Dodatek: Modifikace methody největšího spádu

In: Vojtěch Jarník (author); Břetislav Novák (other): Diferenciální rovnice v komplexním oboru. (Czech). Praha: Academia, 1975. pp. 266–278.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402040

Dodatek

MODIFIKACE METODY NEJVĚTŠÍHO SPÁDU

V § 8 kapitoly VI jsme vyložili metodu největšího spádu pro asymptotické vyjádření křivkových integrálů jistého tvaru, kterou jsme potom v § 9 – 12 aplikovali na Hankelovy funkce. Všimněme si, že jsme z „nejvhodnějších" integračních křivek $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$ využili jen jejich polotečny v bodě z_0. Pokusíme se v tomto paragrafu vyložit jistou modifikaci metody § 8, která je mnohdy výhodnější.

Vyšetřeme nejprve vztahy $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$, $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(z_0)$.

Lemma 1. *Buď f holomorfní v okolí bodu z_0 a nechť $f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots$ $\ldots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Potom existují kladná čísla r, R a mocninná řada*

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

tak, že vztah

$$f(z) - f(z_0) = -\tau \tag{1}$$

pro $0 < |z - z_0| < R$, $0 < \tau < r$ *platí pouze pro*

$$z = z_0 + \varphi(\varepsilon_m \sqrt[p]{\tau}), \tag{2}$$

kde $\varepsilon_m = e^{\pi i(2m+1)/p}$, $\sqrt[p]{\tau} > 0$ *a* m *je některé z čísel* $1, 2, \ldots, p$.

Důkaz. Buď

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_0 \neq 0$$

v jistém okolí bodu z_0. Má-li tedy platit (1), musí pro $w = z - z_0$, $a^p = a_0$ být

$$(wa)^p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} w^k\right) = -\tau .$$

Odtud plyne, že pro všechna dostatečně malá w bude

$$wa\left(1 + \binom{1/p}{1} V + \binom{1/p}{2} V^2 + \ldots\right) = e^{\pi i(2m+1)/p} \sqrt[p]{\tau}\,,$$

kde $V = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} w^k$ a m je vhodné celé číslo, $m = 1, 2, \ldots, p$. Pomocí věty 7 (kap. I, str. 20) snadno nahlédneme, že levou stranu můžeme vyjádřit pro dostatečně malá w ve tvaru mocninné řady bez prostého členu, tj. máme vztah

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k = \varepsilon_m \sqrt[p]{\tau}\,, \quad b_1 = a \neq 0\,. \tag{3}$$

Levá strana je tedy funkce holomorfní v jistém okolí počátku, která má v počátku nenulovou derivaci, a tedy je v jistém okolí počátku prostá. Tedy (viz Černý, věta 203) existuje funkce inverzní, která je opět holomorfní v jistém okolí počátku a odtud dostaneme tvrzení lemmatu. (K řešení vztahu (3) můžeme také použít cvičení na str. 42).

Volíme-li tedy v (2) postupně $m = 1, 2, \ldots, p$, dostaneme parametrické vyjádření p oblouků křivek $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$, které vycházejí z bodu z_0 a leží v záporných oblastech (viz § 8 kapitoly VI), a to v jistém okolí bodu z_0.

Poznámka 1. Místo (1) je někdy výhodnější psát

$$f(z) - f(z_0) = -\tau^p\,, \quad \tau > 0\,.$$

(2) potom vyjde ve tvaru

$$z = z_0 + \varphi(\varepsilon_m \tau)\,,$$

kde φ je mocninná řada.

Podobně jako v § 8 kap. VI načrtneme náš postup nejprve v obecných rysech. Uvažujme integrál

$$\int_C e^{xf(z)}\, g(z)\, \mathrm{d}z\,, \tag{4}$$

kde f a g jsou holomorfní v některé jednoduše souvislé oblasti $M \subset E$, která obsahuje křivku C. Stejně jako v § 8 kap. VI vyšetříme body $z_0 \in M$, v nichž $f'(z_0) = 0$. Navíc vyšetříme křivky $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$ a podle Cauchyovy věty modifikujeme integrál (4) tak, abychom integrovali přes křivky tohoto tvaru, na nichž navíc je $\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(z_0)$. Nyní potřebujeme tyto křivky vhodně parametricky vyjádřit, abychom nalezli hledané asymptotické vyjádření. Lokální vyjádření nám dává pro okolí bodu z_0 lemma 1. Odtud plyne, že bude užitečné následující **Watsonovo** lemma.

Lemma 2. *Buďte r, λ reálná čísla, $r > 0$, $\lambda > -1$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Buď φ funkce spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a taková, že*

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

pro $0 \leqq z \leqq R$, $R > 0$ a nechť

$$|\varphi(z)| \leqq K e^{bz^r}$$

v intervalu $\langle 0, +\infty)$, kde $K > 0$, $b \geqq 0$ jsou dané konstanty. Potom pro každé celé nezáporné q existují kladné konstanty C_1, C_2 závislé jen na $K, q, a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_q, \lambda, b, r, R$ tak, že pro $|\arg x| < \frac{\pi}{2} - \delta$, $|x| \sin \delta > C_1$ je

$$\int_0^{\infty} e^{-xt^r} t^{\lambda} \varphi(t) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{q} a_k \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda + k + 1}{r}\right)}{x^{(\lambda+k+1)/r}} + \Delta \,, \tag{5}$$

kde

$$|\Delta| \leqq \frac{C_2}{(|x| \sin \delta)^{(\lambda+q+2)/r}} \,. \tag{6}$$

Důkaz. Z předpokladů plyne, že existuje konstanta $C > 0$, která závisí jen na $K, q, a_0, a_1, \ldots, a_q, r$ a R tak, že pro $t \in \langle 0, +\infty)$ je

$$\left|\varphi(t) - \sum_{k=0}^{q} a_k t^k\right| \leqq C t^{q+1} e^{bt^r} \,. \tag{7}$$

Protože zřejmě

$$\int_0^{\infty} e^{xt^r} t^{\lambda+k} \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda + k + 1}{r}\right)}{r x^{(\lambda+k+1)/r}} \,, \tag{8}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ (pro $x > 0$ viz vztah (114), lemma 5, § 10, kap. VI; rozšíření platnosti na obor $|\arg x| < \frac{\pi}{2}$ dostaneme z věty o jednoznačnosti, neboť obě strany jsou holomorfní funkce v tomto oboru) a $\operatorname{Re} x \geqq |x| \sin \delta$ pro $|\arg x| < < \frac{\pi}{2} - \delta$, stačí odhadnout pro $|x| \sin \delta > b$

$$\int_0^\infty e^{-|x|\sin\delta t^r} t^{\lambda+q+1} \cdot e^{bt^r} \, dt = \frac{1}{r} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+q+2}{r}\right)}{\left(|x| \sin \delta - b\right)^{(\lambda+q+2)/r}} ,$$

z čehož již přímo dostaneme odhad (6).

Uvedený postup jsme naznačili jen v hrubých rysech. Podobně jako v § 8 kap. VI by bylo prakticky nemožné formulovat obecný postup podrobně a současně účelně. Jednotlivé kroky vyžadují v jednotlivých případech samostatné vyšetřování. Lépe snad vysvitnou jednotlivé části na příkladech.

Příklad 1. Pro $v = x > 0$ je podle § 11 kap. VI

$$H_v^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} e^{xf(z)} \, dz ,$$

kde $f(z) = \operatorname{sh} z - z$ a C_1 je dráha z obr. 25. S odvoláním na § 9 kap. VI volme $z_0 = 0$ (je $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = 0, f'''(z_0) = 1$) a omezíme se na pás $|\operatorname{Im} z| \leqq \pi$.

Vyšetříme nejprve podrobně vztahy $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0) = 0$, $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0) = = 0$. Buď $z = u + iv$. Oba vztahy lze přepsat ve tvaru

$$\operatorname{ch} u \sin v - v = 0 , \tag{9}$$

$$\operatorname{sh} u \cos v - u = 0 . \tag{10}$$

Vztah (9) je splněn pro $v = 0$ a zůstává zachován záměnou v na $-v$ i u na $-u$. Vztah (10) je splněn pro $u = 0$ a nemění se záměnou u na $-u$ i v na $-v$. Stačí tedy (9) a (10) vyšetřit pro $u \in \langle 0, +\infty)$, $v \in \langle 0, \pi \rangle$.

Z (9) plyne pro $u > 0$, $v \in (0, \pi)$

$$u = \varphi(v) = \lg \left(\frac{v}{\sin v} + \sqrt{\frac{v^2}{\sin^2 v} - 1} \right) \tag{11}$$

(z $u = 0$ plyne $v = 0$, pro $v = 0$ může být $u \geqq 0$ libovolné). Funkce (11) je spojitá v intervalu $(0, \pi)$, $\lim\limits_{v \to 0+} \varphi(v) = 0$, $\lim\limits_{v \to \pi-} \varphi(v) = +\infty$. Snadno zjistíme, že je to funkce rostoucí na intervalu $(0, \pi)$, $\lim\limits_{v \to 0+} \varphi'(v) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\varphi(v)$ má dokonce kladnou a spojitou derivaci na celém intervalu $(0, \pi)$.

Z (10) plyne pro $u > 0$, $v \in (0, \pi)$

$$v = \psi(u) = \arc\cos \frac{u}{\operatorname{sh} u} \tag{12}$$

(z $v = 0$ plyne $u = 0$, pro $u = 0$ může být $v \in \langle 0, \pi)$ libovolné). Funkce $\frac{u}{\operatorname{sh} u}$ je klesající v intervalu $(0, +\infty)$; $\psi(u)$ je tedy na tomto intervalu zřejmě spojitá a rostoucí. Snadno zjistíme, že $\lim_{u\to 0+} \psi(u) = 0$, $\lim_{u\to+\infty} \psi(u) = \frac{\pi}{2}$, a tedy $0 < \psi(u) < \frac{\pi}{2}$ pro $u \in$ $\in (0, +\infty)$; dále má ψ spojitou a kladnou derivaci v $(0, +\infty)$, $\lim_{u\to 0+} \psi'(u) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vyšetříme ještě vzájemnou polohu křivek $u = \varphi(v)$, $v \in (0, \pi)$, $v = \psi(u)$, $u \in$ $\in (0, +\infty)$. Dalším výpočtem bychom mohli zjistit, že funkce $\varphi_{-1}(u)$ a $\psi(u)$ jsou konkávní a rostoucí na intervalu $(0, +\infty)$. Z výše uvedeného plyne, že $\lim_{u\to 0+} \varphi_{-1}(u) =$ $= \lim_{u\to 0+} \psi(u) = 0$, $\lim_{u\to 0+} \psi'(u) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\lim_{u\to 0+} (\varphi_{-1}(u))' = \sqrt{3}$, $\lim_{u\to+\infty} \psi(u) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{u\to+\infty} \varphi_{-1}(u) = \pi$.

Odtud snadno dostaneme, že v $(0, +\infty)$ je $0 < \psi(u) < \varphi_{-1}(u) < \pi$. Proveďme ale elementární úvahu, jejíž princip mnohdy vede v jednotlivých případech k cíli.

Volme pevně $u > 0$ a označme levou stranu v (9), resp. (10) $\varphi_1(v)$, resp. $\varphi_2(v)$. Ihned máme, že funkce $\varphi_2(v)$ je klesající v intervalu $(0, \pi)$, $\varphi_2(0) = \operatorname{sh} u - u > 0$, $\varphi_2(\pi) = -\operatorname{sh} u - u < 0$. Dále je $\varphi_1''(v) = -\operatorname{ch} u \sin v$. Je tedy φ_1 konkávní a φ_1' klesající v $(0, \pi)$, $\varphi_{1+}'(0) = \operatorname{ch} u - 1 > 0$, $\varphi_{1-}'(\pi) = \operatorname{ch} u - 1 < 0$, tj. existuje jediný bod $v_0 = v_0(u) \in (0, \pi)$, pro nějž je $\varphi_1'(v_0) = 0$ $\left(v_0 = \arc\cos \frac{1}{\operatorname{ch} u} < \frac{\pi}{2}\right)$. Je tedy φ_1 rostoucí v $(0, v_0)$, klesající v (v_0, π), a tudíž $\varphi_1(v) = 0$ pro právě jednu hodnotu v intervalu $(0, \pi)$, která dokonce leží v intervalu (v_0, π) (je totiž $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(\pi) = -\pi <$ < 0). Konečně je $\varphi_2(v_0) = \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} - u < 0$. Odtud plyne:

Pro každé $u \in (0, +\infty)$ existují dvě hodnoty $v_1, v_2 \in (0, \pi)$ $(v_1 = v_1(u)$, $v_2 =$ $= v_2(u))$ tak, že $\varphi_1(v_1) = \varphi_2(v_2) = 0$. Dále je

$$\varphi_1(v) > 0 \text{ v } (0, v_1), \quad \varphi_1(v) < 0 \text{ v } (v_1, \pi),$$
$$\varphi_2(v) > 0 \text{ v } (0, v_2), \quad \varphi_2(v) < 0 \text{ v } (v_2, \pi),$$
$$0 < v_2 < v_0 < v_1 .$$

Poznamenejme ještě, že ve výše uvedeném označení je $v_2 = \psi(u)$, $v_1 = \varphi_{-1}(u)$.

Z uvedených úvah již vyplývá, že množina všech z, $|\mathrm{Im}\, z| < \pi$, $z = u + iv$ má tvar a polohu, jak je zakresleno na obr. 30. Nyní je zřejmé, že se budeme snažit modifikovat integrační dráhu C_1 takto: ponecháme část dráhy odpovídající záporné reálné poloose (neboť na ní je $\mathrm{Im}\, f(z) = \mathrm{Im}\, f(z_0) = 0$, $\mathrm{Re}\, f(z) < \mathrm{Re}\, f(z_0)$ a zbývající část C_1 nahradíme integrací podle křivky $u = \varphi(v)$, $v \in (0, \pi)$). Snadno nahlédneme, že tato záměna je možná, ale pro naše účely (tj. pro asymptotické vyjádření funkcí $H_\nu^{(1)}(x)$ pro velké hodnoty $\nu = x > 0$) nevhodná: vyjde

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{xf(z)}\, \mathrm{d}z + \int_0^\pi e^{xf(\varphi(v)+iv)}(\varphi'(v) + i)\, \mathrm{d}v\right)$$

a v exponentech máme velmi nepřehledné výrazy.

Využijeme proto postupně obou našich lemmat. Vyšetřme nejprve množinu těch z, $|\mathrm{Im}\, z| < \pi$, pro něž je

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{sh}\, z - z = -t^3\,, \quad t \in (0, +\infty)\,.$$

Je ihned patrné (a plyne to i z našich dosavadních úvah), že pro z máme nejvýše tři možnosti: záporné reálné z, z v oboru $\mathrm{Re}\, z > 0$, $\mathrm{Im}\, z > 0$ a číslo k němu komplexní sdružené. Vyšetříme tyto možnosti samostatně.

V intervalu $(-\infty, +\infty)$ je levá strana v (13) funkce rostoucí; ke každému $t \in \in (0, +\infty)$ existuje právě jedno $z \in (-\infty, 0)$ tak, že platí (13). Označíme-li toto z zápisem $\psi_1(t)$, je zřejmé, že funkce $\psi_1(t)$ má v intervalu $(0, +\infty)$ spojitou a zápornou prvou derivaci.

Uvažujeme-li $z = u + iv$, $u > 0$, $v \in (0, \pi)$, stačí uvažovat vztahy

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{ch}\, u \sin v - v = 0\,,$$

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{sh}\, u \cos v - u = -t^3\,.$$

Z (14) plyne jako výše (viz (11)) $u = \varphi(v)$ a dosazením do (15) máme vztah

$$\text{(16)} \qquad \tau(v) = \mathrm{sh}\, \varphi(v) \,.\, \cos v - \varphi(v) = -t^3\,.$$

Tato funkce je zřejmě spojitá v $(0, \pi)$, $\lim\limits_{v \to 0+} \tau(v) = 0$, $\lim\limits_{v \to \pi-} \tau(v) = -\infty$. Vyšetřme její prvou derivaci. Pro $u = \varphi(v)$ plyne z (14) a (16)

$$\varphi'(v) = \frac{1 - \mathrm{ch}\, u \cos v}{\sin v\, \mathrm{sh}\, u}$$

a

$$\tau'(v) = \varphi'(v)\,(\mathrm{ch}\, u \,.\, \cos v - 1) - \mathrm{sh}\, u \sin v =$$

$$= -\frac{(1 - \mathrm{ch}\, u \,.\, \cos v)^2}{\sin v\, \mathrm{sh}\, u} - \mathrm{sh}\, u \sin v < 0\,.$$

Má tedy $\tau(v)$ v intervalu $(0, \pi)$ spojitou a zápornou prvou derivaci. Ke každému $t > 0$ existuje tedy právě jedno $v \in (0, \pi)$ tak, že platí (16), tedy právě jedna dvojice u, v $(u > 0,\ v \in (0, \pi))$ tak, že platí (14) a (15) a tedy právě jedno z, $\operatorname{Re} z > 0$, $\pi > \operatorname{Im} z > 0$, pro něž je (13). Označíme-li toto z zápisem $\psi_2(t)$, má funkce $\psi_2(t)$ spojitou a nenulovou prvou derivaci v intervalu $(0, +\infty)$.

Položíme-li ještě $\psi_3(t) = \overline{\psi_2(t)}$, můžeme shrnout: Vztah (13) pro $|\operatorname{Im} z| < \pi$ platí, právě když nastane jeden ze tří vztahů:

$$z = \psi_j(t)\,, \quad j = 1, 2, 3\,. \tag{17}$$

Všechna „řešení" rovnice (13) máme tedy popsána třemi křivkami (17).

Abychom nyní mohli dráhu C_1 nahradit křivkou $\dot{-}\psi_1(t) \dot{+} \psi_2(t)$, stačí k aplikaci Cauchyovy věty ukázat, že

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{\omega_t} e^{xf(z)}\, dz = 0\,, \tag{18}$$

kde ω_t je úsečka spojující body $\psi_2(t)$ a $\operatorname{Re} \psi_2(t) + \pi i$. Z našich úvah vyplývá, že $\lim_{t \to +\infty} \operatorname{Im} \psi_2(t) = \pi$, $\lim_{t \to +\infty} \operatorname{Re} \psi_2(t) = +\infty$ a

$$\operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(0) = 0$$

pro $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} \psi_2(t) \leqq \operatorname{Im} z \leqq \pi$. Pro dostatečně velká t je tedy integrand v (18) v absolutní hodnotě menší než 1 a délka integrační dráhy má pro $t \to +\infty$ limitu nula. Platí tedy (18) a máme

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i} \left(\int_{\dot{-}\psi_1} e^{xf(z)}\, dz + \int_{\psi_2} e^{xf(z)}\, dz \right) = \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty e^{-xt^3} \left(\frac{d\psi_2(t)}{dt} - \frac{d\psi_1(t)}{dt} \right) dt\,. \tag{19}$$

Nyní aplikujeme lemma 1. Existuje mocninná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

tak, že vztah (13) platí pro dostatečně malá t, $|z|$ právě když

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega t)^n\,,$$

kde $\omega = -1$, $e^{\pm(1/3)\pi i}$. Provedeme-li celý výpočet hodnot $a_1, a_2, \ldots$ jak bylo naznačeno v lemmatu, dostaneme (viz také poznámku 1)

$$a_1 = 6^{1/3}\,, \quad a_3 = -\frac{1}{10}\,, \quad a_5 = \frac{6^{5/3}}{1400}\,, \ldots, a_2 = a_4 = \ldots = 0\,.$$

Odtud plyne, že pro dostatečně malé hodnoty t máme

$$
(20) \qquad
\begin{aligned}
\psi_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-t)^n , \\
\psi_2(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^{(1/3)\pi i}t)^n , \\
\psi_3(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e^{-(1/3)\pi i}t)^n .
\end{aligned}
$$

K použití lemmatu 2 potřebujeme ještě znát odhad tvaru

$$
(21) \qquad \left| \frac{d\psi_2(t)}{dt} - \frac{d\psi_1(t)}{dt} \right| \leqq C e^{bt^3}
$$

s vhodnými konstantami C, b. Je zřejmé, že tento odhad platí v každém omezeném intervalu $(0, t_0)$ s hodnotou $b = 0$ (stačí volit C dostatečně velké, neboť levá strana v (21) je spojitou funkcí na $(0, +\infty)$, která má vzhledem k (20) konečnou limitu v bodě 0 zprava). Stačí tedy např. ukázat, že limita levé strany v (21) pro $t \to +\infty$ je nula. Uvažme, že

$$
(22) \qquad \operatorname{sh} \psi_j(t) - \psi_j(t) = -t^3 , \quad j = 1, 2, 3 ,
$$

a tedy

$$
(23) \qquad \psi_j'(t) = \frac{3t^2}{\operatorname{ch} \psi_j(t) - 1} , \quad j = 1, 2, 3 .
$$

Připomeneme si nyní, že $\lim_{t \to +\infty} \psi_1(t) = -\infty$, $\lim_{t \to +\infty} \operatorname{Re} \psi_2(t) = +\infty$, $\lim_{t \to +\infty} \operatorname{Im} \psi_2(t) = \pi$; máme tedy ihned z (22)

$$
\lim_{t \to +\infty} \frac{\operatorname{sh} \psi_j(t) - \psi_j(t)}{\operatorname{ch} \psi_j(t) - 1} = (-1)^j , \quad j = 1, 2
$$

a to spolu s (22) a (23) dává hledaný výsledek (levá strana v (21) je dokonce $O\left(\frac{1}{t}\right)$ pro $t \to +\infty$).

Použijeme-li ve vztahu (19) lemma 2, dostaneme následující vztah ($a_n = 0$ pro sudá n!)

$$
H_x^{(1)}(x) = \frac{1}{3\pi i} \sum_{n=0}^{q} \frac{(2n+1)\, a_{2n+1}\, \Gamma\left(\frac{2n+1}{3}\right)}{x^{(1/3)(2n+1)}} \left(1 + e^{(1/3)\pi i(2n+1)}\right) + O\left(x^{-(2/3)q-1}\right)
$$

pro každé nezáporné celé q, kde konstanty ve zbytkovém členu závisí jen na q. Tento vztah lze ještě zjednodušit, uvážíme-li, že výraz $1 + e^{(1/3)\pi i(2n+1)}$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ nabývá periodicky hodnot

$$1 + e^{(1/3)\pi i} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3}\, i), \quad 1 + e^{\pi i} = 0, \quad 1 + e^{(5/3)\pi i} = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}\, i).$$

Pro $q = 0$ např. dostaneme

$$H_x^{(1)}(x) = x^{-1/3} \frac{\sqrt{3} - 3i}{6^{2/3}\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + O(x^{-1}),$$

což je v souhlase s výsledky § 11, kap. VI.

Poznámka 1. K výpočtu hodnot a_n z (20) můžeme také použít následujícího postupu, neboť jejich existenci nám zaručuje lemma 1.

Víme, že existují $c_1, c_2, \ldots$ tak, že pro $z = z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$ platí vztah

$$\operatorname{sh} z - z = -t^3$$

v jistém okolí počátku. Tento vztah tedy můžeme v tomto okolí bez omezení derivovat. Zřejmě je $z(t)$ funkce lichá, a tedy $c_n = 0$ pro n sudá. Dále je postupně

$$\operatorname{ch} z \,.\, z' - z' = -3t^2,$$

tj.

$$z'(\operatorname{ch} z - 1) = -3t^2,$$

$$z''(\operatorname{ch} z - 1) + z'^2 \operatorname{sh} z = -6t,$$

$$z'''(\operatorname{ch} z - 1) + z'' \operatorname{sh} z + 2z'z'' \operatorname{sh} z + z'^3 \operatorname{ch} z = -6$$

atd. Pro $t = 0$ (a tedy $z(0) = 0$) přejdou prvé dva vztahy v identitu, třetí dává $z'^3(0) = -6$, tj. $c_1 = z'(0) = -6^{1/3}$. Celý výpočet můžeme ještě zkrátit, využijeme-li vhodně toho, že některé členy jsou pro $t = 0$ nulové. Obecnou formuli pro c_n tímto postupem ovšem těžko dostaneme.

Poznámka 2. Uvědomíme-li si, že na náš výsledek má hlavní vliv vyjádření příslušných křivek $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(z_0)$ v malém okolí bodu z_0, můžeme rychleji postupovat také takto: integrační dráhu nahradíme oblouky křivek pouze v malém okolí bodu z_0; dále pokračujeme po úsečkách případně polopřímkách atd. tak, abychom měli pro zvolené parametrické vyjádření zaručenou platnost lemmatu 2.

Poznámka 3. Z celého příkladu je patrné, že výhoda našeho postupu spočívá hlavně v tom, že dostaneme relativně snadno hlavní člen asymptotického vyjádření a případně i členy další. Obtíž spočívající ve výpočtu koeficientů rozvoje parametrického vyjádření potřebných křivek je nesrovnatelně menší než komplikované výpočty u dřívějšího postupu (viz úvahy potřebné k získání druhého členu asymptotického rozvoje v § 11).

Na druhé straně máme zbytek odhadnout pouze „řádově„, tj. výrazem tvaru $Cx^{-\lambda}$, kde hodnota C není konkrétně vyčíslena. Bylo by pochopitelně možné i tuto část doplnit. Potřebovali bychom k tomu ovšem konkrétní hodnoty konstant při odhadu funkce φ z lemmatu 2.

Poznámka 4. Poměrně složitý i když elementární postup vyšetřování vztahu $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x_0)$ můžeme také provést jednodušeji použitím hlubších vět z teorie analytických funkcí takto: Buď $\mathfrak{F}$ analytická funkce inverzní k funkci $\operatorname{sh} z - z$; tato funkce se skládá ze všech elementů inverzních k elementům $\mathscr{E}(a, \operatorname{sh} z - z)$, $a \in E - \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \{2k\pi i\}$ a všechny tyto elementy jsou holomorfní (Černý, věta 215; ne zcela triviální je ukázat, že funkce $\operatorname{sh} z - z$ zobrazuje E na E – srovnej vyšetřování funkce $e^z + z$, Černý str. 481–484). Body $2k\pi i$, k celé, jsou izolované singulární body funkce $\mathfrak{F}$ (Černý, str. 443). Funkce $\mathfrak{F}$ je přesně trojznačná, $\lim_{z\to 0} \mathfrak{F}(z) = 0$ (Černý, věta 232). $\mathfrak{F}$ je funkce neomezeně pokračovatelná v $E - \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \{2k\pi i\}$ (Černý, věta 229) zřejmě holomorfními elementy. Větve funkce $\mathfrak{F}$ v jednoduše souvislé oblasti $\operatorname{Re} z < 0$ jsou tedy tři holomorfní funkce f_1, f_2, f_3 (Černý, věta 225). Pomocí věty 228 v Černého knize získáme vyjádření

$$\mathfrak{F}(z) = g(\sqrt[3]{z}),$$

kde g je funkce holomorfní v kruhu $U(0, \pi)$ a odtud při vhodném očíslování

$$f_j(+t^3) = g(-te^{(2/3)\pi i(j-1)})$$

pro $-\sqrt[3]{2\pi} < t < 0$. Tím máme ukázánu existenci funkcí ψ_j i s příslušným rozvojem, potřebným v lemmatu 2.

Příklad 2. Celý postup můžeme podobně použít na funkci $H_\nu^{(1)}(x)$ pro $\nu > x > 0$, $0 < \nu < x$ (tj. § 10, § 12 kap. VI). Jako cvičení proveďte i v těchto případech všechny úvahy (viz obr. 29 a 31)!

Příklad 3. Pro kladná x máme (viz § 3, kap. IV)

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t} t^x \, dt = x^x \int_0^\infty e^{x(\lg z - z)} \, dz \tag{24}$$

(substituce $t = xz$).

Buď $f(z) = z - \operatorname{Log} z$, kde $\operatorname{Log} z$ znamená hlavní hodnotu $\log z$. Zřejmě $f'(z) = 0$ platí pouze pro $z = 1$; dále je $f(1) = f''(1) = 1 \neq 0$. Pro $z = u + iv$, $u > 0$ můžeme vztahy $\operatorname{Im} f(z) = 0$, $\operatorname{Re} f(z) = 1$ přepsat ve tvaru

$$(25) \qquad \operatorname{arct} \frac{v}{u} - v = 0\,,$$

$$\lg \sqrt{u^2 + v^2} - u = -1\,.$$

Oba vztahy se nemění záměnou v na $-v$; prvý je splněn identicky pro $v = 0$.

Z (25) máme ihned $|v| < \frac{\pi}{2}$ a pro toto $v \neq 0$ a $u > 0$ ekvivalentní vztah $u = \dfrac{v}{\operatorname{tg} v}$. Je tedy (25) splněno pouze v těchto případech: jednak $v = 0$, $u > 0$, jednak $0 < |v| < \frac{\pi}{2}$, $u = \dfrac{v}{\operatorname{tg} v}$. Množina $\operatorname{Im} f(z) = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$ se tedy rozpadne na úsečku, polopřímku, dva oblouky $u = \dfrac{v}{\operatorname{tg} v}$, $v \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $v \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

K vyšetření (25) zvolme pevné $u > 0$ a buď

$$\varphi(v) = \lg \sqrt{u^2 + v^2} - u + 1\,.$$

Je $\varphi'(v) = \dfrac{v}{u^2 + v^2}$, tj. pro $v > 0$ je $\varphi(v)$ rostoucí, $\lim\limits_{v \to +\infty} \varphi(v) = +\infty$, $\varphi(0) = -u + 2 \lg u + 1$. Tato hodnota je nulová pro $u = 1$, záporná pro $u > 0$, $u \neq 1$.

Odtud plyne: ke každému $u > 0$ existuje právě jedno $v_1 = v_1(u) \geqq 0$, pro něž je $\varphi(v_1) = 0$. Dále je $\varphi(v) < 0$ pro $0 < v < v_1$, $\varphi(v) > 0$ pro $v > v_1$. Zřejmě $\lim\limits_{u \to +\infty} v_1(u) = +\infty$, $\lim\limits_{u \to 0+} v_1(u) = e^{-1}$. Ostatně je

$$v_1(u) = \sqrt{e^{2(u-1)} - u^2}$$

pro $u > 0$.

U uvedeného je patrno (proveďte náčrtek!), že ve vyšetřovaném integrálu nemusíme integrační dráhu nějak modifikovat, potřebujeme jen vyšetřit vhodné parametrické vyjádření úsečky $0 < u < 1$ a polopřímky $u > 1$. Funkce $z - \lg z - 1$ je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$, klesající v $(0, 1)$, rostoucí v $(1, +\infty)$. Funkce f_1, resp. f_2 buď inversní k funkci $z - \lg z - 1$ na intervalu $(0, 1)$, resp. $(1, +\infty)$. Zřejmě mají obě tyto funkce spojité derivace všech řádů v intervalu $(0, +\infty)$ a řešení vztahu

$$z - \lg z = 1 + t^2\,, \quad t > 0$$

je dáno vztahem ve tvaru

$$z = \psi_1(t) = f_1(t^2)\,, \quad z = \psi_2(t) = f_2(t^2)\,.$$

Jako v lemmatu 1 dostaneme

$$\psi_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-t)^n, \quad \psi_2(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n,$$

kde obě řady konvergují v oboru $|t| < \sqrt{2\pi}$ (proč?).

Máme tedy vztah

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x} \int_0^\infty e^{-xt^2} \left(\frac{d\psi_2(t)}{dt} - \frac{d\psi_1(t)}{dt}\right) dt.$$

Pro použití lemmatu 2 potřebujeme ještě odhadnout výraz

$$\frac{d\psi_2(t)}{dt} - \frac{d\psi_1(t)}{dt}. \tag{26}$$

Podobně jako v příkladu 1, stačí vyšetřit limitu tohoto výrazu pro $t \to +\infty$. Nyní ale máme

$$\frac{d\psi_2(t)}{dt} - \frac{d\psi_1(t)}{dt} = -2t\left(\frac{1}{\psi_2(t) - 1} + \frac{1}{1 - \psi_1(t)}\right).$$

Protože $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi_2(t) = +\infty$, $\psi_2(t) - 1 = t^2 + \lg \psi_2(t)$, je

$$\frac{1}{\psi_2(t) - 1} = O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Dále je $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi_1(t) = 0$. Odtud plyne, že výraz (26) je $O(t)$, a tedy předpoklady lemmatu platí s libovolným kladným b. Konečně tedy je pro libovolné přirozené q

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x} \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{q} n\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) x^{-n/2} a_n (1 - (-1)^n) + O(x^{-(1/2)(q+1)})\right),$$

a tedy pro libovolné nezáporné celé q

$$\Gamma(x) = x^x e^{-x} \left(\sum_{n=0}^{q} (2n + 1)\, \Gamma\left(\frac{2n + 1}{2}\right) x^{-(1/2)(2n+1)} a_{2n+1} + O(x^{-(1/2)(2n+3)}\right),$$

kde konstanta v O-členu závisí na q. Snadno určíme hodnotu $a_1 = \sqrt{2}$ a máme

$$\Gamma(x) = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, x^x e^{-x} \left(\sqrt{2} + \frac{3a_3}{x} + \frac{3 \,.\, 5a_5}{x^2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{3 \,.\, 5 \ldots (2q + 1)\, a_{2q+1}}{x^q} + O\left(\frac{1}{x^{q+1}}\right)\right),$$

což je známá Stirlingova formule.

K určení hodnot $a_1, a_2, \ldots$ můžeme odvodit následující rekurentní formuli. Máme

$$\psi_2'(t)\,(\psi_2(t) - 1) = 2t\,\psi_2(t)\,,$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = 2t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n+1}\,.$$

Odtud

$$a_1^2 = 2$$

(to již víme) a pro $n > 1$

$$2a_{n-1} = \sum_{\substack{l+m=n+1\\ m \geqq 1,\, l \geqq 1}} m a_l a_m = \sum_{m=1}^{n} m a_m a_{n+1-m}$$

a z tohoto vztahu již snadno určíme postupně hodnoty $a_2, a_3, \ldots$.

Poznámka 5. Celý postup bylo možné provést v oboru $|\arg x| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.