8. Asymptotický průběh řešení lineárních diferenciálních rovnic

8.1. Mluvíme-li o asymptotickém průběhu řešení lineární diferenciální rovnice, obvykle ji srovnáváme s jinou lineární diferenciální rovnicí a dokazujeme, že řešení obou rovnic se chovají podobným způsobem.

8.1.1. Věta: *Nechť* $-\infty \leqq a < c < b \leqq \infty$ *a nechť funkce* $A\colon (a, b) \to M_n$ *je spojitá a nechť*

$$\int_c^b \|A(t)\| \, \mathrm{d}t < \infty \,. \tag{1.1}$$

Potom existuje fundamentální matice U *rovnice*

$$\dot{x} = A(t)\, x \tag{1.2}$$

tak, že platí

$$\lim_{t \to b-} U(t) = I \,. \tag{1.3}$$

Důkaz: Nechť V je fundamentální matice rovnice (1.2). Je

$$V(t) = V(c) + \int_c^t A(\tau)\, V(\tau) \, \mathrm{d}\tau \qquad \text{pro} \quad t \in (a, b)\,,$$

$$\|V(t)\| \leqq \|V(c)\| + \int_c^t \|A(\tau)\| \, \|V(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \quad \text{pro} \quad t \in (c, b) \tag{1.4}$$

a podle Věty 4.3.1 je

$$\|V(t)\| \leqq \|V(c)\| \exp \int_c^t \|A(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \leqq \|V(c)\| \exp \int_c^b \|A(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau = \varkappa < \infty \,. \tag{1.5}$$

Užitím (1.5) odvodíme, že pro $c \leqq t_1 \leqq t_2 < b$ je

$$\|V(t_2) - V(t_1)\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \|A(\tau)\| \, \|V(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \leqq \varkappa \int_{t_1}^{t_2} \|A(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \,.$$

Odtud a z (1.1) plyne, že existuje

$$\lim_{t \to b-} V(t) = W \in M_n \,. \tag{1.6}$$

Je také

$$\det W = \lim_{t \to b-} \det V(t) . \tag{1.7}$$

Podle Věty 4.7.1 je

$$\det V(t) = \det V(c) \exp \int_c^t \operatorname{Tr} A(\tau) \, d\tau . \tag{1.8}$$

Je

$$|\operatorname{Tr} A(t)| \leqq \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}(t)| \leqq \eta_4^{-1} \|A(t)\|$$

[viz (3.2.14)] a z (1.8) plyne, že je

$$|\det V(t)| \geqq |\det V(c)| \exp\left(- \left| \int_c^t \operatorname{Tr} A(\tau) \, d\tau \right| \right) \geqq$$

$$\geqq |\det V(c)| \exp\left(-\eta_4^{-1} \int_c^b \|A(\tau)\| \, d\tau \right) > 0$$

pro $c \leqq t < b$. Podle (1.7) je $\det W \neq 0$. Proto funkce $U(t) = V(t) W^{-1}$ je fundamentální matice rovnice (1.2) a z (1.6) plyne, že platí (1.3). Věta 8.1.1 je dokázána.

8.1.2. Poznámka: Nechť funkce A splňuje předpoklady Věty 8.1.1. Užitím Věty 4.4.10 lze snadno dokázat, že tvrzení Věty 8.1.1 můžeme vyslovit takto:

(i) Ke každému maximálnímu řešení v rovnice (1.2) existuje maximálmí řešení u rovnice

$$\dot{x} = 0, \tag{1.9}$$

že platí $\lim_{t \to b-} [u(t) - v(t)] = 0$. (Přitom řešení u je zřejmě určeno jednoznačně.)

(ii) Ke každému maximálnímu řešení u rovnice (1.9) existuje jediné maximální řešení v rovnice (1.2) tak, že platí $\lim_{t \to b-} [u(t) - v(t)] = 0$.

Stručně se říká, že *rovnice* (1.2) a (1.9) jsou *asymptoticky ekvivaletní.*

8.1.3. Věta: *Nechť je $a < c < b$. Nechť funkce $B: (a, b) \to M_n$ je spojitá a nechť U je fundamentální matice rovnice*

$$\dot{x}(t) = B(t) \, x(t) . \tag{1.10}$$

Nechť je splněna tato podmínka:

Funkce $\|U(t)\|$, $\|U^{-1}(t)\|$ jsou omezené na intervalu $\langle c, b)$. (1.11)

Nechť funkce $C: (a, b) \to M_n$ je spojitá a nechť je

$$\int_c^b \|C(\tau)\| \, d\tau < \infty .$$

Potom platí:

(i) *Ke každému maximálnímu řešení u rovnice*

$$\dot{x} = [B(t) + C(t)]\, x \tag{1.12}$$

existuje maximální řešení v rovnice (1.10) *tak, že platí* $\lim_{t \to b-} [u(t) - v(t)] = 0$; *přitom řešení v je určeno jednoznačně.*

(ii) *Ke každému maximálnímu řešení v rovnice* (1.10) *existuje jediné maximální řešení v rovnice* (1.12) *tak, že platí* $\lim_{t \to b-} [u(t) - v(t)] = 0$.

Důkaz: Nechť je $\|U(t)\| \leqq \varrho$, $\|U^{-1}(t)\| \leqq \varrho$ pro $c \leqq t < b$. Položme $x = U(t)\, y$. Rovnice (1.10) přechází v rovnici $\dot{y} = 0$, rovnice (1.12) přechází v rovnici $\dot{y} = U^{-1}(t)\, C(t)\, U(t)\, y$. Je

$$\int_c^b \|U^{-1}(t)\, C(t)\, U(t)\|\, \mathrm{d}t \leqq \varrho^2 \int_c^b \|C(t)\|\, \mathrm{d}t < \infty\,.$$

Proto můžeme užít tvrzení (i), (ii) Poznámky 8.1.2 a z nich odvodit tvrzení (i), (ii) Věty 8.1.3.

Podmínka (1.11) je např. splněna, je-li

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad t \in R\,.$$

Platí-li (1.11) a je-li u maximální řešení rovnice (1.10), $u \neq 0$, pak je

$$0 < \liminf_{t \to b-} \|u(t)\| \leqq \limsup_{t \to b-} \|u(t)\| < \infty\,.$$

V následující větě nahradíme rovnici (1.10) rovnicí, která může mít řešení v takové, že je $\lim_{t \to b-} \|v(t)\| = \infty$, i řešení w takové, že je $\lim_{t \to b-} \|w(t)\| = 0$. Zaveďme označení

$$e^{[j]} = \operatorname{col}\,(e_1^{[j]}, e_2^{[j]}, \ldots, e_n^{[j]}) \in K^n\,,$$

kde

$$e_j^{[j]} = 1\,, \quad e_i^{[j]} = 0 \quad \text{pro} \quad i \neq j\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n\,.$$

8.1.4. Věta: *Nechť funkce* $C\colon (a, \infty) \to M_n$ *je spojitá a nechť platí*

$$\int_c^\infty \|C(t)\|\, \mathrm{d}t < \infty\,, \tag{1.13}$$

kde $c \in (a, b)$. *Potom pro* $i = 1, 2, \ldots, n$ *existují řešení* $u^{[i]}$ *rovnice*

$$\dot{x} = [A + C(t)]\,x \tag{1.14}$$

tak, že platí

$$u^{[i]}(t) = e^{\lambda_i t}[e^{[i]} + v^{[i]}(t)]\,, \tag{1.15}$$

kde funkce $v^{[i]}: (a, \infty) \to K^n$ *splňují podmínku*

$$\lim_{t \to \infty} v^{[i]}(t) = 0\,. \tag{1.16}$$

Důkaz Věty 8.1.4 je stručně proveden v Dodatku 8.1.

8.1.5. Poznámka: Funkce $w^{[i]}(t) = e^{\lambda_i t} e^{[i]}$ jsou zřejmě řešení rovnice

$$\dot{x} = Ax \tag{1.17}$$

a tak ve Větě 8.1.4 se porovnávají řešení rovnic (1.14) a (1.17). Je-li $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$, pak ovšem z (1.15) a (1.16) nevyplývá platnost vztahu

$$\lim_{t \to b-} [u^{[i]}(t) - w^{[i]}(t)] = 0\,. \tag{1.18}$$

Je-li však $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, pak vztahy (1.15), (1.16) jsou silnější tvrzení než vztah (1.18).

8.1.6. Poznámka: Nechť $u^{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou řešení z Věty 8.1.4. Je-li $\operatorname{Re} \lambda_j < \operatorname{Re} \lambda_k$ pro nějaká j, k, zvolme $\alpha \in R$ a položme $\tilde{u}^{[k]} = u^{[k]} + \alpha u^{[j]}$; řešení $\tilde{u}^{[k]}$ rovnice (1.14) zřejmě splňuje (1.15) a (1.16) (při $i = k$). Řešení $u^{[i]}$ jsou podmínkami Věty 8.1.4 určena jednoznačně právě v tom případě, že je $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = \ldots = \operatorname{Re} \lambda_n$.

8.1.7. Poznámka: Věta 8.1.4 je speciální případ Věty 8, kap. II, [2], kde lze najít další výsledky o asymptotickém průběhu řešení lineárních diferenciálních rovnic. Viz též např. [71].