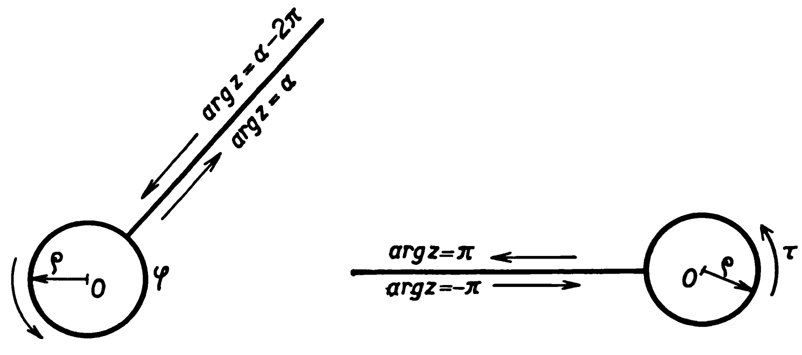
máme vztah

$$\Gamma(s) = \int_{\psi} e^{-z} z^{s-1}\,\mathrm{d}z\,, \quad \operatorname{Re} s > 0\,, \tag{49}$$

kde $\Psi(t) = te^{i\alpha}$, $t \geqq 0 \left(0 \leqq \alpha < \frac{1}{2}\pi\right)$. Stejnou úvahu lze provést i pro $0 > \alpha > > \frac{1}{2}\pi$. Vztah (49) tedy platí pro $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ a v integrandu volíme $\arg z = \alpha$.

Pokusme se nyní odstranit omezení $\operatorname{Re} s > 0$. Toto omezení bylo nutné, neboť integrační dráha procházela počátkem. Pokusme se tedy počátek obejít.

Zvolme $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ a buď R polopřímka $te^{i\alpha}$, $t \in \langle 0, +\infty)$. Volme v $\boldsymbol{E} - R$ jednoznačnou větev logaritmu z — označme ji $L(z)$ — tak, aby $\alpha - 2\pi < \operatorname{Im} L(z) < < \alpha$. Integrační dráhu volíme nyní takto: nejprve polopřímka R „probíhaná od ∞ do bodu $\varrho e^{i\alpha}$“, $\varrho > 0$, potom kladně orientovaná kružnice o středu v počátku a poloměru ϱ, počínající v bodě $\varrho e^{i\alpha}$, a konečně opět polopřímka R „probíhaná od $\varrho e^{i\alpha}$



Obr. 7.

do ∞“. Označíme-li tuto dráhu třeba φ a volíme-li element se středem např. v bodě $\varrho e^{i(\alpha-\pi)}$ ve tvaru $e^{-z+(s-1)L(z)}$, máme při jeho pokračování na prvé polopřímce integrační dráhy $\arg z = \alpha - 2\pi$, kdežto na druhé polopřímce $\arg z = \alpha$ (viz obr. 7).

Jinak znázorněno: při integraci podél R bereme nejprve $\arg z = \alpha - 2\pi$; po druhé $\arg z = \alpha$. (Někdy je výhodná tato představa: integrujeme funkci $e^{-z+(s-1)L(z)}$

postupně po polopřímce $te^{i(\alpha-\varepsilon)}$, $t \geqq \varrho$, potom po oblouku ϱe^{it}, $t \in \langle \alpha + \varepsilon, \alpha + 2\pi - \varepsilon \rangle$ a konečně po polopřímce $te^{i(\alpha-\varepsilon)}$, $t \geqq \varrho$ a provedeme limitu pro $\varepsilon \to 0_+$.)

Abychom ověřili, že integrál přes tuto dráhu skutečně existuje ve smyslu naší definice, stačí uvážit, že zvolíme-li $T > \varrho$, je každý z integrálů přes tu část dráhy φ, která leží v oboru $|z| \geqq T$, nejvýše

$$e^{3\pi|\mathrm{Im}\, s|} \int_T^{\infty} e^{-t\cos\alpha} t^{\mathrm{Re}\, s - 1}\, \mathrm{d}t$$

a tento výraz má pro $T \to +\infty$ limitu nula dokonce lokálně stejnoměrně pro $s \in E$. Odtud tedy také plyne, že

$$\int_{\varphi} e^{-z} z^{s-1}\, \mathrm{d}z \tag{50}$$

je celá funkce, neboť integrál přes část integrační dráhy v oboru $|z| \leqq T$ je funkce celá (viz věta D, § 3, kap. I a věta 14, nebo Černý, věty 158 a 173).

Z Cauchyovy věty dostaneme dále snadno, že integrál (50) nezávisí na hodnotě ϱ (proveďte podrobně!). Buď $\mathrm{Re}\, s > 0$. Podobně jako výše snadno nahlédneme, že integrál přes kružnici má pro $\varrho \to 0_+$ limitu nula. Pro tato s tedy vyjde podle (49)[7])

$$\int_{\varphi} e^{-z} z^{s-1}\, \mathrm{d}z = (1 - e^{-2\pi i s}) \int_{\psi} e^{-z} z^{s-1}\, \mathrm{d}z = 2i \sin \pi s e^{-\pi i s}\, \Gamma(s)$$

a konečně s použitím vztahu (46) vyjde

$$\frac{e^{-\pi i s}}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} e^{-z} z^{s-1}\, \mathrm{d}z\,, \quad s \in E\,, \tag{51}$$

neboť obě strany jsou celé funkce. Píšeme-li v (51) s místo $1 - s$ a $ze^{-\pi i}$ místo z, $\alpha = 0$, dostaneme tzv. **Hankelovu** formuli

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau} \frac{e^z}{z^s}\, \mathrm{d}z\,, \quad s \in E\,, \tag{52}$$

kde integrační dráha je zakreslena i s volbou větví arg z na obr. 7.

Cvičení. Ukažte, že pro $a > 0$, $\mathrm{Re}\, s > 0$ je

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^z}{z^s}\, \mathrm{d}z$$

(integrujeme přes přímku $\mathrm{Re}\, z = a$).

---

[7]) Uvědomte si, jaké hodnoty arg z bereme na jednotlivých částech křivky!

Závěrem tohoto paragrafu odvodíme asymptotické vyjádření gamma funkce – tzv. **Stirlingovu formuli.** Uveďme nejprve jednoduché lemma – tzv. **Soninovu sumační formuli.**

Lemma 1. *Buď $P < Q$ a nechť funkce f (obecně komplexní) má spojitou derivaci v intervalu $\langle P, Q\rangle$. Potom*[8])

$$\sum_{P<n\leqq Q} f(n) = \int_P^Q f(t)\,\mathrm{d}t + f(P)\,\varrho(P) - f(Q)\,\varrho(Q) + \int_P^Q f'(t)\,\varrho(t)\,\mathrm{d}t\,, \tag{53}$$

kde $\varrho(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$, $[t]$ *značí celou část čísla* t. (Tj. $\varrho(t) = t - \frac{1}{2}$ *v* $\langle 0, 1)$ *a* ϱ *má periodu* 1.) *Má-li* f *navíc druhou derivaci spojitou v intervalu* $\langle P, Q\rangle$, *lze v* (53) *psát*

$$\int_P^Q f'(t)\,\varrho(t)\,\mathrm{d}t = \sigma(Q)\,f'(Q) - \sigma(P)\,f'(P) - \int_P^Q f''(t)\,\sigma(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde

$$\sigma(t) = \int_0^t \varrho(u)\,\mathrm{d}u\,.$$ [9])

Důkaz. Neobsahuje-li interval $(P, Q\rangle$ celé číslo, máme integrací per partes

$$\int_P^Q f'(t)\,\varrho(t)\,\mathrm{d}t + f(P)\,\varrho(P) - f(Q)\,\varrho(Q) + \int_P^Q f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

což je (53). Limitním přechodem dostaneme odtud (53) v případě, že interval $(P, Q\rangle$ obsahuje jediné celé číslo, a to Q. V obecném případě použijeme právě dokázaného na intervaly

$$(P, [P] + 1\rangle, ([P] + 1, [P] + 2\rangle, \ldots, ([Q], Q\rangle$$

a získané výsledky sečteme. Zbytek dostaneme integrací per partes.

K odvození Stirlingovy formule zvolme pevně $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ a uvažujme hodnoty s tvaru

$$s = R\mathrm{e}^{i\varphi}\,, \quad |\varphi| < \pi - \delta\,, \quad R > 1\,. \tag{54}$$

Značí-li $\operatorname{Log} z$ hlavní hodnotu $\log z$ $(-\pi < \operatorname{Im} \operatorname{Log} z \leqq \pi)$, položme pro $s \in E - (-\infty, 0\rangle$

$$F(s) = \lim_{n\to\infty} \left(\operatorname{Log} s - s \operatorname{Log} n + \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Log}(s + k) - \operatorname{Log} k)\right). \tag{55}$$

---

[8]) Sčítáme přes všechna celá n, pro něž je $P < n \leqq Q$.

[9]) Zřejmě $\sigma(t) = 0$ pro t celé, $-\frac{1}{8} \leqq \sigma(t) \leqq 0$.

Vyjádříme poslední součet (vlastně součet $\sum_{k=2}^{n} \cdots$) pomocí lemmatu $\Big($klademe $P = 1$, $Q = n$, $f(t) = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{s}{t}\right)\Big)$. Dostaneme

$$\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Log}(s + k) - \operatorname{Log} k) = \operatorname{Log}(s + 1) + \int_1^n \operatorname{Log}\left(1 + \frac{s}{t}\right) \mathrm{d}t +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{s}{n}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{Log}(s + 1) - \int_1^n \sigma(t) \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(s + t)^2}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Log}(s + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{s}{n}\right) + (s + n) \operatorname{Log}(s + n) - n \operatorname{Log} n -$$

$$- (s + 1) \operatorname{Log}(s + 1) - \int_1^n \sigma(t) \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(s + t)^2}\right) \mathrm{d}t,$$

a tedy

$$F(s) = \operatorname{Log} s - \left(s + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log}(s + 1) + \int_1^\infty \frac{\sigma(t)}{(s + t)^2} \mathrm{d}t -$$

$$- \int_1^\infty \frac{\sigma(t)}{t^2} \mathrm{d}t + \lim_{n \to \infty} \left(s + n + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log}\left(1 + \frac{s}{n}\right),$$

neboť[9]) oba integrály konvergují. Zřejmě je poslední limita rovna s. Je tedy

$$-F(s) = - \operatorname{Log} s + \left(s + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log}(s + 1) - s - \int_1^\infty \frac{\sigma(t)\, \mathrm{d}t}{(s + t)^2} + \int_1^\infty \frac{\sigma(t)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že funkce $F(s)$ definovaná v množině $E - (-\infty, 0\rangle$ vztahem (55) je v této množině holomorfní. Uvažme, že funkce $\Gamma(s)$ je nenulová a holomorfní v téže množině, tj. (např. podle věty o monodromii, Černý, str. 433) existuje jednoznačná větev $L(s)$ logaritmu funkce $\Gamma(s)$ v množině $E - (-\infty, 0\rangle$. Zřejmě můžeme předpokládat, že $L(s)$ nabývá reálných hodnot pro kladné hodnoty s. Ze vztahu (43) nyní plyne, že pro kladné reálné hodnoty s je $-L(s) = F(s)$. Protože se jedná o holomorfní funkce v oboru (54), platí podle věty o jednoznačnosti tento vztah v celém oboru (54), tj.

$$L(s) = \left(s + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log}(s + 1) - \operatorname{Log} s - s - \int_1^\infty \frac{\sigma(t)}{(s + t)^2} \mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\sigma(t)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Nyní máme

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(s+1)-\left(s+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}s=\left(s+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{s}\right)=$$

$$=\left(s+\frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{ks^k}=1+O\left(\frac{1}{|s|}\right)\ ^{10)}$$

a

$$\left|\int_1^{\infty}\frac{\sigma(t)}{(s+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqq\frac{1}{8}\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+R^2+2Rt\cos\varphi}\leqq\frac{1}{8R}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1-2t\cos\delta}\,.$$

Výsledný vztah tedy je

$$L(s)=K+\left(s-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}s-s+O\left(\frac{1}{|s|}\right)\ ^{10)}$$

v oboru (54), kde

$$K=1+\int_1^{\infty}\frac{\sigma(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

je konstanta.

Jinak napsáno:

$$\Gamma(s)=e^K\frac{s^{s-1/2}}{e^s}\left(1+O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right),$$

neboť $e^{O(1/|s|)}=1+O\left(\frac{1}{|s|}\right)$ v oboru (54).

Abychom určili hodnotu K, uvažme, že podle (41) je

$$n!=\Gamma(n+1)=e^K\frac{(n+1)^{n+1/2}}{e^{n+1}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=e^K\frac{n^{n+1/2}}{e^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}e^{-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$$

$$=e^K\frac{n^{n+1/2}}{e^n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

---

[10]) Symbol $O(1/|s|)$ znamená takovou funkci $g(s)$ proměnné s, pro niž v oboru (54) je $|s\,g(s)|\leqq c$, kde kladná konstanta c závisí jen na δ.

Dosazením do Wallisovy formule (48) dostaneme

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^K \dfrac{(2n+1)^{2n+3/2}}{e^{2n+1}}}{2^{2n}\sqrt{2n+1}\left(\dfrac{n^{n+1/2}}{e^n}\right)^2 e^{2K}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= e^{-K-1} \lim_{n\to\infty} 2 \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{n^{2n+1}} = 2e^{-K-1} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1} = 2e^{-K},$$

tj.

$$K = \lg \sqrt{2\pi}\,.$$

Platí tedy

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}\,\frac{s^{s-1/2}}{e^s}\left(1 + O\left(\frac{1}{|s|}\right)\right) \tag{56}$$

stejnoměrně v oboru (54) a

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Poznámka 3. Kdybychom integrál

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)}{(s+t)^2}\,dt$$

integrovali několikrát per partes a vhodně volili primitivní funkce, dostali bychom jeho vyjádření ve tvaru

$$\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \ldots + \frac{a_k}{s^k} + O\left(\frac{1}{|s|^{k+1}}\right)^{11)}$$

pro každé přirozené k. Spolu s výše uvedeným rozvojem $\left(s+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{s}\right)$ v mocninnou řadu bychom mohli odvodit Stirlingovu formuli ve tvaru

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi}\,\frac{s^{s-1/2}}{e^s}\left(1 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \ldots + \frac{b_k}{s^k} + O\left(\frac{1}{|s|^{k+1}}\right)\right)$$

pro každé přirozené k, stejnoměrně v oboru (54). Odpovídá to použití tzv. **Euler-Maclaurinovy sumační formule** místo formule Soninovy (pro reálná s viz **J II**, str. 695–696).

---

[11]) Symbolem $O(1/|s|^{k+1})$ rozumíme funkci $g(s)$ proměnné s, pro niž v oboru (54) je $|s^{k+1}\,g(s)| \leqq c$, kde konstanta c závisí jen na δ a k.

§ 4

Studium hypergeometrické řady

V tomto paragrafu budeme vyšetřovat podrobněji hypergeometrickou řadu

$$(57)\quad F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) \,.\, \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\dots n \,.\, \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} x^n$$

za předpokladu

$$(58)\qquad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$$

Je-li α nebo β celé nekladné, je řada (57) polynom; v ostatních případech má poloměr konvergence 1. Znak (57) bude značit součet této řady, pokud je konvergentní (tedy nikoliv analytickou funkci, neomezeně holomorfně pokračovatelnou v $S - \{0, 1, \infty\}$, vytvořenou elementem $\mathscr{E}(0, F(\alpha, \beta, \gamma; x))$. Začněme dvěma jednoduchými lemmaty.

Lemma 2. *Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní řada, $b_n > 0$. Buďte $a_1(\xi), a_2(\xi), \dots$ konečné komplexní funkce, definované v nějaké množině M. Nechť existuje přirozené n_0 tak, že $a_{n_0}(\xi)$ je omezená v M a že pro $\xi \in M$, $n \geqq n_0$ je*

$$(59)\qquad a_n(\xi) \neq 0\,, \quad \left|\frac{a_{n+1}(\xi)}{a_n(\xi)}\right| \leqq \frac{b_{n+1}}{b_n}\,.$$

Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi)$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(\xi)|$ konvergují stejnoměrně v M.

Důkaz. Ježto $b_{n_0} > 0$, existuje $C > 0$ tak, že $|a_{n_0}(\xi)| \leqq Cb_{n_0}$. Odtud a z (59) pro $n \geqq n_0$, $\xi \in M$ plyne $|a_n(\xi)| \leqq Cb_n$.

Poznámka 4. Vezmu-li speciálně $b_n = q^n$ $(0 < q < 1)$, dostanu **podílové** (neboli **d'Alembertovo**) kritérium, upravené pro stejnoměrnou konvergenci. Čtenář je sám vysloví.

Jemnější je toto kritérium (**Raabeovo** neboli **Duhamelovo**):

Lemma 3. *Buďte $a_1(\xi), a_2(\xi), \dots$ konečné komplexní funkce, definované v množině M. Nechť existuje přirozené n_0 a kladné ε tak, že $a_{n_0}(\xi)$ je omezená v M a že*

$$(60)\qquad a_n(\xi) \neq 0\,, \quad \left|\frac{a_{n+1}(\xi)}{a_n(\xi)}\right| < 1 - \frac{1+\varepsilon}{n}$$

pro $n \geqq n_0$, $\xi \in M$.

Potom řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi)$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(\xi)|$ jsou stejnoměrně konvergentní v M.

Důkaz. Pro $\alpha > 0$ je $\left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$[1] pro $n \to \infty$ (míním ovšem kladnou hodnotu mocniny).

Zvolme α tak, že $1 < \alpha < 1 + \varepsilon$, takže pro dosti velká n je $1 - \left(\frac{1+\varepsilon}{n}\right) < \left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha$. V lemmatu 2 zvolme $b_n = \frac{1}{(1-n)^\alpha}$ pro $n > 1$ a třeba $b_1 = 1$. Pro dosti velká n (třeba pro $n \geqq n_1 \geqq n_0$) je $\left|\frac{a_{n+1}(\xi)}{a_n(\xi)}\right| < \left|\frac{n-1}{n}\right|^\alpha = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Přitom z omezenosti $a_{n_0}(\xi)$ plyne omezenost $a_{n_1}(\xi)$ (viz (60)); nyní stačí užít lemmatu 2.

Věta 34. *Řada* (57) (*jakožto funkce čtyř proměnných*) *je lokálně stejnoměrně konvergentní v oboru*

$$\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots, \quad \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0, \quad |x| \leqq 1. \tag{61}$$

Důkaz. Vyšetřujme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \tag{62}$$

$$c_n = \left|\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) \,.\, \beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\ldots n \,.\, \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\right|,$$

která je pro $|x| \leqq 1$ majorantní k (57).

Budiž $[\alpha_0, \beta_0, \gamma_0]$ bod, pro který platí $\gamma_0 + n \neq 0$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\operatorname{Re}(\gamma_0 - \alpha_0 - \beta_0) > 0$. Zřejmě lze zvolit číslo $\varepsilon > 0$ a okolí Ω bodu $[\alpha_0, \beta_0, \gamma_0]$ tak, že pro každý bod $[\alpha, \beta, \gamma] \in \Omega$ platí

$$|\gamma + n| > \varepsilon \quad \text{pro} \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > \varepsilon; \tag{63}$$

$$|\alpha - \alpha_0| < \frac{1}{2}, \quad |\beta - \beta_0| < \frac{1}{2}, \quad |\gamma - \gamma_0| < \frac{1}{2}.$$

Stačí dokázat, že řada (62) je stejnoměrně konvergentní v Ω.

V kruhu $|\alpha - \alpha_0| < \frac{1}{2}$ leží nejvýše jedno celé nekladné číslo α_1, v kruhu $|\beta - \beta_0| < \frac{1}{2}$ nejvýše jedno celé nekladné číslo β_1. Existuje-li α_1 (resp. β_1), budiž Ω_1 (resp. Ω_2) množina oněch bodů z Ω, pro něž je $\alpha = \alpha_1$, resp. $\beta = \beta_1$). Budiž Ω_3 množina všech ostatních bodů z Ω. Je-li $[\alpha, \beta, \gamma] \in \Omega_1$, je $c_n = 0$ pro $n > -\alpha_1$, a tedy (62) konverguje stejnoměrně v Ω_1; podobně konverguje (62) stejnoměrně v Ω_2.

---

[1]) Význam symbolu $O\,(1/n^2)$ je snad jasný z předchozího. Podrobněji viz **D II**, kap. VI, § 13.

V oboru Ω_3 můžeme sestrojit podíl

(64)
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left|\frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}\right| = \frac{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)} = \left|1 - \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} + \frac{\delta_1}{n^2}\right|,$$

kde $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ značí funkce α, β, γ, n, které jsou omezené pro $[\alpha, \beta, \gamma] \in \Omega_3$ a pro $n \geqq n_0$, kde n_0 je vhodně volené číslo nezávislé na bodu $[\alpha, \beta, \gamma]$ množiny Ω_3. $\left(\text{Rozmyslete si tu omezenost podrobněji; např. } \left(1+\frac{\gamma}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{\gamma}{n} + \left\{\frac{\gamma^2}{n^2} - \frac{\gamma^3}{n^3} + \ldots\right\} \text{ pro } n > |\gamma|\right)$. V Ω je $|\gamma| < |\gamma_0| + \frac{1}{2}$, a tedy pro $n > 2(|\gamma_0| + \frac{1}{2})$ je absolutní hodnota závorky menší než $2 \cdot \frac{(|\gamma_0| + \frac{1}{2})^2}{n^2}$. Z (64) dále plyne (pro kladnou odmocninu užiji binomické řady a odhadnu zbytek)

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leqq \left|1 - \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n}\right| + \frac{|\delta_1|}{n^2} =$$
$$= \sqrt{\left(1 - \frac{\operatorname{Re}(1+\gamma-\alpha-\beta)}{n}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}(\gamma-\alpha-\beta)}{n}\right)^2} + \frac{|\delta_1|}{n^2} =$$
$$= \sqrt{1 - \frac{2\operatorname{Re}(1+\gamma-\alpha-\beta)}{n} + \frac{\delta_2}{n^2}} + \frac{|\delta_1|}{n^2} =$$
$$= 1 - \frac{1+\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)}{n} + \frac{|\delta_3|}{n^2} \leqq 1 - \frac{1+\varepsilon}{n} + \frac{|\delta_2|}{n^2} < 1 - \frac{1+\frac{1}{2}\varepsilon}{n}$$

pro $n \geqq n_1$, kde $n_1 \geqq n_0$ je jisté dostatečně velké přirozené číslo.

Nyní užiji lemmatu 3. (Omezenost funkce $c_{n_1} = c_{n_1}(\alpha, \beta, \gamma)$ v Ω_3 je zřejmá.)

Věta 35. *Řada* (57) *je lokálně stejnoměrně konvergentní v oboru*

$$\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots; \quad |x| < 1.$$

Důkaz. Omezíme-li x na kruh $|x| < r$, kde $0 < r < 1$, má (57) v oboru $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots, |x| < r$ majorantní řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ (c_n jako v (62)). Lokálně stejnoměrná konvergence v tomto oboru se dokáže podobnou úvahou jako u věty 34, ale místo Raabeova kritéria se užije podílového kritéria a výpočty se zjednoduší.

Důležitější je věta 34, ač má navíc předpoklad $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$; zato připouští $|x| = 1$.

Pro další účely bude užitečné vědět, že např. množina všech bodů $[\alpha, \beta, \gamma] \in E^3$, pro něž je $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$, $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, je oblast. Rozepíšeme-li to na reálnou a imaginární část: $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, vidíme, že rovnice $\gamma = -n$, tj. $\gamma_1 = -n$, $\gamma_2 = 0$ znamená čtyřrozměrnou „nadrovinu" v šestirozměrném reálném prostoru. Vezměme to obecněji:

Lemma 4. *Budiž Ω oblast v n-rozměrném reálném prostoru R^n, $n \geqq 2$. Budiž $T_1, T_2, \ldots$ posloupnost $(n-2)$-rozměrných „nadrovin", která má tu vlastnost, že každá omezená množina má neprázdný průnik nejvýše s konečným počtem „nadrovin" T_k. Potom $\Omega_1 = \Omega - \bigcup_k T_k$ je oblast.*

Důkaz. Ω_1 je zřejmě otevřená. Budiž $a \in \Omega_1$, $b \in \Omega_1$. Body a, b lze spojit lomenou čarou L, ležící v Ω. Přitom lze libovolně malou změnou čáry L dosáhnout toho, že krajní body jejích úseček leží mimo „nadroviny" $T_1, T_2, \ldots$, takže každá úsečka čáry L protíná každou T_k nejvýše v jednom bodě. Existuje omezená otevřená M, obsahující L.

Nechť např. strana $S = \overline{\alpha, \beta}$ čáry L protíná T_1 v bodě γ (je $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \neq \beta$). „Nadrovina" T_1 je dána dvěma rovnicemi

$$L_j(x) = d_j \tag{65}$$

$(j = 1, 2)$; přímka obsahující S je dána $n-1$ rovnicemi (65) $(j = 3, \ldots, n+1)$. Zde $L_j(x) = c_{1j}x_1 + \ldots + c_{nj}x_n$; přitom L_1, L_2 jsou lineárně nezávislé, podobně $L_3, \ldots, L_{n+1}$. Rovnice (65) $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ mají právě jedno řešení γ. Mezi $L_1, \ldots, L_{n+1}$ platí tedy netriviální lineární relace, v níž vystupuje aspoň jedna z forem $L_3, \ldots, L_{n+1}$ s nenulovým koeficientem, např. L_k. Táž lineární relace platí mezi $d_1, \ldots, d_{n+1}$ (ježto systém $n+1$ rovnic (65) má řešení). Vynechám-li k-tou rovnici (65), dostanu systém n rovnic, jež mají právě jedno řešení γ. Tedy jsou formy L_j $(1 \leqq j \leqq n+1, j \neq k)$ lineárně nezávislé, první dvě určují T_1, ostatní (v počtu $n-2$) určují dvourozměrnou rovinu P, obsahující úsečku $\overline{\alpha, \beta}$. Dvourozměrná rovina P má s T_1 jediný společný bod γ. Je jasné, že lze úsečku $\overline{\alpha, \beta}$ v rovině P nahradit lomenou čarou, spojující α s β a neobsahující bod γ, tedy nemající společný bod s T_1. Přitom lze tuto čáru volit libovolně blízko úsečky $\overline{\alpha, \beta}$ tedy i tak, aby ležela v M. Postupně mohu nahradit L lomenou čarou L_1, ležící v $\Omega \cap M$, spojující α s β a nemající společných bodů s T_1. Nyní nahradím L_1 obdobnou čarou L_2, nemající společných bodů s T_2; jestliže se L_2 dosti málo liší od L_1 (čehož lze dosáhnout), nebude L_2 mít společných bodů ani s T_1. Po konečném počtu kroků dostanu lomenou čáru v Ω_1, spojující a s b. Tedy je Ω_1 souvislá.

Vraťme se k řadě (57) za předpokladu (58). Obecný člen této řady lze psát (viz stále § 3)

$$(-1)^n \binom{-\alpha}{n} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} x^n =$$

$$= \binom{-\alpha}{n} (-x)^n \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\beta+n)\,(\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\gamma-\beta)},$$

pokud $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re} \gamma > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0$ (potom je zaručeno, že nepotkáme žádný pól funkce Γ). Podle vzorců (38), (42) je tedy pro $|x| < 1$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0$ (odkud již plyne $\operatorname{Re} \gamma > 0$)

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \tag{66}$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma - \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \binom{-\alpha}{n} (-xu)^n\, u^{\beta-1}(1 - u)^{\gamma-\beta-1}\, du\,.$$

Při pevném x, $|x| < 1$ je k řadě $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-xu)^n$ v intervalu $0 < u < 1$ majorantní řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha| (|\alpha| + 1) \ldots (|\alpha| + n - 1)}{1\,.\,2 \ldots n} |x|^n\,,$$

jež konverguje. Ježto $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0$, lze v (66) podle Lebesgueovy věty zaměnit pořadí sumace a integrace a máme

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 u^{\beta-1}\,(1 - u)^{\gamma-\beta-1}\,(1 - xu)^{-\alpha}\, du \tag{67}$$

pro

$$|x| < 1\,, \quad \operatorname{Re} \beta > 0\,, \quad \operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0\,.$$

Přitom $(1 - V)^{-\alpha}$ značí onu větev v $\Omega = \boldsymbol{E} - \langle 1, +\infty)$, která pro $V = 0$ má hodnotu 1 (a je tedy pro $|V| < 1$ dána binomickou řadou). Všimněme si, že v Ω je $(1 - V)^{-\alpha}$ lokálně omezená (jde o hodnotu mocniny, příslušnou k hodnotě $\arg(1 - V)$ z intervalu $(-\pi, \pi)$). Odtud plyne, že integrál

$$I_\varepsilon(x) = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u^{\beta-1}\,(1 - u)^{\gamma-\beta-1}\,(1 - xu)^{-\alpha}\, du \quad (0 < \varepsilon < \tfrac{1}{2})$$

konverguje pro $\varepsilon \to 0_+$ lokálně stejnoměrně v Ω. Ježto $I_\varepsilon(x)$ je holomorfní funkce x, plyne odtud, že integrál v (67) je holomorfní v Ω. Tedy:

Věta 36. *Je-li* $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0$, *platí pro* $|x| < 1$ *vztah* (67). *Integrál vpravo je holomorfní funkce v* $\Omega = \boldsymbol{E} - \langle 1, +\infty)$. *Přitom* $(1 - V)^{-\alpha}$ *značí onu větev v* Ω, *která pro* $V = 0$ *má hodnotu* 1.

Předpokládejme nyní, že

$$\operatorname{Re} \alpha > 0\,, \quad \operatorname{Re} \beta > 0\,, \quad \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0 \tag{68}$$

(odkud již plyne $\operatorname{Re}(\gamma - \beta) > 0$). Podle věty 34 je levá strana (67) spojitá v $|x| \leqq 1$, podle věty 36 je pravá strana spojitá v Ω. Tedy rovnost (67) platí pro $|x| \leqq 1$,

$x \neq 1$. Všimněme si ještě hodnoty $x = 1$. Nechme $x > 0$ konvergovat k 1 zleva. Limita levé strany je $F(\alpha, \beta, \gamma; 1)$. Vpravo je pro $0 < x < 1$, $0 < u < 1$

$$|u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}| \leqq u^{\mathrm{Re}\beta-1}(1-u)^{\mathrm{Re}(\gamma-\beta)-1} \,.\, (1-u)^{-\mathrm{Re}\alpha}$$

a integrál pravé strany této nerovnosti od 0 do 1 konverguje. Tedy lze v (67) vpravo provést limitní přechod $x \to 1-$ za integračním znamením. Tedy limita integrálu v (67) vpravo je $\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,du$, takže v oblasti (68) máme

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,. \tag{69}$$

Tato rovnost platí pro α, β, γ z oblasti (68), jež je částí oblasti (viz lemma 4)

$$\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha-\beta) > 0\,, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots \tag{70}$$

Ale levá strana je podle věty 34 holomorfní funkce α, β, γ v oblasti (70) a v téže oblasti je holomorfní pravá i strana. Tedy (viz větu 10):

Věta 37. *Rovnost* (69) *platí v oblasti* (70).

Cvičení. Vyšetřte konvergenci řady (57) na konvergenční kružnici. Postupujte buď parciální sumací nebo uvažte, že podle (56) je pro $\alpha, \beta, \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots\gamma+n-1)\,n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,\frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\,\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Odtud ihned plyne např. konvergence pro $|x| \leqq 1$, $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha-\beta) > 0$ nebo $|x| \leqq 1$, $x \neq 1$, $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha-\beta) > -1$ a divergence v případech $|x| = 1$, $\mathrm{Re}\,(\gamma - {}$ ${}-\alpha-\beta) \leqq -1$ nebo $x = 1$, $\mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha-\beta) \leqq 0$. Zkuste podobně vyšetřit stejnoměrnou konvergenci!

§ 5

Grupa permutací větví analytické funkce při analytickém pokračování

Řešení Gaussovy rovnice jsou neomezeně holomorfně pokračovatelná v trojnásobně souvislé oblasti $S - \{0, 1, \infty\}$. V jednoduše souvislé oblasti $E - \langle 0, +\infty)$ jsou všechny jejich větve holomorfní. Pokračuji-li některou větev f po křivce φ

v $S - \{0, 1, \infty\}$, která protíná interval $\langle 0, +\infty)$, může přejít v jinou větev g (měl jsem vlastně mluvit o elementech: $\mathscr{E}(a, f) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(b, g)$). Pro studium těchto přechodů u Gaussovy rovnice připravím nyní některé obecné podklady.

Věta 38. *Budiž $\mathfrak{F}$ funkce analytická v oblasti $\Omega \subset S$. Budiž $M \neq \emptyset$ oblast, $M \subset S$. Potom má $\mathfrak{F}$ v M jen spočetně mnoho větví (možná že žádnou).*

Důkaz. Je-li $\mathscr{E}(a, F) \in \mathfrak{F}$, je F meromorfní v jistém $U(a, \delta)$. Potom pro každé $b \in U(a, \delta)$ je též $\mathscr{E}(b, F) \in \mathfrak{F}$. Každá (rozumím: neprázdná) větev funkce $\mathfrak{F}$ v oblasti M je tedy dána nějakým elementem $\mathscr{E}(c, G) \in \mathfrak{F}$ s racionálním středem $c \in M$ (tím míním, že $\operatorname{Re} c$, $\operatorname{Im} c$ jsou racionální). Zvolme pevně element $\mathscr{E}(a, F) \in \mathfrak{F}$ s racionálním $a \in M$. Pro každý element $\mathscr{E}(c, G)$ s racionálním $c \in M$ existuje křivka φ v Ω tak, že $\mathscr{E}(a, F) \xrightarrow[\varphi]{} \mathscr{E}(c, G)$. Přitom, jak víme, lze volit φ po částech lineární a tak, aby její „vrcholy" byly racionální. Ale takových křivek je jen spočetně mnoho, a tedy i elementů $\mathscr{E}(c, G) \in \mathfrak{F}$ s racionálním $c \in M$, které určují všechny větve $\mathfrak{F}$ v M, je jen spočetně mnoho.

Důsledek. *Budiž $\mathfrak{F}$ analytická v Ω, $a \in \Omega$. Potom $\mathfrak{F}$ má jen spočetně mnoho elementů o středu a. Tedy má $\mathfrak{F}$ zřejmě nejvýše spočetně mnoho hodnot v bodě a.*

Důkaz. Každý element $\mathfrak{F}$ o středu a lze psát ve tvaru $\mathscr{E}(a, F)$, kde F je meromorfní v $U\left(a, \frac{1}{n}\right)$ pro jisté celé kladné n. Potom F je větev $\mathfrak{F}$ v $U\left(a, \frac{1}{n}\right)$. Takových větví je při daném n spočetně mnoho a množina těch n je spočetná.

Vezměme nyní speciální případ:

Budiž $\mathfrak{F}$ analytická a neomezeně pokračovatelná v oblasti $\Omega \subset S$. Budiž M jednoduše souvislá, $\emptyset \neq M \subset \Omega$.

$\mathfrak{F}$ má v M spočetně mnoho různých větví

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{71}$$

(aspoň jednu), které jsou meromorfní v M. Pokračují-li tyto větve (vlastně: elementy $\mathscr{E}(\alpha, f_j)$) podél nějaké křivky C v Ω s počátkem $\alpha \in M$ a koncem $\beta \in M$, permutují se tyto větve jistým způsobem (**permutací** nějaké množiny nazýváme prosté zobrazení té množiny na sebe). Že je to permutace, nahlédneme takto: Je $\mathscr{E}(\alpha, f_j) \xrightarrow[C]{} \mathscr{E}(\beta; f_k)$. Různým j odpovídají různá k (to je vidět, pokračuji-li $\mathscr{E}(\beta, f_k)$ podél $\dot{-}C$). Tedy je zobrazení prosté. Dále: Je-li f_k některá z větví (71), platí $\mathscr{E}(\beta, f_k) \xrightarrow[\dot{-}C]{} \mathscr{E}(\alpha, f_j)$ pro některé j, takže $\mathscr{E}(\alpha, f_j) \xrightarrow[C]{} \mathscr{E}(\beta, f_k)$. Tedy je to zobrazení množiny (71) na sebe.

Množinu všech permutací množiny (71), odpovídajících všem křivkám v Ω, majících počátek a konec v M, označme $\mathfrak{G}$.

Tvrdím: abych dostal všechny permutace z $\mathfrak{G}$, stačí zvolit nějaký bod $\alpha \in M$ a vyšetřovat permutace, odpovídající uzavřeným křivkám v Ω, majícím počátek (a tedy i konec) α. Neboť jestliže pokračování podél křivky C s počátkem $\gamma \in M$

a koncem $\delta \in M$ vede k permutaci P, lze spojit α s γ křivkou C_1 v M a δ s α křivkou C_2 v M. Křivkám C_1, C_2 odpovídá identická permutace, a tedy křivce $C_1 \dotplus C \dotplus C_2$ (uzavřené s počátkem α) odpovídá permutace P.

Odpovídá-li křivce C permutace P, odpovídá křivce $\dot{-} C$ inversní permutace P^{-1}. Odpovídá-li křivce C_1 (resp. C_2) permutace P_1 (resp. P_2) a je-li konec C_1 počátkem C_2, odpovídá křivce $C_1 \dotplus C_2$ složená permutace $\mathsf{P}_2\mathsf{P}_1$ (takto definovaná: $\mathsf{P}_2\mathsf{P}_1(f_j) = \mathsf{P}_2(\mathsf{P}_1(f_j))$. To lze speciálně provést pro všechny uzavřené křivky v Ω s týmž počátkem $\alpha \in M$. Ježto tak dostaneme všechny permutace z $\mathfrak{G}$, máme tento výsledek:

$$\mathfrak{G} \quad \textit{je grupa} .$$

Tuto grupu budeme vyšetřovat v jednom ještě speciálnějším případě:

Budiž $\Omega_1 \subset S$ jednoduše souvislá oblast, $\Omega_1 \neq S$, takže hranice oblasti Ω_1 není prázdná. Budiž

$$\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_p\} \tag{72}$$

konečná množina p různých bodů z Ω_1 $(p \geqq 1)$. Položme $\Omega = \Omega_1 - \Xi$. Budiž $\mathfrak{F}$ funkce analytická a neomezeně pokračovatelná v Ω.

Ω je podle lemmatu 4, § 4 oblast, ovšem $(p + 1)$-násobně souvislá. Body $\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_p$ vedu „řezy" $R_1, \ldots, R_p$ takto: každý řez R_k je prostá lomená čára (viz Černý, str. 96) o konci ξ_k a počátku z_k, ležícím na hranici Ω_1; přitom všechny body z R_k, kromě ξ_k, z_k leží v Ω; dále R_j, R_k $(j \neq k)$ nemají společné body kromě snad počátečního bodu. Dokážeme, že takové řezy existují a že

$$N = \Omega - \bigcup_{j=1}^{p} R_j = \Omega_1 - \bigcup_{j=1}^{p} R_j \tag{73}$$

je jednoduše souvislá oblast. (V (73) nepřihlížíme k orientaci.)

K tomu je zapotřebí několika pomocných úvah.

1. *Budiž O oblast, $a \in H(O)$; nechť úsečka (popříp. polopřímka) $\overline{a, b}$ kromě bodu a leží celá v O. Potom $O - \overline{a, b}$ je oblast a její hranice je $H(O) \cup \overline{a, b}$.*

Důkaz: Body $x, y \in O - \overline{a, b}$ lze spojit lomenou čarou L v O, která ovšem může protnout $\overline{a, b}$; ale je zřejmé, že mohu úsečku $\overline{a, b}$ obejít; viz obr. 8, kde silně vytaženou část L nahradím vytečkovanou částí. Výrok o hranici je jasný. (Čtenář si jistě dovede nahradit obr. 8 přesnou úvahou.)

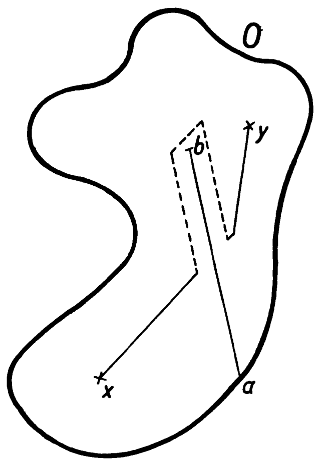
2. *Budiž O oblast, L budiž prostá lomená čára, jejíž počátek a leží v $H(O)$ a všechny její ostatní body leží v O. Potom $O - L$ je oblast s hranicí $H(O) \cup L$.*

Důkaz indukcí: podle bodu 1 postupně přidávám úsečky z L.

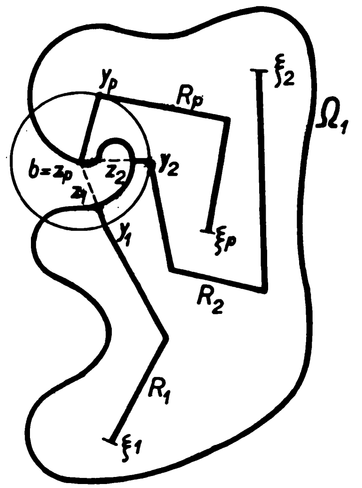
3. *Je-li v předchozím bodě množina O jednoduše souvislá, je i $O - L$ jednoduše souvislá.*

Důkaz: Doplněk množiny $O - L$ je $(S - O) \cup L$, kde $S - O$, L jsou souvislé a mají společný bod a.

Nyní přistoupím ke konstrukci řezů $R_1, \ldots, R_p$ (a jistých oblastí $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$). Tyto řezy a oblasti budeme potřebovat v § 6 a § 7 jen pro studium Gaussovy rovnice, kde tyto konstrukce jsou triviální. Vlastně tedy výklad těchto konstrukcí je pro další text zbytečný; ale snad právě pro hlubší pochopení následujících paragrafů je



Obr. 8.



Obr. 9.

prospěšné uvědomit si situaci v poněkud obecnějším případě. S ohledem na jednoduchý případ, který jedině v následujících paragrafech budeme potřebovat, má výklad o konstrukci R_j, Δ_j poněkud informativní charakter: některé úvahy provádíme trochu zběžně a přenecháváme čtenáři, aby si je, chce-li, doplnil.

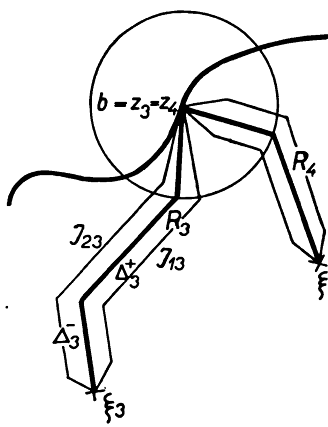
Máme body $\xi_1, \ldots, \xi_p \in \Omega_1$; zvolme bod $b \in H(\Omega_1)$; mysleme si, že $\xi_j \in \boldsymbol{E}$, $b \in \boldsymbol{E}$ (modifikaci pro $\xi_j = \infty$ nebo $b = \infty$ přenechávám čtenáři). Sestrojme kružnici K o středu b s poloměrem tak malým, že všechny body ξ_j leží vně K. Na K leží body z Ω_1, tedy též z Ω; ježto Ω je otevřená, existuje oblouk kružnice K, který celý leží v Ω. Zvolme v $K \cap \Omega$ p různých bodů $y_1, \ldots, y_p$. Sestrojme poloměry $\overline{y_k, b}$ $(k = 1, \ldots, p)$. Postupujeme-li od y_k po tomto poloměru, potkáme jednou poprvé bod z $H(\Omega_1)$; tento bod označíme z_k. Úsečka $\overline{z_k, y_k}$ leží celá v Ω_1 (a dokonce v Ω), s výjimkou bodu $z_k \in H(\Omega_1)$. Jediným společným bodem dvou úseček $\overline{z_k, y_k}$, $\overline{z_j, y_j}$ $(j \neq k)$ může být bod z_k, splývá-li s b (viz obr. 9). Budeme nyní užívat našich pomocných úvah. V oblasti

$$\Omega_1 - \bigcup_{j=2}^{p} \overline{z_j, y_j} \tag{74}$$

spojím bod y_1 prostou lomenou čarou L_1 s bodem ξ_1, přičemž se vyhnu bodům $\xi_2, \ldots, \xi_p$. Lomená čára $\overline{z_1, y_1} \cup L_1$ má všechny žádané vlastnosti až na to, že nemusí být prostá. Snadno ji však nahradím prostou lomenou čarou R_1 takto: Postupuji z bodu z_1 po úsečce $\overline{z_1, y_1}$ tak daleko, až se poprvé setkám s bodem čáry L_1, načež postupuji dále po L_1 až do bodu ξ_1. Nyní budu konstruovat R_2: v oblasti $\Omega_1 - \left(R_1 \cup \bigcup_{j=3}^{p} \overline{z_j, y_j}\right)$ spojím y_2 s ξ_2 obdobně jako dříve lomenou prostou čarou L_2 a z čáry $\overline{z_2, y_2} \cup L_2$ sestrojím prostou lomenou čáru R_2 podobně jako dříve, atd. Podle našich pomocných úvah je množina N v (73) jednoduše souvislá oblast. Budeme studovat větve analytické funkce $\mathfrak{F}$ v N a příslušnou grupu $\mathfrak{G}$ jejich permutací.

Nyní sestrojím oblasti Δ_k $(k = 1, \ldots, p)$. Věc je velmi názorná; k přesné formulaci je třeba některých vět z oblasti Jordanovy věty; doporučuji čtenáři, aby si zopakoval sedmou kapitolu Černého knihy. Pro zjednodušení nechť se všechno odehrává v E; čtenář si jistě doplnění provede sám.

Pro každé $k = 1, \ldots, p$ sestrojím Jordanovu křivku $J_k \subset \Omega \cup \{z_k\}$ obsahující body z_k, ξ_k; její vnitřek označím Δ_k. Body z_k, ξ_k rozdělují J_k na dva oblouky J_{1k}, J_{2k} Požaduji předně, aby $\tilde{R}_k \subset \Delta_k$ (je-li B oblouk s krajními body a, b, značím $\tilde{B} = B - \{a, b\}$). Vnitřek křivky $J_{1k} \cup R$ označme Δ_k^+, vnitřek $J_{2k} \cup R$ označme Δ_k^-. Množiny Δ_k, Δ_k^+, Δ_k^- jsou jednoduše souvislé oblasti. Požaduji dále, aby $(\bar{\Delta}_k - \{z_k\}) \cap (\bar{\Delta}_j - \{z_j\}) = \emptyset$ pro $k \neq j$ (takže $\bar{\Delta}_k$, $\bar{\Delta}_j$ mají jediný společný bod z_k,



Obr. 10.

je-li $z_k = z_j$; v ostatních případech je $\bar{\Delta}_k \cap \bar{\Delta}_j = \emptyset$). Existence takových y_k, Δ_k je snad dost názorně patrná z obr. 10; příslušnou úvahu je možno snadno doplnit.

Je nutné volit Δ_k dosti „úzké" a v blízkosti bodu z_k dosti zašpičatělé (viz obr. 10). Konstrukci je nejlépe provádět postupně pro $k = 1, \ldots, p$. Při konstrukci Δ_k je nutno respektovat Δ_j pro $j < k$ a R_j pro $j > k$ (aby nedošlo k nežádoucím neprázdným průnikům).

Naše funkce $\mathfrak{F}$ (analytická a neomezeně pokračovatelná v Ω) má v N (viz (73)) jednoznačné větve $f_1, f_2, \ldots$ Vezměme nějaký index k ($k = 1, \ldots, p$) a některou větev f_j. Ta je meromorfní v Δ_k^- a dá se neomezeně pokračovat do jednoduše souvislé oblasti Δ_k. Výsledkem je jistá funkce φ_{jk}, meromorfní v Δ_k, rovná f_j v Δ_k^- a rovná některé větvi f_m v Δ_k^+. Položme $\mathsf{P}_k(f_j) = f_m$. Tím dostávám jistou permutaci P_k větví $f_1, f_2, \ldots$ Ukáži, jak lze z permutací $\mathsf{P}_1, \ldots, \mathsf{P}_p$ sestrojit grupu $\mathfrak{G}$ a permutaci příslušnou k libovolné křivce C (aniž bych to stále opakoval, rozumím až do konce tohoto paragrafu slovem „křivka" křivku v Ω, jejíž počátek a konec leží v N, tj. neleží v $\bigcup_{k=1}^{p} R_k$). Budu říkat, že permutace P přísluší nebo odpovídá křivce C, když $\mathscr{E}(a, f_j) \xrightarrow[C]{} \mathscr{E}(b, \mathsf{P}(f_j))$ pro všechny větve f_j a budu kratčeji psát $f_j \xrightarrow[C]{} \mathsf{P}(f_j)$ (omyl nemůže nastat).

Budiž předně C křivka v Δ_k. Potom zřejmě $\varphi_{jk} \xrightarrow[C]{} \varphi_{jk}$ a odtud plyne:

1. *Leží-li počátek křivky v Δ_k^-, konec v Δ_k^+, je $f_j \xrightarrow[C]{} \mathsf{P}_k(f_j)$, tj. křivce C odpovídá permutace P_k.*

2. *Leží-li počátek v Δ_k^+, konec v Δ_k^-, odpovídá křivce C permutace P_k^{-1}.*

3. *Leží-li oba body (počátek a konec) v Δ_k^- nebo v Δ_k^+, odpovídá křivce C permutace identická (neboli P_k^0).*

Oblasti Δ_k, Δ_k^+, Δ_k^- buďte nyní pevně dány. Zřejmé je však toto: kdybychom nahradili Δ_k obdobnými oblastmi $\Delta_k'^+ \subset \Delta_k^+$, $\Delta_k'^- \subset \Delta_k^-$, $\Delta_k' \subset \Delta_k$, dostali bychom tytéž permutace P_k, neboť jde o touž funkci φ_{jk}, jenom zúženou na oblast Δ_k'.

Budiž nyní dána jakákoliv křivka $C(t)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, s počátkem α a koncem β. Je-li $t_0 \leqq t' < t'' \leqq t_1$, bude $C_{t',t''}$ značit křivku $C(t)$, $t' \leqq t \leqq t''$.

Zvolme „menší" oblasti Δ_k', definované podobně jako dříve pomocí křivek J_{1k}', J_{2k}' takových, že $J_{1k}' - \{\xi_k, z_k\} \subset \Delta_k^+$, $J_{2k}' - \{\xi_k, z_k\} \subset \Delta_k^-$ a že body α, β neleží v $\bigcup_{k=1}^{p} \bar{\Delta}_k'$. Ježto C leží v Ω, lze opsat kolem bodů ξ_k, z_k kruhy, do nichž C nezasahuje.

Představme si, že pro některou hodnotu τ ($t_1 < \tau < t_2$) a některé k je $C(\tau) \in R_k$. Sestrojme největší interval $\langle \tau_0, \tau_1 \rangle$ takový, že $\tau_0 < \tau < \tau_1$, $C_{\tau_0,\tau_1} \subset \bar{\Delta}_k'$.

Body $C(\tau_0)$, $C(\tau_1)$ leží na $H(\Delta_k')$, a tedy v Δ_k. Budeme říkat, že $\langle \tau_0, \tau_1 \rangle$ je **kritický interval typu** (k, η), kde η je definováno takto: Je-li $C(\tau_0) \in \Delta_k^-$, $C(\tau_1) \in \Delta_k^+$, je $\eta = 1$; je-li $C(\tau_0) \in \Delta_k^+$, $C(\tau_1) \in \Delta_k^-$, je $\eta = -1$; leží-li oba body $C(\tau_0)$, $C(\tau_1)$ v Δ_k^- nebo leží-li oba v Δ_k^+, je $\eta = 0$. Je zřejmé, že křivce C_{τ_0,τ_1} přísluší permutace P_k^η.

Dokáži nyní, že pro křivku C *existuje jen konečný počet různých* (a tedy disjunktních) *kritických intervalů*. Je zřejmé toto: Množina oněch bodů z R_k, které neleží v kruzích opsaných kolem bodů z_k, ξ_k, má od $H(\Delta_k')$ kladnou vzdálenost ε_k; položme $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$. Ježto každý kritický interval $\langle \tau_0, \tau_1 \rangle$ obsahuje bod τ, pro který je $C(\tau) \in R_k$, je pro takový bod $|C(\tau_1) - C(\tau)| \geqq \varepsilon$. Ale ze stejnoměrné spojitosti plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(|t' - t''| < \delta,\ t' \in \langle t_1, t_2\rangle,\ t'' \in \langle t_1, t_2\rangle) \Rightarrow |C(t') - C(t'')| < \varepsilon\,.$$

Pro každý kritický interval $\langle\tau_0, \tau_1\rangle$ je tedy $\tau_1 - \tau_0 > \tau_1 - \tau \geqq \delta$. Tedy je vskutku těch kritických intervalů jen konečný počet; označme je zleva do prava $\langle\lambda_1, \mu_1\rangle, \ldots$ $\ldots, \langle\lambda_r, \mu_r\rangle$ a položme ještě $\mu_0 = t_1$, $\lambda_{r+1} = t_2$ (může ovšem být také $r = 0$), takže $t_1 = \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \ldots < \lambda_r < \mu_r < \lambda_{r+1} = t_2$. Křivky $C_{\mu_i, \lambda_{i+1}}$ leží v N, tedy jim přísluší identická permutace. Nechť interval $\langle\lambda_s, \mu_s\rangle$ je typu (k_s, η_s). Potom tedy křivce C přísluší permutace

$$\mathsf{P} = \mathsf{P}_{k_r}^{\eta_r}\mathsf{P}_{k_{r-1}}^{\eta_{r-1}} \ldots \mathsf{P}_{k_1}^{\eta_1} \tag{75}$$

(pro $r = 0$ znamená „prázdná" pravá strana identickou permutaci). Odtud je také vidět názorný význam permutace P_k: ta přísluší kružnici o středu ξ_k a o dostatečně malém poloměru, která přechází z Δ_k^- do Δ_k^+ (čtenář mně rozumí). Stačí volit poloměr tak malý, že ze všech řezů $R_1, \ldots, R_p$ protíná kružnice jen onu úsečku z R_k, která má koncový bod ξ_k.

Z (75) je vidět, že $P_1, \ldots, P_p$ tvoří tzv. **systém generátorů** grupy $\mathfrak{G}$, tj. každou permutaci $P \in \mathfrak{G}$ lze psát ve tvaru (75). Může se ovšem stát, že $\mathfrak{G}$ má systém generátorů, mající méně než p členů.

Příklad: $\mathfrak{F} = ((x - \xi_1) \ldots (x - \xi_p))^{1/2}$ $(p > 1,\ \xi_j \neq \xi_k \neq \infty$ pro $j \neq k)$.

Volím-li $\Omega_1 = E$, volím p řezů $R_1, \ldots, R_p$ z ∞ do bodů $\xi_1, \ldots, \xi_p$. V $N = \Omega_1 - \bigcup_{j=1}^{p} R_j$ má $\mathfrak{F}$ jen dvě větve f, $-f$. Tedy lze vytvořit $\mathfrak{G}$ jediným generátorem, který převádí f v $-f$ a větev $-f$ v f.

§ 6

Vztahy mezi různými fundamentálními systémy řešení Gaussovy rovnice

Všechna řešení Gaussovy rovnice jsou neomezeně holomorfně pokračovatelná v $S - \{0, 1, \infty\}$. Abychom mohli použít metod předešlého paragrafu, zvolme $\Omega_1 = S - \{1\}$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \infty$ a označme $R_0 = \langle 0, 1\rangle$, $R_\infty = \langle 1, +\infty\rangle$ (to se nám hodí lépe než označení R_1, R_2). Kladnou a zápornou stranu řezu volme jako na obr. 11 a příslušné permutace označme $\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_\infty$; ty tedy přísluší křivkám $\varrho_1 e^{it}$, $-\pi \leqq t \leqq \pi$, resp. $\varrho_2 e^{-it}$, $-\pi \leqq t \leqq \pi$, kde $0 < \varrho_1 < 1 < \varrho_2 < +\infty$.

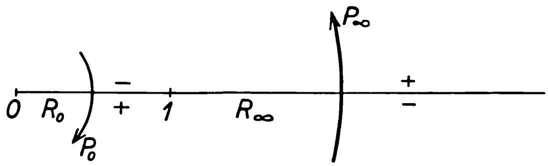
Abychom nemusili dále vyšetřovat řadu výjimečných případů, budeme v tomto i v následujícím paragrafu předpokládat, že

$$(76) \qquad \gamma, \gamma - \alpha - \beta\,, \quad \alpha - \beta \quad \text{jsou necelá čísla}\,.$$

V označení § 5 je nyní

$$N = E - \langle 0, +\infty \rangle\,.$$

Fundamentální systémy, kterých budeme užívat, budou (26), (27), (28) z § 2.



Obr. 11.

Každé řešení Gaussovy rovnice je neomezeně pokračovatelné v $S - \{0, 1, \infty\}$; budeme vyšetřovat jeho jednoznačné větve v N. Nezávisle proměnnou značme t, abychom měli více písmen k dispozici. Abychom vytkli určité jednoznačné větve t^λ, $(1 - t)^\lambda$, musíme zvolit určité hodnoty $\arg t$, $\arg(1 - t)$.

Zvolíme jednoznačné větve $x_1(t)$, $x_2(t)$; $y_1(t)$, $y_2(t)$; $z_1(t)$, $z_2(t)$ v N. To budou jistá řešení Gaussovy rovnice v N, tedy holomorfní funkce s definičním oborem N. Určíme je tak, že je pomocí fundamentálních systémů definujeme v určitých podoblastech oblasti N, a to takto:

$$(77) \qquad \begin{cases} x_1(t) = F(\alpha, \beta, \gamma; t)\,, \\ x_2(t) = t^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma; t) \\ \text{pro} \quad 0 < |t| < 1\,, \quad 0 < \arg t < 2\pi\,, \end{cases}$$

$$(78) \qquad \begin{cases} y_1(t) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1 - t)\,, \\ y_2(t) = (1 - t)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha,\ \gamma - \beta,\ \gamma - \alpha - \beta + 1;\ 1 - t) \\ \text{pro} \quad |1 - t| < 1,\ \operatorname{Im} t > 0,\ -\pi < \arg(1 - t) < 0\,, \end{cases}$$

$$(79) \qquad \begin{cases} z_1(t) = t^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1;\ \dfrac{1}{t}\right), \\ z_2(t) = t^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1,\ \beta - \alpha + 1;\ \dfrac{1}{t}\right) \\ \text{pro} \quad 1 < |t| < +\infty,\ 0 < \arg t < 2\pi\,. \end{cases}$$

Tedy ještě jednou: x_1, x_2 jsou holomorfní funkce v N, které v podoblasti $|t| < 1$, $t \notin R_0$ jsou dány vzorci (77). Tvoří v N fundamentální systém řešení Gaussovy rovnice. Podobně y_1, y_2 a z_1, z_2. Všimněte si, že na rozdíl od (77), (79) platí vzorce (78) jen v polokruhu $|1 - t| < 1$, $\operatorname{Im} t > 0$ – ale to nám nebude vadit. Označení a úmluvy dosud provedené zachováme v celém tomto i příštím paragrafu.

Budiž x libovolné řešení Gaussovy rovnice v N. Tedy je to holomorfní funkce s definičním oborem N a dá se vyjádřit pomocí fundamentálních systémů (77), (78), (79) ve tvaru

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = d_1 z_1 + d_2 z_2 = f_1 y_1 + f_2 y_2 , \tag{80}$$

kde konstanty c_1 až f_2 jsou jednoznačně určeny funkcí x. Půjde nám o to, vyjádřit d_1, d_2 a rovněž f_1, f_2 pomocí c_1, c_2. Tím bude řešena tato úloha: Je-li dáno řešení x pro $0 < |t| < 1$, $0 < \arg t < 2\pi$ pomocí funkcí (77), chceme je vyjádřit pro $1 < |t| < +\infty$, $0 < \arg t < 2\pi$ pomocí funkcí (79) a pro $|1 - t| < 1$, $\operatorname{Im} t > 0$, $-\pi < \arg (1 - t) < 0$ pomocí funkcí (78).

Abychom mohli pohodlně užívat řad v (77), (78), (79), budeme na chvíli vedle (76) ještě předpokládat, že

$$\operatorname{Re} (\gamma - \alpha - \beta) > 0 , \quad \operatorname{Re} \gamma < 1 ; \tag{81}$$

potom u všech těchto řad lze použít věty 34 o stejnoměrné konvergenci (při pevných α, β, γ konvergují tyto řady stejnoměrně vzhledem k t v oborech $|t| \leqq 1$, $|1 - t| \leqq 1$, $1 \leqq |t| < +\infty$, a mají tam tedy spojité součty).

Stále budeme užívat vzorců (viz větu 37 v § 4; § 3, vztahy (40), (46)):

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\, \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\, \Gamma(\gamma - \beta)} \tag{82}$$

$$(\operatorname{Re} (\gamma - \alpha - \beta) > 0 , \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots) ,$$

$$\Gamma(s)\, \Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} , \quad \Gamma(s + 1) = s\, \Gamma(s) . \tag{83}$$

Hledejme napřed d_1, d_2. Funkce x_1, x_2 jsou holomorfní, a tedy spojité v N; řady v (77) jsou stejnoměrně konvergentní, a tedy mají spojitý součet v $|t| \leqq 1$. Tedy vzorce (77) platí také pro $|t| = 1$, $t \neq 1$. Podobně pro řady v (79). Rovnice $c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t) = d_1\, z_1(t) + d_2\, z_2(t)$ tedy platí, jestliže za t dosadíme číslo takové, že $|t| = 1$, $t \neq 1$, tj. $t = e^{i\tau}$, $0 < \tau < 2\pi$, a za $x_1(t)$ až $z_2(t)$ dosadíme podle vzorců (77), (79).

Provedeme-li limitní přechod $\tau \to 0_+$ (tedy $t^{1-\gamma} \to 1$, $t^{-\alpha} \to 1$, $t^{-\beta} \to 1$) a uvážíme, že součty hypergeometrických řad jsou na kružnici $|t| = 1$ spojité i v bodě $t = 1$, dostaneme

$$c_1\, F(\alpha, \beta, \gamma; 1) + c_2\, F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma; 1) =$$
$$= d_1\, F(\alpha, \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1; 1) + d_2\, F(\beta, \beta - \gamma + 1,\ \beta - \alpha + 1; 1) .$$

Označme na chvíli součty těchto hypergeometrických řad po řadě X_1, X_2, Z_1, Z_2, takže

(84) $$c_1 X_1 + c_2 X_2 = d_1 Z_1 + d_2 Z_2 .$$

Za druhé proveďme limitní přechod $\tau \to 2\pi -$, tedy $t^{1-\gamma} \to e^{-2\pi i\gamma}$, $t^{-\alpha} \to e^{-2\pi i\alpha}$, $t^{-\beta} \to e^{-2\pi i\beta}$; dostaneme

(85) $$c_1 X_1 + c_2 e^{-2\pi i\gamma} X_2 = d_1 e^{-2\pi i\alpha} Z_1 + d_2 e^{-2\pi i\beta} Z_2 .$$

Zde je

(86) $$X_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)}, \qquad X_2 = \frac{\Gamma(2 - \gamma)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)\,\Gamma(1 - \beta)},$$

$$Z_1 = \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \beta)\,\Gamma(\gamma - \beta)}, \quad Z_2 = \frac{\Gamma(\beta - \alpha + 1)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \alpha)}.$$

Z (84), (85) plyne

(87) $$d_1 Z_1 (1 - e^{2\pi i(\beta - \alpha)}) = c_1 X_1 (1 - e^{2\pi i\beta}) + c_2 X_2 (1 - e^{2\pi i(\beta - \gamma)}),$$

(88) $$d_2 Z_2 (1 - e^{2\pi i(\alpha - \beta)}) = c_1 X_1 (1 - e^{2\pi i\alpha}) + c_2 X_2 (1 - e^{2\pi i(\alpha - \gamma)}).$$

Abychom v (87) mohli dělit číslem Z_1, předpokládejme ještě, že

(89) $$\beta, \gamma - \beta \quad \text{jsou necelá} .$$

Potom je $Z_1 \neq 0$ a z (87) vychází $d_1 = c_1 . A + c_2 . B$, kde

$$A = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i\beta}}{1 - e^{2\pi i(\beta - \alpha)}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1 - \beta)\sin \pi\beta}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\alpha - \beta + 1)\sin \pi(\beta - \alpha)} \cdot e^{\pi i\alpha} = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\beta)}\, e^{\pi i\alpha} ;$$

obdobně vypočtete B. Vychází

(90) $$d_1 = c_1 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\beta)}\, e^{\pi i\alpha} - c_2 \frac{\Gamma(2 - \gamma)\,\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)\,\Gamma(\beta - \gamma + 1)}\, e^{\pi i(\alpha - \gamma)} .$$

Srovnáte-li (87), (88), vidíte, že rovnice pro d_2 se od rovnice pro d_1 liší jen záměnou α s β.

Předpokládáme-li ještě

(91) $$\alpha, \gamma - \alpha \quad \text{jsou necelá čísla} ,$$

vychází

$$d_2 = c_1 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}\,e^{\pi i\beta} - c_2 \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\,e^{\pi i(\beta-\gamma)}\,. \tag{92}$$

Počítejme f_1, f_2. Rovnost

$$c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t) = f_1\, y_1(t) + f_2\, y_2(t) \tag{93}$$

platí (nakreslete si kružnice $|t| = 1$, $|1-t| = 1$ a polopřímku $0 \leqq t < +\infty$) pro $1 - t = e^{i\tau}$, $-\frac{1}{3}\pi < \tau < 0$, dosadíme-li za x_1 až y_2 výrazy (77), (78). Proveďme limitní přechod $\tau \to 0_-$ (takže $(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta} \to 1$, $t^{1-\gamma} \to 0$ (je $\operatorname{Re}\gamma < 1$)). Ježto dále $F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$, dostaneme

$$c_1 = f_1\, F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1; 1) + f_2\, F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1; 1)\,. \tag{94}$$

Obdobně pro $t = e^{i\tau}$ lze provést limitní přechod $\tau \to 0_+$, takže $(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta} \to 0$, $t^{1-\gamma} \to 1$. Obdržíme

$$c_1\, F(\alpha, \beta, \gamma; 1) + c_2\, F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; 1) = f_1\,. \tag{95}$$

Dosadíme-li sem podle (82), máme

$$f_1 = c_1 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} + c_2 \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}\,. \tag{96}$$

Odtud dosadíme do (95) (užívajíce (82)); vychází

$$f_2 \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)\,\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)} = c_1 - \left(c_1 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} + \right. \tag{97}$$

$$\left. + c_2 \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}\right) \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)\,\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\,.$$

Ježto α, β jsou necelá, lze odtud vypočítat f_2. Napřed však upravme koeficient při c_1. Ten je

$$1 - \frac{\sin\pi(\gamma-\alpha)\sin\pi(\gamma-\beta)}{\sin\pi\gamma\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)} = \frac{-\sin\pi\alpha\sin\pi\beta}{\sin\pi\gamma\sin\pi(\gamma-\alpha-\beta)}\,.$$

(Propočtěte!) Nyní vypočteme f_2 z (97); užitím (83) dostaneme

$$f_2 = c_1 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} + c_2 \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}\,. \tag{98}$$

Tím je náš úkol vyřešen: vyjádřili jsme d_1, d_2 a f_1, f_2 pomocí c_1, c_2 ovšem za těchto předpokladů (viz (76), (81), (89), (91)):

$$(99) \qquad \gamma, \gamma - \alpha - \beta, \alpha - \beta \text{ necelá},$$

$$(100) \qquad \operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0, \quad \operatorname{Re}\gamma < 1,$$

$$(101) \qquad \alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta \text{ necelá}.$$

Předpoklad (99) zachováme; ukážeme však, že (100), (101) lze vynechat. Vezměme napřed rovnice (96), (98). Zvolme pevně c_1, c_2 a dále jakoukoliv hodnotu t z oblasti

$$(102) \qquad |t| < 1, \quad |1 - t| < 1, \quad \operatorname{Im} t > 0.$$

Sestrojme výraz

$$(103) \qquad c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) - f_1 y_1(t) - f_2 y_2(t),$$

kde za f_1, f_2 dosadíme výrazy (96), (98). V oblasti (99) (to je oblast podle lemmatu 4, § 4) je výraz (103) holomorfní funkcí α, β, γ podle věty 35 a pro každý bod $[\alpha, \beta, \gamma]$ z podoblasti (99), (100), (101) je roven nule. Tedy je výraz (103) roven nule pro všechna $[\alpha, \beta, \gamma]$ z oblasti (99). Zvolme nyní pevně $[\alpha, \beta, \gamma]$ v (99). Potom výraz (103) je roven nule pro všechna t oblasti (102), a je holomorfní funkcí t v N.

Tedy je výraz (103) roven nule pro každé $t \in N$ a každou trojici α, β, γ z oblasti (99).

Podobně se dokáže, že $d_1 z_1(t) + d_2 z_2(t) - f_1 y_1(t) - f_2 y_2(t) = 0$ (s hodnotami d_1 až f_2 z (90), (92), (96), (98)) pro všechna $t \in N$ a všechna α, β, γ oblasti (99). (Teď vyjdu z bodu t, pro nějž $|1 - t| < 1$, $\operatorname{Im} t > 0$, $|t| > 1$.) Shrňme:

Věta 39. *Buďte γ, $\gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ necelá. Budiž x nějaké řešení Gaussovy rovnice s parametry α, β, γ v oblasti $N = E - \langle 0, +\infty)$, takže v N je*

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = d_1 z_1 + d_2 z_2 = f_1 y_1 + f_2 y_2$$

s konstantními koeficienty c_1 až f_2 (viz (77)–(79)). Potom d_1, d_2, f_1, f_2 se dají vyjádřit pomocí c_1, c_2 vzorci (90), (92), (96), (98).

Za chvíli budeme potřebovat naopak vyjádření c_1, c_2 pomocí d_1, d_2. Předpokládejme napřed, že platí (99), (100), (101). Řešíme nyní rovnice (90), (92) podle c_1, c_2. Výpočet provede čtenář sám. Vychází:

$$(104) \quad c_1 = \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\, e^{-\pi i\alpha} d_1 + \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}\, e^{-\pi i\beta} d_2,$$

(105)

$$c_2 = -\frac{\Gamma(\gamma-1)\,\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\, e^{-\pi i(\alpha-\gamma)} d_1 - \frac{\Gamma(\gamma-1)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}\, e^{-\pi i(\beta-\gamma)} d_2.$$

Rozšíříme nyní platnost těchto vzorců na oblast (99). Všimněme si, že pravé strany jsou holomorfní funkce α, β, γ v oblasti (99) (při pevných d_1, d_2). Rovnost $c_1x_1 + c_2x_2 = d_1z_1 + d_2z_2$ určuje jednoznačně d_1, d_2 pomocí c_1, c_2 a rovněž c_1, c_2 pomocí d_1, d_2. Tato rovnost je pak (pro α, β, γ v oboru (99) podle věty 34 splněna, když platí (90), (92). Tedy při daných d_1, d_2 existuje právě jedna dvojice c_1, c_2, která splňuje (90), (92). Pro α, β, γ v oboru (99), (100), (101) je to právě dvojice (104), (105). Dosadíme-li tyto hodnoty c_1, c_2 do (90), (92), jsou pravé strany holomorfní v (99) a jsou rovny d_1, resp. d_2 v podoblasti (99), (100), (101). Tato rovnost tedy platí v celé oblasti (99). Shrňme:

Lemma 5. *Za předpokladu věty* 39 *platí vzorce* (104), (105).

Poznámka 5. Celé odvození lze zjednodušit následujícím způsobem, který stručně naznačíme. (Proveďte podrobně jako cvičení!) Za předpokladů (76) a (81) uvažujme místo soustavy (84), (85) soustavu (vlastně dvě soustavy, odpovídající volbě znamének)

$$(106) \qquad \begin{aligned} c_1X_1 + c_2X_2 &= d_1Z_1 + d_2Z_2\,, \\ c_1X_1 + c_2e^{\pm 2\pi i\gamma}X_2 &= d_1e^{\pm 2\pi i\alpha}Z_1 + d_2e^{\pm 2\pi i\beta}Z_2\,, \end{aligned}$$

kde X_1, X_2, Z_1, Z_2 jsou dány vzorci (86).

Za předpokladu (89) dostaneme stejně jako výše

$$(107) \qquad d_1 = c_1 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, e^{\mp\pi i\alpha} - c_2 \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}\, e^{\mp\pi i(\alpha-\gamma)}\,.$$

Zaměníme-li v (106) α a β, zamění se úlohy koeficientů u d_1 a d_2. Vyjádření d_2 dostaneme tedy ze (107) záměnou α a β ovšem za předpokladu (91):

$$(108) \qquad d_2 = c_1 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)}\, e^{\mp\pi i\beta} - c_2 \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\, e^{\mp\pi i(\beta-\gamma)}\,.$$

To je vlastně totéž jako výše.

Provedeme-li v (84), (85) záměnu (píšeme symbolicky) $\alpha \to \alpha$, $\beta \to \alpha - \gamma + 1$, $\gamma \to \alpha - \beta + 1$, dostaneme (za dodatečného předpokladu $\operatorname{Re}(\alpha - \beta) < 0$)

$$\begin{aligned} d_1X_1 + d_2X_2 &= c_1Z_1 + c_2Z_2\,, \\ d_1X_1 + d_2e^{2\pi i\gamma}X_2 &= c_1Z_1e^{2\pi i\alpha} + c_2Z_2e^{2\pi i\beta}\,, \end{aligned}$$

což je soustava stejného typu jako (106) (s horními znaménky). Vyjádření c_1, c_2 pomocí d_1, d_2 dostaneme tedy ze (107) a (108) záměnou $\alpha \to \alpha$, $\beta \to \alpha - \gamma + 1$, $\gamma \to \alpha - \beta + 1$.

Uvažme ještě vztahy (94) a (95). Druhá rovnice je vyjádření f_1 pomocí c_1 a c_2. Provedeme-li záměnu $\alpha \to \gamma - \alpha$, $\beta \to \gamma - \beta$, $\gamma \to \gamma$, přejde (94) a (95) v

$$c_1 = f_1 \frac{\Gamma(\gamma - \alpha - \beta + 1)\,\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \beta)\,\Gamma(1 - \alpha)} + f_2 \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \gamma + 1)\,\Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(\beta - \gamma + 1)\,\Gamma(\alpha - \gamma + 1)},$$

$$f_1 = c_1 \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} + c_2 \frac{\Gamma(2 - \gamma)\,\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha - \gamma + 1)\,\Gamma(\beta - \gamma + 1)}.$$

Srovnáním s (94) a (96) (záměna f_1 a f_2) vyjde (98). (Doplňte v této úvaze předpoklady!)

Odstranění všech předpokladů kromě (99) provedeme stejně jako výše. K oprávněnosti naznačených úvah uveďme několik poznámek. Existenci jediného řešení všech studovaných soustav máme zaručenu, neboť funkce (77)–(79) tvoří fundamentální systém. Hledáme-li řešení soustavy (106) podle d_1, d_2, hledáme vlastně funkce $d_1 = d_1(\alpha, \beta, \gamma, c_1, c_2)$, $d_2 = d_2(\alpha, \beta, \gamma, c_1, c_2)$. Přímým řešením nalezneme (107) a záměna α a β (vzhledem k jednoznačnosti řešení) znamená vlastně $d_2(\alpha, \beta, \gamma, c_1, c_2) = d_1(\beta, \alpha, \gamma, c_1, c_2)$. Obdobně lze interpretovat další naznačené úvahy (proveďte!).

§ 7

Grupa monodromie Gaussovy rovnice

Předpokládáme stále, že γ, $\gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ jsou necelá čísla, klademe $N = E - \langle 0, +\infty)$ a funkce x_1 až z_2 s definičním oborem N definujeme vzorci (77)–(79).

Vezměme libovolné řešení Gaussovy rovnice v oboru N:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (c_1, c_2 \in E). \tag{109}$$

Toto řešení lze neomezeně pokračovat v $S - \{0, 1, \infty\}$. Podle § 5 volme řezy dle obr. 11 a vyšetříme, več přejde naše řešení (109) při pokračování podél kružnice K_0: $: \varrho e^{2\pi i(\lambda + u)}$ $(0 \leqq u \leqq 1)$, kde $0 < \varrho < 1$ a reálné λ není celé (aby počáteční bod $\varrho e^{2\pi i \lambda}$ ležel v N), a za druhé več přejde (109) při pokračování podél kružnice K_∞: $: \varrho e^{2\pi i(\lambda - u)}$ $(0 \leqq u \leqq 1)$, kde $\varrho > 1$ a λ je reálné necelé.

Při pokračování podél K_0 přejde (109) opět v jisté řešení $X = C_1 x_1 + C_2 x_2$. Určeme C_1, C_2 : x_1 přejde v x_1, x_2 přejde v $e^{-2\pi i\gamma} x_2$, tedy $C_1 = c_1$, $C_2 = e^{-2\pi i\gamma} c_2$. To se dá napsat v maticovém tvaru: položíme-li

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\gamma} \end{pmatrix},$$

je

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_0 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{110}$$

Podobně postupujeme při pokračování podél K_∞, ale bude to složitější. Nechť tedy (109) při pokračování podél K_∞ přejde v $C_1x_1 + C_2x_2$ (C_j jsou teď asi jiná než při K_0). Máme nalézt C_1, C_2 jako funkce c_1, c_2. Je $c_1x_1 + c_2x_2 = d_1z_1 + d_2z_2$, kde $d_1 = m_{11}c_1 + m_{12}c_2$, $d_2 = m_{21}c_1 + m_{22}c_2$; m_{jk} vyčteme z formulí (90), (92). Nyní pokračuji podle K_∞ a dostanu žádanou větev ve tvaru $d_1e^{2\pi i\alpha}z_1 + d_2e^{2\pi i\beta}z_2$. Zde konečně vyjádřím opět z_1, z_2 pomocí x_1, x_2 (viz (104), (105)) v žádaném tvaru $C_1x_1 + C_2x_2$, kde $C_1 = k_{11}e^{2\pi i\alpha}d_1 + k_{12}e^{2\pi i\beta}d_2$, $C_2 = k_{21}e^{2\pi i\alpha}d_1 + k_{22}e^{2\pi i\beta}d_2$, kde k_{mn} vyčtu z (104), (105). Tedy celkem

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\beta} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Označme

$$\mathbf{S}_\infty = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

přičemž nechť (psáno zkráceně) $c_1x_1 + c_2x_2 \xrightarrow[K_\infty]{} C_1x_1 + C_2x_2$, kde

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}_\infty \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \tag{111}$$

Zbývá úkol vypočítat a_{jk} jako funkce α, β, γ. Je $a_{11} = k_{11}m_{11}e^{2\pi i\alpha} + k_{12}m_{21}e^{2\pi i\beta}$. Dosaďme za k_{pq}, m_{pq} podle (90), (92), (104) a (105); součiny hodnot $\Gamma(s) \,.\, \Gamma(1 - s)$ upravme podle (83). Dostaneme

$$a_{11} = \frac{A}{\sin \pi\gamma \sin \pi(\beta - \alpha)}, \tag{112}$$

$$A = \sin \pi\beta \sin \pi(\gamma - \alpha) \,.\, e^{2\pi i\alpha} - \sin \pi\alpha \sin \pi(\gamma - \beta) \,.\, e^{2\pi i\beta} =$$

$$= \frac{1}{(2i)^2} \{-e^{\pi i(\gamma+\alpha-\beta)} + e^{\pi i(\gamma-\alpha+\beta)} - e^{\pi i(-\gamma+3\alpha+\beta)} +$$

$$+ e^{\pi i(-\gamma+3\beta+\alpha)} + e^{\pi i(-\gamma+3\alpha-\beta)} - e^{\pi i(-\gamma+3\beta-\alpha)}\}.$$

Užiji ještě vzorce $e^{ir} - e^{is} = \exp\left(i\,\dfrac{r + s}{2}\right) . \, 2i \sin \dfrac{r - s}{2}$

a

$$\sin \pi(2\alpha - 2\beta) = \sin \pi(\alpha - \beta) \,.\, (e^{\pi i(\alpha-\beta)} + e^{\pi i(\beta-\alpha)}).$$

Vyjde

$$A = \frac{1}{2i} \sin \pi(\beta - \alpha) \left(e^{\pi i\gamma} + e^{\pi i(-\gamma+2\alpha+2\beta)} - e^{\pi i(-\gamma+2\alpha)} - e^{\pi i(-\gamma+2\beta)}\right).$$

Tedy se v (112) zkrátí $\sin \pi(\beta - \alpha)$ a píši-li ještě $2i \sin \pi\gamma = e^{\pi i\gamma} - e^{-\pi i\gamma}$, dostanu

$$a_{11} = \frac{1 - e^{2\pi i(\alpha-\gamma)} - e^{2\pi i(\beta-\gamma)} + e^{2\pi i(\alpha+\beta-\gamma)}}{1 - e^{-2\pi i\gamma}}. \tag{113}$$

Obdobně obdržíte

$$a_{22} = \frac{-1 + e^{2\pi i\alpha} + e^{2\pi i\beta} - e^{2\pi i(\alpha+\beta-\gamma)}}{1 - e^{-2\pi i\gamma}}. \tag{114}$$

Dále $a_{12} = k_{11}e^{2\pi i\alpha}m_{12} + k_{12}e^{2\pi i\beta}m_{22}$,

$$a_{12} = -\frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta+1)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \cdot \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}\, e^{\pi i(2\alpha-\gamma)} -$$

$$- \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)} \cdot \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\, e^{\pi i(2\beta-\gamma)},$$

$$a_{12} = \frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\pi}{\sin \pi(\beta-\alpha)} \left(e^{\pi i(2\beta-\gamma)} - e^{\pi i(2\alpha-\gamma)}\right).$$

Závorka je $e^{\pi i(\alpha+\beta-\gamma)} \,.\, 2i \sin \pi(\beta - \alpha)$, takže

$$a_{12} = \frac{2\pi i\, \Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}\, e^{\pi i(\alpha+\beta-\gamma)}, \tag{115}$$

a obdobně

$$a_{21} = \frac{2\pi i\, \Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, e^{\pi i(\alpha+\beta+\gamma)}. \tag{116}$$

Poznámka 6. Celé odvození koeficientů $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ lze využitím jisté symetrie zkrátit na polovinu. Pokuste se provést celé odvození tak, že spočtete pouze a_{11} a a_{12} a jistou transformací získáte a_{22} i a_{21} (viz str. 165).

Výsledek ještě zopakujme: Položme

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\gamma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_\infty = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

(viz (113), (114), (115), (116).) Je-li $c_1x_1 + c_2x_2 \xrightarrow[K_\infty]{} C_1x_1 + C_2x_2$, platí (110); je-li $c_1x_1 + c_2x_2 \xrightarrow[\overline{K_\infty}]{} C_1x_1 + C_2x_2$, platí (111).

Matice $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{S}_\infty$ vytvořují grupu $\mathfrak{S}$, která se nazývá grupa monodromie Gaussovy rovnice. Je-li φ libovolná křivka v $S - \{0, 1, \infty\}$, jejíž počátek a konec leží v N, potom z úvah (o kritických intervalech) z § 5 plyne jistě dostatečně jasně, jak se najdou koeficienty C_1, C_2 (jakožto funkce c_1, c_2) při pokračování $c_1x_1 + c_2x_2 \xrightarrow[\varphi]{} C_1x_1 + C_2x_2$.

Poznámka 7. Matici inverzní k matici $\mathbf{S}_0$ určíme snadno:

$$\mathbf{S}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\gamma} \end{pmatrix}.$$

K určení matice $\mathbf{S}_\infty^{-1}$ potřebujeme získat její determinant. Protože však matice $\mathbf{K}$ a $\mathbf{M}$ (viz str. 167) jsou inverzní (viz (90), (92), (104), (105)), je ze zavedení matice $\mathbf{S}_\infty$ patrné, že

$$\det \mathbf{S}_\infty = \det \begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\beta} \end{pmatrix} = e^{2\pi i(\alpha+\beta)}.$$

Zjistěme ještě, zda $\mathfrak{S}$ je komutativní. Ihned najdete

$$\mathbf{S}_0\mathbf{S}_\infty = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}e^{-2\pi i\gamma} & a_{22}e^{-2\pi i\gamma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_\infty\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}e^{-2\pi i\gamma} \\ a_{21} & a_{22}e^{-2\pi i\gamma} \end{pmatrix}.$$

Ježto $e^{-2\pi i\gamma} \neq 1$, bylo by $\mathbf{S}_0\mathbf{S}_\infty = \mathbf{S}_\infty\mathbf{S}_0$ jen tehdy, kdyby $a_{12} = a_{21} = 0$. Ze vzorců (115), (116) plyne, že by to nastalo právě tehdy, kdyby se ve jmenovateli v (115) i v (116) vyskytla hodnota funkce Γ v jejím pólu. To znamená: aspoň jedno z čísel $1 - \alpha$, $1 - \beta$, $\alpha - \gamma + 1$, $\beta - \gamma + 1$ by musilo být celé nekladné a totéž by musilo platit aspoň o jednom z čísel $\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta$. Tj. z čísel $\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta$ by musilo aspoň jedno být celé nekladné a aspoň jedno celé kladné. Tedy by aspoň dvě z čísel $\alpha, \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \beta$ musila být celá. Z toho však snadno plyne (proveďte!), že aspoň jedno z čísel γ, $\gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ by bylo celé, což je ve sporu s naším předpokladem. Tedy:

Grupa $\mathfrak{S}$ není komutativní.

Poznámka 8. V tvorbě grupy $\mathfrak{S}$ je jistá libovůle: vyšli jsme z x_1, x_2; mohli jsme vyjít z jiného fundamentálního systému a také z jiných řezů. Dostali bychom jinou grupu, která by konala tytéž služby jako $\mathfrak{S}$ a patrně by byla s grupou $\mathfrak{S}$ nějak příbuzná — nebudu se tím zabývat.

Poznamenejme ještě, že jsme v tomto paragrafu řešili úkol poněkud jiný než o kterém jsme mluvili v § 5. Tam šlo o jednu analytickou funkci a její větve. U nás by teď šlo o analytickou funkci $\mathfrak{V}$, danou elementem $\mathcal{E}(a, c_1x_1 + c_2x_2)$ s určitými c_1, c_2

$(a \in N)$. Funkce $\mathfrak{B}$ má v N jen spočetně mnoho větví $c_{1,n}x_1 + c_{2,n}x_2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ a substituce $\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_\infty$ nám říkají, jak se tyto větve permutují při přechodu R_0, R_∞ (stále míním, ze záporné strany na kladnou). Všechny permutace těchto větví při pokračování podél libovolné křivky v $S - \{0, 1, \infty\}$ s počátkem a koncem v N tvoří grupu $\mathfrak{G}_{c_1,c_2}$. Při grupě $\mathfrak{S}$ byly c_1, c_2 „volně proměnné", kdežto při grupě $\mathfrak{G}_{c_1,c_2}$ nabývají $c_{1,n}, c_{2,n}$ jen spočetně mnoha hodnot. Není tedy vyloučeno, že v některých případech může $\mathfrak{G}_{c_1,c_2}$ být komutativní.

Cvičení. Vyšetřete, kdy je $\mathfrak{G}_{c_1,c_2}$ komutativní. Podmínka $\mathbf{S}_\infty\mathbf{S}_0\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \mathbf{S}_0\mathbf{S}_\infty\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ je ekvivalentní s rovnicemi $(1 - e^{-2\pi i\gamma})\,a_{12}c_2 = 0$, $(1 - e^{-2\pi i\gamma})\,a_{21}c_1 = 0$. Jedno řešení je $c_1 = c_2 = 0$ (nulové řešení); $\mathfrak{G}_{0,0}$ je ovšem jednotková grupa. Poznamenejme, že γ není celé a že není $a_{12} = a_{21} = 0$. Nenulová řešení existují tedy jen v těchto případech:

A) $a_{21} = 0$; řešení $c_2 = 0$, c_1 libovolné,

B) $a_{12} = 0$; řešení $c_1 = 0$, c_2 libovolné.

V případě A) mají všechny větve tvar $y_m = c_1 a_{11}^m x_1$ (m celé) a máme cyklickou grupu permutací: při přechodu R_∞ přejde y_m v y_{m+1}, řezu R_0 odpovídá identická permutace. V případě B) mají všechny větve tvar $y_{m,n} = c_2 e^{-2\pi i m\gamma} a_{22}^n x_2$ (m, n celá). Při přechodu R_0, resp. R_∞ přejde $y_{m,n}$ v $y_{m+1,n}$, resp. v $y_{m,n+1}$. (Pokuste se dále vyšetřit, kdy je grupa monodromie cyklická!)

Poznamenejme ještě jednou, že výsledky § 6 a § 7 byly odvozeny jen za předpokladu, že γ, $\gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ jsou necelá čísla.

§ 8

Jacobiovy polynomy

Budeme studovat případy, kdy $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ je polynom. Prosím čtenáře, aby si doplnil výpočty, které jen stručně naznačím. Napřed dvě jednoduchá lemmata.

Lemma 6. *Vyhovuje-li $y(x)$ Gaussově rovnici*

$$x(1 - x)\,y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)\,x)\,y' - \alpha\beta y = 0\,, \tag{117}$$

vyhovuje funkce $z(x) = y^{(k)}(x)$ ($k \geqq 0$ celé) Gaussově rovnici s parametry $\alpha + k$, $\beta + k$, $\gamma + k$.

Důkaz: Stačí derivovat (117) jednou, a potom provést zřejmou indukci.

Odvodíme ještě další vztah. Nechť $y(x)$ vyhovuje rovnici (117); nechť $n > 0$ je celé. Položme $z(x) = y^{(n-1)}(x)$. Podle lemmatu 6 je

$$(118) \qquad x(1-x)\,z'' + (\gamma + n - 1 - (\alpha + \beta + 2n - 1)\,x)\,z' - \\ - (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)\,z = 0\,.$$

Vytvořme výraz

$$(119) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\lambda(1-x)^\mu z'\right) = x^{\lambda-1}(1-x)^{\lambda-1}\{x(1-x)\,z'' + (\lambda(1-x) - \mu x)\,z'\}$$

(myslete si nějakou jednoznačnou větev, příslušnou určitým jednoznačným větvím $\arg x$, $\arg(1-x)$). Zvolme λ, μ tak, aby se výraz $\{\ldots\}$ rovnal prvním dvěma členům levé strany v (118), tj. $\lambda = \gamma + n - 1$, $\lambda + \mu = \alpha + \beta + 2n - 1$, $\mu = \alpha + \beta - \gamma + n$. Položme ještě

$$(120) \qquad x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma+n} = \varphi_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Závorka $\{\ldots\}$ v (119) je podle (118) rovna $(\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)\,y^{(n-1)}$, takže z (119) plyne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\varphi_n y^{(n)}\right) = (\alpha + n - 1)(\beta + n - 1)\,\varphi_{n-1} y^{(n-1)}\,,$$

a odtud indukcí podle n okamžitě:

Lemma 7. *Budiž y řešení rovnice (117). Potom je*

$$(121) \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\varphi_n y^{(n)}\right) = \alpha\,.\,(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)\,\varphi_0 y$$

pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ (pro $n = 0$ jsou vpravo prázdné součiny).

Předpokládejme nyní, že $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$, takže (117) má řešení $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ (pro $|x| \leqq 1$). Toto řešení je polynom tehdy a jen tehdy, když buďto α, nebo β je celé nekladné. Vzhledem k symetrii můžeme předpokládat, že $\beta = -n$ ($n \geqq 0$ celé); je-li též $\alpha \leqq 0$ celé, můžeme předpokládat, že $\alpha \leqq \beta = -n$. Potom bude $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ polynom stupně právě n-tého. Pišme $n + \alpha$ místo α a položme

$$(122) \qquad G_n(\alpha, \gamma; x) = F(n + \alpha, -n, \gamma; x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Přitom jsme pro α vyloučili ty celé hodnoty, pro něž je $n + \alpha > -n$ a současně $n + \alpha \leqq 0$, tj.

$$(123) \qquad \alpha \textit{ není celé číslo „intervalu“ } -2n + 1 \leqq \alpha \leqq -n$$

(pro $n = 0$ je tento „interval“ prázdný).

Vzorec (122) s podmínkou (123) dává všechny případy, kdy součet hypergeometrické řady je polynom. Koeficient při x^n v (122) je

$$(124) \qquad (-1)^n \frac{(\alpha + n)(\alpha + n + 1)\dots(\alpha + 2n - 1)}{\gamma(\gamma + 1)\dots(\gamma + n - 1)}.$$

Dosaďme do (121 $y = G_n(\alpha, \gamma; x)$ (parametry jsou $n + \alpha$, $-n$, γ); vyjde

$$(125) \qquad G_n(\alpha, \gamma; x) = \frac{x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma + 1)\dots(\gamma + n - 1)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x^{\gamma+n-1}(1 - x)^{\alpha-\gamma+n}\right).$$

Předpokládejme nyní, že α, γ jsou reálná,

$$(126) \qquad \gamma > 0, \quad \alpha - \gamma > -1.$$

Budeme vyšetřovat posloupnost polynomů $G_n(\alpha, \gamma; x)$ $(n = 0, 1, \dots)$ při daných α, γ; je $G_0(\alpha, \gamma; x) = 1$. Ze (126) plyne, že pro $m = 0, 1, \dots$ existuje

$$(127) \qquad K_{m,n} = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1 - x)^{\alpha-\gamma}\, G_n(\alpha, \gamma; x)\, x^m \,\mathrm{d}x$$

(míním kladné hodnoty mocnin). Integrací per partes dostaneme

$$(128) \qquad \gamma(\gamma + 1)\dots(\gamma + n - 1)\, K_{m,n} = \int_0^1 x^m \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x^{\gamma+n-1}(1 - x)^{\alpha-\gamma+n}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k(x^m)}{\mathrm{d}x^k} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}} \left(x^{\gamma+n-1}(1 - x)^{\alpha-\gamma+n}\right)\right]_{x=0}^{x=1} +$$

$$+ (-1)^n \int_0^1 x^{\gamma+n-1}(1 - x)^{\alpha-\gamma+n} \frac{\mathrm{d}^n(x^m)}{\mathrm{d}x^n} \,\mathrm{d}x.$$

Člen $[\dots]$ je roven nule, neboť zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}} \left(x^{\gamma+n-1}(1 - x)^{\alpha-\gamma+n}\right) = x^{\gamma+k}(1 - x)^{\alpha-\gamma+k+1}\, Q(x),$$

kde Q je nějaký polynom (závislý na α, γ, k, n), a přitom $\gamma + k > 0$, $\alpha - \gamma + k + 1 > 0$. Ježto $G_r(\alpha, \gamma; x)$ je lineární kombinace $x^0, x^1, \dots, x^r$, plyne ze (128):

Věta 40. *Budiž $\gamma > 0$, $\alpha - \gamma > -1$. Potom polynomy $G_n(\alpha, \gamma; x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ jsou v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ ortogonální vzhledem k váze $x^{\gamma-1}(1 - x)^{\alpha-\gamma}$, tj. pro celá n, r, $0 \leqq r < n$ je*

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1 - x)^{\alpha-\gamma}\, G_n(\alpha, \gamma; x)\, G_r(\alpha, \gamma; x) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Pro ortogonální posloupnosti je ještě důležitá otázka jejich „normování", tedy hodnota

$$I_n = \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,(G_n(\alpha,\gamma;x))^2\,dx\,.$$

Ježto $G_0 = 1$, máme ihned

$$I_0 = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\,.$$

Pro $n > 0$ uvažme, že (viz (128)) $K_{m,n} = 0$ pro $0 \leqq m < n$, ale

$$\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\,K_{n,n} = (-1)^n\,.\,n!\,\frac{\Gamma(\gamma+n)\,\Gamma(\alpha-\gamma+n+1)}{\Gamma(\alpha+2n+1)}\,,$$

a odtud vzhledem k (124)

$$I_n = \frac{n!\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\gamma+n+1)}{(\alpha+2n)\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)\,\Gamma(n+\alpha)}$$
$$(n = 1, 2, \ldots)\,.$$

V praxi jsou často výhodnější posloupnosti polynomů, ortogonální v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ místo v $\langle 0, 1\rangle$. Dosáhne se tím často větší jednoduchosti a souměrnosti vzorců. Proto se místo polynomů G_n užívá častěji tzv. **Jacobiových polynomů**

$$J_n(\alpha,\gamma;x) = G_n\left(\alpha,\gamma;\frac{1-x}{2}\right) = F\left(n+\alpha,-n,\gamma;\frac{1-x}{2}\right) =$$
$$= \frac{(-1)^n}{2^n}\,\frac{(1-x)^{1-\gamma}(1+x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\,\frac{d^n}{dx^n}\left((1-x)^{\gamma+n-1}(1+x)^{\alpha-\gamma+n}\right)$$

(viz (122), (125)). Pro $0 \leqq r < n$ je

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\gamma-1}\,(1+x)^{\alpha-\gamma}\,J_n(\alpha,\gamma;x)\,J_r(\alpha,\gamma;x)\,dx = 0$$

(ortogonalita s vahou $(1-x)^{\gamma-1}\,(1+x)^{\alpha-\gamma}$ v $\langle -1, 1\rangle$). Dále

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\gamma-1}\,(1+x)^{\alpha-\gamma}\,(J_n(\alpha,\gamma;x))^2\,dx = 2^\alpha I_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Zvláště důležité případy jsou: váha 1, tj. $\alpha = \gamma = 1$, jež vede k tzv. **Legendreovým polynomům** $P_n(x)$, a váha $(1-x^2)^{-1/2}$ $\left(\text{tj. } \gamma = \frac{1}{2},\ \alpha = 0\right)$, jež dává **Čebyševovy polynomy** $T_n(x)$. Definujeme tedy

$$P_n(x) = F\left(n+1,-n,1;\frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{n!\,2^n}\,\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right).$$

$P_n(x)$ je řešením tzv. Legendreovy rovnice $(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n + 1) y = 0$ a platí

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_r(x) \, dx = 0 \quad \text{pro} \quad r \neq n \,, \quad \int_{-1}^{1} P_n^2(x) \, dx = \frac{2}{2n + 1} \,.$$

U Čebyševových polynomů se obyčejně pro $n > 0$ ještě připojuje činitel 2^{-n+1}, tedy

$$T_0(x) = 1 \,, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} F\left(n, -n, \frac{1}{2} ; \frac{1 - x}{2}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n (1 - x^2)^{1/2}}{2^{n-1} \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n - 1)} \frac{d^n}{dx^n} \left((1 - x^2)^{n-1/2}\right)$$

pro $n > 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x) \, T_r(x) \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}} = 0$ pro $n \neq r$,

$$\int_{-1}^{1} T_n^2(x) \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \quad \text{pro} \quad n > 0.$$

Podrobněji jsou tyto polynomy studovány v **J II**, kap. XIV, § 9.