Michal Křížek; Lawrence Somer
Abelova cena v roce 2008 udělena za objevy v teorii neabelovských grup

In: Michal Křížek (author); Lawrence Somer (author); Martin Markl (author); Oldřich Kowalski (author); Pavel Pudlák (author); Ivo Vrkoč (author); Hana Bílková (other): Prvních deset Abelových cen za matematiku. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2013. pp. 37–48.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402229

6. Abelova cena v roce 2008 udělena za objevy v teorii neabelovských grup

Michal Křížek, Lawrence Somer

6.1. Úvod

Abelovu cenu za matematiku získali v roce 2008 John Griggs Thompson z USA a Jacques Tits z Francie. Cenu jim udělila Norská akademie věd a předal ji osobně norský král Harald V. dne 30. května 2008 v hlavní aule univerzity v Oslo. Abelova cena byla tentokrát spojena s částkou 1 200 000 USD. Podle vyjádření prof. Kristiana Seipa, předsedy výběrové komise, cenu dostali za *své hluboké výsledky v algebře a hlavně za zformování moderní teorie grup.*

J. G. Thompson působí od r. 1993 jako Graduate Research Professor na University of Florida a je emeritním profesorem na Univerzity of Cambridge v Anglii. Narodil se 13. října 1932 v Kansasu. Na slavné Yale University začal studovat teologii. Po roce však přešel na matematiku a udělal dobře. Saunders Mac Lane jej totiž pozval, aby

John Griggs Thompson

Jacques Tits

si udělal doktorát na University of Chicago. Zde se začal intenzívně věnovat konečným grupám symetrií a získal v roce 1959 titul Ph.D. Poté rok působil na Institute for Defense Analysis a dva roky na Harvardově univerzitě. Pak se vrátil do Chicaga a v období 1962–1968 zde byl již profesorem. V roce 1970, kdy ještě nedosáhl ani 40 let, byla Thompsonova práce oceněna Fieldsovou medailí. V letech 1970–1993 pak působil na univerzitě v Cambridge. Získal 4 čestné doktoráty, Wolfovu cenu, Coleovu cenu, Sylvesterovu medaili, Poincarého medaili aj.

J. Tits je emeritním profesorem na Collège de France, ale je původem z Belgie. Narodil se 12. srpna 1930 v Uccle na předměstí Bruselu. Považovali jej za zázračné dítě. Už jako tříletý uměl počítat a později mu bylo umožněno, že přeskočil několik tříd školní docházky. Ve svých čtrnácti letech tak úspěšně vykonal přijímací zkoušky na Free University of Brussels. V roce 1950, když mu bylo pouhých 19 let, získal titul Ph.D. Působil na řadě univerzit, např. v Bruselu, Bonnu a Paříži. Získal 4 čestné doktoráty a celou řadu dalších ocenění (např. Wolfovu cenu). Je členem mnoha akademií a čestným členem Londýnské matematické společnosti.

V tomto článku bychom chtěli seznámit čtenáře se základy moderní teorie konečných grup. V závěrečné kapitole se pak stručně zmíníme o hlavních výsledcích obou laureátů v této oblasti a jejich přínosu ke sporadickým grupám (viz též [15]).

6.2. Stručně o teorii grup

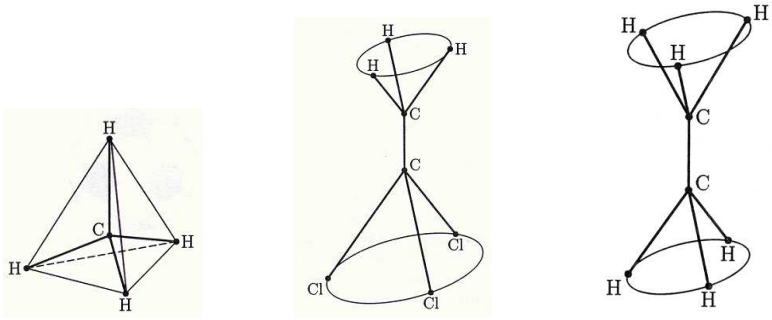
Připomeňme si nejprve některé základní pojmy. *Grupa* G je množina, na které je definována asociativní binární operace $\circ : G \times G \to G$ s neutrálním prvkem e a v níž ke každému prvku $g \in G$ existuje právě jeden prvek inverzní $g^{-1} \in G$ tak, že $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$. Prvkům G se někdy říká *symetrie*, pokud jsou to zobrazení geometrických objektů na sebe.

Studium symetrií má dlouhou historii. Jeho kořeny sahají až do antiky. Například staré egyptské a maurské ornamenty vykazují symetrie všech 17 tapetových grup (tj. dvojrozměrných krystalografických grup, jejichž existenci udává Fjodorovův teorém). Lidé totiž odjakživa obdivují a dávají přednost objektům, které vykazují nějaký druh symetrie. Např. staří Řekové se zabývali platónskými a archimédovskými tělesy, jejichž symetrie také tvoří grupy, jak se později zjistilo.

Grupu všech permutací prvků $1, 2, \ldots, n$ (s operací skládání) nazveme *symetrickou* a označíme ji S_n. Grupu všech sudých permutací prvků $1, 2, \ldots, n$ nazveme *alternující*[1] a označíme ji A_n.

Pojem grupa pochází až od Evarista Galoise, který je všeobecně považován za zakladatele teorie grup. Kolem roku 1830 odvodil z vlastností symetrických grup S_n, že algebraické rovnice stupně vyššího než 4 nejsou obecně řešitelné pomocí odmocnin. Přitom pro řešení tohoto obtížného problému podstatně využil vlastností symetrie mezi jednotlivými kořeny. Niels Henrik Abel dokázal již dříve podobný výsledek pro algebraické rovnice pátého stupně na pouhých šesti stránkách (viz [1], [24]). První knihu o teorii grup publikoval v roce 1870 Camille Jordan. Nazval ji *Traité des substitutions* (viz [12]).

[1] Někdy se jí též říká alternativní grupa. Každou permutaci lze složit z transpozic, které prohazují právě 2 prvky a ostatní prvky ponechávají na místě. Permutace se nazývá *sudá*, resp. *lichá*, je-li počet transpozic sudý, resp. lichý [27, s. 85].



Obr. 6.1. Symetrie molekuly metanu CH_4 tvoří grupu o $4! = 24$ prvcích, která je izomorfní[2] symetrické grupě S_4. Grupa tzv. přímých symetrií, kdy neuvažujeme zrcadlové obrazy molekuly, má jen 12 prvků a je izomorfní s alternující grupou A_4. Symetrie prostřední molekuly trichloretanu H_3C–CCl tvoří cyklickou grupu C_3 o třech prvcích. Dihedrální grupa D_3 se skládá ze šesti přímých symetrií molekuly etanu C_2H_6.

Teorie grup má obrovské množství nejrůznějších praktických aplikací, např. při klasifikaci krystalů, uzlů, symetrií molekul (viz obr. 6.1), popisu silných, slabých a elektromagnetických interakcí, skládání Lorentzových transformací, v teorii kódování[3] (viz [17], [20], [21], [27]). Díky symetriím se značně zjednodušují některé výpočty. S grupami se setkáváme i při řešení různých hlavolamů (viz např. obr. 6.2).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

R	A	T	E
Y	O	U	R
m	i	n	d
p	l	a	

Obr. 6.2. Známá hra *patnáctka* (vlevo) neumožňuje prohodit 15 a 14 v posledním řádku tak, aby poloha ostatních čísel zůstala zachována. Plyne to z vlastností alternujících grup (viz [27, s. 39 a 97]). Na druhé straně l a a v posledním řádku (vpravo) prohodit lze. Víte proč?

6.3. Konečné grupy

Dále se budeme zabývat jen konečnými grupami (slovo **konečný** budeme proto většinou vynechávat). Počet prvků G označíme $|G|$ a nazveme *řádem grupy*[4]. *Podgrupa* $H \subset G$ je podmnožina G se stejnou operací $\circ$ ale zúženou na $H \times H$, s týmž neutrálním prvkem e jako má G a splňující axiomy grupy. Nazývá se *vlastní*, je-li $H \neq G$, a *triviální*, je-li $H = \{e\}$.

[2]Izomorfismus je vzájemně jednoznačné zobrazení, které zachovává binární grupovou operaci.

[3]Například německá armáda používala elektromechanický šifrovací stroj Enigma. Jeho kód v roce 1932 rozšifrovali pomocí teorie grup M. Rejewski, J. Rozycki a H. Zygalski pracující pro polskou tajnou službu. Koncem 2. světové války pak zdokonalený kód rozšifroval Alan Turing, což pomohlo zkrátit válku a ušetřit tak mnoho lidských životů.

[4]Počet vzájemně neizomorfních grup řádu n se uvádí ve Sloanově On-line encyclopedia of integer sequences v položce A000001, např. existuje 267 grup řádu 64, ale jen jedna grupa řádu 65, viz `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

Věta (Cayleyova). *Každá grupa řádu n je izomorfní nějaké podgrupě symetrické grupy S_n.*

Poznamenejme, že pro $n \geq 3$ není grupa S_n komutativní (tj. je neabelovská).

Věta (Lagrangeova). *Je-li H podgrupa G, pak $|H|$ dělí $|G|$.*

Jako důsledek dostáváme, že $g^{|G|} = e$ pro každé $g \in G$ (viz [18, s. 131]).

Francouzský matematik Augustin-Louis Cauchy dokázal, že pro každé prvočíslo p, které dělí $|G|$, existuje podgrupa $H \subset G$ taková, že $|H| = p$. Toto tvrzení bylo kolem roku 1872 rozšířeno norským matematikem Ludwigem Sylowem:

Věta (Sylowova). *Je-li p prvočíslo a p^k dělí $|G|$ pro nějaké $k \geq 0$ celé, pak existuje podgrupa $H \subset G$ řádu p^k.*

Alternující grupa A_5 je neabelovská grupa všech sudých permutací z pěti prvků. Podle Sylowovy věty má podgrupy řádu 2, 3, 4 a 5, protože $|A_5| = 5!/2 = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Nemá ale podgrupy řádu 15 ani 30 (tj. Lagrangeovu větu nelze obrátit). Poznamenejme ještě, že A_5 je izomorfní s grupou všech přímých symetrií pravidelného dvanáctistěnu,[5] pravidelného dvacetistěnu, též molekuly fullerenu C_{60} či klasického fotbalového míče.

6.4. Klasifikace jednoduchých grup

Pro jednoduchost budeme symbol binární operace $\circ$ nadále vynechávat. Podgrupa $H \subset G$ se nazývá *normální*, jestliže $g^{-1}hg \in H$ pro všechna $h \in H$ a $g \in G$. V tomto případě budeme psát $H \triangleleft G$, pokud $H \neq G$.

Například $\{e\} \triangleleft A_3 \triangleleft S_3$, protože alternující grupa A_n je normální podgrupou symetrické grupy S_n pro každé $n = 1, 2, \ldots$ Také grupa tahů Rubikovy kostky $3 \times 3 \times 3$ obsahuje normální podgrupu, která se skládá z operací pouze na 8 vrcholových kostičkách (viz [22, s. 49, 135], [27]). Na druhé straně podgrupa A_5 grupy A_6 není normální (jak bude patrno z Galoisovy věty).

Definice. Grupa G se nazývá *jednoduchá*, jestliže $\{e\}$ a G jsou její jediné normální podgrupy.

Protože všechny cyklické grupy[6] C_n jsou abelovské a všechny podgrupy abelovské grupy jsou normální, jednoduché cyklické grupy mají prvočíselný řád nebo řád 1. Cyklické grupy s neprvočíselným řádem nejsou jednoduché, kromě případu C_1. Rovněž dihedrální grupa D_n přímých symetrií pravidelného n-bokého hranolu není jednoduchá pro $n > 2$.

Pojem jednoduchá grupa také pochází od Galoise, který takto nazval grupy sudých permutací A_n pro $n \geq 5$.

Věta (Galoisova). *Alternující grupa A_n je jednoduchá pro $n \geq 5$.*

Důkaz je uveden např. v [13, s. 98], [18, s. 542]. Jak již bylo řečeno v kapitole 6.3, grupa A_5 má několik vlastních netriviálních podgrup. Žádná z nich ale není normální.

Jednoduché grupy tvoří jakési stavební kameny všech grup podobně jako chemické prvky, resp. prvočísla jsou stavebními kameny molekul, resp. přirozených čísel větších než jedna. Jestliže G_2 je maximální vlastní normální podgrupa grupy G_1, pak podílová grupa $G_1/G_2 = \{gG_2 : g \in G_1\}$ je jednoduchá. Je-li podobně G_3 maximální

[5] Grupa všech přímých symetrií krychle je S_4.

[6] *Cyklická grupa* je grupa generovaná jediným prvkem.

vlastní normální podgrupa G_2, pak G_2/G_3 je také jednoduchá. Tímto způsobem můžeme pokračovat, až dojdeme k $G_{n+1} = \{e\}$. Grupu G lze takto vyjádřit pomocí n jednoduchých grup $G_1/G_2, G_2/G_3, \ldots, G_n/G_{n+1}$ a podle Jordanovy-Hölderovy věty z roku 1889 tyto grupy nezávisí na výše uvedené volbě pořadí normálních podgrup (viz [11, s. 249], [13], [16, s. 112]):

Věta (Jordanova-Hölderova). *Nechť grupu G lze rozložit dvěma způsoby ve tvaru $\{e\} = G_{n+1} \triangleleft \cdots \triangleleft G_2 \triangleleft G_1 = G$ a $\{e\} = H_{m+1} \triangleleft \cdots \triangleleft H_2 \triangleleft H_1 = G$ tak, že každá grupa v obou řetězcích je maximální vlastní normální podgrupou grupy následující. Pak $n = m$ a existuje permutace*[7] *π prvků $1, \ldots, n+1$ taková, že G_i/G_{i+1} je izomorfní $H_{\pi(i)}/H_{\pi(i+1)}$ pro $i = 1, \ldots, n$.*

Mnoho problémů z teorie grup tak lze pomocí indukce převést na úlohy zahrnující jednoduché grupy. Nejmenší jednoduchá nekomutativní grupa je A_5. Její řád je $|A_5| = 60$. Grupy A_1 a A_2 jsou triviální, grupa A_3 je komutativní a izomorfní cyklické grupě C_3 a grupa A_4 je sice nekomutativní, ale může být rozložena na dvě abelovské podílové grupy (viz [11, s. 244]). Galois pracoval s grupou S_5 permutací kořenů rovnice pátého stupně, která obsahuje jednoduchou podgrupu A_5 a nemůže být tedy dále rozložena na cyklické grupy prvočíselných řádů.

V roce 1892 si Otto Hölder položil otázku, zda je možno vytvořit přehledný seznam všech konečných jednoduchých grup (viz [23]). V současnosti již víme, že každá jednoduchá grupa patří do jedné z 18 nekonečných (ale spočetných) tříd konečných grup nebo do zvláštní konečné třídy tzv. *sporadických grup,* které nepatří do žádné z těchto 18 nekonečných tříd a kterých je právě 26 (viz tab. 6.1). Budeme se jim věnovat v kapitole 6.5.

Klasifikační věta. *Je-li G jednoduchá grupa, pak patří do právě jedné z následujících skupin:*

1) *třídy cyklických grup C_p prvočíselného řádu p a řádu* 1,
2) *třídy alternujících grup A_n pro $n \geq 5$,*
3) 16 *nekonečných tříd Lieova typu*[8] *nad konečnými tělesy,*[9]
4) *třídy* 26 *sporadických grup.*

Celková délka důkazu této věty se odhaduje na 15 000 stránek. Klasifikační věta je totiž založena na pěti stech článcích od přibližně 100 autorů, v nichž se podrobně vyšetřují jednotlivé třídy a jejich speciální případy. Samozřejmě vzniká otázka, zda je takto dlouhý důkaz bezchybný. O jedné mezeře v důkazu, kterou se již podařilo zaplnit, pojednává článek [2].

Daniel Gorenstein (zemřel v r. 1992) inicioval projekt, který by důkaz Klasifikační věty zkrátil a dal jej do jednotného stylu. Projektu se ujali Richard Lyons a Ronald Solomon, kteří postupně jednotlivé části důkazu Klasifikační věty zasílají k publikaci

[7] Zřejmě $\pi(1) = 1$ a $\pi(n+1) = n+1$.

[8] Lieovy grupy popisují různé typy geometrií, viz např. [14], [17], [21]. Jako konkrétní příklad uveďme grupy symetrií vícerozměrných krychlí [10]. Šestnáct tříd grup Lieova typu lze rozdělit takto: 4 z nich jsou klasické maticové grupy nad konečnými tělesy, tj. lineární, unitární, symplektické a ortogonální grupy. Dále existuje 5 nekonečných tříd Chevalleyových grup, 4 třídy Steinbergových grup, 1 třída Suzukiho grup a 2 třídy Reeových grup.

[9] Poznamenejme, že jedna grupa z třídy Reeových grup typu F_4 nad dvouprvkovým tělesem se nazývá *Titsova grupa.*

Angl. jméno	označení	řád
Mathieu	M_{11}	$7920 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$
	M_{12}	$95040 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$
	M_{22}	$443520 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
	M_{23}	$10200960 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
	M_{24}	$244823040 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Janko	J_1	$175560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
	J_2	$604800 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$
	J_3	$50232960 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$
	J_4	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$
Higman-Sims	HS	$44352000 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
McLaughlin	Mc	$898128000 = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$
Held	He	$4030387200 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$
Suzuki	Sz	$448345497600 = 2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
Rudvalis	Ru	$145926144000 = 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
O'Nan	ON	$460815505920 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$
Lyons	Ly	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$
Conway	Co_1	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$
	Co_2	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
	Co_3	$495766656000 = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$
Fischer	Fi_{22}	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$
	Fi_{23}	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$
	Fi_{24}	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$
Harada-Norton	HN	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$
Thompson	Th	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$
Baby Monster	B	$\lvert B\rvert \approx 4 \cdot 10^{34}$, viz (6.3)
Monster	M	$\lvert M\rvert \approx 8 \cdot 10^{54}$, viz (6.1)

Tab. 6.1 Sporadické grupy

do Amer. Math. Soc. Celý důkaz bude systematicky podán v mnoha dílech, z nichž 6 již bylo vydáno. Odhaduje se, že počet stránek tentokrát nepřesáhne 4000.

Díky Jordanově-Hölderově větě a dalším hlubokým výsledkům se podařilo ukončit klasifikaci jednoduchých grup kolem roku 1982. John H. Conway[10] inicioval projekt „Atlas“ popisující všechny konečné grupy, který je zveřejněn v [6]. Obsáhlý historický přehled o tomto vysoce netriviálním výsledku je podán např. v [9] a [22].

Georg Frobenius v roce 1893 ukázal, že každá jednoduchá grupa, jejíž řád neobsahuje čtverec prvočísla, musí být cyklická a prvočíselného řádu nebo řádu 1 (viz [23]). V roce 1904 William Burnside dokázal velmi překvapivou větu (viz [3], [9], [22, s. 85]):

[10]Conway je také autorem známého algoritmu Life, který simuluje evoluci baktérií ve čtvercové síti.

Věta (Burnsidova). *Žádná jednoduchá grupa nemá řád $p^k q^m$, kde p a q jsou různá prvočísla a $k, m \geq 1$ celá.*

Pokud tedy jednoduchá grupa není cyklická, musí být její řád dělitelný alespoň třemi prvočísly. Např. řád grup A_5, A_6 a některých jednoduchých grup Lieova typu je dělitelný právě třemi různými prvočísly (druhá nejmenší jednoduchá neabelovská grupa má řád $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$). Burnside též dokázal, že každá grupa řádu p^2 je abelovská, je-li p prvočíslo (viz [18, s. 531]). Grupa řádu p^3 ale může být neabelovská, je-li p liché prvočíslo. Např. existují dvě neabelovské grupy řádu $3^3 = 27$.

6.5. Sporadické grupy

Největší sporadická grupa se nazývá *Monstrum* a označuje se M. Jde o zcela výjimečný matematický objekt. Jeho existenci předpověděli v roce 1973 na sobě nezávisle Bernd Fischer a Robert L. Griess. Proto se M někdy také nazývá Fischerovo-Griessovo monstrum. Griess z univerzity v Michiganu jej pak v roce 1983 zkonstruoval jako konečnou grupu rotací v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^{196883}$. Řád M je vskutku úctyhodný,

$$\begin{aligned} |M| &= 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \\ &= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Cesta ke konstrukci Monstra však byla značně dlouhá a klikatá. První sporadické grupy M_n pro $n = 11, 12, 22, 23, 24$ objevil francouzský matematik Émile L. Mathieu v období 1861–1873. Jsou to zvláštní podgrupy grupy všech permutací S_n, které nepatří do žádné z 18 nekonečných tříd jednoduchých grup. Grupa M_{24} byla objevena jako první v roce 1861.

Nejsnáze zkonstruovatelná sporadická grupa je však M_{12}. Její řád

$$|M_{12}| = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040 \tag{6.2}$$

je sice větší[11] než $|M_{11}| = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920$, ale lze ji definovat pomocí pouhých tří generátorů g_1, g_2, g_3. Do M_{12} patří všechny permutace, které lze dostat složením konečně mnoha následujících permutací (viz [27, s. 166]):

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 & 12 \end{bmatrix},$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 2 & 11 & 3 & 6 & 4 & 8 & 5 & 9 & 7 & 10 \\ 12 & 1 & 11 & 2 & 6 & 3 & 8 & 4 & 9 & 5 & 10 & 7 \end{bmatrix},$$

$$g_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 11 & 8 & 9 & 10 & 5 & 6 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 7 & 11 & 8 & 3 & 9 & 5 & 6 & 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

Lze dokázat, že M_{12} neobsahuje žádnou transpozici ani trojcyklus. Tato grupa je ale 5-tranzitivní,[12] tj. pro libovolných pět různých prvků i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 a dalších pět libovolných různých prvků j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 z množiny $\{1, 2, \ldots, 12\}$ existuje permutace

[11] Grupa M_{11} je stabilizátorem grupy M_{12}, podrobnosti viz [27, s. 168–170].

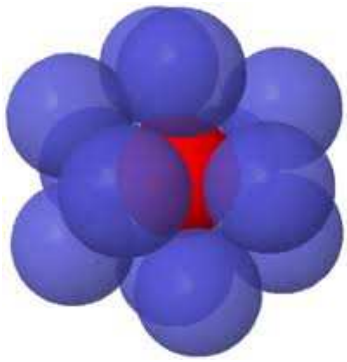
[12] Každá 6-tranzitivní grupa je už buď symetrická, nebo alternující (viz [27]).

$s \in M_{12}$ taková, že $s(i_k) = j_k$ pro $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Všimněte si také, že řád M_{12} ve vztahu (6.2) je roven právě počtu možností, jak vybrat 5 prvků z dvanácti, pokud záleží na pořadí.

Termín sporadická grupa se poprvé objevil v práci [4, s. 504] z roku 1911, kde se o Mathieuových grupách píše: *These apparently sporadic simple groups would probably repay a closer examinantion than they have yet received.* Podle Burnsidovy věty musí být řád každé sporadické grupy číslo složené z vícera prvočinitelů (srov. tab. 6.1).

V roce 1965, tj. přibližně sto let po objevu prvních pěti sporadických grup M_i, objevil chorvatský matematik Zvonimír Janko šestou sporadickou grupu označovanou jako J_1. Existence dalších sporadických grup byla často předpovězena dříve, než byla příslušná grupa zkonstruována. Většina sporadických grup se tak nazývá po autorech, kteří jejich existenci pouze předpověděli. Jde přibližně o období 1965–1975.

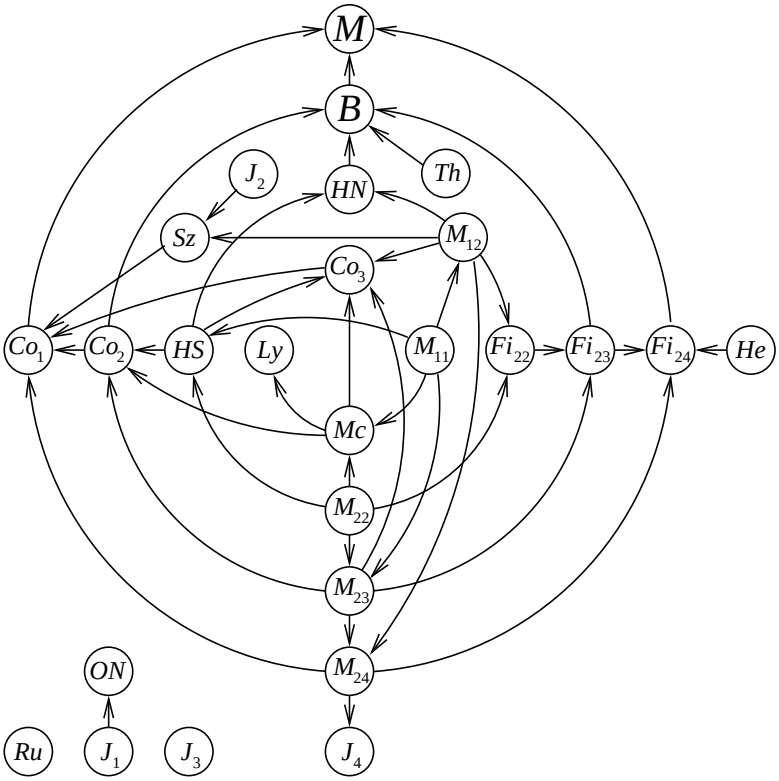
Několik sporadických grup bylo zkonstruováno pomocí tzv. Leechovy mřížky (viz [25]). Při nejhustším uspořádání stejně velkých kruhů v rovině se každý kruh dotýká svých šesti sousedů. Pro pravidelná periodická uspořádání stejně velkých koulí v d-rozměrném prostoru označme maximální počet dotyků vybrané centrální koule se sousedními koulemi symbolem $K(d)$ (angl. *kissing number*). Pak $K(1) = 2$, $K(2) = 6$, $K(3) = 12$ (viz obr. 6.3), $K(4) = 24$ a $K(8) = 240$. Pro ostatní d jsou známy jen hrubé dolní a horní odhady $K(d)$, kromě případu $d = 24$, kdy je horní odhad roven dolnímu, tj. $K(24) = 196560$ (viz [19], [22, s. 242]).



Obr. 6.3. Dvanáct koulí obklopujících centrální kouli v třírozměrném prostoru.

V 60. letech minulého století se John Leech inspiroval 5-tranzitivní Mathieuovou grupou M_{24}, v níž se permutuje 24 prvků tak, že libovolných pět různých z nich se současně zamění za obecně jiných pět různých prvků předem daných. V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^{24}$ zkonstruoval speciální pravidelnou mřížku středů koulí, které dávají nejhustší uspořádání, kdy je centrální koule obklopena právě 196560 dotýkajícími se koulemi. Symetrie Leechovy mřížky v $\mathbb{R}^{24}$ umožňují zkonstruovat celkem 12 sporadických grup.[13] Některé z nich našly uplatnění v teorii samoopravných kódů (viz [25]), v teorii strun a supergravitace (viz [10]).

[13] Jsou to J_2, HS, Mc, Sz a dále všechny Mathieuovy a Conwayovy grupy (viz [7], [22, s. 155]).



Obr. 6.4. Orientovaný graf ukazuje vztahy mezi všemi 26 sporadickými grupami (šipka $H \to G$ označuje, že H je vlastní podgrupa G). Lyonsova grupa Ly a Jankova grupa J_4 nejsou podle Lagrangeovy věty podgrupy Monstra, protože jejich řád je dělitelný 37 (viz tab. 6.1) a (6.1).

Připomeňme ještě jednu zajímavou vlastnost čísla 24:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 70^2,$$

tj. součet čtverců po sobě jdoucích čísel od 1 do 24 je roven čtverci. Číslo 24 je jediné přirozené číslo větší než 1, které má takovou vlastnost.[14]

Druhá největší sporadická grupa B se anglicky nazývá Baby Monster. Má rovněž úctyhodný řád:

$$|B| = 2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47. \tag{6.3}$$

Objevil ji B. Fischer v roce 1974.

Z 26 sporadických grup lze vyčlenit 20 grup, z nichž každá je buď vlastní podgrupou Monstra M, nebo podílovou grupou jeho podgrup. K této skupině se navíc přiřazují

[14] Odtud mj. plyne, že bod o souřadnicích $(0, 1, 2, \ldots, 23, 24, 70)$ má v 26-rozměrném Lorentzově prostoru (používaném v teorii strun) vzdálenost od počátku v zobecněné Minkowského metrice rovnou nule.

ještě dvě grupy Ly a J_4, které obsahují některé netriviální podgrupy Monstra (viz obr. 6.4). Těmto 22 sporadickým grupám se říká *Šťastná rodinka* (angl. Happy Family). Skupina zbývajících čtyř sporadických grup nese přiléhavý název *Vyvrhelové* (angl. Pariahs).

6.6. Thompsonův a Titsův přínos k teorii neabelovských grup

Oba noví laureáti Abelovy ceny se podstatně zasloužili o některé části důkazu Klasifikační věty jednoduchých grup. Již v roce 1963 Walter Feit a John G. Thompson publikovali článek [8], který na 255 stránkách přináší důkaz tehdy 60 let staré Burnsidovy domněnky pro jednoduché neabelovské grupy:

Věta (Feitova-Thompsonova). *Každá jednoduchá neabelovská grupa má sudý řád.*

Na druhé straně jediné jednoduché abelovské grupy jsou C_p, kde p je prvočíslo nebo $p = 1$, tj. řád jednoduché grupy C_p je lichý, když $p \neq 2$. Každá grupa G s lichým neprvočíselným řádem má netriviální normální podgrupu a podle Jordanovy-Hölderovy věty může být rozložena pouze na cyklické podílové (a tedy abelovské) grupy [22, s. 114]. Jako netriviální důsledek Feitovy-Thompsonovy věty tak dostáváme (viz [8]):

Věta. *Každou grupu lichého řádu alespoň* 3 *lze rozložit na jednoduché abelovské grupy prvočíselného řádu.*

Thompson dále zkonstruoval sporadickou grupu označovanou Th, jejíž řád činí $|Th| \approx 9 \cdot 10^{16}$ (viz tab. 6.1 a obr. 6.4). Pomohl také svému mladšímu kolegovi J. H. Conwayovi při konstrukci sporadické grupy Co_1 a vypočítal řád některých dalších grup (viz např. [22, s. 153, 184]). Thompson objevil i dvě nové nekonečné grupy označované T a V. Databáze MathSciNet eviduje přes 250 Thompsonových prací především z teorie grup.

Jacques Tits se již od mládí zajímal o Lieovy grupy s konečným řádem. Objevil nové nekonečné třídy takových grup současně (ale nezávisle) s Robertem Steinbergem z Kalifornie. Studoval také grupy symetrií krystalů a pravidelných těles ve vícerozměrných prostorech.[15] Tzv. Titsova grupa, kterou objevil, má řád $17971200 = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$ a patří ke grupám Lieova typu.

Jacques Tits (a nezávisle též Marshall Hall) explicitně zkonstruoval Jankovu grupu J_2, což je speciální sporadická grupa permutací 100 symbolů (viz tab. 6.1). Přitom použil čistě geometrické úvahy. Tits je autorem známé monografie [26]. Také poněkud zjednodušil Griessovu konstrukci Monstra (viz [22, s. 209]). Další zjednodušení se popisuje v článku [5].

Podle prohlášení výběrové komise *Thompson způsobil převrat v teorii konečných grup tím, že dokázal nesmírně obtížné věty, které vedly k položení základů pro úplnou klasifikaci konečných grup, jednoho z největších výsledků matematiky 20. století.*

Tits vytvořil nový a velmi účelný pohled na grupy jako geometrické objekty. Zavedl matematický objekt, který je znám jako Titsova konstrukce (angl. Tits building), *jež vyjadřuje algebraickou strukturu lineárních grup v geometrických termínech.*

[15] Poznamenejme, že nový Vítězný oblouk v La Défense v Paříži je „projekcí“ čtyřrozměrné krychle do trojrozměrného prostoru.

Poznámka. Pokud vám v hlavě stále vrtá paradox z obr. 6.2 vpravo, pak vám napovíme, že je třeba zaměnit dvě nerozlišitelná R v prvním a druhém řádku, což vyžaduje sudý počet tahů. Lze to dokázat takto: Nejprve odbarvíme všech 16 čtverečků černě a bíle jako políčka na šachovnici. Tento podklad se nebude během řešení měnit. Při každém tahu tedy prázdné políčko vždy změní barvu. Protože prázdné políčko zůstane ve stejné poloze, když je problém vyřešen, bude mít stejnou barvu jako na začátku. Proto je potřeba sudý počet tahů. Při každém tahu se zamění písmeno s prázdným políčkem a změní se parita permutace. K tomu abychom prohodili dva páry písmen a zbytek zůstal zachován, potřebujeme sudý počet tahů. Pokud tedy prohodíme R z prvního a druhého řádku a zároveň l a a z posledního řádku, vykonáme sudý počet tahů a problém je tedy potenciálně řešitelný. Nyní si můžete prakticky vyzkoušet, že problém lze skutečně vyřešit.

Literatura

[1] Abel, N. H.: *Mémoire sur les équations algébriques oú on démontre l'impossibilité de la résolution de l'equation générale du cinquième dégré*. Goendahl, Christiana 1824.

[2] Aschbacher, M.: *The status of the classification of the finite simple groups*. Notices Amer. Math. Soc. *51* (2004), 736–740.

[3] Burnside, W.: *On groups of order $p^\alpha q^\beta$*. Proc. London Math. Soc. *2* (1904), 388–392.

[4] Burnside, W.: *Theory of groups of finite order*. Cambridge 1911, Dover Publ., New York 1955, (reprinting 2004).

[5] Conway, J. H.: *A simple construction of the Fischer-Griess monster group*. Invent. Math. *79* (1985), 513–540.

[6] Conway, J. H., Curtis, R. T., Norton, S. P., Parker, R. A., Wilson, R. A.: *Atlas of finite groups. Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups*. Oxford Univ. Press 1985.

[7] Conway, J. H., Sloane, N. J. A.: *Sphere packing, lattices and groups*. Springer, Berlin 1988.

[8] Feit, W., Thompson, J. G.: *Solvability of groups of odd order*. Pacific J. Math. *13* (1963), 775–1029.

[9] Gallian, J. A.: *The search for finite simple groups*. Math. Magazine *49* (1976), 163–180.

[10] Hall, B. C.: *Lie groups, Lie algebras, and representations*. Springer-Verlag, New York 2003.

[11] Jacobson, C.: *Basic algebra I*, 2nd ed. W. H. Freeman and Company 1985.

[12] Jordan, C.: *Traité des substitutions*. Gauthier-Villars, Paris 1870.

[13] Kargapolov, M. I., Merzjakov, Ju. I.: *Osnovy teorii grupp*. 2. vyd., Nauka, Moskva 1977.

[14] Karger, A., Novák, J.: *Prostorová kinematika a Lieovy grupy*. SNTL, Praha 1987.

[15] Křížek, M., Somer, L.: *Architects of symmetry in finite nonabelian groups*. Symmetry: Culture and Science *21* (2010), 333–344.

[16] Kuroš, A. G.: *Kapitoly z obecné algebry*. Academia, Praha 1968.

[17] Litzman, O., Sekanina, M.: *Užití grup ve fyzice*. Academia, Praha 1982.

[18] Mac Lane, S., Birkhoff, G.: *Algebra*. Alfa, Bratislava 1973.

[19] Pfender, F., Ziegler, G. M.: *Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs*. Notices Amer. Math. Soc. *51* (2004), 873–883.

[20] Pradlová, J., Křížek, M.: *Grupy kolem nás*. Rozhledy mat.-fyz. *76* (1999), 209–216, 261–267, *77* (2000), 5–12.

[21] Pravda, V.: *Maticové Lieovy grupy a Lieovy algebry*. PMFA *52* (2007), 219–230.

[22] Ronan, M.: *Symmetry and the Monster. One of the greatest quests of mathematics*. Oxford Univ. Press 2006.

[23] Solomon, R.: *A brief history of the classification of the finite simple groups*. Bull. Amer. Math. Soc. *38* (2001), 315–352.

[24] Sylow, L., Lie, S. (eds.): *Œeuvres complètes de Niels Henrik Abel, vol. I, II*. Nouvelle Edition, Oslo 1881.

[25] Thompson, T. M.: *From error-correcting codes through sphere packing to simple groups*. Math. Assoc. Amer., Washington 1983.

[26] Tits, J.: *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*. LN in Math. 386, Springer, New York 1974.

[27] Tůma, J.: *Matematické hlavolamy a základy teorie grup*. Mladá fronta, Praha 1988.