Diferenciální rovnice v komplexním oboru

Kapitola VI. Besselova rovnice

In: Vojtěch Jarník (author); Břetislav Novák (other): Diferenciální rovnice v komplexním oboru. (Czech). Praha: Academia, 1975. pp. 192–265.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402039

Kapitola VI

BESSELOVA ROVNICE

§ 1

Besselovy funkce 1. druhu

Besselovou rovnicí nazýváme rovnici

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0 \quad (\nu \in E)\,. \tag{1}$$

Rovnice splňuje Fuchsovu podmínku v bodě 0, ale nesplňuje ji v bodě ∞, ježto to není Eulerova rovnice (viz kap. IV, § 1). Besselova rovnice patří k nejdůležitějším rovnicím v aplikacích. Hledejme pseudopotenční rozvoj v $P(0, \infty)$:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\varrho+k} \quad (a_0 \neq 0)\,. \tag{2}$$

Spočítejte charakteristický polynom; ten má nulové body ν, $-\nu$. Ježto se rovnice nezmění záměnou ν s $-\nu$, hledejme řešení (2), kde $\varrho = \nu$. Dostáváme systém rovnic

$$a_k(k + 2\nu)\,k = -a_{k-2} \quad (k = 1, 2, \ldots)\,,$$

kde klademe $a_{-1} = 0$. Těm bude vyhověno, bude-li $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$, $a_{2k}\,4k(k + \nu) = -a_{2k-2}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Není-li ν celé záporné, má tento systém řešení

$$a_{2k} = a_0(-1)^k \frac{1}{4^k k!\,(\nu + 1)\ldots(\nu + k)}\,.$$

Položím-li $a_0 = \frac{1}{2^\nu} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \neq 0$, dostanu řešení

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}. \tag{3}$$

Není-li ν celé, je také $J_{-\nu}(x)$ řešení, a ježto J_ν, $J_{-\nu}$ patří k různým exponentům, tvoří fundamentální systém.

Je-li ν celé záporné, nemá systém rovnic

$$a_{2k}\, 4k(\nu + k) = -a_{2k-2} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

řešení s $a_0 \neq 0$, neboť pro $k = -\nu > 0$ vychází z (4) $a_{2k-2} = 0$, a odtud opět $a_{2k-4} = 0, \ldots, a_0 = 0$. Pro celé ν neexistují tedy dvě lineárně nezávislá pseudopotenční řešení.

Jak je tomu s funkcí $J_{-\nu}(x)$, když ν je celé kladné? Potom $(\Gamma(-\nu + k + 1))^{-1} = 0$ pro $k \leqq \nu - 1$, takže lze psát

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(-\nu + k + 1)}.$$

Zavedením sčítacího indexu $m = k - \nu$ a použitím vzorce $\Gamma(n + 1) = n!$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ dostanete snadno $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$. Shrňme:

Věta 41. *Rovnice (1) má pro každé $\nu \in E$ řešení J_ν, $J_{-\nu}$. Není-li ν celé, tvoří tato řešení fundamentální systém. Je-li ν celé, je*

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x) \tag{5}$$

a neexistují dvě lineárně nezávislá pseudopotenční řešení.

Funkci $J_\nu(x)$ definované v (3) se říká **Besselova funkce 1. druhu** s indexem ν. Probereme některé nejjednodušší vlastnosti těchto funkcí.

I. *Vztahy mezi funkcemi J_ν s indexy lišícími se o celá čísla.*

Funkce $x^{-\nu} J_\nu(x)$ je mocninná řada konvergentní všude v E. Z (3) dostáváme

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} . \, 2}{(k-1)!\,\Gamma(\nu + k + 1)} =$$

$$= -\frac{x}{2^{\nu+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!\,\Gamma(\nu + m + 2)} = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x),$$

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-(\nu+1)} J_{\nu+1}(x) \tag{6}$$

a odtud indukcí pro $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = (-1)^k x^{-(\nu+k)} J_{\nu+k}(x). \tag{7}$$

Podobně vypočtete

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{\nu} J_\nu(x)\right) = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x), \tag{8}$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \left(x^{\nu} J_\nu(x)\right) = x^{\nu-k} J_{\nu-k}(x). \tag{9}$$

Z (6), (8) ihned obdržíte ($x \neq 0$)

$$J'_\nu = \frac{\nu}{x} J_\nu - J_{\nu+1}, \quad J'_\nu = -\frac{\nu}{x} J_\nu + J_{\nu-1}, \tag{10}$$

$$J'_\nu = \frac{1}{2}\left(J_{\nu-1} - J_{\nu+1}\right), \quad \frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}. \tag{11}$$

Ježto $J_{-1} = -J_1$, dostáváme speciálně

$$J'_0 = -J_1.$$

II. $J_{k+1/2}(x)$ *pro celé k.*

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{1 \cdot 2 \ldots m \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \ldots \frac{2m+1}{2}} = \tag{12}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x.$$

Pro celé $k > 0$ vyjde z (7), popříp. z (9):

$$J_{k+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^k x^{k+1/2} \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \frac{\sin x}{x}, \tag{13}$$

$$(14) \qquad J_{-k+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{k-1/2} \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \sin x\,,$$

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x\,.$$

Funkce $J_{k+1/2}(x)$ (k celé) se tedy dají vyjádřit elementárními funkcemi. Liouville dokázal, že v žádném jiném případě není $J_\nu(x)$ „vyjádřitelné elementárními funkcemi" (slova v uvozovkách je ovšem nutno precizovat; přesnou formulaci a důkazy viz např. v knihách J. F. Ritt, Differential algebra (New York, 1950), J. F. Ritt, Differential equations from the algebraic standpoint (New York, 1932)).

III. $J_\nu(x)$ *jako funkce proměnných* x, ν. *Je* $J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu S(x, \nu)$,

$$(15) \qquad S(x, \nu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!\,\Gamma(\nu + m + 1)}\,.$$

Věta 42. *Řada* (15) *je lokálně stejnoměrně konvergentní v* $E \times E$ *a tedy je* (viz větu 14) $S(x, \nu)$ *holomorfní v* $E \times E$.

Důkaz. Zvolme čísla $X > 0$, $K > 0$, K celé. Dokážeme stejnoměrnou konvergenci v oboru $|x| \leqq X$, $|\nu| \leqq K$. Ježto je vždy $\Gamma(s) \neq 0$, existuje číslo $\alpha > 0$ (závislé jen na K) tak, že pro $|\mathrm{Im}\, s| \leqq K$, $1 \leqq \mathrm{Re}\, s \leqq 2$ je $|\Gamma(s)| \geqq \alpha$. Je-li $|\mathrm{Im}\, s| \leqq K$, $\mathrm{Re}\, s \geqq 1$, pišme $s = s' + m$, kde $m \geqq 0$ je celé, $1 \leqq \mathrm{Re}\, s' \leqq 2$. Tedy $|\Gamma(s)| = |(s' + m - 1)(s' + m - 2) \ldots s'\, \Gamma(s')| \geqq \alpha$. Je-li $|\nu| \leqq K$, je $\mathrm{Re}\,(\nu + m + 1) \geqq 1$ pro $m \geqq K$. V oboru $|x| \leqq X$, $|\nu| \leqq K$ je tedy k řadě

$$\sum_{m=K}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!\,\Gamma(\nu + m + 1)}$$

majorantní řada

$$\sum_{m=K}^{\infty} \left(\frac{X}{2}\right)^{2m} \cdot \frac{1}{\alpha m!}\,,$$

která konverguje.

Poznámka 1. Z věty 42 plyne obdobná věta pro $J_\nu(x)$; ježto však x^ν je pro necelá ν mnohoznačná, je nutná tato modifikace: Budiž A oblast, ve které existuje jednoznačná větev $\arg x$. Pro každé $\nu \in E$ nechť teď $J_\nu(x)$ znamená větev v A, patřící k této větvi $\arg x$. Potom $J_\nu(x)$ je holomorfní v $A \times E$ (tj. pro $x \in A$, $\nu \in E$).

§ 2

Fundamentální systém řešení Besselovy rovnice

Pro každé ν máme řešení $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$ a tato řešení jsou (v rozsahu daném poznámkou na konci § 1) holomorfní funkce x, ν. Avšak pro celé ν netvoří fundamentální systém. Proto zavedeme další řešení $N_\nu(x)$ tak, aby $N_\nu(x)$ mělo obdobnou vlastnost holomorfie a aby J_ν, N_ν tvořily fundamentální systém řešení pro každé $\nu \in \boldsymbol{E}$. Poznamenávám: hodnotám ν, $-\nu$ odpovídá táž diferenciální rovnice, ale budou jim ve většině případů přiřazeny dva různé fundamentální systémy J_ν, N_ν a $J_{-\nu}, N_{-\nu}$.

Lemma 1. *Nechť $f(x, \nu)$ je holomorfní v bodě $[x_0, \nu_0]$. Položme* $F(x, \nu) = \dfrac{f(x, \nu) - f(x, \nu_0)}{\nu - \nu_0}$ *pro* $\nu \neq \nu_0$, $F(x, \nu_0) = \left[\dfrac{\partial f(x, \nu)}{\partial \nu}\right]_{\nu = \nu_0}$. *Potom F je rovněž holomorfní v bodě $[x_0, \nu_0]$.*

Důkaz. V jistém okolí bodu $[x_0, \nu_0]$ je

$$f(x, \nu) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}(x - x_0)^j (\nu - \nu_0)^k .$$

Pro $\nu \neq \nu_0$ je tedy

$$F(x, \nu) = \sum_{j \geqq 0, k \geqq 1} a_{jk}(x - x_0)^j (\nu - \nu_0)^{k-1} . \tag{16}$$

Dále

$$F(x, \nu_0) = \left[\frac{\partial f(x, \nu)}{\partial \nu}\right]_{\nu = \nu_0} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j1}(x - x_0)^j ;$$

ale to je právě součet řady (16) pro $\nu = \nu_0$ Tedy F je dána v celém okolí bodu $[x_0, \nu_0]$ mocninnou řadou (16).

Následující věta je podstatou tzv. **d'Alembertovy metody.**

Věta 43. *Nechť funkce $p_j(x, \nu)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ jsou holomorfní v $A \times B$ (míněno $x \in A$, $\nu \in B$), kde A, B jsou oblasti v $\boldsymbol{E}$. Nechť $y(x, \nu)$ je pro každé $\nu \in B$ řešením rovnice*

$$\sum_{j=0}^{n} p_j(x, \nu)\, y^{(j)} = 0 \tag{17}$$

v oblasti A ($y^{(j)}$ značí j-tou derivaci podle x). Nechť y je holomorfní v $A \times B$ a nechť *pro jisté $\nu_0 \in B$ je $y(x, \nu_0) = 0$ pro všechna $x \in A$. Pro $x \in A$, $\nu \in B$ položme*

$$\eta(x, \nu) = \frac{y(x, \nu)}{\nu - \nu_0} = \frac{y(x, \nu) - y(x, \nu_0)}{\nu - \nu_0} \quad \textit{pro} \quad \nu \neq \nu_0 ,$$

$$\eta(x, \nu_0) = \left[\frac{\partial y(x, \nu)}{\partial \nu}\right]_{\nu = \nu_0} .$$

Potom platí:

1. *$\eta(x, \nu)$ je holomorfní v $A \times B$.*
2. *Pro každé $\nu \in B$ je $\eta(x, \nu)$ řešení rovnice (17) v oblasti A.*

Důkaz. Tvrzení 1 plyne z lemmatu 1. Značí-li $y^{(j)}$ j-tou parciální derivaci podle x, je pro $\nu \neq \nu_0$ (a stále $\nu \in B$, $x \in A$)

$$\sum_{j=0}^{n} p_j(x, \nu) \frac{y^{(j)}(x, \nu) - y^{(j)}(x, \nu_0)}{\nu - \nu_0} = 0 . \tag{18}$$

Proveďme limitní přechod $\nu \to \nu_0$. Je $\lim\limits_{\nu \to \nu_0} p_j(x, \nu) = p_j(x, \nu_0)$ a dále

$$\lim_{\nu \to \nu_0} \frac{y^{(j)}(x, \nu) - y^{(j)}(x, \nu_0)}{\nu - \nu_0} = \left[\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial^j y(x, \nu)}{\partial x^j}\right)\right]_{\nu = \nu_0} =$$

$$= \left[\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left(\frac{\partial y(x, \nu)}{\partial \nu}\right)\right]_{\nu = \nu_0} = \frac{\partial^j}{\partial x^j}\left[\frac{\partial y(x, \nu)}{\partial \nu}\right]_{\nu = \nu_0} = \frac{\partial^j}{\partial x^j} \eta(x, \nu_0)$$

(uvědomte si dobře definici parciální derivace), takže z (18) plyne

$$\sum_{j=0}^{n} p_j(x, \nu_0)\, \eta^{(j)}(x, \nu_0) = 0 . \tag{19}$$

Tedy vskutku je pro každé $\nu \in B$ funkce $\eta(x, \nu)$ řešením naší rovnice v A. (Pro $\nu \neq \nu_0$ viz (18), pro $\nu = \nu_0$ viz (19).)

Význam věty je tento: $y(x, \nu_0)$ je triviální řešení; může se stát, že $\eta(x, \nu_0)$ není triviální řešení.

Užijme této věty na Besselovu rovnici s indexem ν. Jedno řešení je $J_\nu(x)$. Zvolme určité celé n a vezměme řešení $J_\nu(x) - (-1)^n J_{-\nu}(x)$; toto řešení je nulové pro $\nu = n$. Podle věty 43 sestrojme funkci

$$A_n(x, \nu) = \frac{J_\nu(x) - (-1)^n J_{-\nu}(x)}{\nu - n} \quad \text{pro} \quad \nu \neq n , \tag{20}$$

$$A_n(x, n) = \left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu = n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu = n} . \tag{21}$$

Funkce $J_\nu(x)$, $A_n(x, \nu)$ dávají pro každé ν řešení naší rovnice, mající vlastnost holomorfie precizovanou na konci § 1, a pro necelé ν dávají zřejmě fundamentální systém; dá se dokázat, že tvoří fundamentální systém i pro $\nu = n$. Ale pro celé $\nu \neq n$ nedávají fundamentální systém, ježto v tomto případě je $A_n(x, \nu) = J_\nu(x) \,.\, \dfrac{1 - (-1)^{n+\nu}}{\nu - n}$. Tento nedostatek vznikl tím, že $A_n(x, \nu)$ bylo sestrojeno se zřetelem k zvolenému číslu n. Proto nahradíme funkci $A_n(x, \nu)$ jinou funkcí $N_\nu(x)$ dvou proměnných x, ν, která se pro každé celé m chová podobně jako $A_m(x, m)$. Podívejme se na vzorec (20) a uvažme: pro n celé, $\nu \to n$ chová se $\sin \nu\pi = (-1)^n \sin (\nu - n) \pi$ „asymptoticky“ jako $(-1)^n (\nu - n) \pi$ (tím míním, že podíl obou funkcí má limitu 1 pro $\nu \to n$).

Podobně $\dfrac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi} = \dfrac{\cos (\nu - n) \pi}{\sin (\nu - n) \pi}$ se chová jako $\dfrac{1}{(\nu - n) \pi}$. Bude proto asi vhodné zavést tuto funkci:

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} (J_\nu(x) \,.\, \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)) \tag{22}$$

pro ν necelé,

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(x) \quad \text{pro } n \text{ celé} \,. \tag{23}$$

(Existenci této limity je ještě nutno dokázat.)

Pro necelé ν tvoří J_ν, N_ν zřejmě fundamentální systém řešení a $N_\nu(x)$ má požadované vlastnosti holomorfie v okolí každého bodu $[x_0, \nu_0]$, kde $x_0 \in \boldsymbol{E}$, $\nu_0 \in \boldsymbol{E}$, $x_0 \neq 0$, ν_0 necelé.[1]) Jak je tomu v okolí bodu $[x_0, n]$, kde n je celé? Omezme se na ν kruhu $|\nu - n| < 1$. Pokud ν je necelé, plyne srovnáním vzorců (20), (22)

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \left(A_n(x, \nu) + J_\nu(x) \frac{\cos (\nu - n) \pi - 1}{\nu - n} \right) \frac{\pi(\nu - n)}{\sin \pi(\nu - n)} \,. \tag{24}$$

Uvědomme si, že $A_n(x, \nu)$, $J_\nu(x)$ jsou holomorfní v jistém okolí bodu $[x_0, n]$. Dále: funkce (proměnné ν) $\dfrac{\pi(\nu - n)}{\sin \pi(\nu - n)}$, $\dfrac{\cos \pi(\nu - n) - 1}{\nu - n}$ jsou holomorfní v bodě $\nu = n$; první z nich má v bodě n hodnotu 1, druhá hodnotu 0 ($\cos (\nu - n) \pi - 1$ má v bodě $\nu = n$ nulový bod násobnosti 2). Tedy pravá strana v (24) je holomorfní v jistém okolí bodu $[x_0, n]$ a v bodech $[x, n]$ má hodnoty (a tedy i limity pro $\nu \to n$) $\dfrac{1}{\pi} A_n(x, n)$. Doplním-li tedy definici $N_\nu(x)$ také pro celé $\nu = n$ vzorcem (23) (tedy vzorcem $N_n(x) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(x)$), bude $N_\nu(x)$ holomorfní v okolí každého bodu $[x_0, \nu_0] \in$

[1]) Míním přirozené větve funkcí $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ atd., patřící k jisté jednoznačné větvi $\arg x$.

$\in E \times E$, $x_0 \neq 0$ (ať je ν_0 necelé či celé). Dále je pro celé n: $N_n(x) = \frac{1}{\pi} A_n(x, n)$, takže i pro celé $\nu = n$ je $N_\nu(x)$ řešením naší rovnice. Z (21) plyne pro celé n

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} - \frac{1}{\pi}(-1)^n\left[\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}. \tag{25}$$

To lze psát také takto:

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n} + \frac{1}{\pi}(-1)^n\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=-n}. \tag{26}$$

Odtud zřejmě $N_n(x) = (-1)^n N_{-n}(x)$ pro celé n. Ještě chceme dokázat, že J_n, N_n tvoří fundamentální systém i pro celé n.

Spočítejme

$$W_\nu(x) = \begin{vmatrix} J_\nu(x), & N_\nu(x) \\ J'_\nu(x), & N'_\nu(x) \end{vmatrix}$$

napřed pro necelé ν. Podle (22) je

$$W_\nu(x) = -\frac{1}{\sin \nu\pi} V_\nu(x),$$

kde

$$V_\nu(x) = \begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J'_\nu & J'_{-\nu} \end{vmatrix}.$$

Z Besselovy rovnice plyne, že

$$\frac{\mathrm{d}V_\nu(x)}{\mathrm{d}x} = \begin{vmatrix} J_\nu & J_{-\nu} \\ J''_\nu & J''_{-\nu} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x} V_\nu(x),$$

a odtud $V_\nu(x) = \frac{C_\nu}{x}$, kde C_ν může záviset na ν, ale nezávisí na x. Z rozvoje (3) dostáváme pro $x \to 0$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + o(1)\right), \quad J'_\nu(x) = \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu}\left(\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\right) + o(1)\bigg).$$

Dosazením do $V_\nu(x)$ ihned vypočtete

$$V_\nu(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{-2\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(1-\nu)} + o(1)\right),$$

ale

$$\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(1-\nu)} = \frac{1}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} = \frac{\sin \pi\nu}{\pi},$$

takže

$$\frac{C_\nu}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{-2\sin \pi\nu}{\pi} + o(1)\right).$$

Ježto C_ν nezávisí na x, je $C_\nu = -\dfrac{2\sin \pi\nu}{\pi}$,

$$W_\nu(x) = -\frac{1}{\sin \pi\nu}\cdot\frac{C_\nu}{x} = \frac{2}{\pi x}.$$

Tento vzorec byl dokázán pro necelá ν; ale levá strana je při pevném $x \neq 0$ spojitá funkce ν, a tedy je $W_\nu(x) = \dfrac{2}{\pi x}$ pro každé (i celé) ν a každé $x \neq 0$. Tedy jsou $J_\nu(x)$ $N_\nu(x)$ lineárně nezávislé pro každé ν. Shrňme:

Věta 44. *Pro každé ν zaveďme vedle $J_\nu(x)$ ještě funkci $N_\nu(x)$ (pro $x \neq 0$) vzorci* (22), (23). *Potom platí:*

1. $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ *tvoří fundamentální systém řešení rovnice* $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0$.

2. $\begin{vmatrix} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & N'_\nu(x) \end{vmatrix} = \dfrac{2}{\pi x}$.

3. *Pro celé n je* $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, $N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x)$.

4. *Pro celé n lze $N_n(x)$ vyjádřit vzorci* (25), (26).

5. *Budiž $A \subset E$ oblast, ve které existuje jednoznačná větev* $\arg x$. *Pro každé ν nechť teď $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ znamenají ony větve v A, které přísluší zvolené větvi* $\arg x$. *Potom tyto větve $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ jsou holomorfní funkce x, ν v oblasti $A \times E$ (tj. pro $x \in A$, $\nu \in E$).*

Funkci $N_\nu(x)$ se říká **Neumannova funkce** (např. Smirnov, Kurs vysšej matěmatiki III.2). Whittaker a Watson ji značí $Y_\nu(x)$ a říkají jí **Weberova funkce** (viz E. T. Whittaker, G. N. Watson, A course of modern analysis II). Následkem velké důležitosti Besselovy rovnice a její mnohostranné použitelnosti zaváděli mnozí autoři rozmanitá řešení této rovnice a označovali je různým způsobem, takže při přebírání vzorců z literatury je třeba jisté opatrnosti.

V § 1, bod I jsme odvodili vztahy mezi J_ν, $J_{\nu-1}$, $J_{\nu+1}$, J'_ν. Ukážeme nyní: Vztahy (6) až (11) z § 1 platí i tehdy, když v nich Besselovy funkce 1. druhu nahradíme Neumannovými funkcemi. Ježto vzorce (10) znamenají totéž jako (6), (8), ježto (11) plyne z (10) sečtením a odečtením a ježto (7), (9) plynou indukcí z (6), (8), stačí dokázat vzorce

$$(27) \qquad N'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} N_\nu(x) - N_{\nu+1}(x),$$

$$N'_\nu(x) = -\frac{\nu}{x} N_\nu(x) + N_{\nu-1}(x).$$

Ježto při pevném $x \neq 0$ jsou Neumannovy funkce holomorfní funkce ν v E, stačí provést důkaz pro necelá ν (pro celé $\nu = n$ se provede limitní přechod $\nu \to n$). Pro necelé ν máme (užije se (10))

$$N'_\nu = \frac{1}{\sin \nu\pi} (J'_\nu \cos \nu\pi - J'_{-\nu}) =$$

$$= \frac{1}{\sin \nu\pi} \left(\left(\frac{\nu}{x} J_\nu - J_{\nu+1} \right) \cos \nu\pi - \left(\frac{\nu}{x} J_{-\nu} + J_{-\nu-1} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sin \nu\pi} \frac{\nu}{x} (J_\nu \cos \nu\pi - J_{-\nu}) - \frac{1}{\sin (\nu + 1)\pi} (J_{\nu+1} \cos (\nu + 1)\pi - J_{-\nu-1}),$$

což je první vzorec (27). Podobně se dokáže druhý vzorec.

Poznamenejme nakonec, že pro celá k je podle (22) $N_{k+1/2}(x) = (-1)^{k+1} J_{-k-1/2}(x)$.

§ 3

Rozvoj funkce $N_n(x)$ pro celá n

Nechť n je celé. Ježto $N_{-n} = (-1)^n N_n$, můžeme se omezit na případ $n \geqq 0$. Užijeme vzorce (26); podle věty 14 můžeme ve vzorci

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\, \Gamma(\nu + r + 1)}$$

derivovat podle ν člen po členu. Pro $\nu = n$ dostaneme

$$\left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x)\right]_{\nu=n} = J_n(x) \,.\, \log \frac{x}{2} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\, \Gamma(n + r + 1)} \cdot \frac{\Gamma'(n + r + 1)}{\Gamma(n + r + 1)}.$$

Máme (viz vztah (44), § 3, kap. IV)

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = se^{Cs} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{k}\right) e^{-s/k} .$$

Označíme-li $L(s)$ jednoznačnou větev $\log \Gamma(s)$ v oboru $E - (-\infty, 0\rangle$, která je reálná pro kladné hodnoty s, dostaneme stejně jako při důkazu Stirlingovy formule (str. 145)

$$-L(s) = \operatorname{Log} s + Cs + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\operatorname{Log}\left(1 + \frac{s}{k}\right) - \frac{s}{k}\right),$$

kde Log značí hlavní hodnotu logaritmu a řada vpravo (viz např. odhad $|\operatorname{Log}(1 + z) - z| \leqq 2|z|^2$ pro $|z| \leqq \frac{1}{2}$) je lokálně stejnoměrně konvergentní v oboru $s \in E - \{0, -1, -2, \ldots\}$. Je tedy

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -C - \frac{1}{s} - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s + k} - \frac{1}{k}\right),$$

tj.

$$\frac{\Gamma'(n + r + 1)}{\Gamma(n + r + 1)} = -C + \sum_{m=1}^{n+r} \frac{1}{m} .$$

Tedy je

$$\left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x)\right]_{\nu=n} = J_n(x) \log \frac{x}{2} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\,(n + r)!} \left(C - \sum_{m=1}^{n+r} \frac{1}{m}\right).$$

Dále je třeba vypočítat

$$\left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(x)\right]_{\nu=-n} = J_{-n}(x) \log \frac{x}{2} +$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu + r + 1)}\right]_{\nu=-n}.$$

Vpravo budu napřed sčítat přes $r \geqq n$; dostanu

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!\,\Gamma(-n + r + 1)} \cdot \frac{\Gamma'(-n + r + 1)}{\Gamma(-n + r + 1)} =$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2q}}{(n + q)!\, q!} \cdot \frac{\Gamma'(q + 1)}{\Gamma(q + 1)}$$

(zavedu $r = n + q$) a zde je jako výše

$$\frac{\Gamma'(q+1)}{\Gamma(q+1)} = \sum_{m=1}^{q} \frac{1}{m} - C .$$

Zbývá ještě součet

$$S = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu + r + 1)}\right]_{\nu=-n} .$$

Přímý výpočet $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \dfrac{1}{\Gamma(\nu + r + 1)} = - \dfrac{\Gamma'(\nu + r + 1)}{(\Gamma(\nu + r + 1))^2}$ s dosazením $\nu = -n$ zde nevede k cíli, ježto se ocitáme v pólu funkce Γ.

Víme z § 3, kap. IV, že v bodě $s = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ má funkce Γ jednoduchý pól s residuem $b_k = \dfrac{(-1)^k}{k!}$, tj. v jistém okolí bodu $s = -k$ je

$$\Gamma(s) = \frac{b_k}{s + k} + g_k(s) ,$$

kde g_k je funkce holomorfní v bodě $-k$. Je tedy

$$\frac{\Gamma'(s)}{(\Gamma(s))^2} = \frac{- \dfrac{b_k}{(s+k)^2} + g_k'(s)}{\dfrac{b_k^2}{(s+k)^2} + \dfrac{2b_k}{(s+k)}\, g_k(s) + g_k^2(s)} ,$$

a tedy

$$\lim_{s \to -k} \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma^2(s)} = - \frac{1}{b_k} = -(-1)^k\, k! ,$$

takže

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu + r + 1)}\right]_{\nu=-n} = (-1)^{n-r-1}(n - r - 1)! , \quad 0 \leqq r < n .$$

Tím je vypočten součet S. Z těchto výpočtů plyne tedy:

Věta 45. *Pro celé* $n \geqq 0$, $x \neq 0$ *je*

$$\pi N_n(x) = 2 J_n(x) \log \frac{x}{2} +$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!} \left(2C - \sum_{m=1}^{n+r} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{r} \frac{1}{m}\right) - \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} \frac{(n-r-1)!}{r!} .$$

Speciálně

$$\pi N_0(x) = 2\, J_0(x) \log \frac{x}{2} + 2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{(r!)^2} \left(C - \sum_{m=1}^{r} \frac{1}{m}\right).$$

§ 4

Řešení Besselovy rovnice Laplaceovou metodou. Hankelovy funkce

Do rovnice $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0$ zaveďme novou neznámou funkci w rovnicí $y = x^\nu w$ (viz § 6, kap. III, věty 28, 30). Ihned zjistíte, že pro w dostáváme rovnici

$$(28) \qquad xw'' + (2\nu + 1)\, w' + xw = 0\,,$$

kterou lze řešit Laplaceovou metodou z kap. V, § 1. (Vztah obou rovnic je ovšem tento: Jestliže mám v nějaké oblasti $\Omega \subset E - \{0\}$ jednoznačnou větev x^ν a holomorfní funkci w, potom $y = x^\nu w$ je řešení Besselovy rovnice v Ω tehdy a jen tehdy, kdy w je v Ω řešením rovnice (28).) V označení kap. V, § 1 je pro rovnici (28) $P(z) = z^2 + 1$, $Q(z) = (2\nu + 1)\, z$, tedy

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{z - i} + \frac{1}{z + i}\right), \quad A = 0\,,$$

$$\alpha_1 = i\,, \quad \alpha_2 = -i\,, \quad A_1 = A_2 = \nu + \frac{1}{2}\,.$$

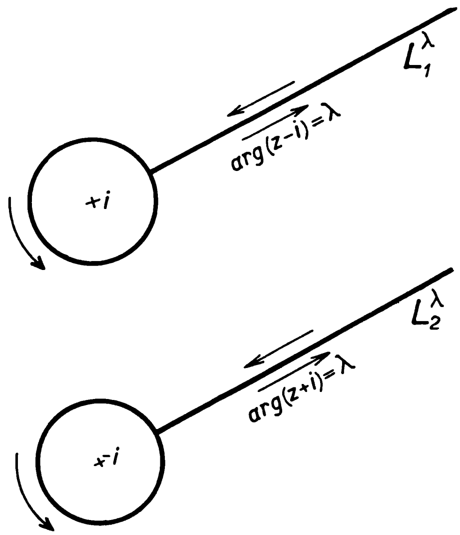
Místo $(z + i)^\varrho (z - i)^\varrho$ budu psát též $(z^2 + 1)^\varrho$; musím přitom ovšem argumenty volit tak, aby $\arg(z^2 + 1) = \arg(z - i) + \arg(z + i)$. Jestliže $\nu + \frac{1}{2}$ není celé kladné číslo, tj. jestliže

$$(29) \qquad \nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots,$$

můžeme sestrojit v libovolné polorovině $\frac{\pi}{2} - \lambda < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda$ (λ dané reálné číslo) fundamentální systém řešení rovnice (28) (viz obr. 18)

$$(30) \quad w_{1,\nu}^{(\lambda)}(x) = \int_{L_1^\lambda} (z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\, e^{xz}\, dz\,, \quad w_{2,\nu}^{(\lambda)}(x) = \int_{L_2^\lambda} (z^2 + 1)^{\nu - 1/2} e^{xz}\, dz\,.$$

K tomu je třeba ještě něco dodat: na L_1^λ je určen $\arg(z - i)$, a tedy též $(z - i)^{\nu-1/2}$. Abychom určili $(z + i)^{\nu-1/2}$ na L_1^λ, stačí ve smyslu kap. V, § 1 zvolit hodnotu $(z + i)^{\nu-1/2}$ v bodě $z = i$; zvolme $[\arg(z + i)]_{z=i} = \frac{\pi}{2}$, tedy $[(z + i)^{\nu-1/2}]_{z=i} = 2^{\nu-1/2} \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\right)$ $(\arg 2 = 0)$. Pro L_2^λ volme obdobně $[\arg(z - i)]_{z=-i} = -\frac{\pi}{2}$, $[(z - i)^{\nu-1/2}]_{z=-i} = 2^{\nu-1/2} \cdot \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\right)$ $(\arg 2 = 0)$.



Obr. 18.

Ještě jedna poznámka je nutná: Pro $\lambda = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k celé) by L_1^λ obsahovala bod $-i$; tomu se vyhneme po malé polokružnici (aby $w_{1,\nu}^{(\lambda)}$ bylo úplně stanoveno, musím si jednu z obou polokružnic vybrat). Podobně u L_2^λ pro $\lambda = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (k celé). Funkce $w_{j,\nu}^{(\lambda)}$ $(j = 1, 2)$ budeme pojímat jako holomorfní funkce s definičním oborem

$$\frac{\pi}{2} - \lambda < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda . \tag{31}$$

Prozatím budeme předpokládat, že platí (29), takže funkce (30) dávají v uvedené polorovině fundamentální systém řešení (28); tedy $x^\nu\, w_{j,\nu}^{(\lambda)}(x)$ dávají v této polorovině fundamentální systém řešení rovnice Besselovy (hodnota x^ν je určena podmínkou (31)). Zvláště důležitý je případ $\lambda = \pi$, kdy (31) má tvar $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$. Zaveďme proto tuto definici: $w_{1,\nu}(x)$, $w_{2,\nu}(x)$ nechť jsou funkce analytické a holomorfní neomezeně pokračovatelné v $E - \{0\}$, pro něž pro $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ je

(32) $$w_{1,\nu}(x) = w_{1,\nu}^{(\pi)}(x)\,, \quad w_{2,\nu}(x) = w_{2,\nu}^{(\pi)}(x)\,.$$

Tím jsou zároveň $w_{1,\nu}$, $w_{2,\nu}$ „očíslovány", neboť jsou dány jejich elementy $\mathscr{E}^{a,\epsilon}$ pro $\alpha = \arg a$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Analytické funkce $w_{j,\nu}(x)$ máme vyjádřeny integrály $w_{j,\nu}^{(\pi)}(x)$ pro $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$. Zajímá nás otázka, pro která λ můžeme vyjádřit hodnoty $w_{j,\nu}(x)$ pro $\frac{\pi}{2} - \lambda < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda$ pomocí integrálu $w_{j,\nu}^{(\lambda)}(x)$ (tím bychom rozšířili interval pro $\arg x$, pro nějž hodnoty $w_{j,\nu}(x)$ lze vyjádřit integrály tvaru (30)). Ježto půjde o přechod od hodnoty $\lambda = \pi$ k jiné hodnotě λ, bude pro $w_{1,\nu}(x)$ asi nepříjemné, když mezi π, λ bude ležet nějaká hodnota tvaru $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k celé (udělejte si náčrtek). Proto se u $w_{1,\nu}$ omezíme na interval

$$-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{3\pi}{2}\,,$$

a podobně se u $w_{2,\nu}$ omezíme na interval $\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{5\pi}{2}$. Pomůže nám toto:

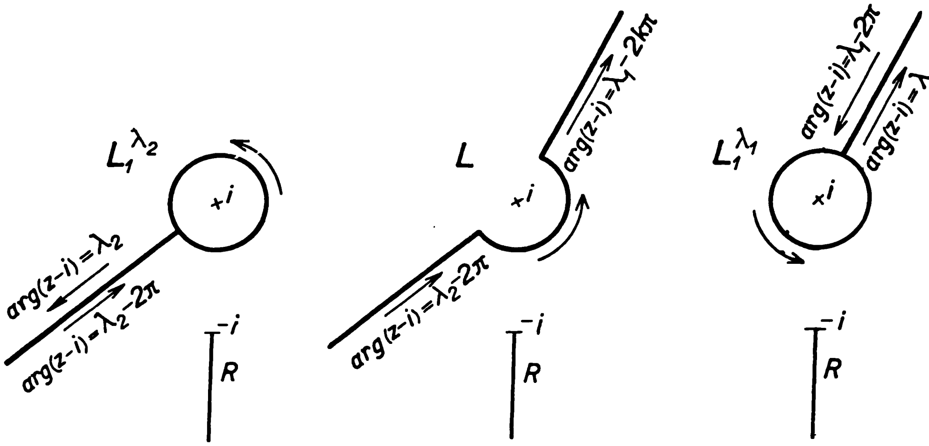
Lemma 2. *Nechť* λ_1, λ_2 *leží v intervalu* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ *a nechť* $0 < \lambda_2 - \lambda_1 < \pi$. *Potom pro*

(33) $$\frac{\pi}{2} - \lambda_1 < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda_2$$

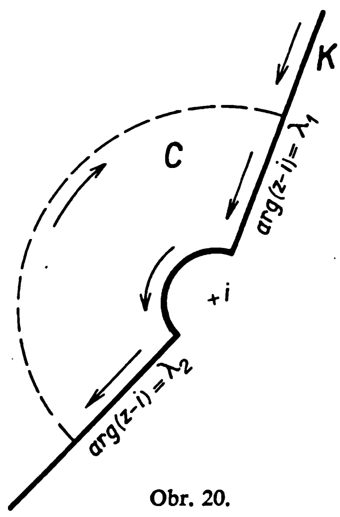
(*to je neprázdný interval pro* $\arg x$) *je*

$$w_{1,\nu}^{(\lambda_1)}(x) = w_{1,\nu}^{(\lambda_2)}(x)\,.$$

Důkaz. Naznačme dráhy $L_1^{\lambda_1}$, $L_1^{\lambda_2}$ a pomocnou dráhu L. Budeme pracovat v $E - R$ (viz obr. 19). Na obrázku pro L (obr. 19) je k celé číslo. Čtenář si sám rozváží, že z podmínky $0 < \lambda_2 - \lambda_1 < \pi$ plyne $k = 0$ (to je důležité!). Odtud snadno plyne, že $\int_{L_1^{\lambda_1}} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\, dz - \int_L \ldots = \int_K \ldots$, kde K je vyznačeno na obr. 20. Dokážeme, že $\int_K \ldots = 0$. K tomu cíli sestrojíme oblouk $C : z - i = re^{-it}$, $-\lambda_2 \leqq t \leqq$ $\leqq -\lambda_1$, užijeme Cauchyovy věty, a potom dokážeme, že $\int_C \ldots$ má pro $r \to +\infty$ limitu 0.



Obr. 19.



Obr. 20.

Poslední tvrzení dokážeme takto: nechť x je dané číslo takové, že platí (33). Pišme

$$\min\left(\arg x + \lambda_1 - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - \arg x - \lambda_2\right) = \delta\,; \quad \text{je} \quad \delta > 0\,.$$

Na celém oblouku C je

$$\frac{\pi}{2} + \delta \leqq \arg x + \lambda_1 \leqq \arg x + \lambda \leqq \arg x + \lambda_2 \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta\,,$$

takže $\cos(\arg x + \lambda) \leqq -\sin\delta$, a tedy na C je $|e^{xz}| \leqq e^{-r|x|\sin\delta}$ a odtud tvrzení snadno plyne. Tedy $\int_{L_1\lambda_1} \ldots = \int_L \ldots$ a podobně dokážeme $\int_{L_1\lambda_1} \ldots = \int_L \ldots$.

Z lemmatu 2 nyní plyne:

Věta 46. *Je-li* $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{3\pi}{2}$, *potom pro* $\frac{\pi}{2} - \lambda < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda$ *je* $w_{1,\nu}^{(\lambda)}(x) = w_{1,\nu}(x)$.

Důkaz. Je-li $\lambda = \pi$, platí tvrzení podle definice. Je-li $\pi < \lambda < \frac{3\pi}{2}$, užiji lemmatu pro $\lambda_2 = \lambda$, $\lambda_1 = \pi$. Je-li $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \pi$, lze zřejmě nalézt λ' tak, že $0 < \pi - \lambda' < \pi$, $0 < \lambda' - \lambda < \pi$, načež užiji lemmatu dvakrát: napřed na dvojici λ', π, potom na λ, λ'.

Význam věty je tento: Je-li $-\pi < \arg x < 2\pi$, lze zřejmě nalézt $\lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ tak, že $\frac{\pi}{2} - \lambda < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda$, načež hodnota $w_{1,\nu}(x)$ (příslušná k dané hodnotě $\arg x$) je dána integrálem $w_{1,\nu}^{(\lambda)}(x)$.

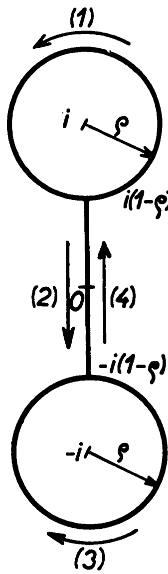
Obdobně bychom dokázali:

Věta 47. *Je-li* $\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{5}{2}\pi$, *potom pro* $\frac{\pi}{2} - \lambda < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda$ *je* $w_{2,\nu}^{(\lambda)}(x) = w_{2,\nu}(x)$. Z toho zase plyne: Je-li $-2\pi < \arg x < \pi$, lze hodnotu $w_{2,\nu}(x)$ vyjádřit integrálem $w_{2,\nu}^{(\lambda)}(x)$ pro vhodné $\lambda \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi\right)$.

V kap. V, § 1 jsme mluvili také o řešeních Laplaceovy rovnice křivkovými integrály, kde integrační dráha je křivka konečné délky, neprocházející body $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; viz text u obr. 12, str. 178. Ježto u rovnice (28) je $A_1 = A_2 = \nu - \frac{1}{2}$, můžeme použít křivky $C = (1) \dotplus (2) \dotplus (3) \dotplus (4)$ z obr. 21: křivka začíná v bodě $i(1-\varrho)$ $(0 < \varrho < 1)$, proběhne jednou kružnicí o středu i v kladném smyslu, potom úsečkou od $i(1-\varrho)$ do $-i(1-\varrho)$, potom kružnicí o středu $-i$ v záporném smyslu a konečně úsečku od $-i(1-\varrho)$ do $i(1-\varrho)$. Potom funkce

$$F_\nu(x) = \int_C e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\,dz \tag{34}$$

je řešením rovnice (28). $F_\nu(x)$ je zřejmě spojitá funkce x, ν a má spojité parciální derivace, a tedy podle věty 13 je holomorfní v $E \times E$. Abychom jednoznačně stanovili funkci (34), musíme ještě určit větev $\arg(z^2 + 1)$ podél C. Na přímých částech dráhy je $z^2 + 1 > 0$, volme tedy v počátečním bodě dráhy $\arg(z^2 + 1) = 0$; na části (2) bude potom $\arg(z^2 + 1) = 2\pi$, na části (4) bude $\arg(z^2 + 1) = 0$. Tím je $F_\nu(x)$ jednoznačně určeno (nezávislost na ϱ pro $0 < \varrho < 1$ plyne z Cauchyovy věty).



Obr. 21.

Předpokládejme na okamžik, že ν není ani celé, ani tvaru $k + \frac{1}{2}$ s celým k. Potom rovnice (28) má fundamentální systém řešení $x^{-\nu} J_\nu(x)$, $x^{-\nu} J_{-\nu}(x)$. První je celá funkce, druhá je mnohoznačná (je součinem $x^{-2\nu}$ a celé funkce). Ježto celá funkce $F_\nu(x)$ je jejich lineární kombinací, je nutně

(35) $$F_\nu(x) = a(\nu)\, J_\nu(x) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} = a(\nu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\, \Gamma(\nu + k + 1)} .$$

Abychom vypočítali $a(\nu)$, dosaďme $x = 0$:

(36) $$F_\nu(0) = \frac{a(\nu)}{\Gamma(\nu + 1)} .$$

Máme vypočítat $F_\nu(0)$. Předpokládejme na okamžik ještě $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$; potom integrály přes kružnice mají pro $\varrho \to 0+$ limitu 0, tedy (míněn integrál přes úsečku)

$$(37) \qquad F_\nu(x) = \left(1 - e^{2\pi i(\nu - 1/2)}\right) \int_{-i}^{i} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2} \, dz \,,$$

$\arg(z^2 + 1) = 0$.

Položíme-li $z = it$, $\arg(1 - t^2) = 0$, máme

$$(38) \qquad F_\nu(x) = i\left(1 - e^{2\pi i(\nu - 1/2)}\right) \int_{-1}^{1} e^{itx}(1 - t^2)^{\nu - 1/2} \, dt \,.$$

Dosaďme $x = 0$; substituce $t = u^{1/2}$ pro $0 < t < 1$ dává

$$\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\nu - 1/2} \, dt = 2 \int_0^1 \ldots = \int_0^1 (1 - u)^{\nu - 1/2} u^{-1/2} \, du = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1)} \,.$$

Ježto $\dfrac{1}{\Gamma(\nu + 1)} \neq 0$, dostáváme srovnáním s (36)

$$(39) \qquad a(\nu) = i\left(1 - e^{2\pi i(\nu - 1/2)}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} \,.$$

Ježto $2\pi i\left(\nu - \frac{1}{2}\right) = 2\pi i\left(\nu + \frac{1}{2}\right) - 2\pi i$, dostaneme

$$a(\nu) = 2e^{\pi i(\nu + 1/2)} \sin \pi\left(\nu + \frac{1}{2}\right) . \, \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}$$

a odtud (upravím součin sinu a Γ podle (46) kap. IV)

$$(40) \qquad F_\nu(x) = \int_C e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2} \, dz = \frac{2\pi^{3/2} e^{\pi i(\nu + 1/2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(x) \,.$$

Tento vzorec jsme dokázali pro $x \in E$ a např. pro $0 < \nu < \frac{1}{2}$. Ježto však obě strany jsou celé funkce ν, platí vzorec (40) v $E \times E$. $\left(\text{Pro } \nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots \text{ jsou ovšem obě strany rovny nule.}\right)$

Podotkněme ještě, že z (35), (36), (39) plyne pěkná formule

$$\int_{-1}^{1} e^{itx}(1 - t^2)^{\nu - 1/2} \, dt = \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) J_\nu(x) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}, \tag{41}$$

kde $\arg(1 - t^2) = 0$. Dokázali jsme ji pro $x \in E$, $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$, $\nu \neq \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$. Ježto však obě strany jsou (při pevném x) holomorfní v polorovině $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$, platí (41) pro $x \in E$, $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$. Z téhož důvodu platí též (38) pro $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$.

Předpokládejme nyní opět, že

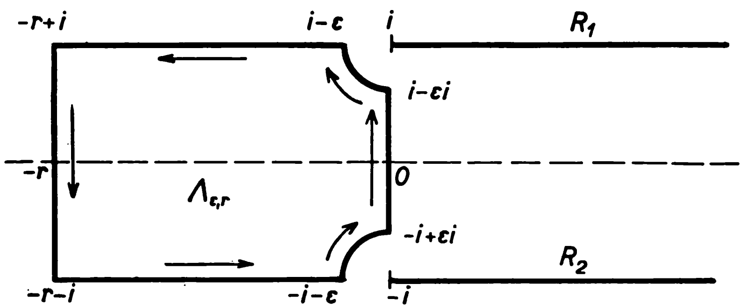
$$\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots.$$

Potom funkce $w_{1,\nu}$, $w_{2,\nu}$ dávají fundamentální systém řešení, a tedy funkce (40) je jejich lineární kombinací s konstantními koeficienty, které teď vypočteme. Předpokládejme, že $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$. Potom $w_{j,\nu}(x) = w_{j,\nu}^{(\pi)}(x)$ $(j = 1, 2)$, a pravá strana je integrál (30) přes dráhu L_j^π. Jestliže $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$, můžeme nechat poloměr kružnice na L_j^π konvergovat k nule a obdržíme

$$w_{j,\nu}(x) = \left(1 - e^{-2\pi i(\nu - 1/2)}\right) \int_{L'_j} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2} \, dz \quad (j = 1, 2). \tag{42}$$

Na L'_1 je $\arg(z + 1)$ rovný $\frac{\pi}{2}$ pro $z = i$, na L'_2 je $\arg(z - i)$ rovný $-\frac{\pi}{2}$ pro $z = -i$.

Volme nyní $0 < \varepsilon < 1$, $r > 1$ a označme $\Lambda_{\varepsilon,r}$ dráhu na obr. 22. Veďme ještě polopřímky R_1, R_2 z bodů $i, -i$ rovnoběžné s reálnou osou. V $E - R_1$ volme



Obr. 22.

tu větev $\arg(z - i)$, která v bodě $-i$ má hodnotu $-\frac{\pi}{2}$, takže v $E - R_1$ je $-2\pi < < \arg(z - i) < 0$. V $E - R_2$ volme tu větev $\arg(z + i)$, která v bodě i má hodnotu $\frac{\pi}{2}$, takže v $E - R_2$ je $0 < \arg(z + i) < 2\pi$. Na úsečce od $-i + i\varepsilon$ do $i - i\varepsilon$ je $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{2}$, $\arg(z + i) = \frac{\pi}{2}$, tedy $\arg(z^2 + 1) = 0$. Tedy $\arg(z - i)$, $\arg(z + i)$ jsou na úsečkách dráhy $\Lambda_{\varepsilon,r}$ (nemluvím o úsečce od $-r + i$ do $-r - i$) voleny stejně jako na integračních drahách v (37), (42), s jedinou výjimkou: na L'_1 je $\arg(z - i) = \pi$, na příslušné úsečce dráhy $\Lambda_{\varepsilon,r}$ je $\arg(z - i) = -\pi$. Je

$$\int_{\Lambda_{\varepsilon,r}} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\, dz = 0 .$$

Proveďme limitní přechod $\varepsilon \to 0+$, $r \to +\infty$. Ježto $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} x > 0$, konvergují integrály přes čtvrtkružnice a přes úsečku od $-r + i$ do $-r - i$ k nule, a dostáváme

$$\int_{-i}^{+i} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\, dz - \int_{L'_2} \ldots + e^{-2\pi i(\nu - 1/2)} \int_{L'_1} \ldots = 0 .$$

Násobme $1 - e^{2\pi i(\nu - 1/2)}$ a dostaneme s použitím (40), (37), (42)

$$(43) \qquad \frac{2\pi^{3/2} e^{\pi i(\nu + 1/2)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(x) = w_{1,\nu}(x) - e^{2\pi i(\nu - 1/2)}\, w_{2,\nu}(x) .$$

To jsme dokázali prozatím pro $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$, $\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$. Vezměme nyní některé x s $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$, takže $\operatorname{Re} x > 0$. V oboru $\Omega = E - \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right\}$ konvergují integrály $w_{1,\nu}^{(\pi)}(x)$, $w_{2,\nu}^{(\pi)}(x)$ (viz (30)) lokálně stejnoměrně, a tedy je pravá strana v (43) holomorfní funkce ν v Ω; totéž platí pro $\nu \in \Omega$, $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$. Ale při pevném $\nu \in \Omega$ jsou $w_{1,\nu}$, $w_{2,\nu}$, jakož i levá strana, holomorfně neomezeně pokračovatelné v $E - \{0\}$. Tedy:

(43) platí pro všechna $\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, $\quad x \in E - \{0\}$.

Pro $\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ zaveďme nový fundamentální systém řešení Besselovy rovnice

(44)
$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{\pi^{3/2}} e^{-\pi i(\nu + 1/2)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu w_{1,\nu}(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) = -\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{\pi^{3/2}} e^{\pi i(\nu + 1/2)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu w_{2,\nu}(x) \end{cases}$$

(uvažme, že $\frac{1}{2} - \nu$ není pólem funkce Γ). Tedy (viz (43))

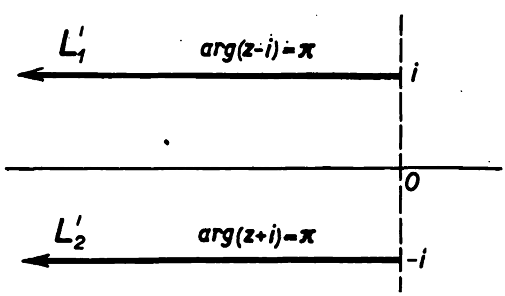
(45)
$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right).$$

Pro $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ je

(46)
$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{\pi^{3/2}} e^{-\pi i(\nu + 1/2)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu \displaystyle\int_{L_1^\pi} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\, dz, \\ H_\nu^{(2)}(x) = -\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{\pi^{3/2}} e^{\pi i(\nu + 1/2)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu \displaystyle\int_{L_2^\pi} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\, dz. \end{cases}$$

Chtěli bychom ještě vhodným způsobem doplnit definici těchto funkcí pro $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$. Z kap. V víme, že pro $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$ je dvojice funkcí

(47)
$$\int_{L'_j} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\, dz \quad (j = 1, 2)$$



Obr. 23.

fundamentálním systémem řešení rovnice (28) pro $\arg x| < \frac{\pi}{2}$ (L'_1, L'_2 viz na obr. 23). Necháme-li poloměr kružnice na L_j^π konvergovat k nule, dostaneme způsobem už opětovně použitým $\int_{L_j^\pi} \ldots = (1 - e^{-2\pi i(\nu - 1/2)}) \int_{L'_j} \ldots$. Můžeme tedy pro $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$, $\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ vyjádřit $H_\nu^{(j)}$ pomocí $\int_{L'_j} \ldots$. Upravme koeficient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)\left(1 - e^{-2\pi i(\nu - 1/2)}\right) = 2e^{-\pi i\nu}\, \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \sin \pi\left(\frac{1}{2} - \nu\right) = \frac{2e^{-\pi i\nu}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)}$$

a dostaneme pro $\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$, $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$

$$(48)\qquad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = -\dfrac{2i}{\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{e^{-2\pi i\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu \displaystyle\int_{L'_1} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\, dz\,, \\[2ex] H_\nu^{(2)}(x) = -\dfrac{2i}{\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{1}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu \displaystyle\int_{L'_2} e^{xz}(z^2 + 1)^{\nu - 1/2}\, dz\,. \end{cases}$$

Ale zde tvoří pravé strany fundamentální systém řešení Besselovy rovnice i pro $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$. Proto rozšíříme definici funkcí $H_\nu^{(j)}$ i na hodnoty $\nu = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$, a to rovnicemi (48). Tedy platí:

Věta 48. *Pro každé $\nu \in E$ existují dvě funkce $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ analytické a neomezeně holomorfně pokračovatelné v $E - \{0\}$, které jsou pro $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ dány rovnicemi (46), je-li $\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$, a rovnicemi (48), je-li $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$. Pro každé $\nu \in E$ tvoří $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ fundamentální systém řešení Besselovy rovnice s indexem ν.*

Těmto funkcím se říká **Hankelovy funkce**. Dokážeme později, že $H_\nu^{(j)}(x)$ mají jako funkce x, ν tytéž vlastnosti holomorfie jako J_ν, N_ν (viz větu 44). Ale zatím se spokojíme dvěm jednoduchými fakty:

Lemma 3. *Pro každé x, pro něž $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$, jsou $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ celé funkce proměnné ν.*

Důkaz. Integrály v (46) jsou lokálně stejnoměrně konvergentní $\left(\text{jakožto funkce } \nu\right.$ při pevném x s $|\arg x| < \left.\frac{\pi}{2}\right)$ v E, tedy to jsou celé funkce; $\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)$ je holomorfní v oblasti $\Omega_1 = E - \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\right\}$. Za druhé: integrály v (48) jsou lokálně stejnoměrně konvergentní v oblasti Ω_2, dané nerovností $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$. Tedy $H_\nu^{(j)}(x)$ jsou holomorfní funkce ν v Ω_1 i v Ω_2, ale $\Omega_1 \cup \Omega_2 = E$.

Lemma 4. *Pro všechna $x \in E - \{0\}$ a všechna $\nu \in E$ je*

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right). \tag{49}$$

Důkaz. Víme, že (49) platí pro $x \neq 0$, $\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$. Vezměme nějaké x, $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$. Ježto obě strany v (49) jsou celé funkce ν, platí (49) pro všechna ν, pokud $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$. Ježto pak při daném ν jsou obě strany holomorfně neomezeně pokračovatelné v $E - \{0\}$ (jakožto funkce x), platí (49) pro všechna $x \in E - \{0\}$.

§ 5

Asymptotické rozvoje funkcí $H_\nu^{(j)}$, J_ν, N_ν

Vyšetřím podle kap. V, § 2 asymptotické rozvoje funkcí $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$. Výpočty provedu pro $H_\nu^{(1)}(x)$; analogické výpočty pro $H_\nu^{(2)}(x)$ přenechávám čtenáři. Budiž stále

$$\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots.$$

Budiž λ jakékoliv reálné číslo. Vyjdu z $w_{1,\nu}^{(\lambda)}$, a to z integrálu (30) ($L_1^{(\lambda)}$ je dráha I. typu). Jde tedy o asymptotický vzorec (37), str. 189, platný pro $\frac{\pi}{2} - \lambda + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda - \delta \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$. Zde je $n = 2$, $A = 0$, $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$, $A_1 = A_2 =$

$= \nu + \frac{1}{2}$; čísla b_{1j} jsou určena rozvojem

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_{1j} z^j = (z + \alpha_1 - \alpha_2)^{A_2 - 1} = (z + 2i)^{\nu - 1/2} = b_{10}\left(1 + \frac{z}{2i}\right)^{\nu - 1/2},$$

kde b_{10} je zvolená hodnota $[(z + 2i)^{\nu-1/2}]_{z=0}$ a $\left(1 + \frac{z}{2i}\right)^{\nu-1/2}$ je dána pro $|z| < 2$ binomickou řadou (tj. je to ona větev, která pro $z = 0$ má hodnotu 1). Ale hodnotu b_{10} jsme již stanovili; podle počátku § 4 v kap. V je to námi zvolená hodnota $[(z + i)^{\nu-1/2}]_{z=i}$, tedy podle str. 205 $b_{10} = 2^{\nu-1/2} e^{1/2\pi i(\nu-1/2)}$. Odtud a z binomické řady plyne

$$b_{1j} = 2^{\nu-1/2} e^{1/2\pi i(\nu-1/2)} \cdot \binom{\nu - \frac{1}{2}}{j} \cdot \left(\frac{-i}{2}\right)^j.$$

Nyní napíšeme vzorec (37) str. 189 pro $w_{1,\nu}^{(\lambda)}$: Pro $\frac{\pi}{2} - \lambda + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda - \delta$, $|x| > \delta$ je

$$w_{1,\nu}^{(\lambda)}(x) = 2^{\nu-1/2} e^{1/2\pi i(\nu-1/2)} \cdot 2\pi i \frac{e^{xi}}{x^{\nu+1/2}} \cdot \tag{50}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{j=0}^{q} \binom{\nu - \frac{1}{2}}{j} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu - j\right)} \left(\frac{-i}{2x}\right)^j + \Delta \right\},$$

kde

$$|\Delta| < \frac{c(\nu, \lambda, \delta, q)}{|x|^{q+1}}. \tag{51}$$

(Nyní značím c tzv. absolutní kladné konstanty, tj. docela určitá čísla; závisí-li nějaké kladné číslo na parametrech α, β, γ, značím je $c(\alpha, \beta, \gamma)$ apod.)

Všimněme si nyní analytické funkce $w_{1,\nu}(x)$ pro $-\pi < \arg x < 2\pi$. Víme toto (věta 46):

Je-li $-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - \lambda < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \lambda$, *je* $w_{1,\nu}(x) = w_{1,\nu}^{(\lambda)}(x)$. *Budiž* $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$; *ukážeme toto: pro* $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$, $|x| > \delta$ *je* $w_{1,\nu}(x)$

dáno pravou stranou v (50), *kde*

$$|\Delta| < \frac{c(\nu, \delta, q)}{|x|^{q+1}}.$$

Důkaz. Zvolme $\lambda_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_3 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\delta}{2}$.

Intervaly

$$i_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_1 + \frac{\delta}{4}, \frac{3\pi}{2} - \lambda_1 - \frac{\delta}{4}\right) = \left(\pi - \frac{\delta}{4}, 2\pi - \frac{3\delta}{4}\right),$$

$$i_2 = \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_2 + \frac{\delta}{8}, \frac{3\pi}{2} - \lambda_2 - \frac{\delta}{8}\right) = \left(\frac{\delta}{8}, \pi - \frac{\delta}{8}\right),$$

$$i_3 = \left(\frac{\pi}{2} - \lambda_3 + \frac{\delta}{4}, \frac{3\pi}{2} - \lambda_3 - \frac{\delta}{4}\right) = \left(-\pi + \frac{3\delta}{4}, \frac{\delta}{4}\right)$$

pokrývají zřejmě interval $(-\pi + \delta, 2\pi - \delta)$. Je-li tedy $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$, leží $\arg x$ v některém intervalu i_k $(k = 1, 2, 3)$, takže $w_{1,\nu}(x) = w_{1,\nu}^{(\lambda_k)}(x)$ a mohu užít vzorce (50). Přitom máme odhad

$$|\Delta(x)| < \frac{1}{|x|^{q+1}} \max_{k=1,2,3} c\left(\nu, \lambda_k, \frac{\delta}{8}, q\right),$$

a zde λ_k závisí jen na δ.

Abych stanovil asymptotický rozvoj pro $H_\nu^{(1)}(x)$, násobím pravou stranu v (50) číslem (viz (46))

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{\pi^{3/2}} e^{-\pi i(\nu + 1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu.$$

Upravme koeficienty

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu - j\right)} = (-1)^j \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\left(\nu + \frac{3}{2}\right) \dots \left(\nu + \frac{2j-1}{2}\right),$$

$$\binom{\nu - \frac{1}{2}}{j} = \frac{1}{j!}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\left(\nu - \frac{3}{2}\right) \dots \left(\nu - \frac{2j-1}{2}\right).$$

Pišme

$$\{\nu, j\} = \left(\nu^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\nu^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\dots\left(\nu^2 - \left(\frac{2j-1}{2}\right)^2\right) = \tag{52}$$

$$= \prod_{p=-j}^{j-1}\left(\nu + \frac{1}{2} + p\right), \quad \{\nu, 0\} = 1\,.$$

Dostáváme tento výsledek (píši hned také rozvoj pro $H_\nu^{(2)}$):

Věta 49. *Nechť* $\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$; $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$; *q celé,* $q \geqq 0$. *Potom platí:*

Pro $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$, $|x| > \delta$ *je*

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,.\,e^{i(x-(1/2)\pi\nu-(1/4)\pi)}\left(\sum_{j=0}^{q}\frac{\{\nu, j\}}{j!}\left(\frac{i}{2x}\right)^j + \Delta_1\right) \tag{53}$$

a pro $-2\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$, $|x| > \delta$ *je*

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,.\,e^{-i(x-\nu(1/2)\pi\nu-(1/4)\pi)}\left(\sum_{j=0}^{q}\frac{\{\nu, j\}}{j!}\left(\frac{-i}{2x}\right)^j + \Delta_2\right), \tag{54}$$

kde v obou případech je

$$|\Delta_k| < \frac{c(\nu, \delta, q)}{|x|^{q+1}} \quad (k = 1, 2) \tag{55}$$

a $\{\nu, j\}$ *je definováno v* (52).

Je (viz 45)) $J_\nu(x) = \frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x))$.

Definujme ještě (pro všechna $\nu \in \boldsymbol{E}$)

$$M_\nu(x) = \frac{1}{2i}(H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x))$$

(za chvíli dokážeme, že $M_\nu = N_\nu$).

Věta 50. *Nechť* $\nu \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$; $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$; *q celé,* $q \geqq 0$. *Potom pro* $-\pi + \delta <$ $< \arg x < \pi - \delta$, $|x| > \delta$ *je*

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sum_{j=0}^{q}\frac{\{\nu, j\}}{j!}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2} - j\right)\right)\frac{1}{(2x)^j} + \Delta_3\right), \tag{56}$$

$$(57) \qquad M_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\sum_{j=0}^{q} \frac{\{\nu, j\}}{j!} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \left(\nu + \frac{1}{2} - j \right) \right) \frac{1}{(2x)^j} + \Delta_4 \right),$$

kde

$$(58) \qquad |\Delta_k| < \frac{c(\nu, \delta, q)}{|x|^{q+1}} e^{|\mathrm{Im}\, x|} \quad (k = 3, 4) .$$

Důkaz. Užije se ovšem věty 49 a stačí odhadnout Δ_3, Δ_4. A k tomu stačí poznamenat, že $|\exp(ix)| = \exp(-\mathrm{Im}\, x)$, $|\exp(-ix)| = \exp(\mathrm{Im}\, x)$.

Poznámka 1. Všimněme si rozvojů ve větě 50. V (53), (54) se vpravo vyskytují úseky řady $S = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\{\nu, j\}}{j!} \left(\frac{\pm i}{2x} \right)^j$. Jestliže ν není tvaru $k + \frac{1}{2}$ (k celé), potom $\{\nu, j\} \neq 0$ pro všechna j a podílové (d'Alembertovo) kritérium ukazuje, že řada S diverguje pro každé $x \in E - \{0\}$. Je-li naopak ν tvaru $k + \frac{1}{2}$ s celým k, ukáže čtenář snadno, že S se redukuje na konečný součet

$$(59) \qquad \sum_{j=0}^{|\nu| - 1/2} \frac{\{\nu, j\}}{j!} \left(\frac{\pm i}{2x} \right)^j,$$

ostatní členy se rovnají nule. To ukazuje, že případy $\nu = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \ldots$ mají jakýsi zvláštní charakter, což ukazuje i bod II v § 1. Ještě se k tomuto případu vrátíme.

Dokažme nyní, že $M_\nu = N_\nu$. Ježto J_ν, M_ν vznikají z fundamentálního systému $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$ lineární substitucí o nenulovém determinantu, tvoří J_ν, M_ν též fundamentální systém. Tedy platí pro všechna $x \neq 0$ rovnost (60)

$$(60) \qquad J_{-\nu}(x) = A_\nu J_\nu(x) + B_\nu M_\nu(x) .$$

Koeficienty A_ν, B_ν nyní vypočteme.

Vezměme nějaké reálné $\nu \neq \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}, \ldots$ a vyšetřujme kladné hodnoty x, $\arg x = 0$. V asymptotických rozvojích (56), (57) položme $q = 0$ a třeba $\delta = \frac{\pi}{4}$. Uvažme, že $\mathrm{Im}\, x = 0$, takže pro $k = 3, 4$ je $|\Delta_k(x)| < \frac{c(\nu)}{|x|}$. Tedy máme pro $x \to +\infty$

$$\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_\nu(x) \;= \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(1)\,,$$

$$\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, M_\nu(x) \;= \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(1)\,,$$

$$\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\, J_{-\nu}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(1) =$$

$$= \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos \pi\nu - \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sin \pi\nu + o(1)\,.$$

Položme $x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4} = X$, takže z (60) dostaneme $\cos X \cos \pi\nu - \sin X \sin \pi\nu = A_\nu \cos X + B_\nu \sin X + o(1)$ pro $X \to +\infty$. Dosazujme za X hodnoty $2k\pi$ (k celé kladné). Pro $k \to +\infty$ dostáváme $\cos \pi\nu = A_\nu + o(1)$, a ježto $\cos \pi\nu$, A_ν nezávisí na k, je $A_\nu = \cos \pi\nu$. Podobně dosazováním $X = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ dostaneme $B_\nu = -\sin \pi\nu$. Jestliže nadto ν není celé, dostaneme z (60)

$$M_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}\,.$$

Tedy je $M_\nu(x) = N_\nu(x)$ např. pro $0 < \nu < \frac{1}{2}$, $\arg x = 0$. Zvolme takové x; ježto potom M_ν, N_ν jsou celé funkce proměnné ν, platí $M_\nu(x) = N_\nu(x)$ pro každé $\nu \in \boldsymbol{E}$ a každé x s $\arg x = 0$. Ježto pak při daném ν jsou obě strany holomorfní pro $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ a neomezeně pokračovatelné v $\boldsymbol{E} - \{0\}$, máme tento výsledek:

Věta 51. *Pro každé $\nu \in \boldsymbol{E}$, $x \in \boldsymbol{E} - \{0\}$ je*

$$M_\nu(x) = N_\nu(x)\,, \quad \textit{tj.} \quad N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right). \tag{61}$$

Napišme ještě jednou tyto vztahy:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}\left(H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)\right), \quad N_\nu(x) = \frac{1}{2i}\left(H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)\right), \tag{62}$$

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i\,N_\nu(x)\,, \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - i\,N_\nu(x)\,. \tag{63}$$

Připomíná to vztahy mezi e^{ix}, e^{-ix}, $\cos x$, $\sin x$.

Poznámka 2. *Je-li $\arg x = 0$, ν reálné, jsou $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ reálné, $H_\nu^{(2)}(x)$ je číslo komplexně sdružené k $H_\nu^{(1)}(x)$.* Tedy stačí znát hodnotu $H_\nu^{(1)}(x)$, abychom znali i hodnoty ostatních tří funkcí.

Důkaz. $J_\nu(x)$ je reálné, jak plyne z jeho rozvoje v řadu. $N_\nu(x)$ je reálné jak plyne pro necelá ν z jeho vyjádření funkcemi J_ν, $J_{-\nu}$ a pro celá ν limitním přechodem.

Věta 52. *Budiž $A \subset E$ oblast, ve které existuje jednoznačná větev* $\arg x$. *Pro každé ν nechť nyní $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ znamenají ony větve v A, které přísluší zvolené větvi* $\arg x$. *Potom tyto větve $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ jsou holomorfní funkce x, ν v oblasti $A \times E$.*

Důkaz. Viz větu 44 (bod 5) a vzorce (63).

Obraťme se k případu, kdy $\nu - \frac{1}{2}$ je celé číslo. Potom jednak se $J_\nu(x)$ dá vyjádřit elementárními funkcemi (§ 1, bod II), jednak se řada S v poznámce redukuje na konečný součet (59). To nás vede k domněnce, že při volbě $q = |\nu| - \frac{1}{2}$ dostaneme v (53), (54), (56), (57) přesný vzorec, tj. $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$. Dokažme to:

Věta 53. *Nechť $\nu - \frac{1}{2}$ je celé číslo. Volme $q = |\nu| - \frac{1}{2}$. Potom v* (53), (54), (56), (57) *je $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ a tyto vzorce platí pro všechna (konečná) $x \neq 0$.*

Důkaz. Nechť $\nu = k + \frac{1}{2}$, k celé. Vyšetříme napřed $J_{k+1/2}(x)$. Užiji $\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. Podle (56) máme pro $k \geqq 0$ dokázat, že

$$(64_k) \qquad J_{k+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=0}^{k} \frac{\left\{k + \frac{1}{2}, j\right\}}{2^j j!} \sin\left(x - \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{2} j\right) . \, x^{-j-1/2} ;$$

případ $k < 0$ přenechávám čtenáři. Vzorec (64_0) platí podle § 1, bod II. Budiž tedy $k \geqq 0$ a nechť (64_k) platí; máme dokázat (64_{k+1}).

Podle § 1, (6) a podle (64_k) je

$$J_{k+3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{k+1/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left\{ \sum_{j=0}^{k} \frac{\left\{k + \frac{1}{2}, j\right\}}{2^j j!} \sin\left(x - \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{2} j\right) x^{-j-1/2} \right\} .$$

Derivuji podle pravidla $(\sin x)' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Argumenty výrazu sin u upravím už vhodně pro index $k + 1$:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2} k + \frac{\pi}{2} j\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}(k + 1) + \frac{\pi}{2}(j + 1)\right),$$

$$-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{2}j+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}(k+1)+\frac{\pi}{2}j\right).$$

Vyjde (počítejte!)

$$J_{k+3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=0}^{k+1}A_j\sin\left(x-\frac{\pi}{2}(k+1)+\frac{\pi j}{2}\right).x^{-j-1/2},$$

kde

$$A_0=\left\{k+\frac{1}{2},0\right\}=1,\quad A_{k+1}=\frac{\left\{k+\frac{1}{2},k\right\}}{2^k k!}(2k+1)$$

a pro $1\leqq j\leqq k$

$$A_j=\frac{\left\{k+\frac{1}{2},j-1\right\}}{2^{j-1}(j-1)!}(k+j)+\frac{\left\{k+\frac{1}{2},j\right\}}{2^j j!},$$

a máme dokázat, že A_j jsou právě koeficienty z (64_{k+1}). Pro $j=0$ to souhlasí. Pro $j=k+1$ uvažte, že pro každé n celé, $n\geqq 0$ je $\left\{n+\frac{1}{2},n\right\}=(2n)!$; tedy

$$A_{k+1}=\frac{(2k)!}{2^k.k!}(2k+1)=\frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!}=\frac{\left\{k+\frac{3}{2},k+1\right\}}{2^{k+1}(k+1)!},$$

což opět souhlasí s (64_{k+1}). Konečně pro $1\leqq j\leqq k$ je

$$A_j=\frac{1}{2^j.j!}\prod_{p=-j+1}^{j-2}(k+1+p).(k+j)(k+j+1)=$$

$$=\frac{1}{2^j.j!}\prod_{q=-j}^{j-1}(k+2+q)=\frac{\left\{k+\frac{3}{2},j\right\}}{2^j.j!},$$

což opět souhlasí s (64_{k+1}). Důkaz pro $J_{k+1/2}$ s celým $k\geqq 0$ je hotov. Důkaz pro $k<0$ provede čtenář. Podle (22) je dále $N_{k+1/2}(x)=(-1)^{k+1}J_{-k-1/2}(x)$, takže okamžitě dostáváme též vzorec pro $N_{k+1/2}$ a lineární kombinací obdržíme vzorce pro $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$.

§ 6

Některé důsledky asymptotických rozvojů

Všimněme si napřed rozvojů (53), (54) pro $q = 0$. Je-li $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, $\delta < \arg x <$ $< \pi - \delta$, je

$$|\exp(ix)| < \exp(-|x| \sin \delta), \quad |\exp(-ix)| > \exp(|x| \sin \delta).$$

Tedy: když $x \to \infty$ v oboru $\delta < \arg x < \pi - \delta$, je $H_\nu^{(1)}(x) \to 0$, $H_\nu^{(2)}(x) \to \infty$. V oboru $-\pi + \delta < \arg x < -\delta$ je naopak $H_\nu^{(1)}(x) \to \infty$, $H_\nu^{(2)}(x) \to 0$.

Všimněme si teď funkcí $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$. Písmenem Θ označujeme (bez rozlišování indexy) čísla, závisející na jakýchkoliv parametrech a splňující nerovnost $|\Theta| \leqq 1$. Podle (56), (57), (58) s $q = 0$ je pro $\arg x = 0$, $x > 1$

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \Theta \frac{c(\nu)}{x^{3/2}}, \tag{65}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \Theta \frac{c(\nu)}{x^{3/2}}. \tag{66}$$

Velmi důležité jsou nulové body řešení Besselovy rovnice, hlavně pro reálná ν. Odvodíme jen jednu jednoduchou větu. Budiž $\arg x = 0$, $x > 1$, ν reálné, takže $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ jsou reálné. Vezměme libovolné řešení $y(x) = a\, J_\nu(x) + b\, N_\nu(x)$; to je pro $\arg x = 0$ reálné tehdy a jen tehdy, jsou-li a, b reálná (jde totiž o podmínku $J_\nu(x)$. $\operatorname{Im} a + N_\nu(x) \operatorname{Im} b = 0$). Vezměme takové netriviální řešení. Potom existuje α, $0 \leqq \alpha < 2\pi$ tak, že $a = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \alpha$, $b = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \alpha$, takže nám půjde o kladné nulové body funkce

$$y(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} (\sin \alpha\, J_\nu(x) + \cos \alpha\, N_\nu(x)).$$

Podle (65), (66) máme s vhodnou konstantou $c_1(\nu)$

$$y(x) = \sin(x - \beta) + \Theta \frac{c_1(\nu)}{x}, \quad \beta = \frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4} - \alpha \tag{67}$$

(konstanty $c_1(\nu), \ldots$ budu zde výjimečně číslovat). Pro velká x budou nulové body funkce y ležet asi blízko bodů $x = \beta + k\pi$, $k > 0$ celé. Sestrojme proto (k bude stále celé kladné) intervaly

$$\left\langle \beta + k\pi - \frac{\pi}{2}, \beta + k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle. \tag{68}$$

Snadno určíme $c_2(\nu)$ tak, že pro $k > c_2(\nu)$ je $\beta + k\pi - \frac{\pi}{2} > 3k$; odtud a z (67) obdržíte pro $k > \max\left(c_2(\nu), \frac{1}{3} c_1(\nu)\right)$

$$y\left(\beta + k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1} + \Theta \frac{c_1(\nu)}{3k},$$

$$y\left(\beta + k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k} + \Theta \frac{c_1(\nu)}{3k},$$

takže obě tato čísla mají opačná znaménka, tedy v (68) leží aspoň jeden nulový bod $\beta + k\pi + \lambda_0 \left(|\lambda_0| \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ funkce y. Pro něj musí podle (67) být

$$|\sin (k\pi + \lambda_0)| = |\sin \lambda_0| \leqq \frac{c_1(\nu)}{3k}.$$

Ale

$$|\sin \lambda_0| \geqq \frac{2}{\pi} |\lambda_0|, \quad \text{tedy} \quad |\lambda_0| \leqq \frac{\pi}{6} \frac{c_1(\nu)}{k} < \frac{c_1(\nu)}{k};$$

v intervalu

$$\left\langle \beta + k\pi - \frac{c_1(\nu)}{k}, \beta + k\pi + \frac{c_1(\nu)}{k} \right\rangle \tag{69}$$

leží tedy pro $k > c_3(\nu)$, kde $c_3(\nu)$ je voleno podle předchozích úvah, aspoň jeden nulový bod funkce $y(x)$, a mimo tento interval neleží v intervalu (68) již žádný nulový bod. Dokážeme, že při vhodné volbě $c_4(\nu)$ v (69) leží pro $k > c_4(\nu)$ jen jeden nulový bod. To dokážeme tím, že v (69) je $y'(x) \neq 0$, takže y' má tam stále totéž znaménko a y je tam ryze monotonní. Podle § 1, I, (10) je

$$J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

a podobně pro N'_ν (viz (27)). Užiji-li (65), (66), dostanu existenci konstanty $c_5(\nu)$ tak, že

$$y'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\sin\left(x - \beta - \frac{\pi}{2}\right) + \Theta \frac{c_5(\nu)}{x}\right)$$

pro $x > 1$. Ale v intervalu (69) je

$$x - \beta - \frac{\pi}{2} = k\pi - \frac{\pi}{2} + \Theta \frac{c_1(\nu)}{k},$$

a tedy

$$\sin\left(x - \beta - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} + \Theta\,\frac{c_1(\nu)}{k},$$

a odtud je patrné, že $y'(x) \neq 0$ v intervalu (69), je-li $k > c_6(\nu)$ s vhodně voleným $c_6(\nu)$.

Věta 54. *Nechť ν je reálné. Potom existují čísla $c_7(\nu)$, $c_8(\nu)$ s touto vlastností. Budiž $y(x) = r(\sin\alpha\, J_\nu(x) + \cos\alpha\, N_\nu(x))$ $(r > 0,\ 0 \leqq \alpha < 2\pi)$. Vyšetřujme $y(x)$ jako funkci reálné proměnné, $\arg x = 0$. Potom platí: Je-li k celé, $k > c_7(\nu)$, leží v intervalu*

$$\left\langle \frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4} - \alpha + k\pi - \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4} - \alpha + k\pi + \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

právě jeden jednoduchý nulový bod x_k funkce $y(x)$ a je

$$x_k = \frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4} - \alpha + k\pi + \Theta\,\frac{c_8(\nu)}{k} \quad (kde\ \ |\Theta| \leqq 1).$$

Tím jsou se značnou přesností popsány všechny „velké“ kladné nulové body funkce y.

Vraťme se ještě jednou k asymptotickému rozvoji funkce $J_\nu = \frac{1}{2} H_\nu^{(1)} + \frac{1}{2} H_\nu^{(2)}$, ale pišme jej rovnou pomocí sečtení vzorců (53), (54) bez dalších úprav. Zvolme $\delta\left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$ a celé $q \geqq 0$. Potom pro $-\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$, $|x| > \delta$ je

$$(70) \qquad J_\nu(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,\{e^{i(x - (1/2)\pi\nu - (1/4)\pi)}(f(x) + \Delta_1(x)) + e^{-i(x - (1/2)\pi\nu - (1/4)\pi)}(f(-x) + \Delta_2(x))\},$$

kde

$$f(x) = f_{\nu,q}(x) = \sum_{j=0}^{q} \frac{\{\nu, j\}}{j!}\left(\frac{i}{2x}\right)^j, \quad |\Delta_k(x)| = \Theta\,\frac{c(\nu, \delta, q)}{|x|^{q+1}} \quad (|\Theta| \leqq 1).$$

Budiž n celé číslo, $z = xe^{n\pi i}$, $\arg z = \arg x + n\pi i$. Tedy je $z = -x$ pro liché n, $z = x$ pro sudé n. Z řady (3) pro J_ν plyne $J_\nu(z) = e^{\nu n\pi i} J_\nu(x)$ (vpravo je ovšem hodnota příslušná k $\arg x$, vlevo hodnota příslušná k $\arg z$). Za $J_\nu(x)$ dosadím podle (70) a dostanu asymptotický rozvoj pro $J_\nu(z)$, platný pro

$$|z| > \delta, \quad \arg z \in ((n-1)\pi + \delta,\ (n+1)\pi - \delta).$$

Ježto tyto intervaly pokrývají celý interval $(-\infty, +\infty)$, dostáváme tím asymptotický rozvoj $J_\nu(z)$ pro všechny hodnoty $\arg z$. Vpravo máme ovšem x a chtěli bychom dostat $J_\nu(z)$ vyjádřen pomocí z. Uvažme, že pro sudé n je $f(x) = f(z)$, $f(-x) = f(-z)$, kdežto pro liché n je $f(x) = f(-z)$, $f(-x) = f(z)$. Dále $e^{ix} = e^{iz}$ pro sudé n, $e^{ix} = e^{-iz}$ pro liché n. Konečně

$$(2\pi x)^{1/2} = (2\pi z e^{-n\pi i})^{1/2} = (2\pi z)^{1/2}\, e^{(-1/2)n\pi i}\,;$$

pro sudé $n = 2k$ je poslední činitel $(-1)^k$, pro liché $n = 2k + 1$ je $\frac{1}{i}(-1)^k$.

Celkem dostáváme: Budiž k celé. Potom pro $|z| > \delta$, $(2k - 1)\pi + \delta < \arg z < (2k + 1)\pi - \delta$ je

$$\begin{aligned} J_\nu(z) = \frac{1}{(2\pi z)^{1/2}} \Bigg\{ & (-1)^k\, e^{2k\pi i\nu}\, e^{i(z-(1/2)\pi\nu-(1/4)\pi)} \left(f(z) + \frac{\Theta c(\nu, \delta, q)}{|z|^{q+1}}\right) + \\ & + (-1)^k\, e^{2k\pi i\nu}\, e^{-i(z-(1/2)\pi\nu-(1/4)\pi)} \left(f(-z) + \frac{\Theta c(\nu, \delta, q)}{|z|^{q+1}}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{71}$$

a pro $|z| > \delta$, $2k\pi + \delta < \arg z < 2(k + 1)\pi - \delta$ je

$$\begin{aligned} J_\nu(z) = \frac{1}{(2\pi z)^{1/2}} \Bigg\{ & (-1)^{k+1}\, e^{2(k+1)\pi i\nu}\, e^{i(z-(1/2)\pi\nu-(1/4)\pi)} \left(f(z) + \frac{\Theta c(\nu, \delta, q)}{|z|^{q+1}}\right) + \\ & + (-1)^k\, e^{2k\pi i\nu}\, e^{-i(z-(1/2)\pi\nu-(1/4)\pi)} \left(f(-z) + \frac{\Theta c(\nu, \delta, q)}{|z|^{q+1}}\right)\Bigg\}\,. \end{aligned} \tag{72}$$

Vzorec (71) dstanete ihned dosazením, vzorec (72) dostanete tak, že po dosazení provedete malou úpravu. Označme $i_n = ((n - 1)\pi + \delta, (n + 1)\pi - \delta)$. Intervaly i_{2k}, i_{2k+1} mají společnou část $i_{2k} \cap i_{2k+1} = (2k\pi + \delta, (2k + 1)\pi - \delta)$. Pro $\arg z$ v tomto intervalu platí (71) i (72). Přitom v závorce $\{\ldots\}$ druhé členy mají v (71) i v (72) týž tvar, ale první členy nikoliv (vyjma případ, kdy $e^{2\pi i\nu} = -1$, tj. když $\nu - \frac{1}{2}$ je celé číslo). Jak vysvětlit tento zdánlivý nesouhlas (který objevil Stokes kolem r. 1892)?

V $i_{2k} \cap i_{2k+1}$ je $|e^{-iz}| = e^{\mathrm{Im}\, z} \geqq e^{|z|\sin\delta}$, $|e^{iz}| \leqq e^{-|z|\sin\delta}$; tj. druhý člen v závorce $\{\ldots\}$ je do té míry v absolutní hodnotě větší než první, že celý první člen je možno dát do „zbytkového členu" v druhém členu. Nevadí tedy, že koeficient $(-1)^k e^{2k\pi i\nu}$ v (71) nesouhlasí s koeficientem $(-1)^{k+1}\, e^{2(k+1)\pi i\nu}$ v (72). Podobný jev nastane v $i_{2k-1} \cap i_{2k}$.

§ 7

Besselův integrál a jeho zobecnění

Pro každé $x \in E$ je $\exp\left(\frac{1}{2}x\left(t - \frac{1}{t}\right)\right)$ holomorfní funkce t v $E - \{0\}$ a je tam tedy rozvinutelná v lokálně stejnoměrně konvergentní Laurentovu řadu

$$e^{(1/2)x(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n(x)\, t^n . \tag{73}$$

Budiž C jakákoliv kladně orientovaná kružnice o středu v počátku. Násobme (73) t^{-m-1} a integrujme člen po členu:

$$A_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{(1/2)x(t-1/t)} t^{-m-1}\, dt . \tag{74}$$

Pro $x \neq 0$ dostaneme substitucí $t = \dfrac{2u}{x}$

$$A_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{x}{2}\right)^m \int_C \exp\left(u - \frac{x^2}{4u}\right) . u^{-m-1}\, du \tag{75}$$

(na poloměru kružnice nezáleží). Rozvinu $\exp\left(-\dfrac{x^2}{4u}\right)$ v řadu stejnoměrně konvergentní na $\langle C \rangle$ a integruji člen po členu:

$$A_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r} . \frac{(-1)^r}{r!} \int_C e^u u^{-m-r-1}\, du . \tag{76}$$

Budiž prozatím $m \geqq 0$. Funkce $e^u u^{-m-r-1}$ má v bodě 0 residuum $\dfrac{1}{(m+r)!}$, takže

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^u u^{-m-r-1}\, du = \frac{1}{\Gamma(m+r+1)}, \tag{77}$$

$$A_m(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r} \frac{(-1)^r}{r!\, \Gamma(m+r+1)} = J_m(x) ; \tag{78}$$

to bylo dokázáno zatím pro $m \geqq 0$, $x \neq 0$. Ale pro $m \geqq 0$, $x = 0$ to platí též, ježto

$A_0(0) = 1 = J_0(0)$, $A_m(0) = 0 = J_m(0)$ pro $m > 0$. Položme $u = \frac{1}{t}$; potom $\exp\left(\frac{1}{2}x\left(t - \frac{1}{t}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(-x)\left(u - \frac{1}{u}\right)\right)$, tedy

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(x)\, t^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(-x)\, u^m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(-x)\, t^{-m},$$

tedy pro $m < 0$:

$$A_m(x) = A_{-m}(-x) = J_{-m}(-x) = (-1)^m J_{-m}(x) = J_m(x).$$

Věta 55. *Pro $t \neq 0$, $x \in E$ je*

$$e^{(1/2)x(t-1/t)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x)\, t^m. \tag{79}$$

Pro celé m je

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{(1/2)x(t-1/t)} t^{-m-1}\, \mathrm{d}t \tag{80}$$

a pro celé m, $x \neq 0$ je

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^m \int_C e^{u-x^2/4u} u^{-m-1}\, \mathrm{d}u\,; \tag{81}$$

C je libovolná kladně orientovaná kružnice o středu v počátku.

Rovnost (79) se vyjadřuje často slovy, že funkce $\exp \frac{1}{2}x\left(t - \frac{1}{t}\right)$ je **vytvořující funkce** pro funkce $J_m(x)$ s celým m.

Volme za C kružnici $e^{i\Theta}$, $-\pi \leqq \Theta \leqq \pi$. Substituce $t = e^{i\Theta}$ v (80) dává

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x \sin\Theta - m\Theta) + i\sin(\ldots))\, \mathrm{d}\Theta.$$

Integrál liché části se rovná nule. Tedy:

Věta 56. *Pro celé m je*

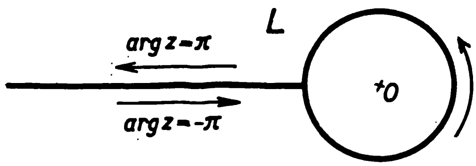
$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\Theta - m\Theta)\, \mathrm{d}\Theta \tag{82}$$

(*tzv.* **Besselův integrál**).

Pokusme se zobecnit vzorce (80), (81), (82) na Besselovy funkce $J_\nu(x)$ s libovolným ν. Přechod od (75) a (76) k vzorci (78) byl umožněn vzorcem (77). Pro necelé m tento vzorec neplatí, ale můžeme dostat analogický vzorec, nahradíme-li dráhu C drahou L z obr. 24. Je totiž pro každé $z \in E$

(83) $$\frac{1}{2\pi i}\int_L e^u u^{-z}\,du = \frac{1}{\Gamma(z)}.$$

To plyne z (52) v kap. IV.



Obr. 24.

Provádějme nyní podobné výpočty jako v důkazu věty, ale v opačném pořádku. Pro $x \neq 0$ je podle (83)

(84) $$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}}{r!} \frac{1}{2\pi i}\int_L e^u u^{-\nu-r-1}\,du.$$

Abychom mohli zaměnit pořadí sumace a integrace, sestrojme majorantní řadu

$$\text{konst}\, e^{-|u|}|u|^{-\text{Re}\,\nu-1} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left|\frac{x^2}{4u}\right|^r.$$

Poslední řada má součet $\exp\left|\frac{x^2}{4u}\right|$, který (při daném x) je omezený na L. Tedy lze zaměnit pořadí sumace a integrace v (84): Pro $x \neq 0$ je

(85) $$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_L e^{u-x^2/4u} \cdot u^{-\nu-1}\,du.$$

Zkusme zde substituci $u = \frac{1}{2}tx$, zatím pro $x > 0$, $\arg x = 0$, tedy $\arg t = \arg u$,

(86) $$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{(1/2)x(t-1/t)} t^{-\nu-1}\,dt.$$

Nyní je zřejmé, že integrál vpravo je lokálně stejnoměrně konvergentní v oboru $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$. Tedy (86) platí pro libovolné ν a $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$.

Volme nyní v (86) poloměr kružnice rovný jedné a zaveďme nové integrační proměnné: Na kružnici položme $t = e^{i\Theta}$, $-\pi \leqq \Theta \leqq \pi$, na polopřímce z $-\infty$ do -1 s $\arg t = -\pi$ položme $t = e^{\Theta} . e^{-\pi i}$ a na polopřímce z -1 do $-\infty$ s $\arg t = \pi$ položme $t = e^{\Theta} . e^{\pi i}$ (ovšem kladu $\arg e^{\Theta} = 0$). Vychází

(87) $$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\Theta - x \sin\Theta)\, \mathrm{d}\Theta - \frac{\sin \nu\pi}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{sh}\Theta - \nu\Theta}\, \mathrm{d}\Theta$$

(sh Θ je hyperbolický sinus). Užili jsme opět toho, že

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\nu\Theta - x \sin\Theta)\, \mathrm{d}\Theta = 0;$$

(87) platí pro $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$.

Pomocí (87) vyšetříme ještě N_ν, $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$, všechno pro $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$. Pro necelé ν je

$$\pi N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi}{\sin \nu\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\Theta - x\sin\Theta)\, \mathrm{d}\Theta - \cos \nu\pi \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{sh}\Theta - \nu\Theta}\, \mathrm{d}\Theta -$$

$$- \frac{1}{\sin \nu\pi}\int_0^\pi \cos(-\nu\Theta - x \sin\Theta)\, \mathrm{d}\Theta - \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{sh}\Theta + \nu\Theta}\, \mathrm{d}\Theta .$$

V třetím integrálu zavedu proměnnou $\pi - \Theta = \lambda$ místo Θ (ale hned píši zase Θ); užiji

$$\cos(-x \sin\Theta + \nu\Theta - \nu\pi) =$$

$$= \cos \nu\pi . \cos(\nu\Theta - x \sin\Theta) + \sin \nu\pi . \sin(\nu\Theta - x\sin\Theta)$$

a dostanu

(88) $$\pi N_\nu(x) = -\int_0^\pi \sin(\nu\Theta - x \sin\Theta)\, \mathrm{d}\Theta -$$

$$- \cos \nu\pi \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{sh}\Theta - \nu\Theta}\, \mathrm{d}\Theta - \int_0^{+\infty} e^{-x\operatorname{sh}\Theta + \nu\Theta}\, \mathrm{d}\Theta .$$

Tento vzorec byl odvozen pro necelé ν. Ale (při pevném x s $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$, a tedy $\operatorname{Re} x > 0$) je pro velká Θ $- \operatorname{Re} x . \frac{e^{\Theta} - e^{\Theta}}{2} \pm \operatorname{Re} \nu . \Theta < -\frac{1}{3} e^{\Theta} . \operatorname{Re} x + |\nu|\, \Theta$, takže oba poslední integrály konvergují lokálně stejnoměrně v E (vzhledem k ν). Tedy jsou obě strany celé funkce proměnné ν a (88) platí pro $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$, $\nu \in E$.

Z (87), (88) dostaneme ihned

$$
(89)\qquad
\begin{aligned}
\pi H_\nu^{(1)}(x) &= \int_0^\pi e^{-i\nu\Theta + ix\sin\Theta}\,\mathrm{d}\Theta - i\int_0^{+\infty} e^{-\nu(\Theta+\pi i) - x\,\mathrm{sh}\,\Theta}\,\mathrm{d}\Theta - i\int_0^{+\infty} e^{\nu\Theta - x\,\mathrm{sh}\,\Theta}\,\mathrm{d}\Theta\,,\\
\pi H_\nu^{(2)}(x) &= \int_0^\pi e^{i\nu\Theta - ix\sin\Theta}\,\mathrm{d}\Theta + i\int_0^{+\infty} e^{-\nu(\Theta-\pi i) - x\,\mathrm{sh}\,\Theta}\,\mathrm{d}\Theta + i\int_0^{+\infty} e^{\nu\Theta - x\,\mathrm{sh}\,\Theta}\,\mathrm{d}\Theta\,.
\end{aligned}
$$

Uvědomme si nyní, že $i\sin\Theta = \mathrm{sh}\, i\Theta$, $-i\sin\Theta = \mathrm{sh}(-i\Theta)$, $\mathrm{sh}(\Theta \pm \pi i) = -\mathrm{sh}\,\Theta$. Upravme vzorec (89). První integrál lze psát

$$\int_0^\pi e^{x\,\mathrm{sh}\, i\Theta - \nu . i\Theta}\,\mathrm{d}\Theta = \frac{1}{i}\int_0^{\pi i} e^{x\,\mathrm{sh}\, z - \nu z}\,\mathrm{d}z$$

(míněn je křivkový integrál přes úsečku $z = i\Theta$, $0 \leqq \Theta \leqq \pi$). Druhý integrál je

$$\frac{1}{i}\int_{\pi i}^{\pi i + \infty} e^{x\,\mathrm{sh}\, z - \nu z}\,\mathrm{d}z$$

(míněn je křivkový integrál přes polopřímku $z = \Theta + \pi i$, $0 \leqq \Theta < +\infty$) a třetí je

$$i\int_{-\infty}^0 e^{x\,\mathrm{sh}\,\Theta - \nu\Theta}\,\mathrm{d}\Theta\,.$$

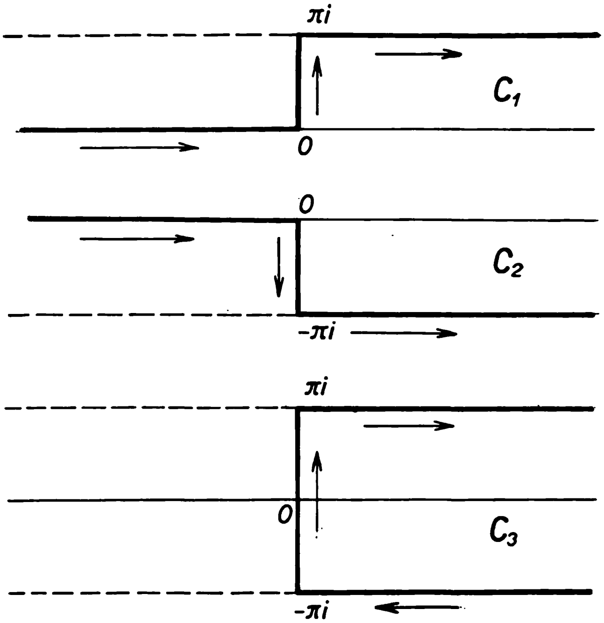
Tedy máme ($H_\nu^{(2)}$ obdržím analogicky)

$$(90)\qquad H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{C_1} e^{x\,\mathrm{sh}\, z - \nu z}\,\mathrm{d}z\,,$$

$$(91)\qquad H_\nu^{(2)}(x) = \frac{-1}{\pi i}\int_{C_2} e^{x\,\mathrm{sh}\, z - \nu z}\,\mathrm{d}z\,,$$

$$(92)\qquad J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} e^{x\,\mathrm{sh}\, z - \nu z}\,\mathrm{d}z$$

((92) plyne ihned z (90), (91)). Vzorec pro N_ν by se také snadno napsal, ale není tak pěkný. Křivky C_1, C_2, C_3 jsou na obr. 25.



Obr. 25.

Věta 57. (90), (91), (92) *platí pro* $v \in \boldsymbol{E}$, $|\arg x| < \dfrac{\pi}{2}$.

Je příjemné, že integrand je holomorfní funkce x, v, z v $\boldsymbol{E}^3$. Podmínka $|\arg x| < \dfrac{\pi}{2}$ vychází z toho, že musíme zaručit existenci integrálů.

§ 8

Metoda největšího spádu pro hledání asymptotických rozvojů

Vyložím nyní princip tzv. metody největšího spádu (říká se jí také metoda sedlových bodů), vhodné ke studiu funkcí tvaru

$$G(x) = \int_C e^{xf(z)} F(z) \, \mathrm{d}z \tag{93}$$

pro velká $|x|$. Omezme se na případ $x > 0$. Nechť C je křivka v nějaké jednoduše souvislé oblasti $M \subset \boldsymbol{E}$ a nechť f, F jsou holomorfní v M (jsou možné i složitější případy, ale zatím mně jde jen o předběžnou orientaci). Nasnadě je tato myšlenka: je $|\exp(x f(z))| = \exp(x \operatorname{Re} f(z))$. Jestliže tedy funkce $\operatorname{Re} f(z)$ (uvažovaná jen na křivce C, tedy vlastně $\operatorname{Re} f(C(t))$) má v nějakém bodě z_0 křivky C dostatečně ostré maximum, bude asi pro velká x převažovat ona část integrálu (93), jež se vztahuje na část křivky, „velmi blízkou" bodu z_0. Integrál přes tuto malou část křivky lze asi studovat pomocí lokálních vlastností funkce f v okolí z_0. např. užitím Taylorova rozvoje $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Podle Cauchyovy věty můžeme do značné míry měnit křivku C, aniž se změní integrál (93). Toho lze využít k tomu, aby se na křivce C vskutku vyskytl bod z_0, ve kterém má $\operatorname{Re} f(z)$ na C dostatečně ostré maximum. Vyloučíme v dalším nezajímavý případ, kde f by bylo konstantní.

Zajímají nás křivky, na kterých se $\operatorname{Re} f(z)$ rychle mění (až totiž půjde o maximum $\operatorname{Re} f(z)$, budeme chtít, aby bylo co možná ostré). Vezměme napřed jakýkoliv bod $z_1 \in M$, v němž $f'(z_1) \neq 0$ (body, kde $f'(z) = 0$, jsou izolované — těmi se budeme zabývat později). Budiž $f'(z_1) = be^{i\beta}$ ($b > 0$, β reálné). Nechť z probíhá polopřímku $z = z_1 + \varrho e^{i\omega}$ ($\varrho \geqq 0$; ω je dané reálné číslo). Z Taylorova rozvoje plyne $f(z) - f(z_1) = b\varrho e^{i(\omega+\beta)} + O(\varrho^2)$ pro $\varrho \to 0+$. Odtud (míním derivace zprava)

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}(\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_1))\right]_{\varrho=0} = b\cos(\omega + \beta),$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}(\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_1))\right]_{\varrho=0} = b\sin(\omega + \beta).$$

Je vidět, že největší rychlost změny $\operatorname{Re} f(z)$ v bodě z_1 nastává pro $\omega + \beta = 0, \pi$; na těchto dvou polopřímkách je naopak rychlost změny $\operatorname{Im} f(z)$ rovná nule („rychlost" v bodě z_1 měřím absolutní hodnotou derivace podle ϱ). Naopak, nejrychlejší změna $\operatorname{Im} f(z)$ nastává pro $\omega + \beta = \pm \frac{\pi}{2}$; na těchto dvou polopřímkách je rychlost změny $\operatorname{Re} f(z)$ rovná nule. Za křivky s rychlou změnou $\operatorname{Re} f(z)$ se tedy buaou asi hodit ty křivky, na nichž $\operatorname{Im} f(z)$ je konstantní. Současně budeme vyšetřovat křivky, na nichž $\operatorname{Re} f(z)$ je konstantní; budou se nám hodit.

Vezměme nyní libovolný bod $z_0 \in M$; Taylorův rozvoj je

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^p (b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots),$$

kde $b_0 = \frac{1}{p!} f^{(p)}(z_0) \neq 0$ (tj. $f^{(p)}$ je první z derivací, která se v bodě z_0 nerovná nule). Po předešlých předběžných úvahách vyšetříme nyní množinu oněch z v jistém okolí bodu z_0, ve kterých je $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$, popříp. $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$. Položme $b_n = r_n e^{i\beta_n}$ ($r_n \geqq 0$, β_n reálné, $r_0 > 0$), $z - z_0 = \varrho e^{i\omega}$ ($\varrho \gtreqless 0$, ω reálné). Je trochu nezvyklé, že připouštíme též $\varrho < 0$; $\varrho e^{i\omega}$ je týž bod jako $-\varrho e^{i(\omega+\pi)}$. Dělám to proto, aby se při aplikaci věty o implicitních funkcích (která teď přijde) nedostaly dvojice (ϱ, ω) s $\varrho = 0$ na hranice oboru. Pro dosti malé $|\varrho|$ je

$$(94)\qquad \varrho^{-p}\,\mathrm{Re}\,(f(z) - f(z_0)) = \Phi_1(\varrho, \omega) = r_0 \cos(\beta_0 + p\omega) + \\ + \varrho r_1 \cos(\beta_1 + (p+1)\,\omega) + \varrho^2 r_2 \cos(\beta_2 + (p+2)\,\omega) + \ldots,$$

$$(95)\qquad \varrho^{-p}\,\mathrm{Im}\,(f(z) - f(z_0)) = \Phi_2(\varrho, \omega) = r_0 \sin(\beta_0 + p\omega) + \\ + \varrho r_1 \sin(\beta_1 + (p+1)\,\omega) + \varrho^2 r_2 \sin(\beta_2 + (p+2)\,\omega) + \ldots$$

(pro $\varrho = 0$ znamená levá strana limitu pro $\varrho \to 0$, tj. $\Phi_1(0, \omega) = r_0 \cos(\beta_0 + p\omega)$, popříp. $\Phi_2(0, \omega) = r_0 \sin(\beta_0 + p\omega)$). Hledejme množinu oněch ϱ, ω (pro malá $|\varrho|$), pro které $\Phi_1(\varrho, \omega) = 0$. Pamatujme na periodičnost v ω: stačí se omezit na ω v intervalu délky 2π, neboť ϱ, ω dávají týž bod z jako ϱ, $\omega + 2\pi$. Rovnice $\Phi_1(0, \omega) = 0$ má „modulo 2π" právě $2p$ řešení $\beta_0 + p\omega = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, tj.

$$\omega_k = -\frac{\beta_0}{p} + \frac{(2k+1)\,\pi}{2p} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2p-1)\,.$$

Přitom

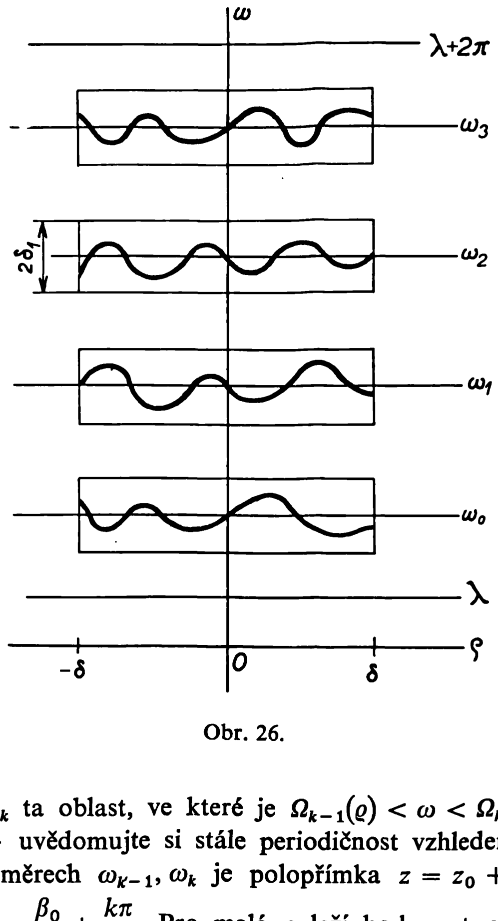
$$\left[\frac{\partial \Phi_1(0, \omega)}{\partial \omega}\right]_{\omega=\omega_k} = -p r_0 \sin(\beta_0 + p\omega_k) = \pm p r_0 \neq 0\,.$$

Použijme věty o implicitních funkcích. Existují $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ (jež lze zvolit menší než libovolně předepsané kladné číslo) tak, že v oboru $|\varrho| < \delta$, $|\omega - \omega_k| < \delta_1$ jsou všechna řešení rovnice $\Phi_1(\varrho, \omega) = 0$ dána tvarem $\omega = \Omega_k(\varrho)$, kde Ω_k je spojitá a má derivace všech řádů pro $-\delta < \varrho < \delta$, $\Omega_k(0) = \omega_k$.

Omezme se v dalším na ω z jistého intervalu $\lambda \leqq \omega \leqq \lambda + 2\pi$, který obsahuje všechny intervaly $|\omega - \omega_k| < \delta_1$, $k = 0, 1, \ldots, 2p-1$, což je možné, zvolím-li $\delta_1 < \dfrac{\pi}{4p}$ malé. Na obr. 26 jsou pro $p = 2$ zakresleny obdélníky $|\varrho| < \delta$, $|\omega - \omega_k| < \delta_1$ a křivky $\omega = \Omega_k(\varrho)$. Zdalipak vedle těchto $2p$ křivek *existují v obdélníku* $\lambda \leqq \omega \leqq \lambda + 2\pi$, $|\varrho| < \delta$ *ještě další body* $[\varrho, \omega]$, *pro které je* $\Phi_1(\varrho, \omega) = 0$? Nikoliv, zmenším-li ještě δ.

Důkaz: V omezené uzavřené množině $\lambda \leqq \omega \leqq \lambda + 2\pi$, $\min\limits_{0 \leqq k < 2p} |\omega - \omega_k| \geqq \delta_1$ je $\Phi_1(0, \omega) \neq 0$, tedy $|\Phi_1(0, \omega)| \geqq \Delta$ pro jisté $\Delta > 0$. Následkem stejnoměrné spojitosti funkce $\Phi_1(\varrho, \omega)$ existuje tedy $\delta_2 < \delta$ tak, že pro uvedená ω a pro $|\varrho| \leqq \delta_2$ je $|\Phi_1(\varrho, \omega)| > \dfrac{\Delta}{2}$, tedy $\Phi_1(\varrho, \omega) \neq 0$.

Teď to přenesme podle (94) do roviny komplexní proměnné z. Vezměme všechny body kruhu $|z - z_0| \leqq \delta_2$, tj. všechny body $z = z_0 + \varrho e^{i\omega}$ ($0 \leqq \varrho \leqq \delta_2$, ω reálné). (Vylučuji teď hodnoty $\varrho < 0$ — ty nedávají žádné nové body z.) Potom množina těch bodů z kruhu $|z - z_0| \leqq \delta_2$, pro něž $\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0) = 0$, je dána $2p$ oblouky $\omega = \Omega_k(\varrho)$, $0 \leqq \varrho \leqq \delta_2$, které vycházejí z bodu z_0 ($k = 0, 1, \ldots, 2p - 1$). V bodě z_0 má oblouk $\varrho e^{i\Omega_k(\varrho)}$ polotečnu o směru $\omega_k = -\frac{\beta_0}{p} + \frac{(2k+1)\pi}{2p}$ (tím míním, že jde o polopřímku $z = z_0 + \varrho e^{i\omega_k}$ ($\varrho \geqq 0$)). Tyto oblouky, zvolím-li δ_2 dosti malé, rozdělují kruh $|z - z_0| < \delta_2$ na $2p$ oblastí, v nichž je $\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0) \neq 0$. Tvrdím, že *v těchto oblastech je střídavě* $\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0) \gtrless 0$.



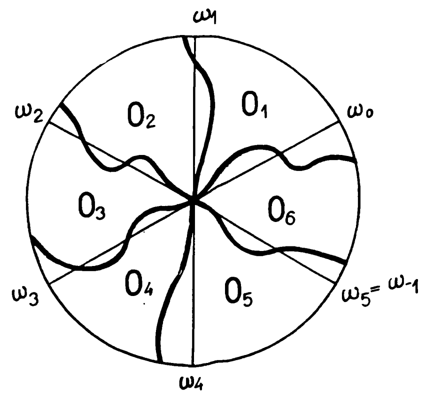
Obr. 26.

Důkaz: budiž O_k ta oblast, ve které je $\Omega_{k-1}(\varrho) < \omega < \Omega_k(\varrho)$ (píši $\Omega_{-1}(\varrho) = \Omega_{2p-1}(\varrho) - 2\pi$ — uvědomujte si stále periodičnost vzhledem k ω). Symetrála úhlu polotečen o směrech ω_{k-1}, ω_k je polopřímka $z = z_0 + \varrho e^{i\omega'_k}$, kde $\omega'_k = \frac{1}{2}(\omega_{k-1} + \omega_k) = -\frac{\beta_0}{p} + \frac{k\pi}{p}$. Pro malá ϱ leží bod $z_0 + \varrho e^{i\omega'_k}$ v O_k a podle (94) je pro malá $\varrho > 0$

$$\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0) = \varrho^p(r_0 \cos(\beta_0 + p\omega'_k) + o(1)) =$$
$$= \varrho^p(r_0 \cdot (-1)^k + o(1)),$$

což je kladné pro sudá k, záporné pro lichá k. A ježto $\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0) \neq 0$ v oblasti O_k, má $\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0)$ v každém O_k stálé znaménko. Ty oblasti, kde je tento rozdíl záporný, nazvu záporné, ostatní nazvu kladné (viz obr. 27).

Úplně stejně se vyšetří rovnice $\Phi_2(\varrho, \omega) = 0$. Rovnice $\Phi_2(0, \omega) = 0$ má podle (95) nulové body $\omega_k' = -\dfrac{\beta_0}{p} + \dfrac{k\pi}{p}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2p - 1)$; to jsou právě ta čísla, která



Obr. 27.

dávají směr symetrál k polotečnám oblouků, ohraničujících O_k. A nyní opět platí, zmenším-li popříp. ještě dále číslo δ_2: Jediné body $z = z_0 + \varrho e^{i\omega}$ $(0 \leqq \varrho \leqq \delta_2)$, které vyhovují rovnici $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$, jsou body $2p$ oblouků $\omega = \Omega_k'(\varrho)$ [1]), jejichž polotečny v bodě z_0 jsou dány směry ω_k'. Ježto $\omega_{k-1} < \omega_k' < \omega_k$, leží celý oblouk $\omega = \Omega_k'(\varrho)$ (s výjimkou bodů $\varrho = 0$, $\varrho = \delta_2$) v O_k, jestliže δ_2 ještě po případě zmenším. Důležité pro nás je, že každá oblast O_k obsahuje právě jeden oblouk $\omega = \Omega_k'(\varrho)$ $(0 < \varrho < \delta_2)$, na němž je $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$ konstantní a na němž tedy můžeme očekávat rychlou změnu $\operatorname{Re} f(z)$.

Máme tedy tento návod: chceme křivku C modifikovat tak, aby $\operatorname{Re} f(z)$ měla na křivce C co možná ostré maximum v bodě z_0. V jistém okolí bodu z_0 máme p záporných a p kladných oblastí; v každé oblasti máme právě jeden oblouk s krajním bodem z_0, na kterém $\operatorname{Im} f(z)$ je konstantní. Vedu tedy novou křivku C' po jednom z těchto oblouků ležícím v záporné oblasti, do bodu z_0, a potom ji pokračuji z bodu z_0 opět po jednom z těchto oblouků, ležícím v záporné oblasti (a to ležícím v jiné oblasti: kdybych se z bodu z_0 vracel po témž oblouku, zrušily by se oba integrály a nedávaly by podstatnou část integrálu (93)). To nám napovídá, že asi bude většinou málo vhodný případ $p = 1$, tj. $f'(z_0) \neq 0$ (ledaže by bod z_0 byl počátkem nebo koncem křivky C, kterýmžto případem se nebudu zabývat). Budeme tedy hledat body, ve kterých $f'(z_0) = 0$; v blízkosti takového vhodně zvoleného bodu z_0 (nemusí se každý bod s $f'(z_0) = 0$ hodit) modifikujeme křivku C tak, jak bylo uvedeno. Ježto

[1]) Pozor! $\Omega_k'(\varrho)$ neznamená derivaci.

oblouky, na nichž $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$, mohou být složité, nahrazujeme je často kousky jejich polotečen – tím se účinnost metody asi mnoho nesníží. Ovšem volbou takové křivky C' není ještě úspěch zaručen. Jestliže např. v bodech C', dosti vzdálených od bodu z_0, není $\operatorname{Re} f(z)$ znatelně menší než $\operatorname{Re} f(z_0)$, může integrál přes „vzdálenou" část křivky C' převážit nad integrálem, vzatým přes část křivky, ležící blízko bodu z_0. Jako ilustraci provedeme v následujících paragrafech studium asymptotického průběhu funkce $H_\nu^{(1)}(x)$ pro případ, že (zhruba řečeno) $\nu > 0$, $\arg x = 0$, $x \to +\infty$, $\nu \to +\infty$.

Ještě k názvu „metoda sedlových bodů". Vezměme nejčastější případ $p = 2$. V trojrozměrném reálném prostoru (souřadnice značme u, v, w) sestrojme plochu $w = \operatorname{Re} f(u + iv)$. V okolí bodu u_0, v_0 ($u_0 = \operatorname{Re} z_0$, $v_0 = \operatorname{Im} z_0$) máme čtyři oblasti, v nichž střídavě $w > w_0 = \operatorname{Re} f(u_0 + iv_0)$ a $w < w_0$. Je vidět, že naše plocha má v okolí bodu $[u_0, v_0, w_0]$ tvar sedla.

§ 9

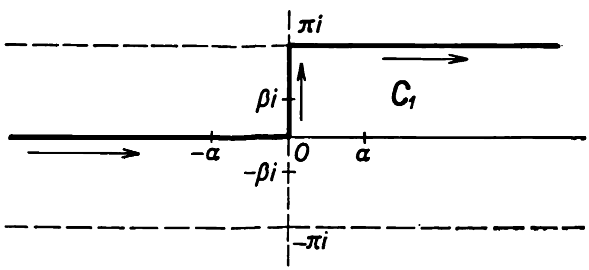
Aplikace metody největšího spádu na Hankelovy funkce $H_\nu^{(j)}(x)$ pro velká x a ν

V tomto paragrafu i v dalších budeme stále předpokládat, že

$$x > 0\,, \quad \arg x = 0\,, \quad \nu > 0\,.$$

Budeme vyšetřovat $H_\nu^{(1)}(x)$ pro velká x, ν (můžete si pro názornost zatím představit, že $\frac{\nu}{x}$ je nějaká kladná konstanta a že $x \to +\infty$; ale budeme vyšetřovat i mnohem obecnější případy). Připomeňme, že z $H_\nu^{(1)}$ dostaneme J_ν, N_ν, $H_\nu^{(2)}$ jako reálnou část, imaginární část a číslo komplexně sdružené. Budeme užívat metody největšího spádu na vzorec (viz větu 57 a obr. 28)

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} e^{x \operatorname{sh} z - \nu z}\, dz\,. \tag{96}$$



Obr. 28.

Připomeňme definici hyperbolických funkcí a některé jejich vlastnosti, plynoucí přímo z definice:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \text{(sudá funkce)},$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \quad \text{(lichá funkce)}.$$

$$\operatorname{ch}(z + i\pi) = -\operatorname{ch} z\,, \quad \operatorname{sh}(z + i\pi) = -\operatorname{sh} z\,,$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1\,, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z\,, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z\,,$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z\,, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z\,, \quad \operatorname{sh} iz = i \sin z\,, \quad \sin iz = i \operatorname{sh} z\,,$$

$$\operatorname{ch}(u + v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v\,, \quad \operatorname{sh}(u + v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v\,,$$

$$\operatorname{ch}(u + iv) = \operatorname{ch} u \cos v + i \operatorname{sh} u \sin v\,,$$

$$\operatorname{sh}(u + iv) = \operatorname{sh} u \cos v + i \operatorname{ch} u \sin v\,.$$

Poslední dva vzorce jsou důležité hlavně pro reálná u, v: dávají rozklad na reálnou a imaginární část.

Položme $\xi = \frac{\nu}{x}$, takže $\xi > 0$. Potom je

$$\pi i\, H_\nu^{(1)}(x) = \int_{C_1} e^{x f(z)}\, \mathrm{d}z\,, \tag{97}$$

$$f(z) = \operatorname{sh} z - \xi z\,. \tag{98}$$

Hledáme body z_0, kde $f'(z_0) = \operatorname{ch} z_0 - \xi = 0$. Je-li $0 < \xi < 1$, existuje β, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ tak, že $\xi = \cos\beta$. Hledáme tedy body, ve kterých $\cos iz_0 = \cos\beta$; všechna řešení jsou $z_0 = \pm\beta i + 2k\pi i$ (k celé). Při pohledu na dráhu C_1 soudíme, že nejvhodnější bude asi $z_0 = \beta i$. Je-li $\xi = 1$, jde o rovnici $\operatorname{ch} z_0 = 1$, tj. $\cos iz_0 = 1$, $iz_0 = 2k\pi i$ (k celé); nejvhodnější bude asi $z_0 = 0$. Je-li $\xi > 1$, existuje právě jedno $\alpha > 0$ tak, že $\xi = \operatorname{ch}\alpha$. Rovnice $\operatorname{ch} z_0 = \operatorname{ch}\alpha$ má právě dva reálné kořeny $z_0 = \pm\alpha$. Uvážíte-li, že $\operatorname{ch} z_0 = \cos iz_0$, vidíte, že všechny kořeny jsou $z_0 = \pm\alpha + 2k\pi i$ (k celé). Nejvhodnější bude asi volba $z_0 = \alpha$ nebo $z_0 = -\alpha$ – o tom bude třeba později rozhodnout. Z této předběžné diskuse je patrné, že bude asi vhodné rozeznávat tři případy: $0 < \frac{\nu}{x} < 1$, $\frac{\nu}{x} = 1$, $\frac{\nu}{x} > 1$.

§ 10

Asymptotika funkcí $H_\nu^{(j)}(x)$ pro $0 < \xi = \dfrac{\nu}{x} < 1$

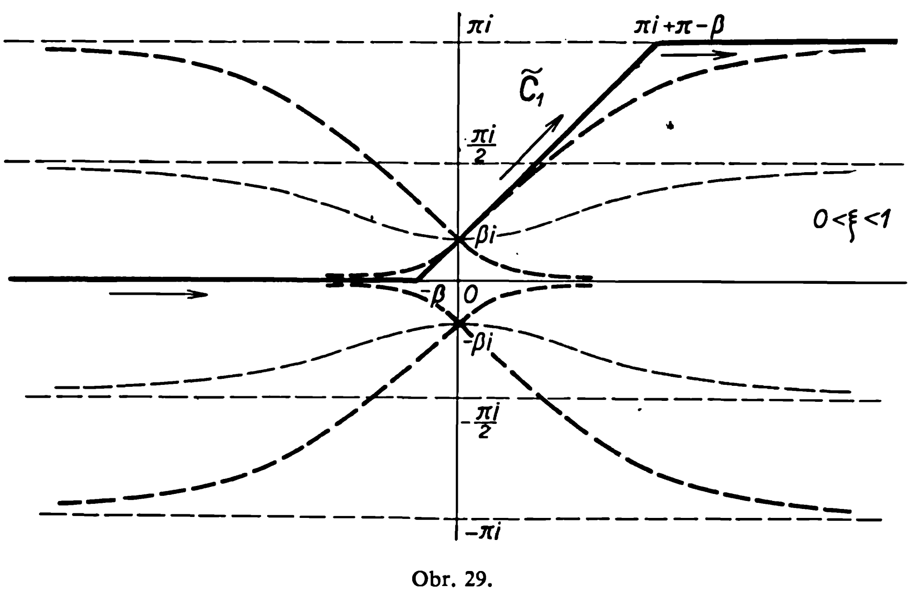
Podle předběžné úvahy v § 9 zvolme β tak, že $\xi = \cos\beta$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, načež

(99)
$$f(z) = \operatorname{sh} z - z\cos\beta\,,\quad f'(z) = \operatorname{ch} z - \cos\beta\,,$$
$$f^{(2k)}(z) = \operatorname{sh} z\,,\quad f^{(2k+1)}(z) = \operatorname{ch} z \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Volíme (viz § 9) $z_0 = i\beta$, takže $f'(i\beta) = 0$, $f''(i\beta) = i\sin\beta \neq 0$, tedy $p = 2$ v označení § 8. Rozepišme ještě pro $z = u + iv$ (u, v reálná) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{sh} u\cos v - u\cos\beta$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{ch} u \sin v - v\cos\beta$. Na imaginární ose je tedy $\operatorname{Re} f(z) = 0$. Podle § 8 existují ještě dva další oblouky, vycházející z bodu $i\beta$, na nichž je $\operatorname{Re} f(z) = 0$; jejich polotečny jsou rovnoběžné s reálnou osou. Dále vycházejí z bodu $i\beta$ čtyři oblouky, na nichž je $\operatorname{Im} f(z_0) = 0$, naznačené na obr. 29. Jde o to, které dvě z jejich polotečen leží v blízkosti bodu $i\beta$ v záporných oblastech, což znamená, že na nich je $\operatorname{Re} f(z) < 0$ pro z blízká $i\beta$. Zkusme třeba napřed přímku o směrnici 1, tj. $z = u + iv$, $v = u + \beta$. Tedy

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} f(z) &= \operatorname{sh} u\cos(u + \beta) - u\cos\beta = \\ &= \operatorname{sh} u\cos u\cos\beta - \operatorname{sh} u\sin u\sin\beta - u\cos\beta = \\ &= -u^2\sin\beta + \lambda_3 u^3 + \lambda_4 u^4 + \ldots < 0\end{aligned}$$

pro dosti malá $|u|$. Tedy zavedeme tuto dráhu $\tilde{C}_1$ – viz obr. 29.



Obr. 29.

Podle Cauchyovy věty je

(100) $$\pi i\, H_\nu^{(1)}(x) = \int_{\mathcal{C}_1} e^{xf(z)}\, \mathrm{d}z\,.$$

Očekáváme, že pro velká x bude nejpodstatnější příspěvek dávat integrál přes malou úsečku o středu βi. Zvolme tedy ε,

(101) $$0 < \varepsilon \leqq \beta\,,$$

a rozdělme integrační dráhu na pět částí:

(102) $$\pi i\, H_\nu^{(1)}(x) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5\,,$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-\beta} e^{xf(u)}\, \mathrm{d}u\,, \quad I_5 = \int_{\pi-\beta}^{+\infty} e^{xf(u+\pi i)}\, \mathrm{d}u\,, \quad I_2 = (1+i)\int_{-\beta}^{-\varepsilon} e^{xf(z)}\, \mathrm{d}u\,,$$

$$I_3 = (1+i)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{xf(z)}\, \mathrm{d}u\,, \quad I_4 = (1+i)\int_{\varepsilon}^{\pi-\beta} e^{xf(z)}\, \mathrm{d}u\,;$$

přitom v I_2, I_3, I_4 je $z = (1+i)\,u + i\beta$.

Rozhodující bude asi I_3; tím tedy začneme. V I_2, I_3, I_4 je

$$f(z) = \operatorname{sh}\big(u(1+i) + \beta i\big) - \big(u(1+i) + \beta i\big)\cos\beta$$

Rozvinu v Taylorovu řadu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\beta i)}{n!}\,\big(u(1+i)\big)^n\,.$$

Ježto $f'(\beta i) = 0$, $(1+i)^2 = 2i$, dostaneme

(103) $$f(z) - f(\beta i) = -u^2 \sin\beta + R_1 + R_2\,,$$

(104) $$\left\{\begin{aligned} R_1 &= \left(\frac{(2iu^2)^2}{4!} + \frac{(2iu^2)^3}{6!} + \frac{(2iu^2)^4}{8!} + \dots\right) i \sin\beta\,, \\ R_2 &= (1+i)\,u\left(\frac{2iu^2}{3!} + \frac{(2iu^2)^2}{5!} + \frac{(2iu^2)^3}{7!} + \dots\right)\cos\beta\,. \end{aligned}\right.$$

(Prosím čtenáře, aby všechny výpočty podrobně prováděl.) V (103) jsem člen $-u^2 \sin\beta$, který pro malá $|u|$ převládne, dal zvlášť. Z (103), (104) plyne

(105) $$e^{xf(z)} = e^{xf(\beta i)}\,.\,e^{-xu^2\sin\beta}\,.\,e^{x(R_1+R_2)}\,,$$

(103) až (105) platí na celé šikmé části integrační dráhy. V I_3 bychom rádi nahradili $\exp(xR_1 + xR_2)$ jedničkou. Musíme tedy odhadnout obecně

$$|e^w - 1| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|w|^k}{k!} = |w| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|w|^m}{(m+1)!} \leqq |w|\, e^{|w|}\,.$$

Speciálně tedy

$$|e^w - 1| \leqq 3|w| \quad \text{pro} \quad |w| \leqq 1\,. \tag{106}$$

Abychom tohoto odhadu mohli užít v I_3, bude vhodné volit ε tak malé, aby bylo

$$x\,.\,(|R_1| + |R_2|) \leqq 1 \quad \text{pro} \quad -\varepsilon \leqq u \leqq \varepsilon\,. \tag{107}$$

Odhadněme tedy napřed R_1, R_2 pro $-1 \leqq u \leqq 1$:

$$|R_1| \leqq \sin\beta\,.\,\frac{u^4}{6!}\left(1 + \frac{2}{5\,.\,6} + \frac{2^2}{5\,.\,6\,.\,7\,.\,8} + \ldots\right),$$

$$|R_2| \leqq \cos\beta\,.\,\frac{\sqrt{2}}{3}\,.\,|u|^3\left(1 + \frac{2}{4\,.\,5} + \frac{2^2}{4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} + \ldots\right).$$

Srovnání s geometrickou řadou o kvocientu $\frac{1}{15}$, resp. $\frac{1}{10}$ a užití nerovnosti $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$ dává

$$|R_1| \leqq \frac{\sin\beta}{5}\,u^4\,, \quad |R_2| \leqq \frac{5}{9}\cos\beta\,.\,|u|^3 \tag{108}$$

pro $-1 \leqq u \leqq 1$.

Tedy bude (107) splněno pro $-\varepsilon \leqq u \leqq \varepsilon$, když bude

$$0 < \varepsilon \leqq 1\,, \quad x\varepsilon^3\cos\beta \leqq 1\,, \quad x\varepsilon^4\sin\beta \leqq 1\,. \tag{109}$$

Pamatujme, že ε nesmíme volit příliš malé, má-li I_3 převládnout nad ostatními integrály. Vzhledem k tomu, že nás zajímají velká x, volme

$$\varepsilon = \frac{1}{x^{1/3}\cos^{1/3}\beta}\,, \tag{110}$$

načež podmínky (101), (109) žádají, aby bylo

$$x\cos\beta \geqq \max\left(\frac{1}{\beta^3}\,,\ 1,\ \operatorname{tg}^3\beta\right). \tag{111}$$

Za této podmínky platí na integrační dráze I_3 nerovnost (107). Ježto $f(\beta i)$ je ryze imaginární, je $|\exp(xf(\beta i))| = 1$, a tedy podle (108) je na integrační dráze v I_3 (užiji ovšem (106))

$$\begin{aligned} e^{xf(z)} &= \exp(xf(\beta i))\,.\,\exp(-xu^2\sin\beta) + \\ &+ \Theta x(u^4\sin\beta + 2|u|^3\cos\beta)\,.\,\exp(-xu^2\sin\beta) \end{aligned} \tag{112}$$

(Θ bude stále značit jakákoliv čísla, pro něž $|\Theta| \leqq 1$). Ježto $|1 + i| = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, je

$$(113)\quad I_3 = (1 + i)\, e^{xf(\beta i)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-xu^2 \sin\beta}\, du + \frac{3}{2}\, \Theta x \int_{-\infty}^{+\infty} u^4 e^{-xu^2\sin\beta}\, du \,.\, \sin\beta \,+$$

$$+\, 3\Theta x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xu^2\sin\beta} |u|^3\, du \,.\, \cos\beta\,.$$

Jde o integrály sudých funkcí; v prvním pišme $\int_0^\varepsilon = \int_0^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty}$. Ježto integrály podobného druhu budeme často potřebovat, vyšetříme je obecně:

Lemma 5. *Nechť* $\beta > -1$, $\alpha > 0$, $\lambda > 0$, $\varepsilon \geqq 0$. *Položme*

$$K(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) = \int_\varepsilon^{+\infty} u^\beta \,.\, \exp\left(-\lambda u^\alpha\right) du\,.$$

Potom je

$$(114)\qquad K(\alpha, \beta, \lambda, 0) = \lambda^{-(\beta+1)/\alpha} \,.\, \frac{1}{\alpha} \,.\, \Gamma\left(\frac{\beta + 1}{\alpha}\right);$$

pro $\varepsilon > 0$ *je*

$$(115)\qquad K(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) \leqq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{-(\beta+1)/\alpha} \,.\, e^{-(1/2)\lambda\varepsilon^\alpha} \,.\, \frac{1}{\alpha} \,.\, \Gamma\left(\frac{\beta + 1}{\alpha}\right);$$

pro $\varepsilon > 0$, $\dfrac{\beta + 1}{\alpha} \leqq 1$ *je*

$$(116)\qquad K(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) \leqq \frac{1}{\alpha} \,.\, \lambda^{-(\beta+1)/\alpha} \left(\lambda\varepsilon^\alpha\right)^{(\beta+1)/\alpha - 1} e^{-\lambda\varepsilon^\alpha}\,.$$

Důkaz: Vzorec (114) plyne ihned substitucí $\lambda u^\alpha = t$. Táž substituce dává pro

$$\frac{\beta + 1}{\alpha} \leqq 1\,, \quad \varepsilon > 0:$$

$$K(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{\alpha}\, \lambda^{-(\beta+1)/\alpha} \int_{\lambda\varepsilon^\alpha}^{+\infty} e^{-t} t^{(\beta+1)/\alpha - 1}\, dt \leqq \frac{1}{\alpha}\, \lambda^{-(\beta+1)/\alpha} \,.\, \left(\lambda\varepsilon^\alpha\right)^{(\beta+1)/\alpha - 1} \int_{\lambda\varepsilon^\alpha}^{+\infty} e^{-t}\, dt\,,$$

což dává (116). Konečně pro $\varepsilon > 0$ je

$$K(\alpha, \beta, \lambda, \varepsilon) \leqq e^{-(1/2)\lambda\varepsilon^\alpha} \int_0^{+\infty} u^\beta \,.\, \exp\left(-\frac{\lambda}{2} u^\alpha\right) du\,;$$

užitím (114) plyne (115).

Dosadíme-li do (113) podle lemmatu, dostáváme

$$(117)\quad I_3 = (1 + i)\, e^{xf(\beta i)} \,.\, \sqrt{\frac{1}{x \sin \beta}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + 3\Theta x \,.\, \frac{1}{x^2 \sin^2 \beta}\, \Gamma(2) \cos \beta + $$
$$+ \frac{3}{2}\, \Theta x (x \sin \beta)^{-5/2} \,.\, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) . \sin \beta + \sqrt{2}\, \Theta \sqrt{\frac{1}{x \sin \beta}} \,.\, \frac{e^{-N}}{\sqrt{N}}\,,$$

kde

$$(118)\qquad N = x\varepsilon^2 \sin \beta = \frac{x^{1/3} \sin \beta}{\cos^{2/3} \beta}\,.$$

Myslíme-li si na okamžik β pevné a $x \to +\infty$, vidíme, že první („hlavní") člen je řádu $x^{-1/2}$, „zbytkové členy" jsou $O(x^{-1})$. V dalším nebude ovšem β pevné; x, β budou libovolná čísla s $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, pro která platí (111).

Dále je

$$I_1 = \int_\beta^{+\infty} e^{-x(\operatorname{sh} u - u \cos \beta)}\, du\,,$$

$$|I_5| = \left| \int_{\pi-\beta}^{+\infty} \exp\left(x(\operatorname{sh}(u + i\pi) - (u + i\pi) \cos \beta)\right) du \right| \leqq$$
$$\leqq \int_{\pi-\beta}^{+\infty} \exp\left(-x(\operatorname{sh} u + u \cos \beta)\right) du \leqq I_1\,.$$

Pro $u > 0$ je $\operatorname{sh} u > u$, tedy $\operatorname{sh} u - u \cos \beta > u(1 - \cos \beta) = u\, \dfrac{\sin^2 \beta}{1 + \cos \beta} >$

$$> \frac{u}{2} \sin^2 \beta \text{ a odtud ihned } I_1 \leqq \int_{\sin\beta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{xu}{2} \sin^2 \beta\right) du\,,$$

$$(119)\qquad |I_1| + |I_5| \leqq \frac{4}{x \sin^2 \beta} \,.\, \exp\left(-\frac{x}{2} \sin^3 \beta\right).$$

Konečně odhadněme $|I_2| + |I_4|$. Položme

$$(120)\qquad \Phi(u) = \operatorname{Re} f(u + i(u + \beta)) = \operatorname{sh} u \cos(u + \beta) - u \cos \beta\,,$$

takže

$$(121)\qquad |I_2| + |I_4| \leqq \sqrt{2}\int_{-\beta}^{-\varepsilon} \exp(x\,\Phi(u))\,\mathrm{d}u + \sqrt{2}\int_{\varepsilon}^{\pi-\beta} \exp(x\,\Phi(u))\,\mathrm{d}u\,.$$

Vyšetřeme průběh $\Phi(u)$. Je $\Phi(0) = 0$,

$$(122)\qquad \Phi'(u) = \mathrm{ch}\,u \cos(u + \beta) - \mathrm{sh}\,u \sin(u + \beta) - \cos\beta\,, \quad \Phi'(0) = 0\,,$$

$$(123)\qquad \Phi''(u) = -2\,\mathrm{ch}\,u \sin(u + \beta) < 0$$

pro $-\beta < u < \pi - \beta$. Tedy $\Phi'(u)$ je kladná pro $-\beta < u < 0$, záporná pro $0 < < u < \pi - \beta$, takže $\Phi(u) \leqq \Phi(-\varepsilon)$ pro $-\beta \leqq u \leqq -\varepsilon$, $\Phi(u) \leqq \Phi(\varepsilon)$ pro $\varepsilon \leqq u \leqq \leqq \pi - \beta$. Ježto (105), (107) platí na celé integrační dráze v I_3, tedy také ještě pro $u = \pm\varepsilon$, je

$$e^{x\Phi(\pm\varepsilon)} = \left|\exp\left(xf(\pm\varepsilon(1 + i) + i\beta)\right)\right| \leqq e\,.\,e^{-x\varepsilon^2\sin\beta}\,,$$

a odtud podle (118), (121)

$$(124)\qquad |I_2| + |I_4| \leqq 3\sqrt{2}\,.\,\pi e^{-N}\,.$$

Užiji (117), (119), (124), dělím πi a uvážím, že $1 + i = \sqrt{2}\,e^{(1/4)\pi i}$. Vychází:

Věta 58. *Pro* $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\arg x = 0$, $v = x\cos\beta$,

$$(125)\qquad x\cos\beta \geqq \max\left(1, \frac{1}{\beta^3}, \mathrm{tg}^3\,\beta\right)$$

je

$$H_v^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin\beta}} \exp\left(i\left(x\sin\beta - x\beta\cos\beta - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \mathfrak{Z}\,,$$

kde

$$\mathfrak{Z} = \Theta\,\frac{\cos\beta}{x\sin^2\beta} + \Theta(x\sin\beta)^{-3/2} + \frac{1}{2}\,\Theta\,\frac{1}{\sqrt{x\sin\beta}}\,\frac{e^{-N}}{\sqrt{N}} +$$

$$+ \frac{4}{3}\,\Theta\,\frac{1}{x\sin^2\beta}\exp\left(-\frac{x\sin^3\beta}{2}\right) + 5\Theta e^{-N}\,,$$

kde

$$N = \frac{x^{1/3}\sin\beta}{\cos^{2/3}\beta}\,.$$

Odtud ovšem ihned

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin\beta}} \cos\left(x\sin\beta - x\beta\cos\beta - \frac{\pi}{4}\right) + \mathfrak{Z}_1,$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin\beta}} \sin\left(x\sin\beta - x\beta\cos\beta - \frac{\pi}{4}\right) + \mathfrak{Z}_2,$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x \sin\beta}} \exp\left(-i\left(x\sin\beta - x\beta\cos\beta - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \mathfrak{Z}_3,$$

kde pro $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ platí tentýž odhad jako pro $\mathfrak{Z}$.

Poznámka 1. Budiž $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$. Pro $\delta \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$ leží $\sin\beta$ i $\cos\beta$ v intervalu $\left\langle \sin\delta, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right\rangle$. Z věty 58 plyne okamžitě: Budiž $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$. Potom existují kladná čísla $c_1(\delta)$, $c_2(\delta)$ tak, že pro $x > c_1(\delta)$, $\arg x = 0$, $\delta \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2} - \delta$, $\nu = x\cos\beta$ je

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\beta}} \exp\left(i\left(x\sin\beta - x\beta\cos\beta - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \Theta\, c_2(\delta) \,.\, \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Tím je tedy vyčleněn „hlavní člen“ a odhad je stejnoměrný pro všechna $\beta \in \left\langle \delta, \frac{\pi}{2} - \delta \right\rangle$. Ale neříká nic o tom, co se děje, když $x \to +\infty$ a současně $\beta \to 0$ nebo $\beta \to \frac{\pi}{2}$. Sledujme ten (zajímavější) případ, že β je blízko nuly, tedy $\frac{\nu}{x} = \cos\beta$ blízko jedné. Položme $\tau = x\sin^3\beta$ a sledujme jednotlivé členy v $\mathfrak{Z}$. Je $x\sin^2\beta = \sqrt{x\sin\beta} \,.\, \tau^{1/2}$; $(x\sin\beta)^{3/2} = (x\sin\beta)^{1/2} \,.\, \tau^{1/3} \,.\, x^{2/3} \geqq (x\sin\beta)^{1/2}\tau^{1/2}$, pokud $x \geqq 1$ (protože potom $x^{2/3} \geqq x^{1/6} \geqq \tau^{1/6}$). Dále pro $y > 0$ je $ye^{-y} \leqq \frac{1}{e}$ (najděte maximum), tedy $y^{-1/2}e^{-y} < \frac{1}{ey^{3/2}}$, $N = \frac{\tau^{1/3}}{\cos^{2/3}\beta}$, $\frac{e^{-N}}{\sqrt{N}} < N^{-3/2} \leqq \tau^{-1/2}$. Součet prvních čtyř členů v $\mathfrak{Z}$ lze tedy psát pro $\tau \geqq 1$ ve tvaru

$$4\Theta \,.\, \frac{1}{\sqrt{x\sin\beta} \,.\, \sqrt{\tau}}, \tag{126}$$

takže pro velká τ jsou podstatně menší než hlavní člen. Ale poslední člen v $\mathfrak{Z}$ je $6\Theta\exp(-\tau\cos^{-2/3}\beta)$; to je pro velká τ sice velmi malé, ale není jasné, je-li to menší než hlavní člen. Tento člen zbytku $\mathfrak{Z}$, který vznikl odhadem I_2, I_4, musíme tedy odhadnout jinak, chceme-li mít užitečný vzorec pro $\beta \to 0$, $\tau = x \sin^3 \beta \to +\infty$.

Odhadujme tedy I_2, I_4 jinak. Ježto nám jde jen o β blízká nule, předpokládejme $0 < \beta < \frac{1}{4}\pi$. Máme $\cos \beta > \frac{1}{\sqrt{2}}$; předpoklady (125) budou tedy jistě splněny, když

$$(127) \qquad 0 < \beta < \frac{1}{4}\pi\,, \quad x > \frac{\sqrt{2}}{\beta^3}\,.$$

Pro $-1 \leqq u \leqq 1$, $z = u(1 + i) + i\beta$ máme vzorec (103), kde podle (108) je $|R_1 + R_2| \leqq |u|^3$. Jestliže $|u| \leqq \frac{1}{2} \sin \beta$, je $|u|^3 \leqq \frac{1}{2} u^2 \sin \beta$, tedy $|\exp(x f(z))| \leqq \leqq \exp\left(-\frac{1}{2} x u^2 \sin \beta\right)$. Je (viz (110)) $\varepsilon = x^{-1/3} \cos^{-1/3} \beta < 2^{1/6} x^{-1/3} < \frac{1}{2} \sin \beta$, jakmile $\tau = x \sin^3 \beta \geqq 12$ (neboť $2^3 \,.\, \sqrt{2} < 12$). Tato podmínka implikuje $x > > \sqrt{2}\, \beta^{-3}$. Budeme tedy místo (127) předpokládat ostřejší podmínku

$$(128) \qquad 0 < \beta < \frac{1}{4}\pi\,, \quad \tau = x \sin^3 \beta \geqq 12\,.$$

Tedy je $I_2 + I_4 = A + B$, kde

$$A = (1 + i)\left(\int_{(-1/2)\sin\beta}^{-\varepsilon} \ldots + \int_{\varepsilon}^{(1/2)\sin\beta} \ldots\right),$$

$$B = (1 + i)\left(\int_{-\beta}^{(-1/2)\sin\beta} \ldots + \int_{(1/2)\sin\beta}^{\pi-\beta} \ldots\right),$$

kde za znamením integračním stojí $e^{xf(z)}\, du$, $z = u(1 + i) + i\beta$. Tedy

$$|A| \leqq 2\sqrt{2} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} x u^2 \sin \beta\right) du \leqq 3 \int_{x^{-1/3}}^{+\infty} \ldots$$

a podle lemmatu 5 plyne snadno $\left(\text{užiji opět } y^{-1/2} e^{-y} \leqq \frac{1}{e}\, y^{-3/2} \text{ pro } y > 0\right)$

$$(129) \qquad |A| < \frac{3}{\sqrt{x \sin \beta}} \,.\, \tau^{-1/2}\,.$$

Definujme Φ vzorcem (120), takže

$$(130) \qquad |B| \leqq \sqrt{2}\left(\int_{-\beta}^{(-1/2)\sin\beta} e^{x\Phi(u)}\, du + \int_{(1/2)\sin\beta}^{\pi-\beta} e^{x\Phi(u)}\, du\right).$$

Víme, že $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = 0$,

(131) $$\Phi''(u) = -2 \operatorname{ch} u \sin(u + \beta) \leqq -2 \sin(u + \beta)$$

pro $-\beta \leqq u \leqq \pi - \beta$ (viz (123)). Speciálně pro $|u| \leqq \frac{1}{2} \sin \beta$ je $\frac{1}{2}\beta < u + \beta < \frac{3}{2}\beta < \pi - \frac{1}{2}\beta$, a tedy $\sin(u + \beta) > \sin \frac{1}{2}\beta > \frac{1}{2} \sin \beta$, tj. $\Phi''(u) < -\sin \beta$. Odtud $\Phi'\left(\frac{1}{4} \sin \beta\right) < -\frac{1}{4} \sin^2 \beta$, $\Phi'\left(-\frac{1}{4} \sin \beta\right) > \frac{1}{4} \sin^2 \beta$. Ježto pak Φ' je klesající pro $-\beta \leqq u \leqq \pi - \beta$ a $\Phi\left(\pm \frac{1}{4} \sin \beta\right) < 0$, je pro $\frac{1}{4} \sin \beta < u < \pi - \beta$

$$\Phi(u) < \Phi(u) - \Phi\left(\frac{1}{4} \sin \beta\right) < -\left(u - \frac{1}{4} \sin \beta\right) \frac{1}{4} \sin^2 \beta$$

a pro $-\beta < u < -\frac{1}{4} \sin \beta$ je

$$\Phi(u) < \Phi(u) - \Phi\left(-\frac{1}{4} \sin \beta\right) < -\left(|u| - \frac{1}{4} \sin \beta\right) \frac{1}{4} \sin^2 \beta .$$

Tedy (podle (130))

(132) $$|B| \leqq 2\sqrt{2} \int_{(1/2)\sin\beta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{4} x \sin^2 \beta \,.\left(u - \frac{1}{4} \sin \beta\right)\right) du =$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{(1/4)\sin\beta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{4} x \sin^2 \beta \,.\, v\right) dv < 2\sqrt{2} \,.\, \frac{4}{x \sin^2 \beta} < \frac{12}{\sqrt{x \sin \beta}} \,.\, \tau^{-1/2} .$$

Přičtu-li k odhadu (126) ještě odhady (129), (132) (dělené π), dostávám:

Věta 58a. *Nechť* $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, $\arg x = 0$, $v = x \cos \beta$. *Položme* $\tau = x \sin^3 \beta$. *Potom pro* $\tau \geqq 12$ *je*

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x \sin \beta}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(i\left(x \sin \beta - x\beta \cos \beta - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{9\Theta}{\sqrt{\tau}}\right).$$

Tato věta dává pro velká τ asymptotický průběh $H_\nu^{(1)}(x)$. Speciálně: jestliže $\beta(x)$ je funkcí x takovou, že $0 < \beta(x) < \frac{\pi}{4}$ a že $\tau(x) \to +\infty$, je $\tau^{-1/2}(x) = o(1)$ pro $x \to +\infty$. Jak se jeví podmínka $\tau(x) \to +\infty$ ve funkci $v(x) = x \cos \beta(x)$? Pochopitelně nás zajímají případy, že $\beta(x)$ je malé pro velká x (v ostatních případech užijeme věty 58, pokud β není příliš blízko $\frac{\pi}{2}$, kterýžto případ nevyšetřuji). Pro $\beta \to 0+$ pišme $f(\beta) \sim g(\beta)$, když $\lim\limits_{\beta\to 0+} \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = 1$. Tedy $\beta \sim \sin \beta$, $x - \nu = x(1 - \cos\beta) \sim \sim \frac{x}{2}\beta^2 \sim x \sin^2\beta = x^{1/3}\frac{\tau^{2/3}}{2}$; tedy $\tau(x) \to +\infty$ pro $x \to +\infty$ znamená (při $\sin\beta(x) \to 0$) totéž jako $\frac{x - \nu(x)}{x^{1/3}} \to +\infty$.

§ 11

Asymptotika funkcí $H_\nu^{(j)}(x)$ *pro* $\xi = \frac{\nu}{x} = 1$

Jde o

$$\pi i\, H_x^{(1)}(x) = \int_{C_1} \exp\left(x f(z)\right) \mathrm{d}z\,,$$

kde

(133) $$f(z) = \operatorname{sh} z - z\,, \quad f'(z) = \operatorname{ch} z - 1\,.$$

Podle předběžné úvahy v § 9 volme $z_0 = 0$. Je $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, f'''(0) = 1$, tedy v označení § 8 je $p = 3$. Pro reálné z je $\operatorname{Im} z = 0$; pro reálné $z \neq 0$ je $f'(z) > 0$, tedy pro $z < 0$ je $f(z) < f(0) = 0$, takže záporná reálná poloosa leží v záporné oblasti. V záporných oblastech leží ještě dva oblouky s $\operatorname{Im} z = 0$, vycházející z bodu $z_0 = 0$. Jejich polotečny v bodě 0 svírají se zápornou reálnou poloosou úhel $\frac{2}{3}\pi$. S ohledem na tvar křivky C_1 zvolme novou integrační dráhu K_1 podle obr. 30.

Zvolme číslo ε, $0 < \varepsilon \leqq 1$ a rozložme

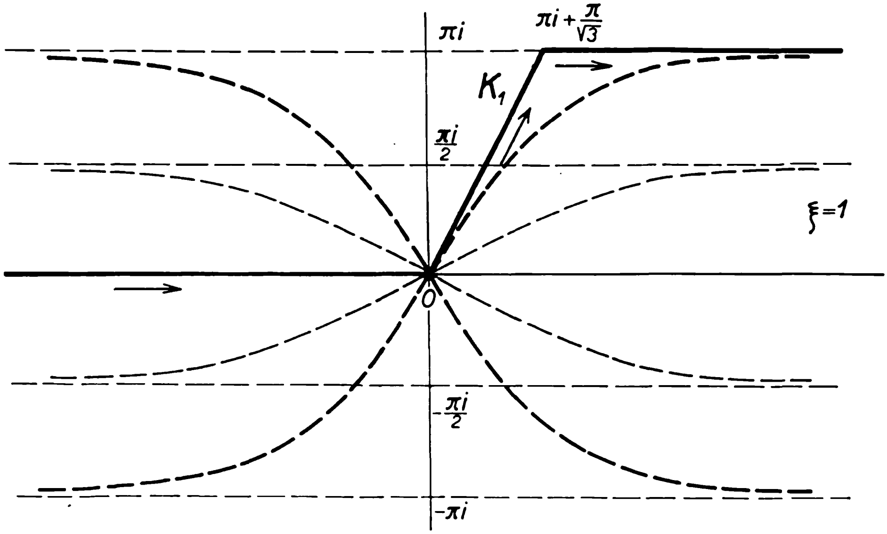
$$\pi i\, H_x^{(1)}(x) = \int_{K_1} e^{x f(z)}\,\mathrm{d}z = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5\,,$$

kde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} e^{x f(u)}\,\mathrm{d}u\,, \quad I_5 = \int_{\pi/\sqrt{3}}^{+\infty} e^{x f(u + i\pi)}\,\mathrm{d}u\,, \quad I_2 = \int_{-\varepsilon}^{0} e^{x f(u)}\,\mathrm{d}u\,,$$

$$I_3 = (1 + i\sqrt{3}) \int_0^{(1/2)\varepsilon} e^{x f(z)}\,\mathrm{d}u\,, \quad I_4 = (1 + i\sqrt{3}) \int_{(1/2)\varepsilon}^{\pi/\sqrt{3}} e^{x f(z)}\,\mathrm{d}u\,;$$

přitom v I_3, I_4 je $z = (1 + i\sqrt{3})\,u$. Mez $\frac{\varepsilon}{2}$ jsme v I_3 volili proto, aby délka šikmé úsečky od 0 do $(1 + i\sqrt{3})\,\frac{\varepsilon}{2}$ byla ε – stejná jako délka integrační dráhy v I_2. V předešlém paragrafu (věta 58) jsme vypočítali jeden hlavní člen, ostatní jsme dali do zbytku $\mathfrak{Z}$. Zde máme jednodušší případ (bez parametru β); bude poučné zjistit, jak je možné počítat více členů asymptotického rozvoje.



Obr. 30.

Napřed vypočteme I_2, I_3, které budou asi nejdůležitější. V I_3 položíme ještě $u = \frac{1}{2}\,v$, v I_2 položíme $u = -v$,

$$I_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \int_0^\varepsilon \exp\left(xf\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\,v\right)\right) \mathrm{d}v\,,$$

$$I_2 = \int_0^\varepsilon \exp\left(xf(-v)\right) \mathrm{d}v\,.$$

Položme $\varrho_1 = -1$, $\varrho_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$,

$$G_\varrho = \int_0^\varepsilon \exp\left(xf(\varrho v)\right) \mathrm{d}v\,. \tag{134}$$

Potom

$$I_2 + I_3 = G_{\varrho_1} + \varrho_2 G_{\varrho_2}\,. \tag{135}$$

Budeme tedy počítat G_ϱ pro $\varrho = \varrho_1$ a $\varrho = \varrho_2$; ϱ bude stále znamenat jedno z těchto dvou čísel. Pro obě tyto hodnoty je $|\varrho| = 1$, $\varrho^3 = -1$. Pro všechna u je

$$\text{(136)} \qquad \operatorname{sh} \varrho u - \varrho u = \frac{\varrho^3 u^3}{6} + R(u),$$

$$R(u) = \frac{\varrho^5 u^5}{120}\left(1 + \frac{\varrho^2 u^2}{6 \,.\, 7} + \frac{(\varrho^2 u^2)^2}{6 \,.\, 7 \,.\, 8 \,.\, 9} + \ldots\right).$$

Tedy je zřejmě

$$\text{(137)} \qquad |R(u)| \leqq \frac{|u|^5}{100} \quad \text{pro} \quad |u| \leqq 1\,.$$

Budiž $x \geqq 1$ a zvolme $\varepsilon = x^{-1/5} \leqq 1$; potom pro $|u| \leqq \varepsilon$ bude $x|R(u)| < 1$. Ve vzorci

$$\text{(138)} \qquad e^{x(\operatorname{sh}\varrho u - \varrho u)} = e^{(-1/6)u^3 x} \,.\, e^{xR(u)}$$

nebudeme aproximovat $\exp\left(x\, R(u)\right)$ jedničkou (jako v § 10), nýbrž delším úsekem příslušné řady. Budiž $k \geqq 0$ celé; potom pro $|w| \leqq 1$ je

$$\text{(139)} \qquad \left|e^w - 1 - \frac{w}{1!} - \ldots - \frac{w^k}{k!}\right| \leqq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|w|^n}{n!} \leqq$$

$$\leqq \frac{|w|^{k+1}}{(k+1)!}\, e^{|w|} \leqq \frac{|w|^{k+1}}{(k+1)!}\, e\,.$$

Podle (139) dostaneme ($k = 2$; $e < 3$, $|\Theta| \leqq 1$)

$$\text{(140)} \qquad e^{x(\operatorname{sh}\varrho u - \varrho u)} = e^{-(1/6)u^3 x}\left(1 + xR + \frac{1}{2}x^2R^2 + \frac{\Theta}{2}x^3R^3\right)$$

pro $|u| \leqq \varepsilon$. Rozvineme-li xR, x^2R^2, x^3R^3 v mocninné řady (podle u), vidíme, že se v G_ϱ vyskytnou integrály ($k \geqq 0$ celé, $|\Theta| \leqq 1$)

$$\text{(141)} \qquad \int_0^{+\infty} e^{(-1/6)xu^3} u^k \,\mathrm{d}u = x^{-(1/3)(k+1)} M_k\,, \quad M_k = \frac{1}{6}\, 6^{(1/3)(k+1)}\, \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right),$$

$$\text{(142)} \qquad \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-(1/6)xu^3} u^k \,\mathrm{d}u = \Theta \,.\, 2^{(1/3)(k+1)} M_k x^{-(1/3)(k+1)} \exp\left(-\frac{1}{12}\, x^{2/5}\right)$$

(viz lemma 5). Všechna M_k se pomocí vztahu $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ dají převést na

$$\Gamma(1) = 1,\ \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),\ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \pi\, \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}}\,.$$

V dalších výpočtech se nebudeme zdržovat numerickým odhadem konstant ve zbytkových členech. Absolutní kladné konstanty budeme značit $c_1, c_2, \ldots$. Pokud nebude možné nedorozumění, budu je bez rozdílu značit c (bez indexu). Abychom věděli, jak máme postupovat, všimněme si, že integrál (141) je řádu $x^{-(1/3)(k+1)}$. Toho užijeme, abychom poznali, kolik členů máme vzít v xR a v x^2R^2, jestliže $\frac{1}{2}|\Theta|\, x^3R^3$ v (140) vezmu jako zbytkový člen. Je $|x^3R^3| < cx^3u^{15}$ (beru $0 < u \leqq \varepsilon$), takže integrací dostaneme člen řádu nejvýše $x^3 \,.\, x^{-16/3} = x^{-7/3}$. Dále je $xR = \alpha xu^5 + \beta xu^7 + \gamma xu^9 + \ldots$, což po integraci dává členy řádu $x^{-1}, x^{-5/3}, x^{-7/3}, \ldots$; vezmu tedy v xR první dva členy plus zbytkový člen. Konečně je $x^2R^2 = \alpha' x^2u^{10} + \beta' x^2u^{12} + \ldots$, což po integraci dává členy řádu $x^{-5/3}, x^{-7/3}, \ldots$. Tedy vezmu v x^2R^2 první člen řádu plus zbytek. Píši tedy

$$xR = x\,\frac{\varrho^5u^5}{5!} + x\,\frac{\varrho^7u^7}{7!} + \Theta c_1 xu^9\,,$$

$$\frac{1}{2}\,x^2R^2 = \frac{1}{2}\left(x\,\frac{\varrho^5u^5}{5!} + \Theta cxu^7\right)^2 = x^2\,\frac{\varrho^{10}u^{10}}{2\,.\,(5!)^2} + \Theta cx^2u^{12}\,,$$

$$x^3R^3 = (\Theta cxu^5)^3 = \Theta cx^3u^{15}\,.$$

Nyní vypočtu G_ϱ (viz (134)). Je

$$e^{xf(\varrho u)} = e^{x(\operatorname{sh}\varrho u - \varrho u)} = e^{(-1/6)xu^3}\,.\left(1 + xR + \frac{1}{2}\,x^2R^2 + \frac{\Theta}{2}\,x^3R^3\right) =$$

$$= e^{-(1/6)xu^3}\left(1 + x\,\frac{\varrho^5u^5}{5!} + x\,\frac{\varrho^7u^7}{7!} + x^2\,\frac{\varrho^{10}u^{10}}{2\,.\,(5!)^2} + \Theta cxu^9 + \right.$$

$$\left. + \Theta cx^2u^{12} + \Theta cx^3u^{15}\right).$$

Mám integrovat od 0 do ε; v prvních čtyřech členech píši $\int_0^\varepsilon = \int_0^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty}$, poslední tři odhadnu integrálem od 0 do $+\infty$. Podle (141), (142) vychází

$$G_\varrho = \frac{1}{3}\,6^{1/3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)x^{-1/3} + \frac{1}{5!}\,M_5\varrho^5x^{-1} + \frac{1}{7!}\,M_7\varrho^7x^{-5/3} + \tag{143}$$

$$+ \frac{1}{2\,.\,(5!)^2}\,M_{10}\varrho^{10}x^{-5/3} + \Theta c_2x^{-1/3}\exp\left(-\frac{1}{12}\,x^{2/5}\right) + \Theta c_3x^{-7/3}\,.$$

Ježto pro $x \geqq 1$ je $x^{-1/3}\exp\left(-\frac{1}{12}\,x^{2/5}\right) < cx^{-7/3}$, lze předposlední člen vynechat. Podotýkám ovšem: Kdyby šlo o použití asymptotických rozvojů k numerickým výpočtům, musili bychom se pokusit nějak vhodně určit c_2, c_3 a vyšlo by nám (můžete to zkusit) c_2 mnohem větší než c_3, takže by u předposledního členu bylo užitečné využít exponenciálního činitele. Zrovna tak by bylo důležité, že ve vzorci pro xR lze volit c_1 malé, např. $c_1 = 3 \cdot 10^{-6}$.

Dále máme $\operatorname{sh}(u + i\pi) = -\operatorname{sh} u$, $\operatorname{sh}(-u) = -\operatorname{sh} u$, a tedy

$$I_1 + I_5 = \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-x(\operatorname{sh} u - u)}\,du + e^{-i\pi x} \int_{\pi/\sqrt{3}}^{+\infty} e^{-x(\operatorname{sh} u + u)}\,du\,.$$

Ježto $\varepsilon \leqq 1 < \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{sh} u + u > \operatorname{sh} u - u > \dfrac{1}{6} u^3$, je

$$(144)\quad |I_1 + I_5| < 2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{(-1/6)xu^3}\,du = \Theta c x^{-1/3} \exp\left(-\frac{1}{12} x^{2/5}\right) = \Theta c x^{-7/3}$$

(viz (142)). Odhadněme konečně I_4. Píši-li $\Phi(u) = \operatorname{Re} f(z)$, $z = u(1 + i\sqrt{3})$, je

$$|I_4| = |1 + i\sqrt{3}| \left|\int_{(1/2)\varepsilon}^{\pi/\sqrt{3}} \exp(x f(z))\,du\right| \leqq 2 \int_{(1/2)\varepsilon}^{\pi/\sqrt{3}} \exp(x\,\Phi(u))\,du\,.$$

Je $\operatorname{sh}(u + iv) = \operatorname{sh} u \cos v + i \operatorname{ch} u \sin v$, tedy

$$\Phi(u) = \operatorname{sh} u \cdot \cos(\sqrt{3}\,u) - u\,.$$

Vyšetřujme interval $0 \leqq u \leqq \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$. V intervalu $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} < u < \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ je $\operatorname{sh} u \cdot \cos(\sqrt{3})$ záporné a v absolutní hodnotě roste; tedy je tam $\Phi(u)$ klesající. V intervalu $0 < u < \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ je

$$\Phi'(u) = \operatorname{ch} u \cdot \cos(\sqrt{3}\,u) - \sqrt{3} \operatorname{sh} u \sin(\sqrt{3}\,u) - 1\,, \quad \Phi'(0) = 0\,,$$
$$\Phi''(u) = -2 \operatorname{sh} u \cdot \cos(\sqrt{3}u) - 2\sqrt{3} \operatorname{ch} u \sin(\sqrt{3}\,u) < 0\,.$$

Tedy $\Phi'(u) < 0$, $\Phi(u)$ klesající v $\left(0, \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)$. Tedy je Φ klesající v $\left\langle 0, \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right\rangle$ a pro $\dfrac{1}{2}\varepsilon \leqq u \leqq \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ je $\Phi(u) \leqq \Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, takže $|I_4| < \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} \exp\left(x\Phi\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. Ale

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \operatorname{Re} f\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\,\varepsilon\right) = \operatorname{Re}(\operatorname{sh} \varrho_1\varepsilon - \varrho_1\varepsilon)\,.$$

Podle (136), (137) je

$$\operatorname{sh} \varrho_1\varepsilon - \varrho_1\varepsilon = -\frac{\varepsilon^3}{3} + \Theta \frac{\varepsilon^5}{100}\,,$$

a tedy

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{\varepsilon^3}{6} + \Theta\frac{\varepsilon^5}{100} < -\frac{\varepsilon^3}{7} = -\frac{1}{7}x^{-3/5},$$

(145) $$|I_4| < \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{1}{7}x^{2/5}\right) < cx^{-7/3}.$$

Z (135), (143), (144), (145) plyne

Věta 59. *Pro* $x \geqq 1$, $\arg x = 0$ *je*

$$H_x^{(1)}(x) = \frac{\sqrt{3} - 3i}{6^{2/3}\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)x^{-1/3} + \frac{\sqrt{3} + 3i}{2\pi}\left(\frac{M_7}{7!} - \frac{M_{10}}{2\,.\,(5!)^2}\right)x^{-5/3} + \Theta cx^{-7/3},$$

$$M_k = \frac{1}{3}6^{(1/3)(k+1)}\Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right).$$

Reálná a imaginární část a komplexně sdružené číslo dávají vzorce pro $J_x(x)$, $N_x(x)$, $H_x^{(2)}(x)$; nebudu je vypisovat. V prvním přiblížení máme pro $v = x \to +\infty$ vzorec $H_v^{(1)}(x) = x^{-1/3}\left(\frac{\sqrt{3} - 3i}{6^{2/3}\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + o(1)\right)$.

Dokážeme, že tento vzorec platí i tehdy, když x, v rostou do $+\infty$ tak, že $\frac{x - v}{x^{1/3}} \to 0$. Dokážeme ještě ostřejší, kvantitativní větu. Nechť

(146) $$x - v = \tau x^{1/3}, \quad x \geqq 1, \ -1 < \tau < 1 \quad (\text{tedy } v > 0).$$

$H_v^{(1)}(x)$ vyjádříme integrálem přes křivku K_1 (obr. 30), takže

(147) $$\pi i(H_x^{(1)}(x) - H_v^{(1)}(x)) = \int_{K_1}(e^{x(\operatorname{sh} z - z)} - e^{x\operatorname{sh} z - vz})\,dz =$$

$$= \int_{K_1} e^{x(\operatorname{sh} z - z)}(1 - e^{\tau x^{1/3} z})\,dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

kde I_3 je integrál přes šikmou úsečku $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})u$, $0 \leqq u \leqq \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$, $I_1 = \int_{-\infty}^{-(2/\sqrt{3})\pi} \dots$, $I_2 = \int_{-(2/\sqrt{3})\pi}^{0} \dots$, I_4 je integrál přes polopřímku $z = u + i\pi$, $u \geqq \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Podotkněme: Půjde nám jen o odhad rozdílu $H_x^{(1)}(x) - H_v^{(1)}(x)$ a o žádný „hlavní člen". Proto nemusíme zvlášť izolovat malé okolí bodu 0. Za druhé: Je-li $v \neq x$, neodpovídá křivka K přesně návodu z § 8; např. pro $v < x$ by tomu návodu odpovídala křivka $\tilde{C}_1$ z § 9. Ale to, že volíme pro $H_x^{(1)}(x)$, $H_v^{(1)}(x)$ touž křivku K, nám umožňuje jednoduše počítat jejich rozdíl; a ježto pro velká x je $x - v$ malá v poměru k x, můžeme doufat, že naše metoda neztratí příliš na účinnosti.

Je vždy $|1 - e^w| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|w|^k}{k!} \leqq |w|\, e^{|w|}$, tedy

$$|1 - e^{\tau x^{\frac{1}{3}} z}| \leqq |\tau| \,.\, x^{1/3}|z| \,.\, \exp\left(|\tau|\, x^{1/3}|z|\right). \tag{148}$$

K odhadu $I_2 + I_3$ stačí odhadnout

$$J_\varrho = \int_0^{(2/\sqrt{3})\pi} e^{x(\operatorname{sh}\varrho u - \varrho u)} \left(1 - e^{\tau x^{1/3} \varrho u}\right) du \tag{149}$$

pro $\varrho = -1$ a pro $\varrho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$, takže $\varrho^3 = -1$, $|\varrho| = 1$. Jde nám o hodnoty $0 \leqq u \leqq 2\pi/\sqrt{3}$. Je

$$\operatorname{sh}\varrho u - \varrho u = \frac{\varrho^3 u^3}{3!}\left(1 + \frac{\varrho^2 u^2}{4\,.\,5} + \frac{\varrho^4 u^4}{4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} + \ldots\right). \tag{150}$$

Je $\frac{22}{7} = 3{,}142\ldots > \pi$, tedy $\pi^2 < \frac{484}{49} < 10$, $u^2 < \frac{40}{3}$. Tedy

$$\left|\frac{\varrho^2 u^2}{4.5} + \frac{\varrho^4 u^4}{4.5.6.7} + \ldots\right| \leqq \frac{u^2}{20}\left(1 + \frac{40}{3} \,.\, \frac{1}{6\,.\,7} + \left(\frac{40}{3}\right)^2 \,.\, \frac{1}{(6\,.\,7)^2} + \ldots\right) \leqq \frac{u^2}{20} \,.\, \frac{63}{43}$$

$\left(\text{geometrická řada s kvocientem } \frac{20}{63}\right)$. Tedy $\frac{u^2}{20} \,.\, \frac{63}{43} < \frac{2}{3} \,.\, \frac{63}{43} = \frac{42}{43}$, a tedy podle

(150) je $\operatorname{sh}\varrho u - \varrho u = -\frac{u^3}{6}\left(1 + \Theta\frac{42}{43}\right)$ a odtud

$$\operatorname{Re}(\operatorname{sh}\varrho u - \varrho u) \leqq -\frac{u^3}{6\,.\,43} \leqq -\frac{u^3}{300}. \tag{151}$$

Poznamenávám: Zdá se být podstatné, že nám „náhodou" vyšlo číslo $\frac{42}{43} < 1$. Ale kdyby vyšlo číslo $\geqq 1$, nebylo by to neštěstí: musili bychom místo $\left\langle 0, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right\rangle$ vzít menší interval $\langle 0, u_0\rangle$ a interval $\left\langle u_0, \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right\rangle$ bychom vyšetřili zvlášť; to by nebylo těžké, neboť hlavní obtíže působí okolí bodu $u = 0$.

Podle (148), (149), (151) je

$$J_\varrho = 2\Theta\, I|\tau|\, x^{1/3}\,, \quad J = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{xu^3}{300} + |\tau|\, x^{1/3}u\right) . \, u \, du\,.$$

Je-li $|\tau|\, x^{1/3}u \leqq \dfrac{xu^3}{900}$, tj. $u \geqq 30\,|\tau|^{1/2}\, x^{-1/3} = \lambda$, je $-\dfrac{xu^3}{300} + |\tau|\, x^{1/3}u \leqq -cxu^3$.

Tedy $J \leqq J_1 + J_2$, kde

$$J_1 = \int_\lambda^{+\infty} e^{-cxu^3} u\, du < \int_0^{+\infty} e^{-cxu^3} u\, du\,, \quad J_2 = \int_0^\lambda e^{|\tau| x^{1/3} u} u\, du\,.$$

Podle lemmatu 5 je $J_1 = \Theta c x^{-2/3}$; substituce $|\tau|\, x^{1/3}u = t$ dává $J_2 = \tau^{-2} x^{-2/3}$. $. \int_0^{30|\tau|^{3/2}} e^t . \, t\, dt = \tau^{-2}x^{-2/3} . \, \Theta . \, e^{30} . \, \dfrac{1}{2} . \, 900|\tau|^3 = \Theta c|\tau|\, x^{-2/3} = \Theta c x^{-2/3}$, takže $J_\varrho = \Theta c|\tau|\, x^{-1/3}$, a tedy

$$I_2 + I_3 = \Theta c|\tau|\, x^{-1/3}\,. \tag{152}$$

K odhadu $I_1 + I_4$ poznamenejme, že

$$\begin{aligned} |1 - \exp(\tau x^{1/3} z)| &\leqq 1 + \exp(\operatorname{Re}(\tau x^{1/3} z)) \leqq \\ &\leqq 2 \exp(|\tau|\, x^{1/3} . \, |\operatorname{Re} z|)\,. \end{aligned} \tag{153}$$

V I_1 je $z = -u$, $u \geqq \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$; v I_4 je $z = u + i\pi$, $u \geqq \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} > 1$, $\operatorname{sh} z = -\operatorname{sh} u$.

Odtud a z (153) ihned dostanete

$$I_1 + I_4 = 4\Theta \int_{\pi/\sqrt{3}}^{+\infty} \exp(-x(\operatorname{sh} u - u) + |\tau|\, x^{1/3}u)\, du\,.$$

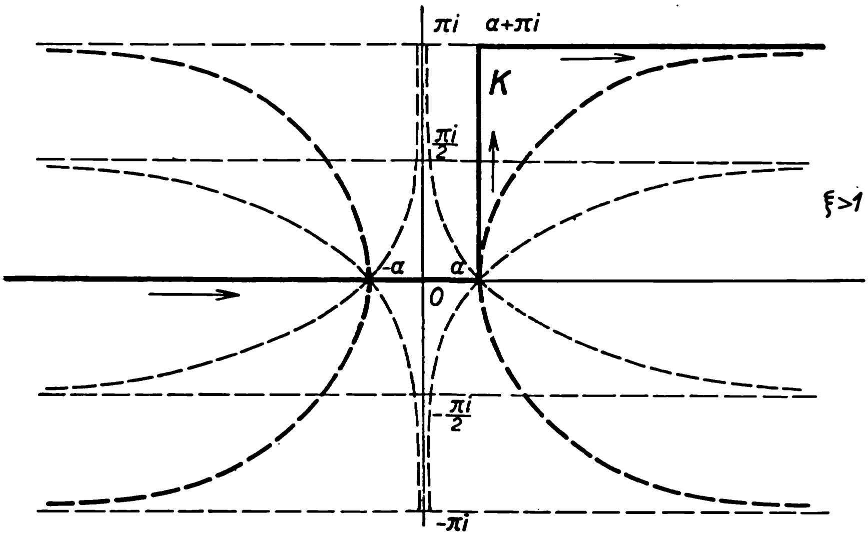
Zde je $x(\operatorname{sh} u - u) > \dfrac{1}{6}\, xu^3$. Jestliže $|\tau| \leqq \dfrac{1}{12}$, potom pro $x \geqq 1$, $u \geqq 1$ je $|\tau|\, x^{1/3}u \leqq$ $\leqq \dfrac{1}{12}\, xu^3$, tedy (viz lemma 5)

$$I_1 + I_4 = 4\Theta \int_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{12}\, xu^3\right) du = \Theta c x^{-1} \exp\left(-\frac{x}{12}\right). \tag{154}$$

Z (152), (154), (147) a z věty 59 plyne:

Věta 59a. *Nechť* $x \geqq 1$, $-\frac{1}{12} \leqq \tau \leqq \frac{1}{12}$, $\arg x = 0$, $x - \nu = \tau x^{1/3}$. *Potom*

$$H_\nu^{(1)}(x) = x^{-1/3}\left(\frac{\sqrt{3} - 3i}{6^{2/3}\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \Theta c|\tau| + \Theta c x^{-4/3}\right).$$



Obr. 31.

§ 12

Asymptotika funkcí $H_\nu^{(j)}(x)$ *pro* $\xi = \frac{\nu}{x} > 1$

Ježto $\xi > 1$, existuje právě jedno kladné α tak, že $\operatorname{ch} \alpha = \xi$, tedy

(155) $$f(z) = \operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha\,, \quad f'(z) = \operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha\,.$$

Všechny kořeny rovnice $f'(z) = 0$ jsou $\pm\alpha + 2k\pi i$, k celé. Vzhledem k tvaru křivky C_1 bude asi vhodné vzít za z_0 jeden z obou reálných kořenů. Je $f''(\pm\alpha) = \pm \operatorname{sh} \alpha \neq 0$, tedy $p = 2$ v označení § 8. Podle znaménka f' je vidět, že f roste v $(-\infty, -\alpha)$, klesá v $(-\alpha, \alpha)$, roste v $(\alpha, +\infty)$. Tedy (ježto pro reálné z je $\operatorname{Im} f(z) = 0$) leží krátké úsečky reálné osy s počátkem $-\alpha$, v záporných oblastech, kdežto krátké úsečky reálné osy s počátkem α leží v kladných oblastech. Zvolím tedy $z_0 = -\alpha$ a bude

$$\pi i\, H_\nu^{(1)}(x) = \int_K \exp\left(x f(z)\right) \mathrm{d}z = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5\,,$$

kde K je křivka z obr. 31, I_m $(m = 1, \ldots, 5)$ jsou integrály přes tyto části křivky K (volím $0 < \varepsilon < \alpha$):

$$I_1\colon\ -\infty < z \leqq -\alpha - \varepsilon\,, \qquad I_2\colon\ -\alpha - \varepsilon \leqq z \leqq -\alpha + \varepsilon\,,$$

$$I_3\colon\ -\alpha + \varepsilon \leqq z \leqq \alpha\,, \qquad I_4\colon\ z = \alpha + iu,\ 0 \leqq u \leqq \pi\,,$$

$$I_5\colon\ z = u + i\pi\,, \quad \alpha \leqq u < +\infty\,.$$

Změna té svislé úsečky proti C_1 (tam vycházela z bodu 0) je vhodná z tohoto důvodu: na úsečce od 0 od α klesá $\operatorname{Re} f(z) = f(z)$; úsečka od α do $\alpha + \pi i$ leží v záporné oblasti (bod α je sedlový bod s $p = 2$), tedy na této úsečce $\operatorname{Re} f(z)$ ještě dále (aspoň zpočátku) klesá – to nám asi ulehčí odhady. Ježto $f(-\alpha) > f(0) = 0$, máme

$$-f(\alpha) = f(-\alpha) = \alpha \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha > 0\,. \tag{156}$$

Rozviňme v Taylorovu řadu:

$$f(u - \alpha) = f(-\alpha) - \frac{1}{2} u^2 \operatorname{sh} \alpha + R_1 + R_2\,, \tag{157}$$

$$R_1 = \frac{1}{6} \operatorname{ch} \alpha \,.\, u^3 \left(1 + \frac{u^2}{4\,.\,5} + \frac{u^4}{4\,.\,5\,.\,6\,.\,7} + \ldots\right), \tag{158}$$

$$R_2 = -\frac{1}{24} \operatorname{sh} \alpha \,.\, u^4 \left(1 + \frac{u^2}{5\,.\,6} + \frac{u^4}{5\,.\,6\,.\,7\,.\,8} + \ldots\right). \tag{159}$$

Pro reálná u je $R_2 \leqq 0$, $\operatorname{sgn} R_1 = \operatorname{sgn} u$, a pro $-1 \leqq u \leqq 1$ je $|R_2| \leqq \frac{1}{4}|R_1|$ (neboť $\operatorname{sh} \alpha < \operatorname{ch} \alpha$ pro $\alpha > 0$). Dále je

$$|R_1| + |R_2| \leqq \frac{5}{4}|R_1| \leqq \frac{1}{4} \operatorname{ch} \alpha \,.\, |u|^3 \tag{160}$$

pro $-1 \leqq u \leqq 1$.

Zvolme

$$\varepsilon = \frac{1}{x^{1/3} \operatorname{ch}^{1/3} \alpha}\,. \tag{161}$$

Aby bylo $\varepsilon < \alpha$, předpokládejme

$$x \operatorname{ch} \alpha > \frac{1}{\alpha^3}, \quad x \geqq 1 . \tag{162}$$

Je $\varepsilon < 1$, takže podle (160) je $x(|R_1| + |R_2|) \leqq \frac{1}{4}$ pro $-\varepsilon \leqq u \leqq \varepsilon$, tedy (je $|e^w - 1| \leqq$ $\leqq 3|w|$ pro $|w| \leqq 1$)

$$e^{x(R_1+R_2)} = 1 + 3\Theta x(|R_1| + |R_2|) .$$

Odtud a z (157) plyne

$$I_2 = e^{xf(-\alpha)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} x \operatorname{sh} \alpha \,.\, u^2\right) du +$$

$$+ \Theta e^{xf(-\alpha)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} x \operatorname{sh} \alpha \,.\, u^2\right) . \, x \operatorname{ch} \alpha \,.\, |u|^3 \, du$$

a lemma 5 dává

$$I_2 = e^{xf(-\alpha)} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{x \operatorname{sh} \alpha}} + \Theta c \frac{\operatorname{ch} \alpha}{x \operatorname{sh}^2 \alpha} + \Theta c \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}} \cdot \frac{e^{-N}}{\sqrt{N}} \right), \tag{163}$$

$$N = \frac{1}{2} x \varepsilon^2 \operatorname{sh} \alpha = \frac{x^{1/3} \operatorname{sh} \alpha}{2 \operatorname{ch}^{2/3} \alpha} . \tag{164}$$

Odhadněme $I_1 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \exp(x f(u - \alpha)) \, du$. Pro $u < 0$ je $R_1 < 0$, $R_2 < 0$ podle (158), (159), a tedy podle (157) a podle lemmatu 5

$$0 < I_1 < e^{xf(-\alpha)} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2} x \operatorname{sh} \alpha \,.\, u^2\right) du = \Theta c \frac{e^{xf(-\alpha)}}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}} \frac{e^{-N}}{\sqrt{N}} . \tag{165}$$

V I_5 je $z = u + \pi i$, $f(z) = -\operatorname{sh} u - u \operatorname{ch} \alpha - \pi i \operatorname{ch} \alpha$, tedy

$$I_5 = \Theta \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-x \operatorname{sh} \alpha - x u \operatorname{ch} \alpha} \, du = \Theta \frac{1}{x \operatorname{ch} \alpha} \exp(-x(\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha)) . \tag{166}$$

Ale $\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} < \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{sh}^2 \alpha}$, takže (velmi hrubý odhad)

$$I_5 = \Theta \frac{\operatorname{ch} \alpha}{x \operatorname{sh}^2 \alpha} = \Theta \frac{\operatorname{ch} \alpha}{x \operatorname{sh}^2 \alpha} e^{xf(-\alpha)} . \tag{167}$$

Odhadněme $I_4 = i \int_0^{\pi} \exp(x f(\alpha + iv)) \, dv$.

Je $\operatorname{Re} f(\alpha + iv) = \operatorname{sh} \alpha \cos v - \alpha \operatorname{ch} \alpha$. V důkazu věty 59a jsme zjistili, že $\pi^2 < 10$. Pro $0 \leqq v \leqq \pi$ je $\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \frac{v^6}{6!} + \ldots$ řada se střídavými znaménky a absolutní hodnoty členů od druhého počínajíc klesají, ježto $\frac{10}{3 \cdot 4} < 1$. Tedy $\cos v \leqq$ $\leqq 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!}$ a přitom $\frac{v^2}{3 \cdot 4} < \frac{5}{6}$, takže

$$\cos v < 1 - \frac{v^2}{12}, \quad \operatorname{Re} f(\alpha + iv) < \operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha - \frac{1}{12} \operatorname{sh} \alpha v^2,$$

$$(168) \qquad I_4 = \Theta e^{xf(\alpha)} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{12} \operatorname{sh} \alpha \cdot v^2\right) dv = \Theta c e^{-xf(-\alpha)} \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}}$$

podle lemmatu 5. Zbývá odhadnout

$$I_3 = \int_{-\alpha+\varepsilon}^{\alpha} \exp\left(x f(u)\right) du .$$

Je $f(0) = 0$, $f'(u) < 0$ pro $-\alpha < u < \alpha$. Tedy $f(u) < 0$ pro $0 < u < \alpha$, a tedy zřejmě

$$(169) \qquad I_{3,1} = \int_0^{\alpha} \exp\left(x f(u)\right) du = \Theta \alpha .$$

Jde ještě o

$$(170) \qquad I_{3,2} = \int_{-\alpha+\varepsilon}^{0} \exp\left(x f(u)\right) du = \int_{\varepsilon}^{\alpha} \exp\left(x f(u - \alpha)\right) du .$$

Podle (157), (160) máme pro $-1 \leqq u \leqq 1$

$$f(u - \alpha) = f(-\alpha) - \frac{u^2}{2} \operatorname{sh} \alpha + \frac{\Theta}{4} \operatorname{ch} \alpha \cdot |u|^3 .$$

Jestliže tedy $0 < u \leqq \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha}$, je $f(u - \alpha) < f(-\alpha) - \frac{u^2}{4} \operatorname{sh} \alpha$. Předpokládejme

$$(171) \qquad x \operatorname{sh}^3 \alpha \geqq \operatorname{ch}^2 \alpha ;$$

potom $\varepsilon = (x \operatorname{ch} \alpha)^{-1/3} \leqq \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha}$ a můžeme psát

$$(172) \qquad I_{3,2} = A + B ,$$

$$A = \int_{\varepsilon}^{\mathrm{sh}\,\alpha/\mathrm{ch}\,\alpha} \exp\left(x f(u - \alpha)\right) du \leqq e^{xf(-\alpha)} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{4} x u^2 \,\mathrm{sh}\,\alpha\right) du\,,$$

$$B = \int_{\mathrm{sh}\,\alpha/\mathrm{ch}\,\alpha}^{\alpha} \exp\left(x f(u - \alpha)\right) du \tag{173}$$

(podle (156) víme, že $\mathrm{sh}\,\alpha/\mathrm{ch}\,\alpha < \alpha$).

Lemma 5 dává

$$A = \Theta c \frac{1}{\sqrt{x \,\mathrm{sh}\,\alpha}} e^{xf(-\alpha)} \cdot \frac{e^{(-1/2)N}}{\sqrt{N}}\,. \tag{174}$$

Při výpočtu B potřebujeme studovat průběh $f(u - \alpha)$ pomocí $f'(u - \alpha)$. Pro $u < \alpha$ je $f''(u - \alpha) = \mathrm{sh}\,(u - \alpha) < 0$, tedy $f'(u - \alpha)$ klesá. Pro $u = \dfrac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha}$ (tedy $0 < u < 1$) je

$$f'(u - \alpha) = \mathrm{ch}\,(u - \alpha) - \mathrm{ch}\,\alpha = \mathrm{ch}\,\alpha(\mathrm{ch}\,u - 1) - \mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,u =$$

$$= -\,\mathrm{sh}\,\alpha\left(\frac{u}{1!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots\right) + \mathrm{ch}\,\alpha\left(\frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \ldots\right) <$$

$$< -u\,\mathrm{sh}\,\alpha + \frac{6}{11} u^2 \,\mathrm{ch}\,\alpha = -\frac{5}{11}\frac{\mathrm{sh}^2\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha} < -\frac{1}{3}\frac{\mathrm{sh}^2\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha}\,.$$

Tedy je též $f'(u - \alpha) < -\dfrac{1}{3}\dfrac{\mathrm{sh}^2\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha}$ pro $\dfrac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha} \leqq u \leqq \alpha$. Odtud pro tato u plyne

$$f(u - \alpha) < f\left(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha} - \alpha\right) - \frac{1}{3}\frac{\mathrm{sh}^2\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha}\left(u - \frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha}\right)$$

a dále je

$$f\left(\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha} - \alpha\right) < f(-\alpha)\,.$$

Tedy

$$B = \Theta e^{xf(-\alpha)} \int_{\mathrm{sh}\,\alpha/\mathrm{ch}\,\alpha}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{3} x \frac{\mathrm{sh}^2\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha}\left(u - \frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha}\right)\right) du = \tag{175}$$

$$= \Theta e^{xf(-\alpha)} \cdot \frac{3\,\mathrm{ch}\,\alpha}{x\,\mathrm{sh}^2\,\alpha}\,.$$

Předpoklady jsou (162), (171). Víme však, že $\dfrac{1}{\alpha^3} < \left(\dfrac{\mathrm{ch}\,\alpha}{\mathrm{sh}\,\alpha}\right)^3$, takže stačí předpoklady $x \geqq 1$ a (171). Z (163), (164), (165), (167), (168), (169), (173), (174) plyne tedy:

Věta 60. *Nechť* $\arg x = 0$, $\alpha > 0$, $\nu = x \operatorname{ch} \alpha$,

$$x \operatorname{ch} \alpha \geqq \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{sh} \alpha}\right)^3, \quad x \geqq 1\,. \tag{176}$$

Potom je

$$H_\nu^{(1)}(x) = e^{xf(-\alpha)}\left(-i\sqrt{\frac{2}{\pi x \operatorname{sh} \alpha}}\right) + \Theta c \frac{\operatorname{ch} \alpha}{x \operatorname{sh}^2 \alpha} + \tag{177}$$

$$+ \Theta c \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}}\left(\frac{e^{-(1/2)N}}{\sqrt{N}} + e^{-2xf(-\alpha)}\right) + \Theta c \alpha e^{-xf(-\alpha)}\Bigg),$$

$$f(-\alpha) = \alpha \operatorname{ch} \alpha - sh\, \alpha > 0\,, N = \frac{1}{2}\frac{x^{1/3} \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch}^{2/3} \alpha}\,.$$

Odtud přímo plyne: Nechť $0 < \delta < 1$. Potom existují $c_1(\delta)$, $c_2(\delta)$ tak, že pro $\arg x = 0$, $x > c_1(\delta)$, $\nu = x \operatorname{ch} \alpha\, \alpha$, $\delta < \alpha < \frac{1}{\delta}$ je

$$H_\nu^{(1)}(x) = e^{xf(-\alpha)}\left(-i\sqrt{\frac{2}{\pi x \operatorname{sh} \alpha}} + \Theta c_2(\delta)\frac{1}{x}\right).$$

Obdobně jako v § 10 ukážeme, že první sčítanec zůstane „hlavním členem“ i tehdy, když α konverguje k nule a současně x roste tak, že $\tau = x \operatorname{sh}^3 \alpha \to +\infty$.

Omezme se tedy na $0 < \alpha < 1$, načež velmi hrubé odhady dávají $1 < \operatorname{ch} \alpha < 2$, $\alpha < \operatorname{sh} \alpha < 2\alpha$, a podmínka (176) bude splněna, když $x \geqq 1$, $\tau \geqq 4$. Odhadněme jednotlivé zbytkové členy v (177). Předně je $x \operatorname{sh}^2 \alpha = \sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}\,.\,\tau^{1/2}$. Za druhé $N > c\tau$, tedy $e^{(-1/2)N}\,.\,N^{-1/2} < c\tau^{-1/2}$. Za třetí je

$$f(-\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{2k+1}\left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!}\right) > \frac{\alpha^3}{3}\,.$$

Tedy je

$$e^{-2xf(-\alpha)} < e^{-xf(-\alpha)} < \exp\left(-\frac{1}{3}x\alpha^3\right) < \exp(-c\tau)\,.$$

Ježto $y^{1/2}e^{-cy}$ je pro $y > 0$ omezená, je $\exp(-2xf(-\alpha)) < c\tau^{-1/2}$. Konečně $\alpha \exp(-xf(-\alpha)) < \operatorname{sh} \alpha\,.\,\exp(-c\tau) = \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}}\,\tau^{1/2} \exp(-c\tau) < \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}}\,.\,\tau^{-1/2}$ (ježto ye^{-cy} je omezená). Z věty 60 tedy plyne:

Věta 60a. *Nechť* $0 < \alpha < 1$, $x \geqq 1$, $\arg x = 0$, $\nu = x \operatorname{ch} \alpha$, $\tau = x \operatorname{sh}^3 \alpha \geqq 4$. *Potom je*

$$H_\nu^{(1)}(x) = e^{xf(-\alpha)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}} \left(-i \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \Theta c \tau^{-1/2} \right).$$

Tato věta je užitečná, když $x \to +\infty$, $\alpha \to 0$ tak, že $\tau \to +\infty$. Představme si, že $\nu(x)$ je funkcí x a že $\alpha(x) \to 0$ pro $x \to +\infty$. Co znamená podmínka $\tau = \tau(x) \to \to +\infty$? Pro $\alpha \to 0+$ je $\operatorname{sh} \alpha \sim \alpha$, $\operatorname{ch} \alpha - 1 \sim \frac{1}{2} \alpha^2 \sim \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 \alpha$, tedy $\nu - x = (\operatorname{ch} \alpha - - 1) \sim \frac{1}{2} x \operatorname{sh}^2 \alpha = \frac{1}{2} x^{1/3} \tau^{2/3}$. Podmínka $\tau(x) \to +\infty$ znamená tedy totéž jako

$$\frac{\nu(x) - x}{x^{1/3}} \to +\infty.$$

Podívejme se na věty 58a, 59a, 60a. Jestliže $\frac{\nu}{x}$ je blízko jedné, dávají nám věty 58a, 60a užitečný výsledek pro velká $|\nu - x| \cdot x^{-1/3}$, a věta 59a dává užitečný výsledek pro malá $|\nu - x| \cdot x^{-1/3}$. Tyto věty selhávají, když $|\nu - x|$ je právě řádu $x^{1/3}$.

Vraťme se k větě 60. Z (177) dostaneme okamžitě

$$N_\nu(x) = -e^{xf(-\alpha)} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi x \operatorname{sh} \alpha}} + \mathfrak{Z}_1 \right),$$

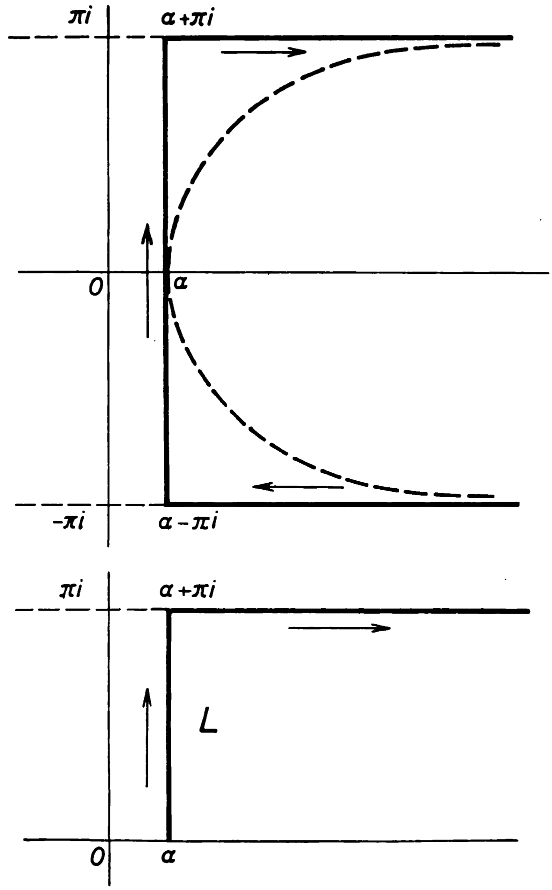
$$H_\nu^{(2)}(x) = i e^{xf(-\alpha)} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi x \operatorname{sh} \alpha}} + \mathfrak{Z}_2 \right),$$

ale jen $J_\nu(x) = e^{xf(-\alpha)} \mathfrak{Z}_3$, kde pro zbytky $\mathfrak{Z}_j$ máme tytéž odhady jako v (177). Pro J_ν tedy nedostáváme hlavní člen. To spočívá v tom, že při výpočtu $H_\nu^{(1)}$ je rozhodující člen $\frac{1}{\pi i} I_2$ ryze imaginární. Musíme tedy volit jinou cestu k výpočtu $J_\nu(x)$. Vraťme se k dráze C_3 z věty 57 a modifikujme ji dle obr. 32; je

$$\pi i \, J_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_K e^{xf(z)} \, \mathrm{d}z .$$

Z úvahy na počátku tohoto paragrafu je patrné, že $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) \neq 0$ a že úsečky od $\alpha - \pi i$ do α a od α do $\alpha + \pi i$ leží – aspoň v blízkosti bodu α – v záporných oblastech. Tedy se dráha K zdá být vhodná. Je-li $\bar{z}$ komplexně sdružené se z, je $f(\bar{z})$ komplexně sdružené s $f(z)$ a odtud ihned plyne (viz obr. 32)

$$\pi i \, J_\nu(x) = i \operatorname{Im} \int_L e^{xf(z)} \, \mathrm{d}z .$$



Obr. 32.

Pro x, α volím opět předpoklady věty 60 a integrál přes L rozložím na tři:

$$I_1 = i\int_0^{\varepsilon} \exp\left(f(\alpha + iv)\right) \mathrm{d}v\,, \quad I_2 = i\int_{\varepsilon}^{\pi} \exp\left(f(\alpha + iv)\right) \mathrm{d}v\,,$$

$$I_3 = \int_{\pi}^{+\infty} \exp\left(xf(u + i\pi)\right) \mathrm{d}u\,.$$

Volíme opět

$$\varepsilon = (x \operatorname{ch} \alpha)^{-1/3} < 1\,.$$

I_3 jsme už počítali při $H_\nu^{(1)}(x)$ (tehdy se nazýval I_5). Podle (166) je

$$I_3 = \Theta \frac{1}{x \operatorname{ch} \alpha} \exp\left(-x(\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha)\right) = \tag{178}$$

$$= \Theta \frac{\operatorname{ch} \alpha}{x \operatorname{sh}^2 \alpha} \exp\left(x(\operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha)\right) = \Theta \frac{\operatorname{ch} \alpha}{x \operatorname{sh}^2 (\alpha)} e^{xf(\alpha)} .$$

Na integrační dráze v I_1, I_2 je $0 \leqq v \leqq \pi$ a vypočítali jsme již, že $\pi^2 < 10$. Je

$$f(\alpha + iv) = f(\alpha) - \frac{1}{2} v^2 \operatorname{sh} \alpha + R_1 + R_2 ,$$

$$R_1 = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{24} v^4 \left(1 - \frac{v^2}{5 \,.\, 6} + \frac{v^4}{5 \,.\, 6 \,.\, 7 \,.\, 8} - \ldots\right),$$

$$R_2 = -\frac{i}{6} \operatorname{ch} \alpha \,.\, v^3 \left(1 - \frac{v^2}{4 \,.\, 5} + \frac{v^4}{4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7} - \ldots\right).$$

Absolutní hodnoty členů klesají, tedy

$$|R_1| \leqq \frac{1}{24} \operatorname{sh} \alpha \,.\, v^4 , \quad |R_2| \leqq \frac{1}{6} \operatorname{ch} \alpha \,.\, v^3$$

pro $0 \leqq v \leqq \pi$. Pro $0 \leqq v \leqq \varepsilon$ je (ježto $\varepsilon < \pi$)

$$x(|R_1| + |R_2|) \leqq \frac{5}{24} x \operatorname{ch} \alpha \,.\, v^3 < 1 ,$$

a tedy (ježto $|e^w - 1| < 3|w|$ pro $|w| \leqq 1$)

$$I_1 = i e^{xf(\alpha)} \int_0^\varepsilon \exp\left(\frac{1}{2} x \operatorname{sh} \alpha \,.\, v^2\right) . \left(1 + \Theta x \operatorname{ch} \alpha \,.\, v^3\right) \mathrm{d}v .$$

Podle lemmatu vychází (totéž N jako ve větě 60)

$$I_1 = i e^{xf(\alpha)} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2x \operatorname{sh} \alpha}} + \Theta c \frac{\operatorname{ch} \alpha}{x \operatorname{sh}^2 \alpha} + \Theta c \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}} \,.\, \frac{e^{(-1/2)N}}{\sqrt{N}}\right).$$

V intervalu $\varepsilon \leqq v \leqq \pi$ máme $\operatorname{Re} f(\alpha + iv) = f(\alpha) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha \,.\, v^2 + R_1$, kde $R_1 \leqq \frac{1}{24} \operatorname{sh} \alpha \,.\, v^4 < \frac{10}{24} \operatorname{sh} \alpha \,.\, v^2$, takže $\operatorname{Re} f(\alpha + iv) \leqq f(\alpha) - \frac{1}{12} \operatorname{sh} \alpha \,.\, v^2$ a podle lemmatu 5 je

$$I_2 = \Theta e^{xf(\alpha)} \int_\varepsilon^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{12} x \operatorname{sh} \alpha \,.\, v^2\right) \mathrm{d}v = \Theta c e^{xf(\alpha)} \,.\, \frac{e^{-(1/6)N}}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha} \,.\, \sqrt{N}} .$$

Věta 61. *Nechť* $x \geqq 1$, $\arg x = 0$, $\alpha > 0$, $\nu = x \operatorname{ch} \alpha$,

$$x \operatorname{ch} \alpha \geqq \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{sh} \alpha}\right)^3.$$

Potom

$$J_\nu(x) = e^{xf(\alpha)} \left(\sqrt{\frac{1}{2\pi x \operatorname{sh} \alpha}} + \Theta c \frac{\operatorname{ch} \alpha}{x \operatorname{sh}^2 \alpha} + \Theta c \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}} \cdot \frac{e^{(-1/6)N}}{\sqrt{N}} \right),$$

$$N = \frac{x^{1/3} \operatorname{sh} \alpha}{2 \operatorname{ch}^{2/3} \alpha}, \quad f(\alpha) = \operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha = -f(-\alpha) < 0 .$$

Téměř doslova tak, jako z věty 60 plynula věta 60a, plyne z věty 61:

Věta 61a. *Nechť* $0 < \alpha < 1$, $x \geqq 1$, $\arg x = 0$, $\nu = x \operatorname{ch} \alpha$, $\tau = x \operatorname{sh}^3 \alpha \geqq 4$. *Potom*

$$J_\nu(x) = e^{xf(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{x \operatorname{sh} \alpha}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \Theta c \tau^{-1/2} \right).$$

Srovnejme na závěr větu 60 s větou 61. Je-li $\alpha > 0$ pevné, potom pro $x \to +\infty$ roste $|H_\nu^{(1)}(x)|$ exponenciálně do $+\infty$, kdežto $J_\nu(x)$ exponenciálně konverguje k nule. Je tedy pochopitelné, že z asymptotického rozvoje pro $H_\nu^{(1)}$ se nám nepodařilo odvodit asymptotický rozvoj pro J_ν.