Jitka Hrdličková

Vznik a vývoj přímkové geometrie

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. II. (Czech). Praha: Prometheus, 2001. pp. 218–226.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402132

VZNIK A VÝVOJ PŘÍMKOVÉ GEOMETRIE

JITKA HRDLIČKOVÁ

Přímková geometrie – méně atraktivní a známá oblast geometrie, která se zabývá vlastnostmi přímkových systémů – se začala vyvíjet v úzké souvislosti s rozvojem projektivní geometrie přibližně od 2. poloviny 19. století.

Cílem tohoto článku je přiblížit čtenáři hlavní okolnosti „vzniku“ této vědní disciplíny a její následné vývojové změny zhruba do přelomu 19. a 20. století. V úvodu však budou nejprve připomenuty základní pojmy přímkové geometrie 19. století, transformované do dnešního matematického jazyka.

1 Úvod

1.1 Projektivní prostor

Uvažujme $(k+1)$-rozměrný vektorový prostor V_{k+1} nad polem T.

Definice 1 Množinu $\mathbf{P_k}$ všech jednorozměrných podprostorů vektorového prostoru V_{k+1} nazveme k-rozměrným *projektivním prostorem* nad polem T. Jeho prvky nazýváme body, V_{k+1} nazýváme *aritmetickým základem* prostoru $\mathbf{P_k}$. Vektor $\mathbf{x} \in V_{k+1}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, který generuje bod $X = \langle \mathbf{x} \rangle = \{t\mathbf{x}, t \in T\} \in \mathbf{P_k}$ nazýváme *aritmetickým zástupcem* bodu X.

Poznámka 1 Přesněji by mělo být řečeno, že projektivním prostorem je dvojice $(\mathbf{P_k}, V_{k+1})$.

Definice 2 Nechť $(\mathbf{P_k}, V_{k+1})$ je projektivní prostor a W_{l+1} je $(l+1)$-rozměrný podprostor ve V_{k+1}. Množinu všech bodů $\mathbf{Q_l}$ projektivního prostoru $\mathbf{P_k}$, jejichž aritmetičtí zástupci patří do W_{l+1}, nazveme *l-rozměrným projektivním podprostorem* prostoru $\mathbf{P_k}$. Jednorozměrný podprostor nazýváme *přímka*, dvourozměrný *rovina* a $(k-1)$-rozměrný *nadrovina* v $\mathbf{P_k}$.

1.2 Polynomy

Definice 3 Nechť $\mathbf{K}$ je obor integrity. *Polynom* f v proměnné x nad $\mathbf{K}$ je výraz $f = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, kde $n \in \mathcal{N}$, $a_n, ..., a_0 \in \mathbf{K}$. Pro $a_n \neq 0$ nazýváme číslo n *stupněm polynomu* f. Pro $a_n = ... = a_1 = a_0 = 0$ hovoříme o *nulovém polynomu.* Prvky $a_n,\ldots,a_0$ nazýváme *koeficienty polynomu* f. Množinu všech polynomů v proměnné x nad $\mathbf{K}$ značíme $\mathbf{K}[x]$.

Definice 4 Nechť $f = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, $g = b_{n'} x^{n'} + ... + b_1 x + b_0 \in$ $\in \mathbf{K}[x]$. Pak definujeme

1. *součet* $f + g$ polynomů f, g takto:

$$\begin{aligned} f + g &= a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 + b_{n'} x^{n'} + ... + b_1 x + b_0 = \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ..., \end{aligned}$$

2. *součin* $f \cdot g$ polynomů f, g takto:

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (a_n x^n + ... + a_1 x + a_0) \cdot (b_{n'} x^{n'} + ... + b_1 x + b_0) = \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_q x^q + ..., \end{aligned}$$

kde
$c_0 = a_0 \cdot b_0$,
$c_1 = a_1 \cdot b_0 + a_0 \cdot b_1$,
$c_2 = a_2 \cdot b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$,
$\vdots$
$c_q = a_q \cdot b_0 + a_{q-1} \cdot b_1 + \ldots a_0 \cdot b_q$,
$\vdots$

Poznámka 2 Nechť $\mathbf{K}$ je obor integrity. Pak množina všech polynomů $\mathbf{K}[x]$ s operacemi $+$ a $\cdot$ je také obor integrity, který se stručně nazývá *okruh polynomů* (nad $\mathbf{K}$).

Poznámka 3 Okruhy polynomů v proměnných $x_1, ..., x_r$ definujeme induktivně vztahem

$$\mathbf{K}[x_1, ..., x_r] := \mathbf{K}[x_1, ..., x_{r-1}][x_r].$$

Prvek okruhu $\mathbf{K}[x_1, ..., x_r]$ se nazývá *polynom r proměnných nad* $\mathbf{K}$. Např. $\mathbf{K}[x, y] = \mathbf{K}[x][y]$, tzn. že uvažujeme polynomy v proměnné y nad okruhem $\mathbf{K}[x]$. Prvky v $\mathbf{K}[x, y]$ jsou tedy tvaru

$$\begin{aligned} f &= (a_{mn}x^m + ... + a_{0n})y^n + ... + (b_{p0}x^p + ... + b_{00}), \\ &= c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + ... \end{aligned}$$

Pro zjednodušení zápisu se zavádí tzv. multiindexová symbolika. *Multiindex* α délky r je r-tice nezáporných celých čísel $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$. Celé číslo $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_r$ nazýváme *velikost* multiindexu α. Stručně pak píšeme x^α místo $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_r^{\alpha_r}$ Polynomy v r proměnných nad $\mathbf{K}$ pak symbolicky vyjadřujeme

$$f = \sum_{|\alpha| \le h} a_\alpha x^\alpha \in \mathbf{K}[x_1, .., x_r],$$

kde $a_\alpha \in \mathbf{K}$, $h \in \mathcal{N}$. Říkáme, že polynom $f \in \mathbf{K}[x_1, ..., x_r]$ má stupeň h, je-li alespoň jeden z koeficientů s multiindexem α velikosti h nenulový.

Definice 5 Buď $f \in \mathbf{K}[x_1, ..., x_r]$ polynom r proměnných nad $\mathbf{K}$ tvaru

$$f = \sum_{|\alpha| \le h} a_\alpha x^\alpha.$$

Výraz $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_r^{\alpha_r}$ se nazývá *monom.*

Definice 6 *Homogenní polynom f stupně h* v $\mathbf{K}[x_1, ..., x_r]$ je takový polynom, jehož všechny monomy mají stupeň h. Tedy

$$f = \sum_{|\alpha| = h} c_\alpha x^\alpha.$$

2 Základní pojmy přímkové geometrie

Z historického hlediska budeme v celém následujícím textu uvažovat pouze reálné elementy. Prostor, se kterým budeme pracovat, bude k-rozměrný projektivní prostor nad polem reálných čísel, který budeme stejně jako v předchozím textu označovat symbolem $\mathbf{P_k}$. Dále budeme pracovat s okruhem polynomů r proměnných s reálnými koeficienty, který budeme jako v předchozím označovat $\mathbf{K}[x_1, ..., x_r]$.

Definice 7 *Projektivní varieta* $\mathcal{V}_p \subset \mathbf{P_k}$ je množina zadaná homogenními polynomy $f_1, .., f_s \in \mathbf{K}[x_1, ..., x_{k+1}]$,

$$\mathcal{V}_p = \Upsilon(f_1, ..., f_s) = \{(a_1, ..., a_{k+1}) \in \mathbf{P_k} | f_i(a_1, ..., a_{k+1}) = 0; i = 1, ..., s\}.$$

Množinu všech polynomů $g \in \mathbf{K}[x_1, ..., x_{k+1}]$ splňujících $g(X) = 0$ pro každé $X = (x_1, ..., x_{k+1}) \in \mathcal{V}_p$, nazýváme *ideál projektivní variety* $\mathcal{V}_p$, značíme $I(\mathcal{V}_p)$.

Poznámka 4 Buď $[p]$ množina všech přímek v prostoru $\mathbf{P_3}$. Buď $p \in [p]$ přímka procházející body $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{P_3}$, $B = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in$ $\in \mathbf{P_3}$, kde $A \neq B$. Označme

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}; \qquad i, j = 1, 2, 3, 4; \quad i < j.$$

Hodnoty p_{ij} jsou dány pro každé $p \in [p]$ libovolnými homogenními souřadnicemi bodů $A, B \in \mathbf{P_3}$ až na násobek, máme proto v prostoru $\mathbf{P_5}$ dobře definovaný bod

$$P = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}) \in \mathbf{P_5}.$$

Takto popsané zobrazení je bijekce

$$\varphi : [p] \to \Upsilon(\phi),$$

kde $\phi \in \mathbf{K}[x_1, ..., x_6]$, $\phi = p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}$, $\Upsilon(\phi) \subset \mathbf{P_5}$.

Definice 8 *Plückerovými souřadnicemi* přímky $p \in \mathbf{P_3}$ rozumíme souřadnice bodu $\varphi(p) \in \Upsilon(\phi)$, kde $\varphi : [p] \to \Upsilon(\phi)$ je bijekce z Poznámky 4. Značíme

$$p = (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}).$$

Definice 9 Buď $(\mathbf{P_5}, V_6)$ projektivní prostor, $\varphi : [p] \to \Upsilon(\phi)$ bijekce z Poznámky 4, $f \in \mathbf{K}[x_1, ..., x_6]$ homogenní polynom stupně n takový, že $\Upsilon(f) \neq \Upsilon(\phi)$. Buď $\Upsilon(f, \phi) \neq \emptyset$. Množina $\mathcal{K}(f)_n = \varphi^{-1}(\Upsilon(f, \phi)) \subset \mathbf{P_3}$ se nazývá *komplex přímek stupně* n daný polynomem f.

Speciálně pro $n = 1$, resp. $n = 2$ hovoříme o *lineárním*, resp. *kvadratickém* komplexu přímek.

Definice 10 Buďte $\mathcal{K}(f_1)_{n_1} \subset \mathbf{P_3}$, $\mathcal{K}(f_2)_{n_2} \subset \mathbf{P_3}$ dva různé komplexy přímek dané polynomy f_1 stupně n_1, resp. f_2 stupně n_2 takové, že

$$\mathcal{K}(f_1)_{n_1} \bigcap \mathcal{K}(f_2)_{n_2} \neq \emptyset.$$

Množina $\mathcal{K}(f_1)_{n_1} \bigcap \mathcal{K}(f_2)_{n_2} \subset \mathbf{P_3}$ se nazývá *kongruence přímek stupně* $n_1 \cdot n_2$ daná polynomy f_1, f_2. Speciálně pro $n_1 = n_2 = 1$ hovoříme o *lineární kongruenci přímek.*

Definice 11 Buďte $\mathcal{K}(f_1)_{n_1} \subset \mathbf{P_3}$, $\mathcal{K}(f_2)_{n_2} \subset \mathbf{P_3}$, $\mathcal{K}(f_3)_{n_3} \subset \mathbf{P_3}$ tři navzájem různé komplexy přímek dané polynomy f_1 stupně n_1, resp. f_2 stupně n_2, resp. f_3 stupně n_3 takové, že

$$\mathcal{K}(f_1)_{n_1} \bigcap \mathcal{K}(f_2)_{n_2} \bigcap \mathcal{K}(f_3)_{n_3} \neq \emptyset.$$

Množina $\mathcal{K}(f_1)_{n_1} \bigcap \mathcal{K}(f_2)_{n_2} \bigcap \mathcal{K}(f_3)_{n_3} \subset \mathbf{P_3}$ se nazývá *přímková plocha* daná polynomy f_1, f_2, f_3.

3 Historie přímkové geometrie

Pojem souřadnice přímky trojrozměrného prostoru a analytická definice lineárního a kvadratického komplexu, lineární kongruence přímek a lineární přímkové plochy se v souvislosti s projektivní geometrií poprvé objevily v 2. polovině 19. století v díle [1] od Julia Plückera (1801–1868), který se tak stal prvním z geometrů chápajícím přímku jako prvek trojrozměrného prostoru.[1] Tímto novým názorem na přímku zároveň položil základy dalšího směru v geometrii - tzv. *přímkové geometrii* (v německém originále *Liniengeometrie*), která se zabývala studiem vlastností přímkových systémů. V Plückerově podání stavba přímkové geometrie proběhla v analytickém duchu.

3.1 Plückerovi předchůdci

Myšlenka přímek jako elementů trojrozměrného prostoru v Plückerově pojetí se však začala skrytě objevovat mnohem dříve. Syntetickým řešením různých úloh o geometrickém místě přímek splňujícím určité vlastnosti objevovali matematikové speciální přímkové komplexy a kongruence.

August Ferdinand Möbius (1790–1868) dospěl při studiu tzv. involutorních korelací trojrozměrného prostoru, ve kterých obraz bodu X inciduje s bodem X (nulové korelace), až na práh pojmu *lineární komplex přímek* jakožto samodružných útvarů nulové korelace.

„Vytvoření“ lineárního komplexu přímek na základě dvou projektivních svazků přímek se společnou přímkou zkonstruoval poprvé James Joseph Sylvester (1814–1897).

[1] Na tomto místě poznamenejme, že trojrozměrným prostorem projektivní geometrie se v té době rozuměl „obvyklý“ reálný afinní prostor A_3 doplněný „nevlastními“ neboli „nekonečně vzdálenými“ body. Takto vzniklá množina A_3' pak byla nazývána projektivním doplněním či rozšířením prostoru A_3, podle potřeby pak byla ještě dále doplňována komplexními elementy (tj. body, přímkami, rovinami, jejichž souřadnice jsou komplexní čísla).

Michel Chasles (1793–1880) v [2] při studiu problému „Každému bodu X pohybujícího se tělesa je přiřazena přímka p, která bod X spojuje opět s bodem X libovolné pozdější polohy tělesa" objevil jeden ze speciálních kvadratických komplexů.

Carl Theodor Reye (1838–1919) v [3] vytvořil kvadratický komplex obsahující „všechny přímky, které spojují vždy dva body sdružené v prostorové kolineaci, a duálně všechny přímky, ve kterých se protínají vždy dvě sdružené roviny v prostorové kolineaci", který byl po svém objeviteli nazván *Reyeův komplex.* Některé prameny tento komplex nazývají *čtyřstěnový.*

Tzv. *harmonický* komplex, který je tvořen přímkami protínajícími dvě plochy 2. stupně v harmonických čtveřinách bodů, poprvé vyšetřoval Giuseppe Battaglini (1826–1894) v [4].

K dalším geometrům – syntetikům, které je možno zařadit do této přípravné kategorie budování samotné přímkové geometrie, jíž dal analytickou formu, obsah a obecnost J. Plücker, patřili Jacques Philippe Maria Binet (1786–1856), Jacob Steiner (1796–1863), Hermann Günter Grassmann (1809–1877) a Arthur Cayley (1821–1895).

3.2 Plückerovi pokračovatelé

Obecnou teorii přímkové geometrie dále synteticky i analyticky prohlubovali podle Plückerovy myšlenky zejména Felix Klein (1849–1925), který považoval Plückerovy souřadnice přímky $(p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34})$ za souřadnice bodu v pětirozměrném prostoru $\mathbf{P}_5$, dále pak Friedrich Otto Rudolf Sturm (1841–1919) v [21], Aurel Edmund Voss (1845–1931) v [6], Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1900) v [7], Gabriel Xavier Paul Koenigs (1858–1931) v [8] a Konrad Zindler (1866–1934) v [9]. Kromě rozličných způsobů „vytváření" komplexů, kongruencí a přímkových ploch byly studovány například vlastnosti prostorových křivek různých stupňů, jejichž všechny tečny jsou přímkami lineární komplexu. Tyto křivky byly nazývány *čarami komplexu.* Jiným aktuálním tématem této teorie se staly lineární soustavy lineárních komplexů přímek, polární teorie kvadratických komplexů nebo množiny singulárních bodů kvadratických komplexů.

Speciálně kvadratickými komplexy se zabýval F. Klein ve své disertaci [10], kde naznačil na základě Weierstrassovy teorie elementárních dělitelů klasifikaci kvadratických komplexů. Kleinův návrh klasifikace pak zrealizoval Adolf Weiler (1851–1916) v [11]. Dalšími vlastnostmi obecných kvadratických komplexů přímek se kromě výše jmenovaných zabývali Corrado Segre (1863–1924) v [12], Friedrich Schur (1856–1932) v [13], Eugenio Bertini (1846–1933) v [14], Th. Reye v [15] a [16] a mnozí další. Vlastnosti speciálního případu kvadratického komplexu – Reyeova komplexu studovali například Marius Sophus Lie (1842–1899) a Georg Wilhelm Scheffers (1866–1945) v [17], Heinrich Emil Timerding (1873–1945) v [18], Jan de Vries (1858–1940) v [19] a Gino Loria (1862–1954) v [20].

Obšírnou publikací shrnující problematiku přímkové geometrie konce 19. století bylo dílo R. Sturma [5] pojaté čistě v syntetickém duchu.

Z hlediska metrického se zvláštním zřetelem k aplikacím v kinematice a mechanice pojednávalo o přímkové geometrii dvousvazkové dílo [9] od K. Zindlera.

Mario Pieri (1860–1913) uvedl v [22] soustavu postulátů přímkové geometrie, kterou posléze zjednodušili Earle Raymond Hedrick a Louis Ingold v článku [23].

Teorii kongruencí přímek obecně podali zejména Ernst Eduard Kummer (1810–1893) v [24], jejich klasifikaci zpracoval Robert Schumacher (1860–1924) v [25] a G. Bordiga v [26].

Problematiku přímkových ploch obecného stupně obohatili o nové výsledky především A. Voss v [27] a George Salmon (1819–1904) v [28]. Kromě nich se přímkovými plochami 3. a 4. stupně zabývali A. Cayley, Luigi Cremona (1830–1903) a M. Chasles. Klasifikaci přímkových ploch 3. stupně provedl Francesco Severi (1879–1961) v [29]. Vlastnosti přímkových ploch 5. a vyšších stupňů studovali například Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) v [30], Virgil Snyder (1869–1894) v [31], [32], [33] a mnozí další.

3.3 Přímková geometrie v Čechách

V závěru tohoto výčtu jmen a prací zapadajících do problematiky přímkové geometrie, který zdaleka není úplný, je dlužno připomenout alespoň některá jména těch českých geometrů, kteří se touto oblastí zabývali. Jedná se především o Emila Weyra (1848–1894), Františka Machovce (1855–1892), Jana Vojtěcha (1879–1953), Jana Sobotku (1862–1931), Josefa Klímu (1887–1943) a Ladislava Seiferta (1883–1956).

Literatura

[1] Plücker, J., *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linien als Raumelement*, 1868.

[2] Chasles, M., Betrachtungen über die Bewegung starrer Körper, *Comptes Rendus* (1861).

[3] Reye, Th., *Die Geometrie der Lage I, II*, 1866–1868.

[4] Battaglini, G., Intorno ai sistemi di rette di secondo grado, *Giornale mat.* **6**(1868), 239–159.

[5] Sturm, R., *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung I-III*, 1892–1896.

[6] Voss, A., Über Complexe und Congruenzen, *Math. Annalen* **9**(1876), 55–162.

[7] Clebsch, A., Über die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe, *Math. Annalen* **5**(1872), 435–441.

[8] Koenigs, G., *La géométrie réglée et ses applications*, 1895.

[9] Zindler, K., *Liniengeometrie mit Anwendung I, II*, 1902, 1906.

[10] Klein, F., Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades, *Math. Annalen* **2**(1870), 198–226.

[11] Weiler, A., Über die verschiedenen Gattungen der Komplexe 2. Grades, *Math. Annalen* **7**(1874) 145–207.

[12] Segre, C., Note sur les complexes quadratiques, dont la surface singuliere est une surface du 2 degré double, *Math. Annalen* **23**(1884), 235–243.

[13] Schur, F., Geometrische Untersuchungen über Strahlencompexe ersten und zweiten Grades, *Math. Annalen* **15**(1879), 432–439.

[14] Bertini, E., Sui comlessi di secondo grado, *Giornale mat.* **17**(1879), 1–9.

[15] Reye, Th., Über lineare und quadratische Strahlencomplexe und Complexengewebe, *Journal r. a. Math.* **95**(1883) , 330–348.

[16] Reye, Th., Neue Eigenschaften des Strahlencomplexes zweiten Grades, *Math. Annalen* **49**(1897), 585–595.

[17] Lie, S., Scheffers, G., *Geometrie der Berührungstransformationen*, 1896.

[18] Timerding, H. E., Some remarks on tetrahecomplessi tetraedrali, *Bulletin Amer. math. soc.* **6**(1900), 417–430.

[19] Vries, J. de, Een afbeelding van een tetraedralern complex op de puntenruimte, *Verslag Akad. Amsterdam* **32**(1923), 478–482.

[20] Loria, G., Intorno alla geometria su un complesso tetraedrale, *Atti Accad. Torino* **19**(1884), 849–878.

[21] Sturm, R., *Die Lehre von den geometrischen Verwandschaften I-IV*, 1908–1909.

[22] Pieri, M., Sui principi che reggono la geometria delle rette, *Atti Accad. Torino* **36**(1901), 335–350.

[23] Hedrick, E. R., Ingold, L., A set of axioms for line geometry, *Transactions Amer. math. soc.* **15**(1915), 205–214.

[24] Kummer, E., *Über die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere die der ersten und zweiten Ordnung*, 1866.

[25] Schumacher, R., Classifikation der algebraischen Strahlensysteme, *Math. Annalen* **37**(1890), 100–140.

[26] Bordiga, G., Sulla classificazione delle congruenze, *Rendiconti Accad. Lincei, Roma* **7**(1898), 28–31.

[27] Voss, A., Zur Theorie der windschiefen Flächen, *Math. Annalen* **8**(1875), 54–135.

[28] Salmon, G., *Treatise on the higher plane curves*, 1852.

[29] Severi, F., Sulla forma delle rigate cubiche, *Atti Ist. Veneto* **5**(1903), 863–879.

[30] Schwarz, H. A., Über die geradlinigen Flächen fünften Grades, *Journal r. a. Math.* **67**(1867), 23–57.

[31] Snyder, V., On the forms of quintic scrolls, *Bulletin Amer. math. soc.* **8**(1902), 293–296.

[32] Snyder, V., On the quintic scroll having three double curves, *Bulletin Amer. math. soc.* **9**(1903), 236–242.

[33] Snyder, V., On the forms of unicursal sextic scrolls, *Amer. Journal Math.* **25**(1903), 59–84.

Jitka Hrdličková
Katedra matematiky PřF MU
Brno
e-mail: hrdlic@math.muni.cz