1.3 FILOSOFICKÉ INTERPRETACE PRAVDĚPODOBNOSTI

1.3.1 Úvod

Díky Kolmogorovově axiomatické definici, jíž jsme zakončili předchozí část, byla teorie pravděpodobnosti postavena na pevné základy a začala být považována za plnohodnotné odvětví matematiky (i když využívá spíše induktivní než deduktivní logiku). Tato abstraktní definice však i nadále ponechává prostor pro hledání nejvhodnější *interpretace* pojmu *pravděpodobnost*, tedy nejlepší odpovědi na zdánlivě jednoduchou otázku, co to pravděpodobnost skutečně je a jak souvisí s reálným světem. Obvykle se přitom rozlišují dva hlavní směry, totiž interpretace *epistemologické*, které pravděpodobnost spojují s lidskou znalostí nebo vírou, a interpretace *objektivní*, které pravděpodobnost považují za vlastnost objektivního materiálního světa, zcela nezávislou na člověku a jeho uvažování, názoru či znalostech.

V rámci epistemologického pojetí se rozlišuje interpretace *logická* a *subjektivní.* V logické interpretaci je pravděpodobnost považována za míru racionálního přesvědčení o platnosti určité hypotézy nebo předpovědi při dané evidenci, tedy za charakteristiku logického vztahu mezi tvrzeními, udávající „míru vyplývání“; při stejných znalostech by v tomto případě všechny myslící bytosti vždy dospěly ke shodné hodnotě pravděpodobnosti. V interpretaci subjektivní je pravděpodobnost rovněž považována za míru přesvědčení; vychází se však z názoru, že její vyhodnocování je více či méně subjektivní, takže při shodné evidenci mohou různé bytosti dospět k různým hodnotám pravděpodobnosti. Povšimněme si, že oba tyto přístupy se shodují v tom, že pravděpodobnost je vždy podmíněná osobou, která ji stanovuje – v prvním případě pouze jí dostupnou evidencí, v druhém i jejím subjektivním hodnocením.

Mezi objektivní teorie patří interpretace *četnostní*, kde je pravděpodobnost jevu zavedena jako limitní četnost jeho výskytu při dlouhé sérii opakování určitého pokusu (pojem pravděpodobnosti se tak vztahuje pouze na opakovatelné jevy a pro konkrétní neopakovatelné jevy ztrácí smysl), a interpretace *propenzitní*, podle níž pravděpodobnost vyjadřuje jistý druh dispozice produkovat posloupnost dějů s charakteristickou četností. Základní přehled filosofických interpretací pravděpodobnosti lze nalézt v pojednání [320] I. Saxla nebo v knize [120] D. Gilliese; zde se na různá pojetí pravděpodobnosti podíváme především ve vztahu k osobnostem, jimž jsou věnovány následující kapitoly.

1.3.2 Logická interpretace pravděpodobnosti

Běžně hovoříme o pravděpodobnosti jevu; podle mého názoru však takové vyjádření není opodstatněné. [...] *Pravděpodobnost je vlastnost, proměnná co do kvantity či stupně, kterou je možné přisoudit tvrzení ve vztahu k nějakému jinému tvrzení.* ([178], str. 2–8)

Těmito slovy charakterizoval logické pojetí pravděpodobnosti britský logik, filosof a ekonom William Ernest Johnson (1858–1931)[75] v posmrtně vydaném pojednání *Probability: The Relations of Proposal to Supposal* [178], které mělo být začátkem čtvrtého dílu rozsáhlého spisu *Logic* [177], jehož první tři svazky vyšly v letech 1921 až 1924. Závěrečný díl byl zaměřen na teorii pravděpodobnosti, zůstal však nedokončen a v roce 1932 byly publikovány jen tři dochované fragmenty. Pojem pravděpodobnosti se však objevuje již ve druhém svazku z roku 1922, kde se Johnson zabývá induktivním usuzováním typu:

Všechny pozorované labutě byly bílé.
$\therefore$ *S vyšším či nižším stupněm pravděpodobnosti jsou bílé všechny labutě.*
([177], 2. díl, str. 23)

K Johnsonovu pojetí se na více místech svého spisu *A Treatise on Probability* [193] z roku 1921 hlásil další známý představitel logické interpretace pravděpodobnosti, anglický ekonom a matematik John Maynard Keynes (1883–1946).[76] V úvodu zmíněné práce, která nakonec vyšla dříve než kniha Johnsonova, se můžeme dočíst:

Nechť naše premisy sestávají z množiny tvrzení E a naše závěry z množiny tvrzení H.[77] *Jestliže znalost E opravňuje k rozumnému přesvědčení o H stupně α, říkáme, že mezi H a E je pravděpodobnostní vztah stupně α.* [...] *Mezi dvěma množinami tvrzení tedy existuje relace, díky níž můžeme ze znalosti jedné množiny přiřadit množině druhé určitý stupeň racionální důvěry. Tato relace je předmětem logiky pravděpodobnosti.* ([193], str. 4–6)

---

[75] William Ernest Johnson studoval matematiku a filosofii na King's College v Cambridge. Potom vyučoval v rámci různých dočasných pozic v Cambridge matematiku, psychologii, vyučování a morální vědy, v roce 1902 byl zvolen členem King's College a až do konce života zde konal přednášky z morálních věd, v nichž propojil své zájmy o matematiku, logiku, ekonomii a psychologii. Mezi jeho studenty patřil i John Maynard Keynes, jehož otec John Neville Keynes na téže koleji vyučoval logiku a politickou ekonomii.

[76] John Maynard Keynes studoval matematiku a filosofii na King's College v Cambridge; po složení závěrečných zkoušek zde zůstal ještě rok, který věnoval studiu ekonomie. V letech 1906 až 1908 pracoval ve státních službách, potom se ucházel o členství v King's College, a to na základě disertační práce, jež byla první verzí citované knihy [193]. Těsně tehdy nebyl zvolen a uspěl až o rok později; práci mezitím výrazně přepracoval s přihlédnutím k připomínkám oponentů W. E. Johnsona a A. N. Whiteheada a také na základě diskusí s B. Russelem. Na King's College od roku 1909 přednášel ekonomii a s přestávkou v letech 1915 až 1919, strávených ve státních službách, zde působil až do konce života (od roku 1924 také jako kvestor). Přitom se stále zajímal i o politiku a umění, působil v řadě funkcí ve veřejné správě, v pojišťovnictví a bankovnictví a věnoval se obchodování s měnami, cennými papíry i různými komoditami. V letech 1911 až 1946 byl tajemníkem Královské ekonomické společnosti, v letech 1912 až 1945 byl hlavním redaktorem známého časopisu *Economic Journal*. Za druhé světové války se stal poradcem ministra financí Velké Británie a věnoval se problematice financování válečných výdajů, v roce 1942 byl jmenován lordem.

[77] Značení je upravené, aby odpovídalo ostatnímu textu; Keynes značil množinu premis písmenem h a druhou množinu písmenem a.

Mezi zastánce logické interpretace patřili rovněž Ludwig Wittgenstein, autor spisu *Logisch-Philosophische Abhandlung* [390] z roku 1921, slavného především díky německo-anglickému vydání *Tractatus logico-philosophicus* [391], Friedrich Waismann (1896–1959), autor pojednání *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs* [383] z roku 1930, a v pozdější době pak Harrold Jeffreys (1891–1989), autor knihy *Theory of Probability* [175] z roku 1939, a Rudolf Carnap (1891–1970), autor spisu *Logical Foundations of Probability* [50] z roku 1950. Teprve nedávno byl znovu oceněn přínos Johannese von Kriese (1853–1928) a o dalších 50 let starší příspěvek Bernarda Bolzana (1781–1848) – viz například [139], [163]. Je zajímavé, že poslední dvě uvedené osobnosti (mezi jinými) byly ještě v první polovině 20. století často citovány; později se však do popředí dostali anglicky píšící autoři. Bolzanovi je věnována kapitola 2; v dalších částech této knihy potom připomeneme méně známé práce Tomáše Garriguea Masaryka, Emanuela Czubera a Otomara Pankraze.

Gottfried Wilhelm Leibniz

V hledání kořenů logického pojetí pravděpodobnosti však můžeme jít ještě dále. Jak zdůrazňuje Ian Hacking v knize [131], za prvního filosofa pravděpodobnosti a zastánce logického pojetí lze považovat Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646–1716), který byl přesvědčen, že teorie pravděpodobnosti může sloužit v novém odvětví logiky, srovnatelném s logikou deduktivní, a napomoci správnému usuzování v praktických disciplínách, ať již v empirických vědách nebo v oblasti práva. Dodejme, že ještě předtím, než v roce 1672 přijel do Paříže, kde se seznámil s pracemi Pascala, Huygense a dalších, se Leibniz snažil rozvíjet teorii pravděpodobnosti, která nebyla založená na náhodných hrách a mohla mít obecnější využití. V roce 1666 vyšla rozšířená verze jeho disertační práce obhájené na univerzitě v Lipsku, o jejímž obsahu vypovídá již samotný název: *Ars combinatoria* [...], *ve které je vybudována na základech aritmetiky nauka o spojování a přemísťování s novými pravidly, & je ukázáno použití obojího na veškerém okruhu věd; rovněž jsou obsaženy nové základy umění přemýšlet neboli logiky vynalézání. Předeslán je přehled celého pojednání, & jako dodatek přesný důkaz existence Boží dovedený k matematické jistotě.* (Viz [224], str. 253)

I když Leibniz nepublikoval žádný formální příspěvek k teorii pravděpodobnosti, ve svých filosofických spisech a také v bohaté korespondenci, kterou vedl s řadou významných matematiků včetně Jacoba Bernoulliho, nastínil základní myšlenky budoucí induktivní logiky. V bakalářské práci *Disputatio Juridica De Conditionibus* z roku 1665 lze vidět kořeny teorie „částečného vyplývání“ a podmíněné pravděpodobnosti: Leibniz se zde zabývá podmíněným právem, například právem na vlastnictví pozemku, získaným jen tehdy, jsou-li splněny určité podmínky (žádný přímý mužský dědic apod.); obecně jsou možné tři případy: právo platí (což odpovídá jistotě a hodnotě 1), neplatí (hodnota 0), evidence není dostatečná, aby se případ jednoznačně určil (zlomek mezi 0 a 1, udávající pravděpodobnost). Ve spise *Neue Versuche über den menschlichen Verstand* [211] z roku 1703 pak Leibniz píše:

Vícekrát jsem vyslovil názor, že by měla být vytvořena nová oblast logiky, která by se zabývala stupni pravděpodobnosti. Každý, kdo by se chtěl touto otáz-

kou zabývat, by měl také pokročit ve zkoumání náhodných her. [...] *přál bych si, aby nějaký schopný matematik podal podrobnou analýzu všech druhů her, důkladně odůvodněnou a se všemi detaily. To by bylo velmi cenné pro rozvinutí umění objevování, protože se zdá, že rozum je mnohem lépe využíván v hrách než v nejzávažnějších záležitostech.* ([211], Livre IV, Chap. XVI, § 9, str. 415)

V části 1.2.2 jsme viděli, že Bernoulli definoval pojem pravděpodobnosti jako míru jistoty, a to ještě před zahájením korespondence s Leibnizem, o systematické výstavbě induktivní logiky jako rozšíření logiky deduktivní s využitím teorie pravděpodobnosti však lze hovořit až v souvislosti s Bolzanovým spisem *Wissenschaftslehre* [B10].

Pravděpodobnost jako logická relace

Zmíněné rozšíření lze názorně ilustrovat následujícím způsobem, inspirovaným dvojicí pojednání [P28] a [P31] Otomara Pankraze, který zde představil svou alternativní axiomatickou definici pravděpodobnosti (podrobněji viz část 8.2.2). Pankraz připomíná, že každé výrokové formě V_X o jedné proměnné jednoznačně odpovídá množina M_X, která je jejím oborem pravdivosti, a naopak, každé množině M_X jednoznačně (až na ekvivalenci) odpovídá výroková forma V_X (např. „x je prvkem množiny M_X“). Odtud pak plyne: *Vyšetřování výrokových forem jest jedno-jednoznačně převedeno na studium vlastností množin.* [...] *Snadno se dokáže, že predikátový kalkul jest isomorfní s kalkulem teoreticko-množinovým.*[78] Pro formy s definičním oborem M_Ω tuto korespondenci můžeme znázornit tabulkou:

Výroková forma V_X		Obor pravdivosti $M_X \subseteq M_\Omega$	
Konjunkce	$V_X \wedge V_Y$	Průnik	$M_X \cap M_Y$
Disjunkce	$V_X \vee V_Y$	Sjednocení	$M_X \cup M_Y$
Negace	$\neg V_X$	Doplněk	$M_\Omega \setminus M_X$
Tautologie		M_Ω	
Kontradikce		$\emptyset$	

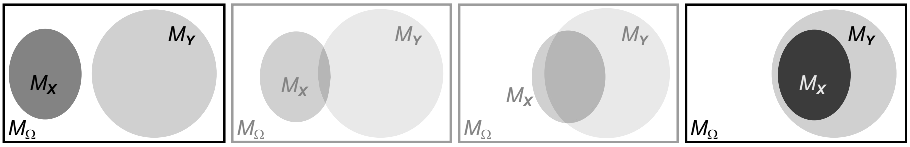
Pankraz rovněž připomíná, že každý jev X lze popsat jako podmnožinu M_X určité množiny M_Ω elementárních jevů (v klasickém pojetí je M_X množina příznivých případů). Nyní si odpovídají:

Náhodný jev X	Množina	$M_X \subseteq M_\Omega$
Jevy X, Y nastanou současně	Průnik	$M_X \cap M_Y$
Nastane aspoň jeden z jevů X, Y	Sjednocení	$M_X \cup M_Y$
Jev X nenastane	Doplněk	$M_\Omega \setminus M_X$
Jistý jev Ω	M_Ω	
Nemožný jev	$\emptyset$	

[78] Viz [P28], str. 53.

Konečně Pankraz poznamenává, že libovolný náhodný jev X lze popsat výrokovou formou V_X s oborem pravdivosti M_X („vyskytne-li se x, nastane jev X“), a uzavírá, že z formálního hlediska nezáleží na tom, zda pracujeme s jevem X, výrokovou formou V_X nebo množinou M_X, a všechny proto můžeme značit týmž symbolem X.

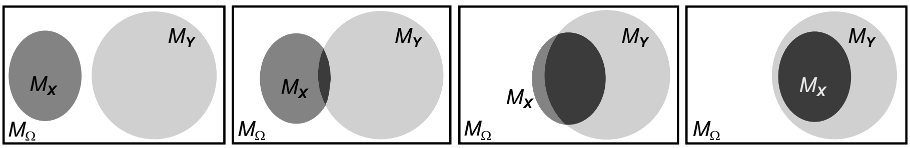
Nyní uvažujme libovolné dvě výrokové formy. Pomocí „klasické“ implikace lze vyjádřit tyto případy:



$M_X \cap M_Y = \emptyset$ | $M_X \subseteq M_Y$

$V_X \Rightarrow \neg V_Y$ | $V_X \Rightarrow V_Y$

Budeme-li však pracovat s náhodnými jevy a vztah mezi nimi vyjádříme pomocí podmíněné pravděpodobnosti, budou si odpovídat:



$M_X \cap M_Y = \emptyset$	$\emptyset \neq M_X \cap M_Y \subsetneq M_X$	$M_X \cap M_Y = M_X$
$P(Y\vert X) = 0$	$0 < P(Y\vert X) < 1$	$P(Y\vert X) = 1$
$V_X \Rightarrow \neg V_Y$		$V_X \Rightarrow V_Y$

Nyní se zdá přirozené vyplnit tuto „mezeru“ ve světě výrokových forem pomocí teorie pravděpodobnosti a „mezistupně“ mezi implikacemi $V_X \Rightarrow \neg V_Y$ a $V_X \Rightarrow V_Y$ vyjádřit slovy: „*V_Y plyne z V_X s pravděpodobností p*,“ popř. symbolicky: $V_X \Rightarrow_p V_Y$, kde pravděpodobnost p je definována jako zlomek

$$p = P(Y|X) = \frac{\mu\,(M_X \cap M_Y)}{\mu\,(M_X)}\,, \tag{1.34}$$

v němž μ značí vhodnou míru dané množiny. Intuitivně, čím větší je míra průniku $M_X \cap M_Y$ vzhledem k celé množině M_X, tím větší je pravděpodobnost, že náhodně zvolený prvek $x \in M_X$ bude ležet také v množině M_Y, neboli kromě výroku $V_X(x)$ bude pravdivý i výrok $V_Y(x)$.

Budeme-li uvažovat přímo výrokové formy a označíme-li $V_X = E$, $V_Y = H$, můžeme vztah (1.34) přepsat ve tvaru:

$$p = P(H|E) = \frac{m\,(H \wedge E)}{m\,(E)}\,, \tag{1.35}$$

kde m značí míru oboru pravdivosti příslušné výrokové formy. Jinými slovy, hodnota p vyjadřuje pravděpodobnost, že při dostupné evidenci E je hypotéza H pravdivá.

Vztáhneme-li míry v čitateli i jmenovateli zlomku (1.34) k množině M_Ω, získáme známý vzorec

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}\,, \tag{1.36}$$

jímž pro $P(X) > 0$ Kolmogorov v práci [196] definoval podmíněnou pravděpodobnost náhodného jevu Y za podmínky X.[79] Uvědomme si, že vzhledem k symetrii ze vztahu (1.36) ihned plyne:

$$P(X \cap Y) = P(Y|X)P(X) = P(X|Y)P(Y)\,, \tag{1.37}$$

a tedy například

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)}\,. \tag{1.38}$$

Pro libovolný úplný systém $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_k\}$ jevů v daném pravděpodobnostním prostoru (tj. odpovídající množiny jsou po dvou disjunktní a jejich sjednocením je celá množina M_Ω) pak díky vzorci pro úplnou pravděpodobnost,

$$P(X) = P(X|Y_1)P(Y_1) + P(X|Y_2)P(Y_2) + \cdots + P(X|Y_k)P(Y_k)\,, \tag{1.39}$$

obdržíme Bayesův vzorec:

$$P(Y_i|X) = \frac{P(X|Y_i)P(Y_i)}{P(X|Y_1)P(Y_1) + P(X|Y_2)P(Y_2) + \cdots + P(X|Y_k)P(Y_k)}\,, \tag{1.40}$$

kde $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Pro odpovídající výrokové formy při výše uvedeném značení můžeme psát:

$$P(H|E) = \frac{P(H \wedge E)}{P(E)}\,, \tag{1.41}$$

a dále pak analogicky se vztahem (1.40):

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2) + \cdots + P(E|H_k)P(H_k)}\,. \tag{1.42}$$

Jak jsme se již zmínili v závěru části 1.2.3, při praktickém použití této „věty o pravděpodobnosti příčin“ často vyvstane problém, jaké apriorní pravděpodobnosti $P(H_i)$ mají být jednotlivým hypotézám přiřazeny, a ve výpočtu se tak objeví určitý subjektivní prvek (viz str. 49).

---

[79] Kolmogorov používal označení $P_X(Y)$.

Bernard Bolzano

V části 2.2.3 uvidíme, že právě ve smyslu vzorce (1.35) definoval pojem pravděpodobnosti Bernard Bolzano – pouze s tím rozdílem, že hovořil o *větách o sobě* a *představách o sobě* (a připouštěl libovolný počet proměnných). Později se podobný přístup objevil i u dalších myslitelů.

Ludwig Wittgenstein

Ludwig Wittgenstein (1889–1951)[80] uvažoval jako míru m ve vztahu (1.35) počet čistě logicky možných případů, kdy je daná věta pravdivá. Zaměříme-li se pouze na zavedení pojmu *pravděpodobnost*, pak můžeme jeho postup podaný ve spise *Tractatus logico-philosophicus*, jehož německá verze [390] vyšla poprvé v roce 1921, ve stručnosti ilustrovat následujícími úryvky:[81]

4.21 Nejjednodušší věta, elementární věta, tvrdí existenci stavu věcí.

4.22 Elementární věta sestává ze jmen. Je propojením, zřetězením jmen.

4.25 Je-li elementární věta pravdivá, pak existuje příslušný stav věcí; je-li elementární věta nepravdivá, pak ten stav věcí neexistuje.

4.26 Uvedení všech pravdivých elementárních vět popisuje svět v úplnosti. Svět je v úplnosti popsán uvedením všech elementárních vět plus uvedením, které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé.

4.3 Pravdivostní možnosti [elementárních vět p, q, r] *můžeme znázornit schémata následujícího druhu („P“ znamená „pravdivý“, „N“ „nepravdivý“.):*

p	q	r
P	P	P
N	P	P
P	N	P
P	P	N
N	N	P
N	P	N
P	N	N
N	N	N

p	q
P	P
N	P
P	N
N	N

r
P
N

4.464 Pravdivost tautologie je jistá, věty možná a kontradikce nemožná. (Jistá, možná, nemožná: máme tu náznak gradace, kterou potřebujeme v nauce o pravděpodobnosti.)

4.51 Řekněme, že mám dány všechny elementární věty: Pak se lze zkrátka zeptat: Jaké věty z nich mohu vystavět? A to jsou všechny věty a takto jsou vymezeny.

---

[80] Připomeňme, že Ludwig Wittgenstein studoval na technice v Berlíně a Manchesteru, potom na Trinity College v Cambridge, kde se spřátelil s B. Russelem, G. E. Moorem a J. M. Keynesem. Po vypuknutí první světové války se dobrovolně přihlásil do rakouské armády. Na konci války byl zajat; v roce 1919, ještě ze zajetí, poslal Russelovi rukopis *Traktátu* [390]. Po návratu se přihlásil do učitelského ústavu a v letech 1920 až 1926 působil jako učitel na rakouských venkovských školách. V roce 1929 se vrátil do Cambridge, kde mu byla práce [390] uznána jako disertace. V následujícím roce se stal členem Triniti College, kde s přestávkami působil do roku 1947; v roce 1939 se zde stal profesorem.

[81] Český překlad citován podle [392], str. 37–49.

4.52 *Věty jsou vše, co vyplývá ze souhrnu všech elementárních vět (přirozeně také z toho, že jde o souhrn všech). (Tak lze v jistém smyslu říci, že všechny věty jsou zobecněními elementárních vět.)*

5 *Věta je pravdivostní funkcí elementárních vět. (Elementární věta je pravdivostní funkcí sebe samé.)*

5.01 *Elementární věty jsou pravdivostní argumenty věty.*

5.1 *Pravdivostní funkce lze uspořádat do řad. To je základ nauky o pravděpodobnosti.*

5.101 *Pravdivostní funkce jakéhokoli počtu elementárních vět lze rozepsat do schématu následujícího druhu:*[82]

$(PPPP)(p,q)$	*tautologie*	*(Jestliže p, pak p; jestliže q, pak q.)*
$(NPPP)(p,q)$	*slovy:*	*Ne zároveň p a q.*
$(PNPP)(p,q)$	*slovy:*	*Jestliže q, pak p.*
$[\ldots]$		
$(NNNN)(p,q)$	*kontradikce*	*(p a ne p; a q a ne q.)*

Takové pravdivostní možnosti pravdivostních argumentů věty, jež ji činí pravdivou, budu nazývat důvody pravdivosti [Wahrheitsgründe] této věty.[83]

5.11 *Jsou-li důvody pravdivosti, společné nějakému počtu vět, zároveň důvody pravdivosti jedné určité věty, pak říkáme, že její pravdivost z pravdivosti oněch vět vyplývá.*

5.12 *Především vyplývá pravdivost věty „p“ z pravdivosti jiné věty „q“, když jsou všechny důvody pravdivosti té druhé také důvody pravdivosti té první.*

5.13 *To, že pravdivost nějaké věty vyplývá z pravdivosti jiných vět, vidíme ze struktury těch vět.*

Nyní již konečně můžeme uvést Wittgensteinovu definici pravděpodobnosti a několik dalších komentářů.

5.15 *Je-li P_r počet důvodů pravdivosti věty „r“ a P_{rs} počet těch důvodů pravdivosti věty „s“, jež jsou zároveň důvody pravdivosti věty „r“, pak poměr $P_{rs} : P_r$ nazýváme mírou pravděpodobnosti, jakou věta „r“ dává větě „s“.*

5.15 *Nechť ve schématu, jako je to v 5.101, je P_r počet znaků „P“ ve větě r; P_{rs} počet týchž „P“ ve větě s, jež jsou ve stejném sloupci jako „P“ věty r. Věta r pak dává větě s pravděpodobnost: $P_{rs} : P_r$.*

[82]Uvědomme si, že uvedenou čtveřici pravdivostních hodnot lze nalézt obvyklým způsobem, používaným pro formule složené z výroků pomocí logických spojek, tedy jako hodnoty ve sloupci pod příslušnou formulí (ponecháváme označení P, N):

p	q	$(p \Rightarrow p)$	$\neg(p \wedge q)$	$(q \Rightarrow p)$	$(p \Rightarrow q)$	$(p \vee q)$	$\ldots$	$(p \wedge \neg p)$
P	P	P	N	P	P	P	$\ldots$	N
N	P	P	P	N	P	P	$\ldots$	N
P	N	P	P	P	N	P	$\ldots$	N
N	N	P	P	P	P	N	$\ldots$	N

[83]V části 3.2.2 se zmíníme o tom, že pomocí *důvodů pravdivosti* definoval pravděpodobnost Moses Mendelssohn v práci [235] z roku 1756, avšak poněkud odlišným a nepříliš exaktním způsobem (viz str. 131).

5.152 Věty, jež nemají žádné pravdivostní argumenty společné, nazýváme vzájemně nezávislými. [...]
Vyplývá-li s z r, pak věta r dává větě s pravděpodobnost 1. Jistota logického úsudku je hraničním případem pravděpodobnosti.

5.153 Věta není sama ani pravděpodobná, ani nepravděpodobná. Událost nastane, nebo nenastane, mezi tím není nic.

Na závěr ještě dodejme, že ve Wittgensteinově *Traktátu* se také objevuje pojem *herní* či *volný prostor* (*Spielraum*), který v souvislosti s pravděpodobností zavedl Johannes von Kries v knize [199] z roku 1886, o níž se za chvilku zmíníme podrobněji (viz str. 65). V odstavci 4.463 Wittgenstein poznamenává:

Pravdivostní podmínky určují, jaký herní prostor věta faktům ponechává. (Věta, obraz, model, jsou v negativním smyslu jako pevné těleso, které ostatním omezuje volnost pohybu; v pozitivním smyslu jsou jako pevnými substancemi vymezený prostor, v němž má nějaké těleso místo.)

Tautologie ponechává skutečnosti celý – nekonečný – logický prostor; kontradikce celý logický prostor vyplňuje a nenechává skutečnosti ani bod. Ani jedna z nich tedy nemůže skutečnost nijak určit. [Například věta: „Prší nebo neprší“ zřejmě nepřináší o skutečnosti vůbec žádnou informaci.]

O možném vlivu Bernarda Bolzana prostřednictvím učebnice filosofické propedeutiky [401], kterou napsal Bolzanův žák Robert Zimmermann, se zmíníme v části 2.2.4 (viz str. 110–113).

Friedrich Waismann

Pojem *volný prostor* (*Spielraum*) se stal základním pojmem teorie, kterou v pojednání *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs* [383] z roku 1930 představil rakouský matematik, fyzik a filosof Friedrich Waismann (1896–1959): [84]

Řeknu-li: „Můj přítel je v Paříži“ nebo „V této urně je jedna červená koule“, pak se může skutečný stav věcí hodně měnit, aniž by věta přestala být pravdivá. Setkáváme se zde se zvláštností našich výroků, kterou bychom mohli vyjádřit takto: Výrok nikdy neurčuje přímo skutečnost, ale volný prostor, obor skutečností. Dokud skutečnost zůstává v oboru vymezeném daným tvrzením, je tento výrok pravdivý; jakmile jej přesáhne, začne být výrok nepravdivý. Čím užší je tento prostor, tím přesněji věta vystihuje skutečnost a tím jasnější je její smysl. Tomuto pojetí prostorů přikládám mimořádný význam, protože je velmi důležité pro logiku, totiž pro zkoumání otázky, zda nějaká věta plyne z jiné věty. Odpověď na tuto otázku lze v našem pojetí vyjádřit jednoduše: jedna věta plyne z druhé věty, jestliže prostor první věty obsahuje prostor věty druhé. ([383], str. 235)

Waismann potom poznamenává, že pojmy *důsledek* a *rozpor* jsou tedy v jeho pojetí vyjádřeny jako topologické vztahy mezi příslušnými prostory a že

[84] Friedrich Waismann studoval matematiku a fyziku na univerzitě ve Vídni, pod vedením Morize Schlicka, zakladatele Vídeňského kroužku, se pak věnoval studiu filosofie, od roku 1929 pracoval jako knihovník na filosofické fakultě. V roce 1937 emigroval do Velké Británie; do roku 1939 přednášel filosofii přírodních věd na univerzitě v Cambridge, potom až do konce života přednášel filosofii matematiky a později filosofii přírodních věd na univerzitě v Oxfordu.

je možné udělat ještě krok dále a těmto prostorům, a tedy i původním tvrzením, přiřadit určitou míru splňující následující podmínky:

1. Pro každý výrok p je míra $m(p)$ nezáporné reálné číslo.
2. Míra kontradikce je rovna nule [tj. $m(p \wedge \neg p) = 0$].
3. Pro každé dva kontradiktorické výroky p, q platí: $m(p \vee q) = m(p) + m(q)$.

Míru pravděpodobnosti, kterou výrok p dává výroku q, pak Waismann definuje ve smyslu vztahu (1.35) jako podíl

$$ {}_p w_q = \frac{m(p \wedge q)}{m(p)} \tag{1.43} $$

a poznamenává, že pravděpodobnost je *mírou logické blízkosti* daných vět. V případě, že q plyne z p, je rovna jedné, v případě, že si obě tvrzení odporují, je nulová. Výrok p přitom může být konjunkcí $p = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$. Kromě toho Waismann podotýká, že pravděpodobnost udává, *jakou část volného prostoru výroku p tvoří společný prostor výroků p a q* – viz náš vztah (1.34), kde množiny M_i představují volné prostory příslušných tvrzení.

V úvodu svého článku Waismann píše, že ve shodě s Leibnizem a Bolzanem považuje teorii pravděpodobnosti za součást logiky. V souvislosti s konkrétním postupem však cituje jen Wittgensteina a uvádí, že se jeho myšlenky snažil zbavit nedostatků.

Walter Dubislav

Waismannovo pojednání [383] je tištěnou verzí referátu, původně předneseného na konferenci *Erste Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften* (*První konference o epistemologii exaktních věd*), která se konala ve dnech 15. až 17. září 1929 v Praze a která je dnes známá především v souvislosti s programovým prohlášením *Vídeňského kroužku* – viz str. 118.

V diskusi, která se na pražské konferenci konala k příspěvkům týkajícím se základů teorie pravděpodobnosti, vystoupil Walter Dubislav (1895–1937)[85] a poukázal na to, že podobné myšlenky lze nalézt již v Bolzanově spisu *Wissenschaftslehre* [B10] (porovnejme vztahy (1.43) na str. 64 a (2.9) na str. 103), přičemž Bolzanovo pojetí je obecnější než pojetí Waismannovo. Toto obecnější pojetí popsal právě ve smyslu, který jsme viděli na str. 59: pravděpodobnost zavedl jako vztah mezi výrokovými formami a vyjádřil ji jako podíl příslušných oborů pravdivosti.[86]

[85] Walter Dubislav byl německý logik a filosof vědy, který se hlásil k odkazu Bernarda Bolzana. Studoval matematiku a filosofii na univerzitě v Berlíně, kde v roce 1922 získal doktorát. V roce 1928 byl jmenován soukromým docentem pro filosofii matematiky a přírodních věd na technice v Berlíně, o tři roky později se na stejné škole stal mimořádným profesorem. V roce 1936 emigroval do Prahy, kde v následujícím roce vlastní rukou zemřel. Dubislav patřil spolu s H. Reichenbachem a K. Grellingem k zakladatelům Berlínské společnosti pro empirickou filosofii (Berliner Gesellschaft für empirische Philosophie), která byla spolu s Vídeňským kroužkem ohniskem logického empirismu.

[86] Viz Erkenntnis 1 (1930), 264–266.

Johannes von Kries

Jak jsme se již zmínili, pojem *herní* či *volný prostor* (*Spielraum*) do teorie pravděpodobnosti zavedl ve své knize *Die Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [199] Johannes von Kries (1853–1928),[87] který *volný prostor* chápal jako obor objektivních možností hypotézy nebo jevu – například souhrn všech možných počátečních poloh, rychlostí, způsobů rotace atd. při hodu kostkou, které vedou k tomu, že padne dané číslo, přičemž řada dalších podmínek zůstává neměnná (tvar kostky, podložka, na niž kostka dopadá, tlak vzduchu, teplota apod.).[88] Pravděpodobnost pak v tomto pojetí vyjadřuje podíl míry volného prostoru sledovaného jevu a míry prostoru všech podmínek, které jsou pro daný experiment relevantní – srov. opět (1.34). Vymezení a porovnávání těchto prostorů vyžaduje informace o skutečných přírodních zákonech a o empiricky možném světě a ne vždy je možné; Kries se proto domníval, že v řadě případů pravděpodobnost numericky vyjádřit nelze.

Dodejme, že Kriesův zájem o teorii pravděpodobnosti velmi úzce souvisel s problematikou měření účinnosti nových léků. Je zřejmé, že na rozdíl od obvyklých aplikací týkajících se hazardních her zde vyvstává problém již se samotným vymezením souboru příznivých a všech možných jevů. Kdy lze říci, že lék byl účinný proti určité nemoci? Byl lék účinný, jestliže pacient zemřel o deset dní později, popř. když vyléčení jedné nemoci způsobilo jiné onemocnění? Jak stanovit hranice mezi nemocemi, které mají společné příznaky? Podrobněji o této problematice a o Kriesově teorii pravděpodobnosti pojednává I. Saxl v pojednání [320] či například G. Fioretti ve stati [105], kde je rovněž diskutován Kriesův vliv na Keynese; v souvislosti s pracemi Wittgensteina a Waismanna pak o Kriesově teorii píše M. Heidelberger v článku [139].

John Maynard Keynes

Osobnost Johna Maynarda Keynese a jeho spis [193] jsme citovali již v úvodu této části. Zde ještě poznamenejme, že při vyčíslování pravděpodobnosti Keynes používal Bayesův vzorec (1.42) a při odhadu apriorních pravděpodobností vycházel z *principu indiference*, podle něhož v případě, že není znám žádný důvod přisoudit některé alternativě vyšší pravděpodobnost než jiné, jsou apriorní pravděpodobnosti všech alternativ považovány za sobě rovné. Jestliže se pak ve vztahu (1.42) položí $P(H_1) = P(H_2) = \cdots = P(H_k) = 1/k$, vyjde

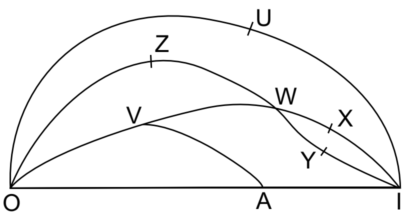
---

[87] Johannes von Kries byl na rozdíl od většiny osobností zmíněných v této knize praktik. Studoval medicínu na univerzitě v Halle a Lipsku, kde v roce 1876 promoval. Po kratším pobytu v Curychu působil u Hermanna von Helmholtze (1821–1894) ve fyzikálním ústavu berlínské univerzity. V roce 1878 se vrátil na univerzitu do Lipska, kde se stal asistentem Carla Ludwiga (1816–1895), profesora fyziologie a ředitele fyziologického ústavu, a ještě téhož roku se pro tento obor habilitoval. V roce 1880 byl jmenován mimořádným profesorem fyziologie na univerzitě ve Freiburgu, o tři roky později se stal profesorem řádným a navíc ředitelem fyziologického ústavu. Ve Freiburgu působil až do svého penzionování v roce 1924.

[88] Dnes bychom dodali, že zmíněné počáteční podmínky, relevantní pro výsledek jevu, lze v tomto případě uvažovat jako uspořádané n-tice reálných čísel, jejichž složky udávají například počáteční souřadnice referenčních bodů kostky, počáteční rychlosti v různých směrech, počáteční úhlové rychlosti vzhledem k různým osám aj.

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)}{P(E|H_1) + P(E|H_2) + \cdots + P(E|H_k)} \tag{1.44}$$

(viz (1.27) na str. 49). Keynes si byl ovšem dobře vědom úskalí tohoto principu, připomněl řadu paradoxů, k nimž vede, a podrobně se zabýval podmínkami, za nichž je možné jej použít. Zdůrazňoval, že pravděpodobnosti není často vůbec možné numericky vyjádřit, a dokonce ani lineárně uspořádat. Pravděpodobnosti přirovnal k bodům ležícím na křivkách s počátečním bodem $O = (0, 0)$, vyjadřujícím nemožnost, a koncovým bodem $I = (1, 0)$, odpovídajícím jistotě – viz obr. 1.4. Bod A odpovídá pravděpodobnosti, kterou lze vyjádřit numericky, ostatní body odpovídají pravděpodobnostem nenumerickým. Porovnat lze pouze pravděpodobnosti ležící na téže křivce (například W je větší než Z, ale W a U jsou neporovnatelné).



Obr. 1.4 Keynesovy „porovnatelné pravděpodobnosti“

Předmětem kritiky se pak vedle těchto úvah stala Keynesova domněnka, že existuje schopnost jakési logické intuice, díky níž můžeme alespoň v některých případech logickou pravděpodobnost vnímat: *Od znalosti tvrzení A přejdeme ke znalosti tvrzení B postřehnutím logického vztahu mezi nimi.* ([193], str. 13)

Keynesův rozsáhlý spis, který má celkem 440 stran, by si zajisté zasloužil podrobnější rozbor. Zde však již jen připomeňme, že Keynes chápal pravděpodobnost vždy jako *pravděpodobnost podmíněnou*:

Mnoho nedorozumění a chyb pramení z toho, že se nebere v úvahu relační charakter pravděpodobnosti. [...] *Vyjádření „b je pravděpodobné“ je stejně nesmyslné jako vyjádření „b je rovno“ nebo „b je větší než“* [...] *Toto slovo používáme pro stručnost vyjadřování, podobně jako když řekneme, že nějaké místo je vzdálené tři míle, a myslíme tím, že je tři míle vzdálené od místa, kde se právě nacházíme, nebo od nějakého jiného stanoviště, na které nepřímo odkazujeme. Žádné tvrzení není samo o sobě pravděpodobné ani nepravděpodobné, stejně jaké žádné místo není samo o sobě vzdálené; a pravděpodobnost téhož tvrzení se liší podle dostupné evidence, k níž ji vztahujeme.* ([193], str. 6–7)

Z hlediska našeho tématu je rovněž zajímavé, že Keynes na řadě míst cituje Emanuela Czubera a jeho spisy [C23], [C25], [C28], [C34], [C37], v seznamu literatury uvádí rovněž práci *David Hume's Skepsis und die Wahrscheinlichkeitsrechnung* [M6] Tomáše Garriguea Masaryka.

1.3.3 Subjektivní interpretace pravděpodobnosti

Subjektivní přístup se s pojetím logickým shoduje v chápání pravděpodobnosti jako epistemologického pojmu. Jak už však bylo zmíněno, zásadní rozdíl spočívá v tom, že zastánci subjektivismu nevěří, že vyhodnocení pravděpodobnosti na základě dané evidence je určeno jednoznačně.

Subjektivní interpretací pravděpodobnosti se zabýval již William Fishburn Donkin (1814–1869) ve své práci *On Certain Questions Relating to the Theory of Probabilities* z roku 1851, kde vyjádřil názor, že pravděpodobnost je pouhým stupněm důvěry a není nikterak obsažena v hypotéze, jíž se týká. M. C. Galavotti v pojednání [116] upozorňuje na dokument, který dokládá, že tato Donkinova myšlenka zaujala dalšího zastánce subjektivismu, Franka Plumptona Ramseye (1903–1930), jenž si ji zaznamenal do svých poznámek.

Opomenout bychom však neměli ani příspěvek Émila Borela (1871–1956), který v recenzi [42] Keynesova spisu [193] vznesl řadu námitek proti jeho teorii. Nesouhlasil například s Keynesovým názorem, že existují pravděpodobnosti, které nelze vyjádřit numericky, a poukazoval na to, že je možné je vyhodnotit pomocí metody sázek, jejíž využití – jak jsme viděli – má kořeny v období samých počátků počtu pravděpodobnosti. Borel poznamenal, že tento způsob vyčíslení pravděpodobnosti, kterou určitá osoba přisuzuje danému jevu, je podobný metodě, pomocí níž bychom mohli zjistit, jakou hodnotu přisuzuje danému majetku: chceme-li například zjistit cenu uhlí, pak stačí jeho majiteli nabízet postupně větší a větší částku; při určité výši se majitel nakonec rozhodne, že uhlí prodá. Bude-li naopak vlastník uhlí nabízet, pak se mu je podaří prodat, jakmile cenu dostatečně sníží.

Nejvýznamnějšími zastánci subjektivní interpretace byli již zmíněný Frank Plumpton Ramsey, Bruno de Finetti (1906–1985) a z pozdějšího období také Leonard Jimmie Savage (1917–1971). V kapitole 4.2.2 uvidíme, že mezi průkopníky tohoto přístupu patřil rovněž Václav Šimerka (1819–1887).

Frank Plumpton Ramsey

Ve svém pojednání *Truth and Probability* [297], které bylo sepsané v roce 1926, ale vyšlo až posmrtně o pět let později, Frank Plumpton Ramsey (1903–1930)[89] chápal teorii pravděpodobnosti jako *logiku částečného přesvědčení* či *důvěry* (*partial belief*). Zároveň však zdůraznil, že to nikterak neznamená, že je to její jediná nebo dokonce nejdůležitější stránka a že tato interpretace bude také nejvhodnější například pro fyziku či statistiku.

Stupeň přesvědčení Ramsey považuje za psychologickou veličinu, kterou lze vždy měřit – jen s větší či menší přesností. Metoda měření by přitom měla

[89] Frank Plumpton Ramsey studoval matematiku na Trinity College a v pouhých 19 letech vypracoval první verzi překladu Wittgensteinova traktátu [391]. Po absolutoriu, na podzim roku 1923 a pak ještě v roce následujícím, kdy od března do října pobýval ve Vídni, Wittgensteina opakovaně navštívil. V roce 1924 se Ramsey stal díky podpoře J. M. Keynese členem Kings College v Cambridge. O dva roky později začal vyučovat matematiku a později se stal vedoucím katedry matematiky. Zabýval se logikou a základy matematiky, velkého uznání se dostalo rovněž jeho pracím z oblasti ekonomie. Zemřel v nedožitých 27 letech na žloutenku.

být opět ryze psychologická. Ramsey se však nesnaží o nalezení nějaké přímé metody, která by zkoumala pocity spojené se silnější či slabší vírou; jak říká, alespoň on sám takové pocity rozpoznat neumí a navíc to, čím jsme si bezpečně jisti, často žádné zvláštní pocity vůbec nevyvolává. Místo toho hledá metodu nepřímou, jež by umožnila odhadnout míru přesvědčení na základě určitých vnějších projevů, konkrétně na základě jednání dané osoby či její připravenosti jednat určitým způsobem. Ramsey poznamenává, že jedna taková metoda je známá již dávno a spočívá v navrhování sázek a sledování, jaké jsou nejnižší *šance* (například 2 ku 1, což by odpovídalo pravděpodobnosti 1/3), kdy osoba, jejíž přesvědčení chceme změřit, sázku přijme. Odhad pomocí sázek však Ramsey nepovažuje za dostatečně obecný a přesný – člověk může mít například v sázení zvláštní zálibu, nebo proti němu může mít naopak odpor, navíc užitek chápaný jako funkce finanční částky, kterou daná osoba vlastní, má klesající derivaci (čím více peněz máme, tím méně pro nás bude znamenat každá nově získaná libra), a je tedy nelineární.

Řešení Ramsey vidí ve využití myšlenky, že jednání každého člověka je zcela určeno jeho touhami a názory a že každý jedná takovým způsobem, o němž se domnívá, že mu umožní jeho touhy naplnit. Ramsey si byl vědom toho, že je skutečnost mnohem složitější, přesto však tento přístup považoval za užitečný a domníval se, že mnohdy umožní přiblížit se k pravdě.

V nejjednodušším případě Ramsey předpokládá, že předměty touhy, o něž se jedná, lze vyjádřit numericky a že jsou aditivní v tom smyslu, že například ten, kdo preferuje A před B, bude preferovat také $2A$ před součtem A a B. Pro názornost budeme v dalším používat obvyklý výraz *užitek* (Ramsey používá výrazy *goods* a *bads*). Nemá-li člověk žádné pochybnosti, pak volí takové jednání, které maximalizuje jeho užitek. Jestliže o nějakém tvrzení P pochybuje, pak postupuje podobně, ale všechny hodnoty užitku, které má získat za předpokladu, že je tvrzení T pravdivé, násobí týmž zlomkem $p < 1$, který se pak nazve *stupněm přesvědčení o* P. Jiná formulace je následující: předpokládejme, že stupeň přesvědčení p je roven m/n; dotyčná osoba v tom případě zvolí takové jednání, které by zvolila při každém opakování v případě, že by se situace měla opakovat n-krát, přičemž v m z těchto opakování je tvrzení P pravdivé.

K tomu Ramsey uvádí následující příklad: představme si, že dojdeme na rozcestí a nevíme jistě, kterou ze dvou možných cest zvolit. O jedné se domníváme, že je správná spíše než druhá. Rozhodneme se, že se vydáme po ní, přitom se však stále poohlížíme po někom, kdo by nám poradil. Spatříme-li někoho půl míle cesty přes pole, bude naše rozhodnutí, zda se za ním vydáme, záležet na obtížnosti cesty přes pole v porovnání s nepříjemnostmi plynoucími z volby nesprávné cesty, pokud by naše volba nebyla správná, ale také na tom, jak moc věříme, že zvolená cesta správná je. Čím větší bude naše přesvědčení p o správnosti naší volby, tím kratší cestu přes pole se nám bude chtít podstoupit; tato vzdálenost pak může sloužit k vyjádření míry stupně přesvědčení. Ramsey uvažuje funkci $f(x)$, znázorňující nepohodlí způsobené chůzí přes pole do vzdálenosti x yardů, a užitek r, resp. w, plynoucí z dosažení správného, resp. nesprávného cíle, a ptá se, jaké jednání by přineslo nejvyšší užitek, kdyby mělo být zvoleno při každém z n opakování téže situace, přičemž v np případech by zvolená cesta byla správná a ve zbývajících $n - np$ případech nesprávná. Kdybychom se nikdy nezeptali, byl by náš užitek roven $npr + (n - np)w = nw + np(r - w)$; kdybychom se naopak zeptali pokaždé, pak by byl celkový užitek roven $nr - nf(x)$ (vždy dojdeme do správného cíle). Do vzdálenosti x yardů přes pole se tedy vydáme, bude-li platit:

$$nw + np(r - w) < nr - nf(x) \qquad \text{tedy} \qquad f(x) < (r - w)(1 - p). \tag{1.45}$$

Označme symbolem d *kritickou vzdálenost*, pro kterou je $f(d) = (r - w)(1 - p)$. Pro příslušný stupeň přesvědčení pak platí:

$$p = 1 - \frac{f(d)}{r - w}\,. \tag{1.46}$$

V dalším Ramsey opouští předpoklad aditivity a formuluje ještě jiné řešení vycházející z pouhého srovnávání preferencí. Stručně řečeno, osoby, jejíž stupeň přesvědčení o pravdivosti tvrzení P nás zajímá, se budeme ptát, zda by preferovala *svět* α, ať se stane cokoli, anebo svět β v případě, že by bylo P pravdivé, a svět γ v případě, že by P bylo nepravdivé. K tomu pak Ramsey formuluje axiomy popisující konzistentní rozhodování o takovýchto nabídkách.

Bruno de Finetti

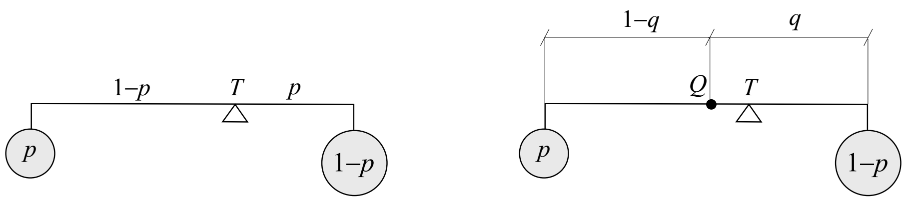
Nezávisle na Ramseyovi rozvíjel svou teorii Bruno de Finetti (1906–1985),[90] který jediné východisko z potíží spojených s různými přístupy k pravděpodobnosti viděl v důsledném *subjektivismu*. Tvrdil, že nemá smysl se ptát, jaká je pravděpodobnost určitého jevu sama o sobě – pravděpodobnost má pouze subjektivní význam a vždy závisí na osobě, která ji udává, a na jejích znalostech. Podobně jako Ramsey proto pravděpodobnost považoval za míru osobního přesvědčení a tvrdil, že to je také jediná smysluplná definice pojmu pravděpodobnosti. V přednáškách [104] později uvedl, že jej na tuto myšlenku přivedla četba Czuberovy knihy [C37], která začíná diskusí různých přístupů k pravděpodobnosti.

Své nové základy pravděpodobnosti Finetti popsal v italském pojednání *Sul significato soggettivo della probabilità* (*O subjektivním významu pravděpodobnosti*) [98], které vyšlo v roce 1931. Z dalších prací zde uveďme alespoň články [99]–[101], knihu [102] a posmrtně vydanou knihu [103], resp. [104], která zachycuje, jak Finetti pohlížel na teorii pravděpodobnosti ke konci svého života.

[90] Bruno de Finetti studoval od roku 1923 na polytechnice v Miláně, ve třetím ročníku však přestoupil na nově založenou milánskou univerzitu, na níž bylo možné studovat matematiku; studia zakončil v roce 1927 úspěšnou obhajobou disertační práce z oblasti afinní geometrie. Po absolutoriu nastoupil do statistického úřadu Instituto Centrale di Statistica (ISTAT) v Římě, v roce 1930 se navíc habilitoval pro matematickou analýzu na římské univerzitě, kde pak přednášel jako soukromý docent. V roce 1931 Finetti odešel do Terstu, kde do roku 1946 pracoval jako pojistný matematik pro pojišťovnu Generali. Kromě toho učil matematickou analýzu, finanční a pojistnou matematiku a počet pravděpodobnosti na univerzitě v Terstu a dva roky také v Padově. V roce 1946 byl jmenován řádným profesorem finanční matematiky a statistiky na univerzitě v Terstu, v roce 1954 získal profesuru na univerzitě v Římě, kde působil až do svého odchodu na odpočinek v roce 1976.

Ke stanovení pravděpodobnosti Finetti v práci [98] navrhl využít princip *koherentních sázek*, s nímž jsme se seznámili v části 1.1.2 (viz str. 15–17). Připomeňme, že tento princip je mimořádně zajímavý také z hlediska didaktiky matematiky; kromě toho, že je pro danou osobu nejvýhodnější stanovit kurz upřímně, plynou z koherence základní axiomy teorie pravděpodobnosti s výjimkou spočetné aditivity (viz (1.33) vpravo), kterou Finetti nepovažuje za důležitou a požaduje jen aditivitu konečnou.[91]

V pojednání [98] Finetti rovněž uvažoval alternativní přístup, založený na kvalitativní relaci „pravděpodobný alespoň jako". V 60. a 70. letech 20. století se pak přiklonil k vyhodnocení pravděpodobnosti založené na penalizaci: dotyčné osoby se zeptáme, jakou pravděpodobnost p přisuzuje jevu A, přičemž ji upozorníme, že jí budou uděleny určité trestné body závisející na uvedené odpovědi a na tom, zda jev A nastane či nikoli. Nejjednodušší je tzv. *Brierovo skóre*, které se používá k hodnocení úspěšnosti předpovědi počasí a které stanoví penalizaci $(p - |A|)^2$, kde $|A| = 1$ v případě, že jev nastane, a $|A| = 0$ v případě, že nenastane. V knize [104] Finetti pomocí jednoduché mechanické představy objasňuje, proč je dotázaná osoba nucena udat hodnotu pravděpodobnosti p, kterou si skutečně myslí: Uvažujme soustavu dvou kuliček o hmotnostech p a $1 - p$, zavěšených na opačných koncích tyče jednotkové délky a zanedbatelné hmotnosti, podepřené v těžišti T (viz obr. 1.5 vlevo). Kdyby daná osoba udala pravděpodobnost q, byla by střední hodnota penalizace podle jejího názoru rovna $p(1 - q)^2 + (1 - p)q^2$; v mechanickém modelu tento výraz vyjadřuje moment setrvačnosti soustavy vzhledem k bodu Q (viz obr. 1.5 vpravo). Minimalizace očekávané penalizace tedy odpovídá nalezení bodu, vzhledem k němuž je moment setrvačnosti soustavy minimální. Podle Steinerovy věty se jedná právě o těžiště; jinde je moment setrvačnosti větší o $(p - q)^2$. Stejný výsledek lze odvodit i algebraicky, uvedená fyzikální představa je však velmi názorná a jednoduchá.



Obr. 1.5 Brierovo skóre – mechanický model

Finetti se často vyjadřoval poněkud provokativně. Proslulý je například jeho výrok, že *pravděpodobnost neexistuje*, kterým však chtěl především poukázat na nedostatky objektivních či logických přístupů. Souhlasil s tím, že vyhodnocování pravděpodobností by mělo vycházet z veškeré dostupné evidence včetně četností, symetrií atd., jen trval na tom, že by byla chyba tyto prvky považovat za základ její definice, protože vedle nich každý odhad pravděpodobnosti závisí

[91] D. Gillies v knize [120] ukazuje, že spočetnou aditivitu lze bez problémů zavést i u koherentních sázek; stačí dodat předpoklad, že se mohou předávat vždy jen konečné částky.

i na prvcích subjektivních, například na tom, jaký názor si dotyčná osoba učiní o neznámých skutečnostech na základě dostupné evidence; samotné shromažďování a vyhodnocování informací závisí na pečlivosti a zkušenosti toho, kdo je provádí, na jeho optimistickém či pesimistickém postoji, na jeho ovlivnitelnosti nejnovějšími údaji apod.

Pojednání, která Finetti publikoval v třicátých letech, zůstala dlouho téměř nepovšimnutá; ve francouzském jazykovém okruhu získal určitou pozornost článek [101], v anglicky mluvících zemích se však Finetti dostal do širšího povědomí až po druhé světové válce, a to díky spolupráci s L. J. Savagem a jeho knize [317] z roku 1954, později také díky překladům starších článků do angličtiny.

1.3.4 Četnostní interpretace pravděpodobnosti

Subjektivní i logické pojetí pravděpodobnosti kritizoval Robert Leslie Ellis (1817–1859), člen cambridgeské Trinity College, který se základy teorie pravděpodobnosti zabýval v článku *On the Foundations of the Theory of Probabilities* [87] z roku 1849; několik dalších poznámek k tomuto tématu potom uveřejnil v článku *Remarks on the Fundamental Principle of the Theory of Probabilities* [88], vydaném o sedm let později. Ellis tvrdil, že výsledky teorie pravděpodobnosti neposkytují ani míru nějakého duševního stavu, ani návod pro usuzování o tvrzeních, jejichž pravdivost je nejistá, ale jen poměr počtu výskytů sledovaného jevu při mnohonásobném opakování určitého pokusu ku počtu všech provedených pokusů. A právě tyto relativní četnosti by podle Ellise měly být základem vlastní definice pravděpodobnosti.

Pokus, který se opakuje (například hod stejnou kostkou), Ellis přirovnává k *rodu* (*genus*) a výskyt konkrétního jevu (například že padne šestka) přirovnává k *druhu* (*species*). Pravděpodobnost je tedy relativní četnost individuí určitého druhu v daném rodu; rod přitom může chápán i přímo jako určitá skupina existujících jedinců.

Na Ellisovy myšlenky navázal v knize *The Logic of Chance* [380] další Cambridgeský matematik, logik a filosof, John Venn (1834–1923), který vycházel z pojmu *série* či *posloupnost* (*series*), kterou chápal buď jako posloupnost výsledků opakovaného pokusu, nebo jako posloupnost tvořenou členy nějaké populace. Venn pracoval s posloupnostmi konečnými, o každé však předpokládal, že ji lze libovolně prodloužit. Pravděpodobnost určitého jevu pak definoval jako zlomek, k němuž se bude při dlouhém opakování pokusu nebo s rostoucí velikostí sledované skupiny „blížit“ podíl počtu členů vybrané posloupnosti tvořené nositeli určitého znaku a počtu členů celé posloupnosti (viz [380], str. 163).

Hned v úvodu Venn zdůrazňuje, že například tvrzení, že dva ze tří novorozenců se nedožijí 33 let, neznamená, že vybereme-li 30 konkrétních novorozenců, pak jich před dovršením 33 let zemře právě 20; bude-li se však počet zkoumaných novorozenců zvětšovat, bude se podíl počtu předčasně zesnulých a všech narozených blížit ke 2/3. Potom dodává, že uvažované posloupnosti jsou *zvláštního druhu, který lze nejlépe popsat slovy, že kombinují individuální nepravidelnost s pravidelností celku* [...] *Délka života jednotlivce je obecně ne-*

jistá, průměrná délka života skupiny lidí se však stává jistou. Čím větší počet vybereme z davu, tím jasnější budou projevy pořádku a tím blíže k sobě budou mít průměrné délky ve všech vybraných skupinách. [...] *Požáry, ztroskotání, zemědělské výnosy, narození, sňatky, sebevraždy; téměř nezáleží na tom, jakou charakteristiku si pro pozorování zvolíme. Nepravidelnost jednotlivých výskytů mizí, jakmile jich vezmeme velký počet, a nakonec se zdá, že pro praktické účely zmizí docela.* ([380], str. 4–6)

Dodejme, že Venn jako zdroj inspirace uvedl také knihu *A System of Logic* [240] Johna Stuarta Milla (1806–1873); Mill pak v pozdějších vydáních uvedené práce naopak doporučoval Vennovu knihu [380].

Kolektiv

Německý fyzik, filosof a psycholog Gustav Theodor Fechner (1801–1887), jeden ze zakladatelů experimentální psychologie, použil pro Vennovy posloupnosti (chápané jako členy nějaké skupiny) pojem *kolektivní objekt* (*Kollektivgegenstand*) nebo *kolektivní řada* (*Kollektivreihe*). V knize *Kollektivmasslehre* [93], která vyšla deset let po jeho smrti, definoval *kolektivní objekt* jako *objekt sestávající z neurčitého počtu náhodně se odlišujících exemplářů, jež určitým způsobem náležejí témuž druhu nebo rodu* ([93], str. 3). Jako příklady kolektivních objektů uvádí kromě jiného lidstvo (tzv. *objekt v širším smyslu*), popř. lidi určitého pohlaví, věku či rasy (*objekt v užším smyslu*), brance z určité země, klasy obilí na poli (*prostorové kolektivní objekty*) či například průměrnou teplotu naměřenou 1. ledna na daném místě v různých letech (*časové kolektivní objekty*). Fechner se zajímal především o praktické aplikace v antropologii, zoologii, botanice, meteorologii apod.

Německý matematik a fyzik Georg Ferdinand Helm (1851–1923) potom v pojednání *Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Kollektivbegriffe* [141] z roku 1902 na pojmu *Kollektivgegenstand* založil definici pravděpodobnosti: určitou skupinu jedniců či exemplářů rozdělil do disjunktních skupin podle určitých znaků a pravděpodobnost definoval jako podíl počtu exemplářů v dané skupině a počtu exemplářů ve sjednocení všech skupin. Jako jeden ze základních pojmů teorie pravděpodobnosti, i když ne přímo jako základ definice, převzal pojem *Kollektivgegenstand* také Heinrich Bruns (1848–1919), německý astronom, matematik a geodet, který mu věnoval velkou pozornost v knize *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre* [47] z roku 1906.

K popularizaci tohoto pojmu přispěl rovněž Emanuel Czuber (viz kap. 7), který se podrobně zabýval jeho matematickým popisem i praktickým významem například v článku *Die Kollektivmaßlehre* [C41], otištěném v roce 1906 v časopise *Zeitschrift für die Realschulwesen*; v následujícím roce pak vyšlo stejnojmenné pojednání [C42] v časopise *Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens* a kniha [C43]. Samostatnou kapitolu *Kollektivmaßlehre* zařadil Czuber také do druhého vydání monografie *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung* [C44] z roku 1908,[92] kde můžeme nalézt následující definici:

[92]Ve vydání prvním [C37] z roku 1903 se Czuber rovněž zabývá statistickou analýzou vel-

Jako kolektivní objekt se označuje množina objektů stejného druhu, které lze uspořádat podle nějakého proměnného, číselně vyjádřitelného znaku.

([C44], str. 345)

Pojem *Kollektivgegenstand* byl později zkrácen na *Kollektiv* – tento tvar lze nalézt například v knize *Über Möglichkeit und Wahrscheinlichkeit: Beiträge zur Gegenstandstheorie und Erkenntnistheorie* [234], kterou v roce 1915 vydal rakouský filosof Alexius Meinong (1853–1920), žák Franze Brentana a přítel Tomáše Garriguea Masaryka.

Richard von Mises

Richard von Mises (1883–1953)[93] navázal na G. F. Helma v tom smyslu, že na pojmu *kolektiv* založil přímo vlastní definici pravděpodobnosti. Přitom však zdůraznil, že Helm nepožadoval *nepravidelnost* kolektivu, a proto jeho teorie nemohla být úplná.

Mises svou teorii poprvé zformuloval v pojednání *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [241] z roku 1919. Jejím základem byly nekonečné posloupnosti prvků charakterizovaných různými *znaky* (*Merkmal*), které vyjadřoval jako body v k-dimenzionálním *příznakovém prostoru* (*Merkmalraum*) M. Například pro posloupnost tvořenou tahy číselné loterie by takovým znakem byla uspořádaná pětice vylosovaných čísel; při sledování pohybu molekuly plynu by byl znakem vektor rychlosti. Nekonečná posloupnost $K = (e_n)$, kde každému e_n je jako *znak* přiřazena uspořádaná n-tice reálných čísel, přičemž ne všechny členy mají stejný znak (ani po odstranění libovolného konečného počtu členů), se nazývá *kolektivem*, jsou-li splněny následující podmínky:

1. *Existence limity:* Pro každou podmnožinu $A \subseteq M$ existuje limita

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N} = W_A\,, \tag{1.47}$$

kde N_A udává, kolikrát se mezi prvními N členy vyskytuje člen se znakem z množiny A.

2. *Nepravidelnost přiřazení:* Uvažujme dvě libovolné disjunktní podmnožiny A, $B \subseteq M$ příznakového prostoru a předpokládejme, že existují limity W_A, W_B, dané vztahem (1.47), které nejsou obě nulové. V posloupnosti K vynechme všechny členy, jejichž znak nepatří ani do A, ani do B, zbývající členy očíslujme 1, 2, 3, … a z této posloupnosti pak vyberme podposloupnost K' takovým

kých souborů, i když nepoužívá Fechnerovy pojmy *Kollektivgegenstand* a *Kollektivmaßlehre*, na které upozorňuje jen ve dvou poznámkách pod čarou.

[93]Richard von Mises studoval v letech 1901–1906 na technice ve Vídni a ještě před absolutoriem se stal asistentem Georga Hamela (1877–1954) na německé technice v Brně. V roce 1908 získal na vídeňské technice doktorát a habilitoval se na technice v Brně. O rok později byl jmenován profesorem aplikované matematiky na univerzitě ve Štrasburku. Za první světové války sloužil jako konstruktér, testovací pilot a učitel v rakouském vojenském letectvu. V roce 1919 se stal profesorem hydrodynamiky a aerodynamiky na technice v Drážďanech, o rok později odešel na univerzitu do Berlína, kde byl jmenován profesorem a ředitelem nově zřízeného institutu aplikované matematiky. V roce 1933 odešel na univerzitu do Istambulu, o šest let později pak pokračoval do Spojených států a začal přednášet na Harvardově univerzitě, kde byl v roce 1944 jmenován profesorem aerodynamiky a aplikované matematiky.

způsobem, že volba indexu nezávisí na znaku příslušného prvku. Potom existují také limity W'_A, W'_B, dané vztahem (1.47), a platí: $W'_A : W'_B = W_A : W_B$. Limita (1.47) se pak nazývá *pravděpodobnost výskytu znaku náležejícího do* A *v kolektivu* K.

Mises tedy pravděpodobnost definoval axiomaticky. Pro takto zavedený pojem potom dokázal řadu tvrzení; z první podmínky například ihned plyne, že pravděpodobnost je reálné číslo z uzavřeného intervalu $[0, 1]$ a že pro libovolné disjunktní podmnožiny A, B příznakového prostoru platí: $W_{A \cup B} = W_A + W_B$. Dodejme, že druhé tvrzení lze zobecnit na sjednocení konečného počtu disjunktních množin, spočetná aditivita požadovaná Kolmogorovem (viz (1.33) na str. 52) však obecně neplatí.

V knize *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit* [242] z roku 1928, která byla určena především „nematematikům“, Mises základní myšlenky svého pojetí pravděpodobnosti shrnul takto:

1. O pravděpodobnosti lze hovořit pouze tehdy, je-li dán dobře určený a přesně vymezený kolektiv.

2. Kolektiv je hromadný jev nebo opakovaný děj splňující následující dva požadavky: relativní četnosti jednotlivých znaků musí mít určitou limitu a ta musí zůstat nezměněna, když se z celku vyjme část prvků, jejichž pozice je libovolně zvolená.

3. Splnění posledního požadavku se označuje jako princip nepravidelnosti nebo princip vyloučení herního systému.

4. Limita relativní četnosti, s níž se vyskytuje určitý znak, nezávisle na volbě pozic, se nazývá „pravděpodobnost výskytu tohoto znaku v uvažovaném kolektivu“. Jestliže se někdy objeví pouze slovo „pravděpodobnost“, pak se tak stane jen pro zestručnění a dodatek je třeba mít vždy na paměti. ([242], str. 29)

Formulace podmínky nepravidelnosti se v různých Misesových pracích liší, základní smysl však zůstává stejný: Mises tvrdí, že teorie pravděpodobnosti by se měla týkat jen náhodných jevů, a uvedenou podmínkou se snaží specifikovat, co pojem *náhodný* znamená. V knize [242] uvažuje následující ilustrační příklad: představme si, že podél silnice jsou ve stometrových rozestupech umístěny kamenné patníky, z nichž každý desátý, vyznačující kilometr, je větší. O takovéto posloupnosti bychom určitě neřekli, že je náhodná; vydáme-li se po silnici, pak můžeme snadno předpovědět, zda příští patník bude velký nebo malý. Kdybychom přitom patníky počítali, pak by se relativní četnost velkých patníků s rostoucí vzdáleností přibližovala k 1/10. Jestliže bychom však při počítání brali v úvahu například každý druhý patník, pak bychom získali relativní četnost 1/5 nebo 0 podle toho, zda by v naší vybrané posloupnosti byly velké patníky zahrnuty nebo nikoli; podobně bychom mohli dojít k relativní četnosti 1/2 apod. Naproti tomu při opakovaném hodu dvojicí nevychýlených kostek bude limitní relativní četnost výskytu 12 ok rovna 1/36 a tato hodnota se nezmění, omezíme-li se na libovolnou nekonečnou vybranou posloupnost.

Ve 20. a 30. letech dvacátého století byly Misesovy myšlenky řadou matematiků více či méně kriticky a ve více či méně upravené podobě přejímány. Emanuel Czuber Misesovu teorii podrobně popsal v dodatku zařazeném na konci čtvrtého vydání knihy [C46] z roku 1924. Zdůraznil však, že se neztotožňuje s Misesovým názorem, že jakékoli filosoficky zaměřené úsilí se nyní stává bezpředmětným, a podotkl, že teorii pravděpodobnosti nelze vyčerpávajícím způsobem vyjádřit jako matematickou disciplínu.

Mírnou modifikaci Misesovy definice navrhl Arthur H. Copeland (viz [55] a [56]), podstatnější změny popsali například Karl Dörge ([81], 1930), Hans Reichenbach ([298], 1932) a Erhard Tornier ([373], 1933). Většina předních matematiků se však k Misesově teorii a jejím modifikacím stavěla odmítavě a upřednostnila Kolmogorovovu definici podanou v jeho *Základech* [196] z roku 1933.[94] Ke kritikům četnostního pojetí patřil rovněž Bruno de Finetti, zastánce subjektivismu, o němž jsme hovořili v části 1.3.3. Finetti považoval myšlenku nekonečné posloupnosti pokusů za nesmyslnou: vynecháme-li v posloupnosti libovolný konečný počet členů, její limita se nezmění. My jsme však opakováním pokusu schopni zjistit právě jen tyto „zbytečné“ členy, protože náš život i celý vesmír trvá jen konečně dlouho. Navíc nás často zajímá pravděpodobnost nějakého konkrétního neopakovatelného jevu či domněnky, které Mises ze své teorie předem vyloučil.

Ohlasy v českých zemích

Otomar Pankraz, jemuž je věnována 8. kapitola této publikace, uveřejnil v roce 1932 recenzi Misesovy knihy *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik* [243] z roku 1931, v jejímž úvodu píše:

Tato učebnice sleduje dvojí cíl: předně má jednotným způsobem vyložiti celý počet pravděpodobnosti, a za druhé má definitivně prokázati nutnost a převahu autorova stanoviska [...] *nad tradičními základy počtu pravděpodobnosti. Předem možno prohlásiti, že přes různé námitky autor svého cíle zcela dosahuje.*

Po objasnění základních bodů Misesovy teorie Pankraz pokračuje:

Proti této teorii jsou uváděny různé námitky. Tak na př. se praví, že analytického pojmu limity nelze v počtu pravděpodob. užíti. Tato námitka není oprávněna, neboť z postupu, kterým Mises odvozuje zákony velkých čísel, velmi jasně vyplývá, že s analytickou limitou úplně vystačíme. Vážnější jsou námitky, které se opírají o princip nemožnosti herního systému a o operaci „spojení“. Východisko z těchto nesnází nalézám v tom, že Misesovy požadavky prohlásíme za principy, které mají přímý vztah ke zkušenosti, a nikoliv za čistě logické axiomy (třebas ze zkušenosti odvozené). [...] *O celkovém významu knihy postačí říci, že jest nezbytná pro každého (pro teoretika i pro praktika), kdo s počtem pravděpodobnosti pracuje.*[95]

Kolektivem, chápaným ovšem ve smyslu konečné množiny individuí, se Pankraz zabýval také v habilitační práci *Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs* [P8], která byla v roce 1933 otištěna v časopise Aktuárské vědy, a v pojednáních [P10] a [P11] z téhož roku – podrobněji viz část 8.2.1, str. 221.

---

[94] Podrobněji viz například Lambalgenův článek [204].

[95] ČPMF 61 (1932), 362–363.

Na vydání Misesovy knihy [243] poměrně rychle zareagoval také Karel Rychlík, který na letní semestr akademického roku 1931/32 vypsal na pražské univerzitě výběrovou přednášku s názvem *Počet pravděpodobnosti (Misesova teorie)* (viz str. 53). V roce 1933 pak Rychlík uveřejnil recenzi[96] knihy *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie* [186], v níž Erich Kamke podal teorii pravděpodobnosti založenou rovněž na nekonečných posloupnostech, avšak pouze pro diskrétní rozdělení a bez druhého Misesova axiomu.

Ve dvojici článků [311] a [312] Rychlík studoval posloupnosti $A = (a_n)_{n=0}^{\infty}$, jejichž každý člen je roven jednomu z konečného počtu navzájem různých reálných čísel $A_1, A_2, \ldots, A_h$. Relativní četnost hodnoty A_ν mezi prvními n členy posloupnosti A Rychlík označil symbolem $N_n(A, A_\nu)$ a dále uvažoval vybrané posloupnosti $A_{k,r} = (a_r, a_{r+k}, a_{r+2k}, \ldots)$, kde $k, r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, $k \geq 1$ (tj. $A = A_{1,0}$). V návaznosti na Böhmerovo pojednání [41] pak dokázal:[97]

Věta. Nechť má posloupnost A tyto vlastnosti:[98]

I. existují limity $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_n(A, A_\nu)}{n} = p_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h,$

II. existují limity $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_n(A_{k,r}, A_\nu)}{n} = p_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h,$
$k > 1, \quad 0 \leq r \leq k-1,$

III. v posloupnosti A se alespoň dvě z čísel $A_1, \ldots, A_h$ vyskytují v nekonečném počtu.

Potom má analytická funkce definovaná mocninnou řadou $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ jednotkovou kružnici za přirozenou hranici.

V závěru Rychlík ještě dokázal, že *pro k-tý kořen z jednotky ε platí při radiální limitě:*[99] $\lim_{z\to\varepsilon}(\varepsilon - z)f(z) = 0$.

Četnostnímu pojetí Rychlík věnoval pozornost také v učebnici *Počet pravděpodobnosti* [313] z roku 1938, kde sice vycházel z Kolmogorovovy axiomatiky, s ohledem na praktické aplikace však také popsal *posloupnostní model pro rozložení pravděpodobnosti* a ukázal možnosti jeho využití.

Na závěr dodejme, že přes všechnu kritiku je obecně četnostní interpretace základem dnes široce využívaných statistických metod, například intervalů spolehlivosti odhadu střední hodnoty náhodné veličiny aj. Slovy I. Saxla:

[...] *jakkoli je četnostní interpretace snad nejsnáze ze všech interpretací napadnutelná a zpochybnitelná ve svých základních principech a koncepcích, v praxi je nesporně nejvíce využívána.* ([320], str. 152)

[96] ČPMF 62 (1933), 65–66.

[97] Böhmer odvodil obdobnou větu pro posloupnosti sestávající z nul a jedniček.

[98] Jak Rychlík poznamenává, v terminologii počtu pravděpodobnosti první podmínka znamená, že posloupnost A má vzhledem k číslům $A_1, A_2, \ldots, A_h$ rozdělení s pravděpodobnostmi $p_1, p_2, \ldots, p_h$.

[99] [311], str. 2.