KAPITOLA I.
Rovnice 1. řádu

§ 1. Existenční theorém

Zatím bude vše reálné. Budeme probírat rovnice řešené podle y'. Dána je funkce $f(x, y)$. Napíšeme rovnici

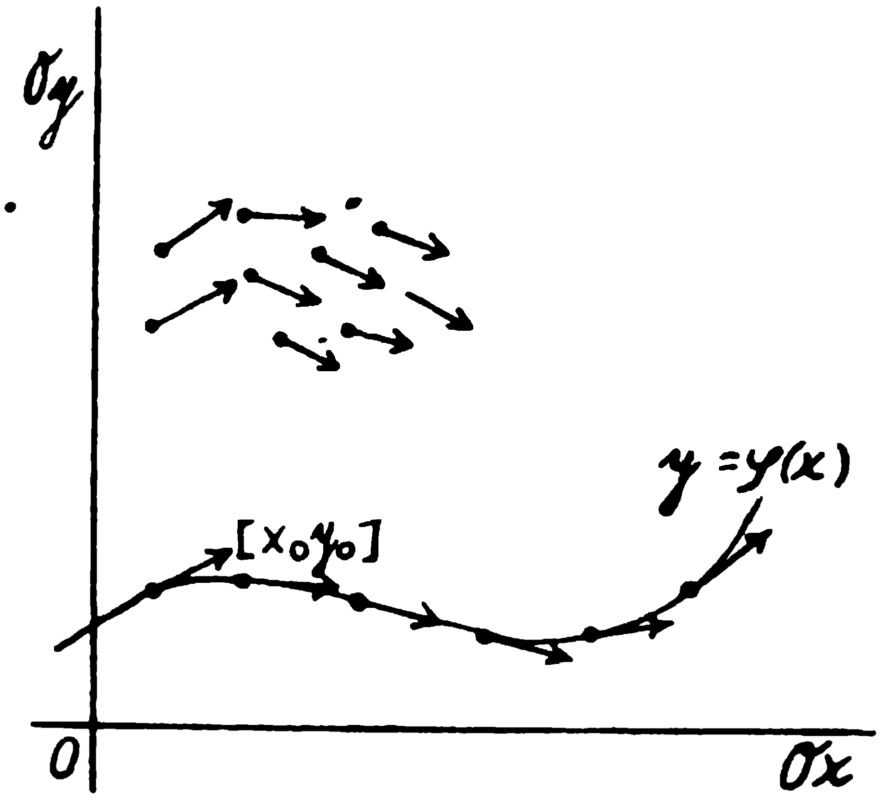
$$(1) \qquad y' = f(x, y) .$$

Říkáme, že funkce $\varphi(x)$ je v intervalu (a, b) řešením rovnice (1), jestliže pro každé $x \in (a, b)$ platí $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Jestliže mimo to je také derivace funkce φ v bodě a zprava rovna $f(a, \varphi(a))$, budeme říkati, že φ je řešením rovnice (1) v intervalu $\langle a, b)$, podobně pro intervaly $(a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$ (v bodě b jde nyní o derivaci zleva).

Poznamenejme hned toto: Jestliže $\varphi(x)$ je řešením rovnice (1) v intervalu $(a, b\rangle$ a $\psi(x)$ je řešením rovnice (1) v intervalu $\langle b, c)$ a je-li $\varphi(b) = \psi(b)$, potom ihned dovedeme nalézt řešení v intervalu (a, c). Položme totiž $\chi(x) = \varphi(x)$ pro $a < x \le b$, $\chi(x) = \psi(x)$ pro $b \le x < c$. Zřejmě totiž splňuje $\chi(x)$ rovnici $\chi'(x) = f(x, \chi(x))$ v (a, b) i v (b, c); ale splňuje ji též v bodě b; neboť v bodě b má funkce $\chi(x)$ derivaci zleva $f(b, \varphi(b)) = f(b, \chi(b))$ a derivaci zprava rovněž $f(b, \psi(b)) = f(b, \chi(b))$.

Poznamenejme dále: Nejjednodušší rovnice $y' = f(x)$, kde f je spojitá funkce, má řešení $y = \int f(x)\,dx$ + konst.; proto se i obecně místo "řešení diferenciální rovnice" říkává "integrál diferenciální rovnice". Nebudeme tohoto výrazu užívat.

Mysleme si, že každým bodem (x, y), v němž $f(x, y)$ je definována, vedeme přímku $P_{[x, y]}$ o směrnici $f(x, y)$ (na obrázku je nakreslena jen krátká úsečka). Funkce $\varphi(x)$ je pak řešením tehdy a jen tehdy, jestliže křivka $y = \varphi(x)$ se v každém svém bodě $[x, y]$ dotýká příslušné přímky $P_{[x,y]}$.



Z názoru se zdá toto: zvolíme-li si libovolný bod $[x_0, y_0]$, potom jím prochází jedna a jen jedna integrální křivka, tj. existuje jedno a jen jedno řešení φ rovnice (1), které vyhovuje podmínce $\varphi(x_0) = y_0$.
To je vskutku pravda za jistých omezujících předpokladů o funkci $f(x, y)$. Důkaz nyní provedeme; základní roli v něm hraje tzv. Lipschitzova podmínka, o níž nyní promluvíme.

Budiž dána funkce $f(x, y)$, definovaná ve všech bodech množiny A. Říkáme, že f splňuje v A <u>Lipschitzovu podmínku</u> vzhledem k y (a to Lipschitzovu podmínku s konstantou N),

jestliže

(2) $([x, y_1] \in A, [x, y_2] \in A) \Rightarrow (|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N|y_2 - y_1|)$.

Potom ovšem f splňuje Lipschitzovu podmínku [8/] i v každé množině $B \subset A$.

<u>Příklad 1.</u> Jestliže každá rovnoběžka s osou y protíná A buďto v prázdné množině nebo v bodě, úsečce, polopřímce či přímce a je-li v $A \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq N$, je splněno (2). Neboť pro $[x, y_1] \in A$, $[x, y_2] \in A$ je $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |y_2 - y_1| \cdot |f'_y(x, \eta)|$

kde bod $[x, \eta]$ rovněž leží v A.

8/ Míněna je stále Lipschitzova podmínka vzhledem k y.

Budiž opět dána funkce $f(x, y)$ definovaná v A. Budeme říkati, že f splňuje v A <u>lokálně</u> Lipschitzovu podmínku, jestliže ke každému bodu $[x, y] \in A$ existuje okolí $\mathcal{O}$ tak, že f splňuje Lipschitzovu podmínku v množině $\mathcal{O}A$. (Ovšem pro různé body $[x, y]$ mohou vyjít různé "Lipschitzovy konstanty" N.)

<u>Příklad 2.</u> Je-li A otevřená a je-li f'_y spojitá v A, splňuje f v A lokálně Lipschitzovu podmínku.

<u>D ů k a z :</u> Budiž $[x_0, y_0] \in A$; sestrojme otevřený omezený interval $\mathcal{J} \subset A$ obsahující $[x_0, y_0]$ a tak malý, že f'_y je omezená v $\mathcal{J}$; podle příkl. 1 splňuje f Lipschitzovu podmínku v $\mathcal{J}$.

<u>Příklad 3.</u> Budiž $A = (0,1) \times (0,1)$, $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Potom f nesplňuje v A Lipschitzovu podmínku, ale splňuje ji lokálně v A. Teď si ukážeme, že takovýto případ nemůže nastat u kompaktního A.

<u>Věta 1 (pomocná)</u>. Nechť omezená funkce $f(x, y)$ splňuje v kompaktní množině A <u>lokálně</u> Lipschitzovu podmínku. Potom f splňuje v A Lipschitzovu podmínku.

D ů k a z : Nechť f nesplňuje v A Lipschitzovu podmínku. Potom ke každému přirozenému n existují v A body $[x_n, y_n]$, $[x_n, z_n]$ tak, že $|f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n)| > n|y_n - z_n|$. Budiž $|f(x, y)| < M$ v A, takže $|y_n - z_n| < \frac{2M}{n}$, $\lim_{n \to \infty} (y_n - z_n) = 0$. Existuje vybraná posloupnost $[x_{k_n}, y_{k_n}]$, mající limitu $[\xi, \eta] \in A$.

Potom je též $\lim_{n \to \infty} [x_{k_n}, z_{k_n}] = [\xi, \eta]$ a při tom

$$|f(x_{k_n}, y_{k_n}) - f(x_{k_n}, z_{k_n})| > k_n |y_{k_n} - z_{k_n}| ,$$

takže f nevyhovuje Lipschitzově podmínce v žádné množině $\mathcal{O}A$, kde $\mathcal{O}$ je okolí bodu $[\xi, \eta]$.

Poznámka: Budiž nyní dána nějaká množina $\mathfrak{D} \subset E_2$ a funkce $f(x, y)$, spojitá v $\mathfrak{D}$. Budeme vyšetřovat řešení rovnice (1) "ležící v $\mathfrak{D}$", tj. taková řešení φ, jejichž celý graf leží v $\mathfrak{D}$. Zvolme bod $[x_0, y_0] \in \mathfrak{D}$. Budiž φ funkce, pro kterou $[x, \varphi(x)] \in \mathfrak{D}$ pro všechna $x \in \mathcal{J}$, kde $\mathcal{J}$ je interval obsahující bod x_0. Potom tvrdím: Vztahy

(3) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ pro všechna $x \in \mathcal{J}$ [9], $\varphi(x_0) = y_0$

platí tehdy a jen tehdy, platí-li vztah

(4) $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt + y_0$ pro všechna $x \in \mathcal{J}$.

D ů k a z : Platí-li (3), je φ spojitá v $\mathcal{J}$ (majíc derivaci), tedy je $f(x, \varphi(x))$ - tj. funkce $\varphi'(x)$ - spojitá v $\mathcal{J}$, takže primitivní funkce je dána integrálem $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt + C$ a dosazením $x = x_0$ dostanu $C = y_0$.

Naopak, platí-li (4), je předně $\varphi(x_0) = y_0$, za druhé je $\varphi(x)$ dáno integrálem v (4) jako funkce horní meze, tedy je φ spojitá, tedy i $f(t, \varphi(t))$ je spojitá a tedy derivace integrálu v (4) podle horní meze je $f(x, \varphi(x))$, tj. platí (3).

Tím je řešení diferenciální rovnice (1) s "počáteční podmínkou" $\varphi(x_0) = y_0$ převedeno na řešení "integrální rovnice" (4). To je vhodné - s integrály se lehčeji zachází než s derivacemi (pokud se týče jejich obecných vlastností).

Věta 2. Nechť $f(x, y)$ je v intervalu

$$\mathcal{J} : |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \qquad (a > 0, b > 0)$$

spojitá (a tedy omezená : $|f(x, y)| \leq M$, $M > 0$) a splňuje v $\mathcal{J}$ Lipschitzovu podmínku (s konstantou $N > 0$) vzhledem k y. Položme $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Potom platí:

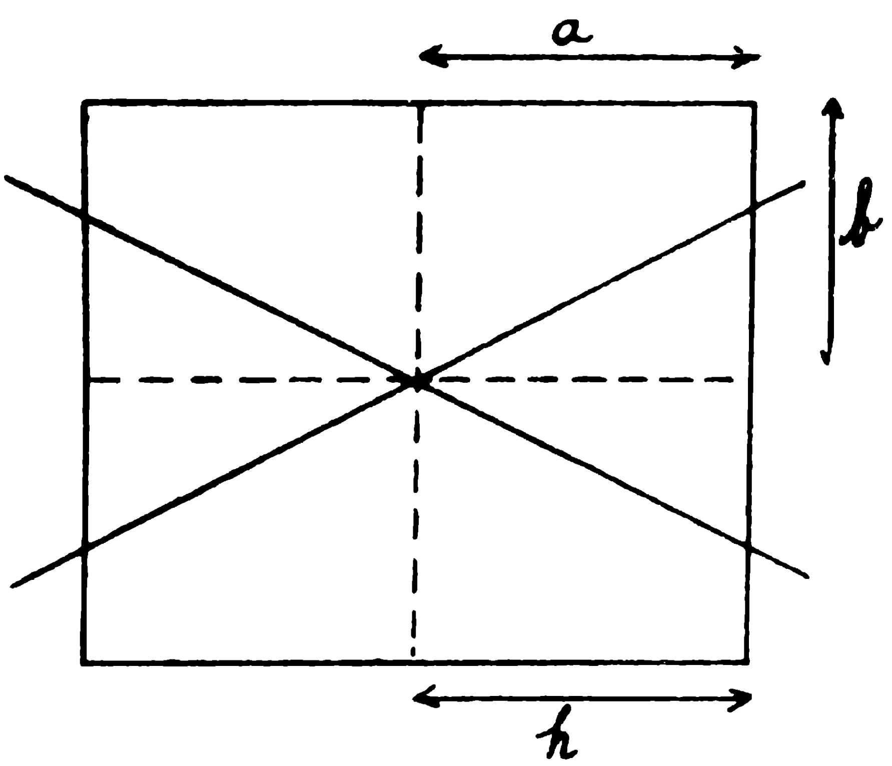
9/ Patří-li k $\mathcal{J}$ jeho počáteční (koncový) bod, míním derivaci v tom bodě zprava (zleva).

1) Existuje řešení $\varphi(x)$ rovnice (1) v intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$, pro které je $\varphi(x_0) = y_0$. Toto řešení leží v $\mathcal{J}$.

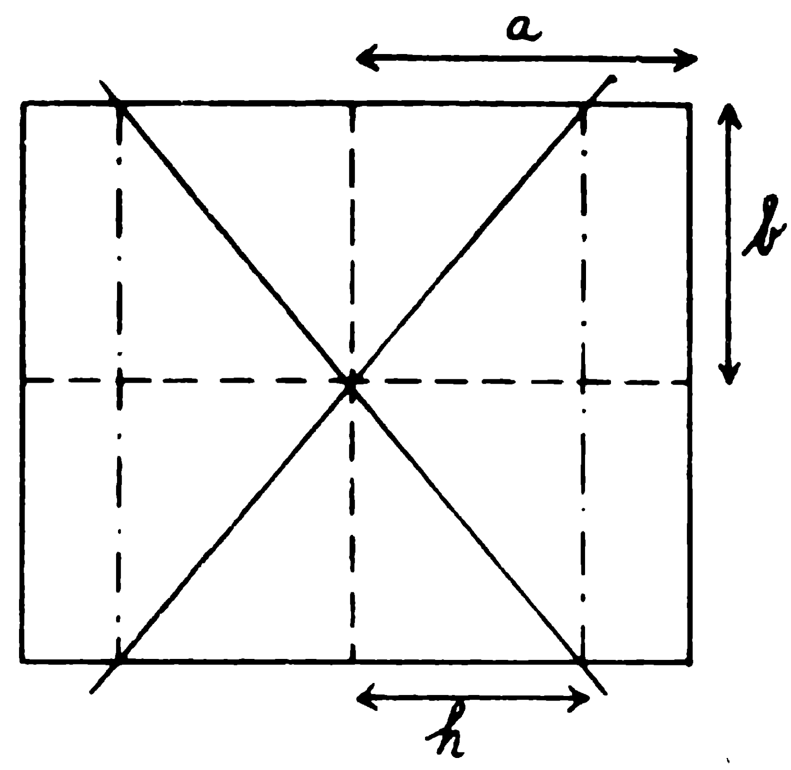
2) Toto řešení je jediné v tomto smyslu: Je-li $\psi(x)$ řešením rovnice (1) v intervalu

$\langle \alpha, \beta \rangle$ $(x_0 - h \le \alpha \le x_0 \le \beta \le x_0 + h)$ a je-li $\psi(x_0) =$ $= y_0$, je $\psi(x) = \varphi(x)$ v $\langle \alpha, \beta \rangle$.

D ů k a z : 1. Je poučné, nakreslit si, co znamená h. Veďte bodem $[x_0, y_0]$ přímky o směrnicích M, $-M$. Vidíte dvě možnosti:



Zde je $h = a$



Zde je $h = \frac{b}{M}$

Označme znakem K interval $|x - x_0| \le h$, $|y - y_0| \le b$.

Pro $x_0 - h \le x \le x_0 + h$ definujme postupně funkce $y_n(x)$ ($n =$ 0, 1, 2, ...) indukcí takto:

$$(5) \quad y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt + y_0$$

pro $n \ge 0$.

Dokáži, že to je možno. K tomu cíli dokáži toto: funkce y_n jsou spojité v $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ a je $|y_n(x) - y_0| \le b$ (splňu-je-li totiž y_n tuto podmínku, je $f(t, y_n(t))$ spojitá v $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ a je možno sestrojit y_{n+1}). Podtržená věta je splněna pro $n = 0$; je-li splněna pro n , je $f(t, y_n(t))$ spojitá a v absolutní hodnotě $\leq M$ v $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$. Lze tedy podle (5) sestrojit $y_{n+1}(x)$, což je spojitá funkce, a je

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt\right| \leq Mh \leq b$$

(zde vidíme, pro jsme se omezili na interval $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$). Tím je tvrzení dokázáno (indukcí).

V intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h\rangle$ dále platí

$$y_1(x) - y_0(x) = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt\right| \leq M|x - x_0|$$

Tvrdím, že platí obecně (n = 1, 2, ...)

$$(6) \qquad |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq MN^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!}$$

(N je Lipschitzova konstanta). Důkaz indukcí: pro $n = 1$ to platí; platí-li (6) pro jisté n , je

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \left|\int_{x_0}^{x}[f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))]\,dt\right| \leq$$

$$\leq N \cdot \left|\int_{x_0}^{x}|y_n(t) - y_{n-1}(t)|\,dt\right| \leq \frac{MN^n}{n!} \cdot \left|\int_{x_0}^{x}|t - x_0|^n\,dt\right| =$$

$$= \frac{MN^n}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

Položme

$$(7) \quad \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n(x) - y_{n-1}(x))$$

Podle (6) je majorantní řadou k řadě v (7) konvergentní řada

$$\frac{M}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N^n h^n}{n!} = \frac{M}{N}(e^{Nh} - 1).$$

Tedy je řada (7) stejnoměrně konvergentní a tedy $\varphi(x)$ spojitá v $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$; je ovšem

$$|y_n(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} M dt \right| \leq M \cdot |x - x_0|$$

a tedy i

(8) $$|\varphi(x) - y_0| \leq M \cdot |x - x_0| < hM \leq b$$

pro $|x - x_0| < h$.

Konečně je

(9) $$\lim_{n \to \infty} f(t, y_n(t)) = f(t, \varphi(t))$$

stejnoměrně v intervalu $|t - x_0| \leq h$; neboť $f(x, y)$ je stejnoměrně spojitá v $\mathcal{J}(|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b)$, tedy ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|f(t, y_n(t)) - f(t, \varphi(t))| < \varepsilon$$

pro všechna $t \in \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$, jakmile $|y_n(t) - \varphi(t)| < \delta$, ale poslední nerovnost je splněna pro všechna $n > n_0(\delta)$ a všechna jmenovaná t, ježto konvergence v (7) je stejnoměrná. Platí (5) ; ježto konvergence v (9) je stejnoměrná a ježto platí (7), lze provést v (5) limitní přechod za integračním znamením a dostáváme (4). Tím je první tvrzení dokázáno.

2. Nyní dokážeme jednoznačnost. Budiž ψ řešení v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ - takové, jak je to řečeno v tvrzení 2 naší věty. Tedy speciálně $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$. Předpokládejme, že v některém bodě $x_1 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ je $\varphi(x_1) - \psi(x_1) \neq 0$; z toho odvodíme spor. Budiž třeba $x_1 > x_0$ (pro $x_1 < x_0$ je důkaz obdobný). Budiž x_2 supremum oněch čísel x intervalu $\langle x_0, x_1 \rangle$, pro něž je $\varphi(x) - \psi(x) = 0$; ježto funkce φ, ψ jsou spojité (majíce derivaci), je nutně $\varphi(x_2) = \psi(x_2)$ a tedy $x_0 \leq x_2 < x_1 \leq \beta \leq x_0 + h$. Podle (8) leží bod $[x_2, \varphi(x_2)] = [x_2, \psi(x_2)]$ uvnitř intervalu $\mathcal{J}$. Lze tedy voliti $\delta > 0$ tak malé, že platí:

1) $x_2 + \delta < x_1$

2) pro $|x - x_2| < \delta$ je $[x, \psi(x)] \in \mathcal{X}$

3) $\delta < \frac{1}{N}$

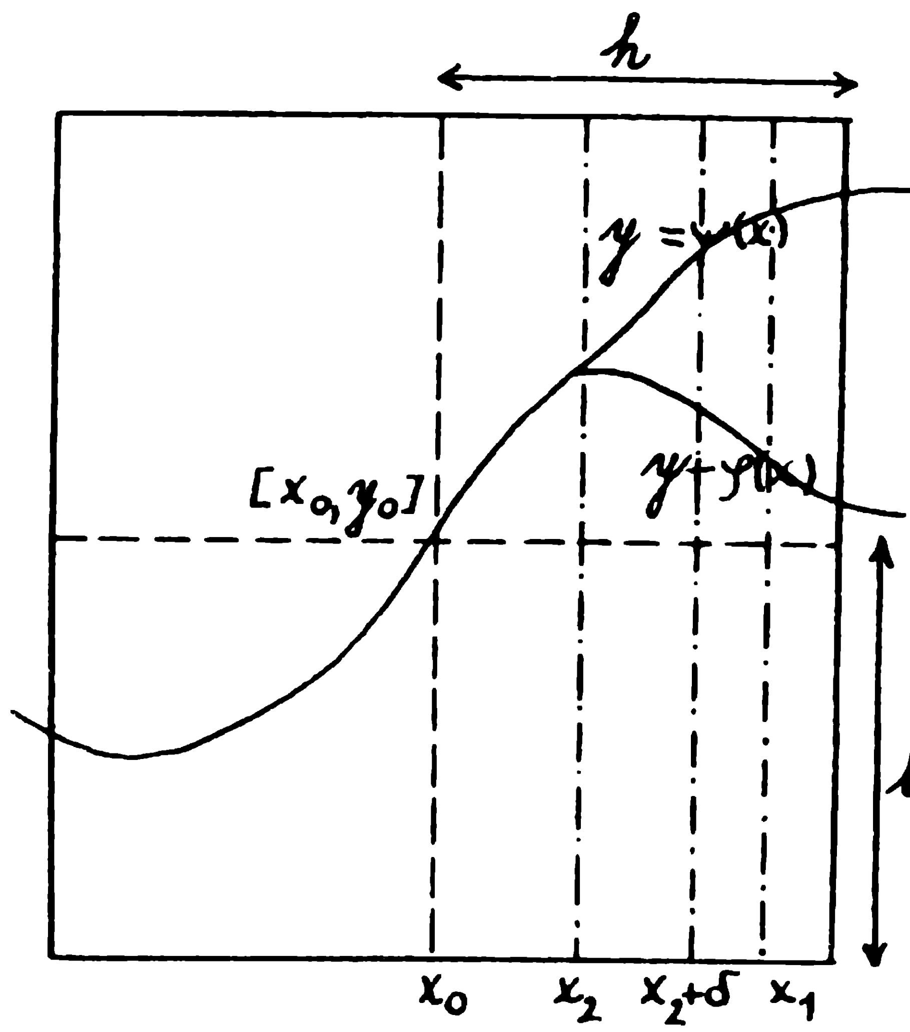
Pro $x_2 < x \leq x_1$ je

$\varphi(x) - \psi(x) \neq 0$,

takže číslo

$$A = \max_{x_2 \leq x \leq x_2+\delta} |\varphi(x) - \psi(x)|$$

je <u>kladné.</u>



Dále je pro

$x_2 \leq x \leq x_2 + \delta$ 10/

$$\varphi(x) = \int_{x_2}^{x} f(t, \varphi(t))dt + \varphi(x_2); \quad \psi(x) = \int_{x_2}^{x} f(t, \psi(t))dt +$$

$+ \varphi(x_2)$ a tedy (Lipschitzova podmínka)

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \int_{x_2}^{x} N\,|\varphi(t) - \psi(t)|dt \leq \delta NA.$$

To platí i pro x, pro něž levá strana nabývá svého maxima, tedy $A \leq \delta NA$, $1 \leq \delta N$, což není pravda. Tím je věta 2 dokázána.

§ 2. <u>Existenční věta "ve velkém". Charakteristiky.</u>

Ve větě 2 jsme dokázali existenci a jednoznačnost řešení rovnice (1) pouze "lokálně", pro jistý dostatečně malý interval $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$. Nyní vyšetříme existenci a průběh řešení "ve velkém", tj. v celém oboru, ve kterém funkce $f(x, y)$ má dostatečně rozumné vlastnosti.

10/ Ježto (3), (4) jsou ekvivalentní a ježto $\varphi(x_2) = \psi(x_2)$.

Budiž nyní $\mathcal{D} \subset E_2$ jakákoliv otevřená množina a nechť $f(x, y)$ je v $\mathcal{D}$ spojitá a splňuje v $\mathcal{D}$ lokálně Lipschitzovu podmínku (k tomu stačí, podle příkladu 2, když f'_y je spojitá v $\mathcal{D}$). Zvolme bod $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$; k tomu se dá sestrojit interval $\mathcal{K} = \langle x_0 - h, x_0 + h \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle \subset \mathcal{D}$ tak, jak byl popsán ve větě 2, načež existuje pro rovnici (1) řešení $\varphi(x)$, ležící v $\mathcal{K}$, definované v $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ a procházející bodem $[x_0, y_0]$ (tj. $\varphi(x_0) = y_0$). Bod $[x_0 + h, \varphi(x_0 + h)]$ (označme jej $[x_1, y_1]$) leží ještě v $\mathcal{D}$ a lze jím tedy - opět podle věty 2 - vést jisté řešení $\psi(x)$ ($\psi(x_1) = y_1$), definované v jistém intervalu $\langle x_1 - k, x_1 + k \rangle$. Položíme-li

$y(x) = \varphi(x)$ pro $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h = x_1$, $y(x) = \psi(x)$ pro $x_1 \leq x \leq x_1 + k$ (uvažme, že $\varphi(x_1) = y_1 = \psi(x_1)$), vyhovuje funkce y rovnici (1) nejenom pro $x_0 - h \leq x < x_1$ a pro $x_1 < x \leq x_1 + k$, nýbrž i pro $x = x_1$ tedy v celém intervalu $\langle x_0 - h, x_1 + k \rangle$; neboť v bodě x_1 má φ derivaci zleva $f(x_1, \varphi(x_1)) = f(x_1, y_1)$ a ψ tam má derivaci zprava (dokonce oboustrannou) rovněž rovnou $f(x_1, \psi(x_1)) = f(x_1, y_1)$. Podobně můžeme řešení $y(x)$ "prodloužit" ještě dále od bodu $x_1 + k$ doprava a podobně je můžeme prodlužovat od bodu $x_0 - h$ doleva. Prodloužíme nyní toto řešení na obě strany od bodu x_0 "co nejvíce" - jak je tomu přesně rozuměti, to nyní popíšeme.

Dán je bod $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$; budiž B supremum oněch čísel $\beta > x_0$, pro něž existuje řešení rovnice (1) v intervalu $\langle x_0, \beta)$, ležící v $\mathcal{D}$ a nabývající pro $x = x_0$ hodnoty y_0 ; podobně budiž A infimum oněch čísel $\alpha < x_0$, pro něž existuje řešení rovnice (1) v intervalu $(\alpha, x_0\rangle$, ležící v $\mathcal{D}$ a nabývající pro $x = x_0$ hodnoty y_0 . Tvrdím především: v $\langle x_0, B)$ existuje řešení rovnice (1), ležící v $\mathcal{D}$ a nabývající pro $x = x_0$ hodnoty y_0 .

D ů k a z : Existuje posloupnost čísel $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots, \lim_{n \to \infty} \beta_n = B$ a posloupnost řešení

$y_1, y_2, \dots,$ ležících v $\mathfrak{D}$ tak, že

$y_n(x)$ je řešením v $\langle x_0, \beta_n)$, $y_n(x_0) = y_0$,

Tvrdím, že pro $n<m$, $x_0 \leq x < \beta_n$ je $y_m(x) = y_n(x)$. Jinak by existovalo $\xi\ (x_0 \leq \xi < \beta_n)$ tak, že $y_m(\xi) \neq y_n(\xi)$ (ale $y_m(x_0) = y_n(x_0)$). Budiž x_1 supremum oněch čísel $x \in \langle x_0, \xi)$, pro něž $y_m(x) = y_n(x)$. Potom je $x_0 \leq x_1 < \xi$, $y_m(x_1) = y_n(x_1)$, ale pro všechna $x \in (x_1, \xi)$ je $y_m(x) \neq y_n(x)$ - ale to je nemožné podle tvrzení 2 věty 2. (opíši nyní interval $\mathcal{K}$ z věty 2. okolo bodu $[x_1, y_n(x_1)]$).

Definuji nyní $y(x)$ v $\langle x_0, B)$ takto: Je-li $x_0 \leq x < \beta_n$ položíme $y(x) = y_n(x)$. Tím je y jednoznačně určeno, neboť je-li současně též $x_0 \leq x < \beta_m$, je, jak jsme právě dokázali, $y_n(x) = y_m(x)$. Zřejmě vyhovuje $y(x)$ rovnici (1) v intervalu $\langle x_0, B)$; neboť každý bod tohoto intervalu leží v některém intervalu $\langle x_0, \beta_n)$, ve kterém y splývá s řešením y_n.

Podobně definuji řešení $z(x)$ v $(A, x_0\rangle$. Položím-li nyní $Y(x) = z(x)$ v $(A, x_0\rangle$, $Y(x) = y(x)$ v $\langle x_0, B)$ jest $z(x_0) = y(x_0) = y_0)$, dostávám řešení rovnice (1) v intervalu (A, B), ležící v $\mathfrak{D}$ a procházející bodem $[x_0, y_0]$. Toto řešení nazvu charakteristikou rovnice (1) pro otevřenou množinu $\mathfrak{D}$ (a to charakteristikou určenou bodem $[x_0, y_0]$).

(Uvádím explicitně otevřenou množinu $\mathfrak{D}$, protože funkce f může být definována třeba i mimo otevřenou množinu $\mathfrak{D}$ a některá řešení rovnice (1) mohou vyběhnout z otevřené množiny $\mathfrak{D}$ - ale my se staráme jen o ty "části" řešení, které leží v $\mathfrak{D}$).

Uvědomme si toto: Obor, v němž je definována charakteristika Y, je interval (A, B) ; neexistuje žádné řešení ležící v $\mathfrak{D}$ a procházející bodem $[x_0, y_0]$, které by bylo řešením v nějakém intervalu $\langle x_0, B')$, $B' > B$ nebo intervalu $(A', x_0\rangle$ $A' < A$ v $\mathfrak{D}$. Tvrdím nyní: Jestliže nějaké řešení $y(x)$ (ležící v $\mathfrak{D}$) je definováno v intervalu (α, β) a má s Y nějaký společný bod $[\xi,\eta]$ ($\eta = y(\xi) = Y(\xi)$, $\alpha<\xi<\beta$), potom je $(\alpha,\beta) \subset (A,B)$ a v (α,β) je $y(x) = Y(x)$.

D ů k a z : Budiž (γ,δ) průnik intervalů (α,β), (A,B); tedy $\gamma<\xi<\delta$ a v intervalu (γ,δ) máme dvě řešení y, Y, procházející týmž bodem $[\xi,\eta]$. Odtud stejně jako dříve plyne, že

$$(10) \qquad y(x) = Y(x) \quad \text{v} \quad (\gamma,\delta)\,.$$

Předpokládejme, že např. $\beta>B$ (tedy B konečné) a tedy $\delta = B$; z toho odvodíme spor. Je $x_0<B$; $\xi<B$. Buďto je $x_0 = \xi$; potom $\eta = y_0$ a $y(x)$ je řešení, procházející bodem $[x_0,y_0]$ a definované ještě <u>vpravo</u> od B - ale to je nemožné. Nebo je $x_0>\xi$ 11/ a potom řešení $y(x)$ je definováno v intervalu $\langle x_0,\beta)$ $(\beta>B)$ a prochází bodem $[x_0,y(x_0)] = [x_0,Y(x_0)] = [x_0,y_0]$ - to je rovněž nemožné. Zbývá případ $x_0<\xi$. Potom definujme funkci $z(x)$ takto: $z(x) = Y(x)$ pro $x_0\le x\le \xi$, $z(x) = y(x)$ pro $\xi\le x<\beta$. (Pamatujme, že $y(\xi) = Y(\xi)$.) Potom z je řešením, které prochází bodem $[x_0,y_0]$ a definováno v $\langle x_0,\beta)$ $(\beta>B)$ - ale to je opět nemožno. Tedy je nutně $\beta\le B$ a podobně se dokáže $\alpha\ge A$; v intervalu $(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta)$ je pak $y(x) = Y(x)$ podle (10) a tvrzení je dokázáno.

Speciálně: jestliže dvě charakteristiky mají společný bod, jsou totožné. Neboť jestliže první má za obor interval (A,B), druhá (A',B'), je podle toho, co bylo dokázáno $(A,B)\subset(A',B')$ a současně $(A',B')\subset(A,B)$ a v intervalu (A,B) obě funkce splývají.

Situace je tedy tato: Každým bodem oblasti $\mathfrak{D}$ prochází jedna a jen jedna charakteristiku.

Za druhé: Jestliže funkce $y(x)$, jejímž oborem je nějaký interval J, je v J řešením rovnice (1), ležícím v $\mathfrak{D}$, je toto řešení částí nějaké charakteristiky. To jsme před chvíli pro otevřené intervaly J dokázali. Je-li však např. $J = (\alpha,\beta\rangle$

11/Tedy $x_0\in(\gamma,\delta)$ a proto $y(x_0) = Y(x_0) = y_0$ podle (10).

potom bod $[\beta, y(\beta)]$ leží v $\mathcal{D}$, tedy existuje řešení $z(x)$ v jistém intervalu $\langle\beta, \beta+\varepsilon)$ tak, že $z(\beta) = y(\beta)$; položím-li ještě $z(x) = y(x)$ pro $\alpha < x < \beta$, je řešení y částí řešení z (jemuž odpovídá již otevřený interval $(\alpha, \beta+\varepsilon)$) a podle toho, co bylo dříve dokázáno, je z (a tedy i y) částí jisté charakteristiky. Podobně v případě $\mathcal{J} = \langle\alpha, \beta)$ nebo $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Zaveďme ještě toto označení: Charakteristika, procházející bodem $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$ má za definiční obor jistý otevřený interval $\mathcal{J}_{x_0,y_0}$; v její rovnici $y = \psi(x)$ $(x \in \mathcal{J}_{x_0,y_0})$ závisí ovšem ψ na x_0, y_0; pišme proto

(11) $$y = \varphi(x; x_0, y_0).$$

φ je tedy funkcí tří proměnných, která je definována právě tehdy, když $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$, $x \in \mathcal{J}_{x_0,y_0}$ a která má tento význam: rovnice (11) platí tehdy a jen tehdy, když bod $[x, y]$ leží na charakteristice, procházející bodem $[x_0, y_0]$. Speciálně tedy

(12) $$y_0 = \varphi(x_0; x_0, y_0)$$

Funkci φ <u>nazveme charakteristickou funkcí rovnice (1) v $\mathcal{D}$.</u>

Funkce φ má tuto vlastnost: Vezměmě bod $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$ a bod $[x, y]$. Jestliže bod $[x, y]$ leží na charakteristice, procházející bodem $[x_0, y_0]$, potom bod $[x_0, y_0]$ leží na jistém řešení $\chi(x)$, procházejícím bodem $[x, y]$, tedy na charakteristice procházející bodem $[x, y]$ (neboť řešení χ je částí této charakteristiky). To znamená: platí-li (11), platí

(13) $$y_0 = \varphi(x_0; x, y).$$

A ovšem též naopak, z (13) plyne (11), tj.

(14) $$(y = \varphi(x; x_0, y_0)) \Leftrightarrow (y_0 = \varphi(x_0; x, y)).$$

<u>Poznámka 1.</u> Buďte $f(x, y)$, $g(x, y)$ dvě funkce, spojité v otevřené množině $\mathcal{D}$, které splňují v $\mathcal{D}$ lokálně Lip-

schitzovu podmínku vzhledem k y. Nechť mají obě rovnice $y' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ tytéž charakteristiky, tj. touž charakteristickou funkci pro otevřenou množinu $\mathcal{D}$. Tvrdím, že $f(x, y) = g(x, y)$ v $\mathcal{D}$.

D ů k a z : Zvolme pevně bod $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$, načež funkce $\varphi(x; x_0, y_0)$ je funkcí x, která v jistém okolí bodu x_0 vyhovuje rovnici $y' = f(x, y)$ (a také rovnici $y' = g(x, y)$) a v bodě x_0 nabývá hodnoty y_0, takže

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x; x_0, y_0) = f(x, \varphi(x; x_0, y_0)) .$$

Tato rovnice platí též speciálně pro $x = x_0$, tedy (podle (12))

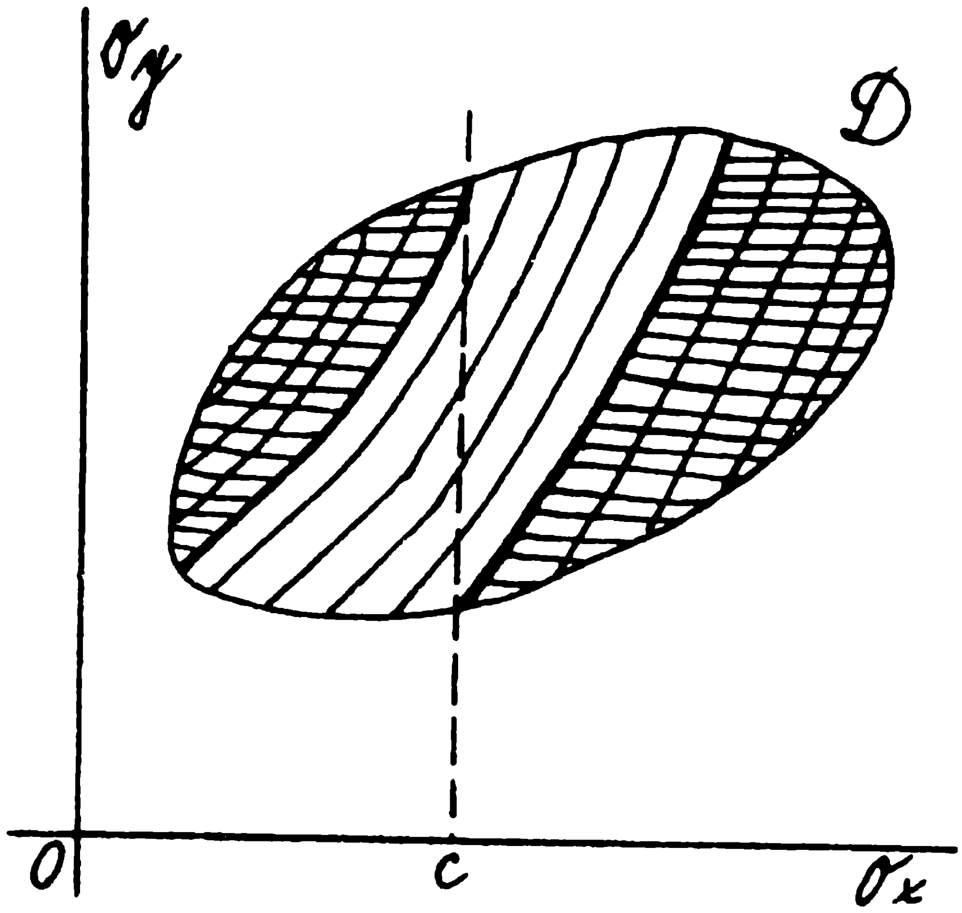
$$f(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x; x_0, y_0)\right]_{x = x_0} \quad \text{a ovšem též}$$

$$g(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x; x_0, y_0)\right]_{x = x_0}$$

Poznámka 2. Rovnice (11) se zdá ukazovat, že "obecný integrál závisí na dvou libovolných konstantách" (mluvím zatím hodně neurčitě - totiž na x_0, y_0. Obyčejně se říká, že "obecný integrál závisí na jedné libovolné konstantě" a rozumí se tím toto: Dosadí se za x_0 pevné číslo C, potom jednotlivá řešení rovnice se liší hodnotou y_0, které nabývají pro $x = C$; všechna řešení tedy dostanu rovnicí

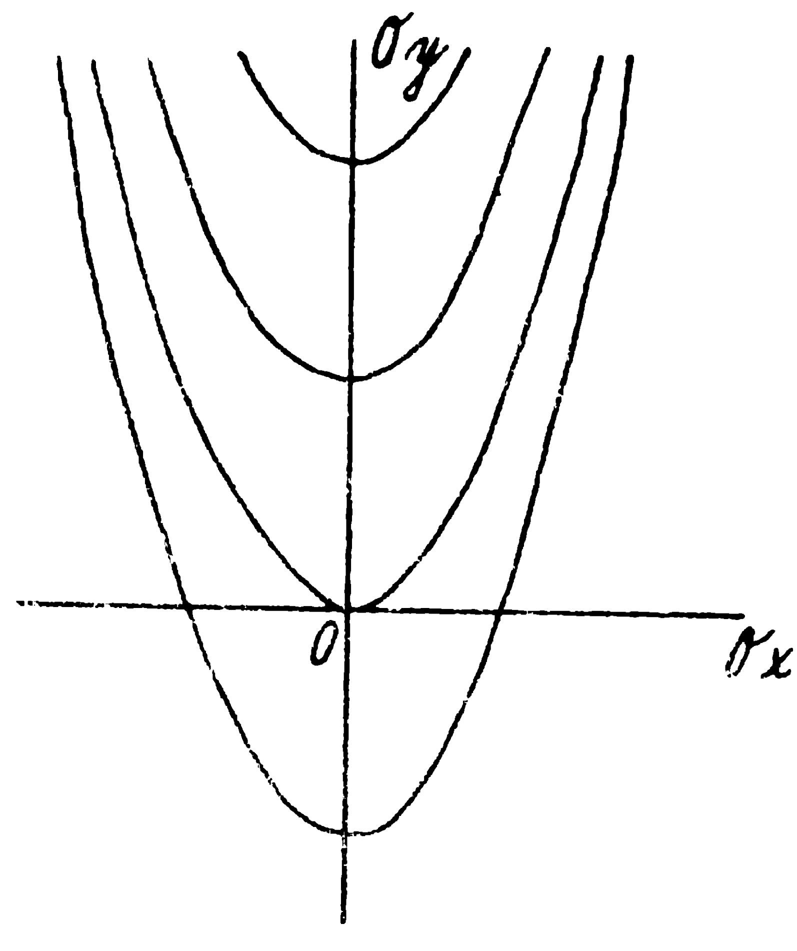
$$y = \varphi(x; C, y_0) , \tag{15}$$

jestliže za y_0 dosazuji všechny přípustné hodnoty (takové, aby bylo $[C, y_0] \in \mathcal{D}$). Ale to není tak docela pravda: je to pravda pouze pro ty charakteristiky, které jsou definovány pro $x = C$; ostatní charakteristiky, jejichž definiční interval neobsahuje bod C, nejsou formulí (15) zachyceny. Viz obrázek (na str. 29): Ovál značí obor $\mathcal{D}$, křivky v něm nakreslené - charakteristiky. Vidíte, že charakteristiky, probíhající ve šrafovaných oborech, nejsou zachyceny formulí (15), kdežto charakteristiky, probíhající v nešrafovaném oboru, zachyceny jsou.



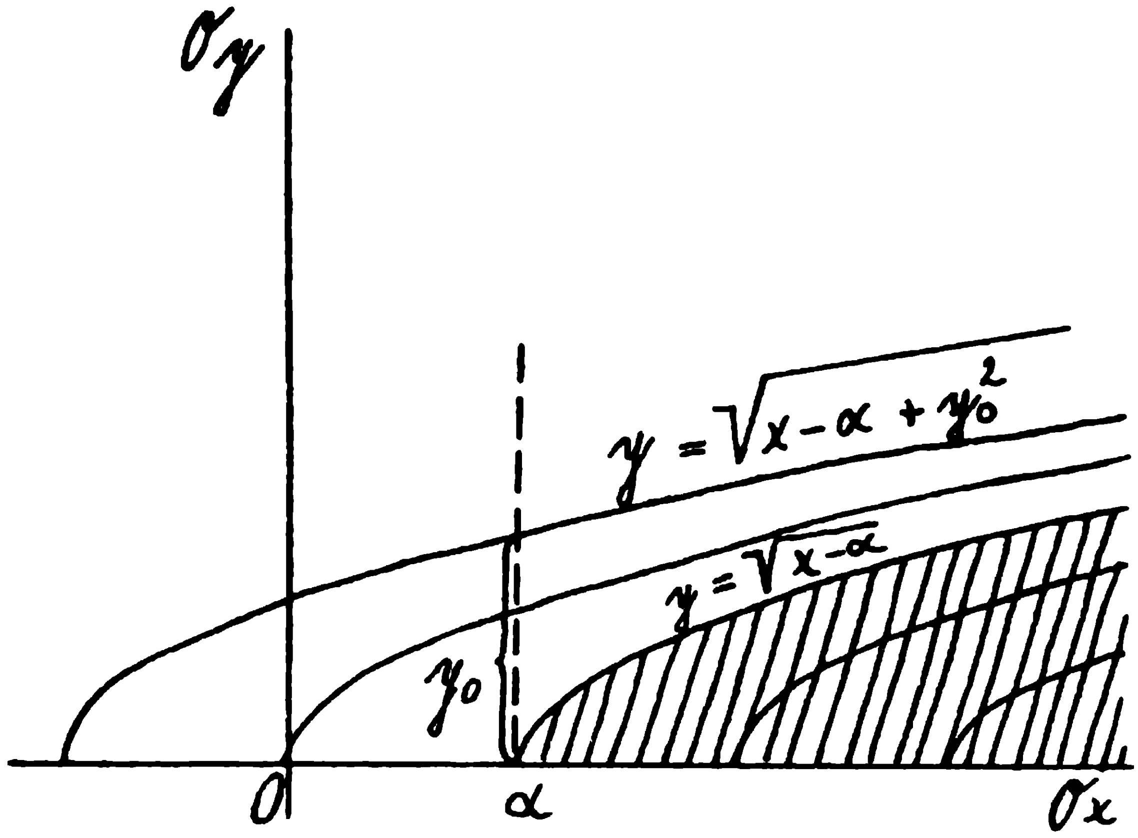
Abychom se orientovali o možnostech, které zde nastávají, probereme dva prajednoduché příklady.

<u>Příklad 4.</u> $y' = 2x$; za $\mathcal{D}$ vezmeme celou rovinu. Rovnici vyhovují řešení $y = x^2 + k$ (k libovolná konstanta) s definičním intervalem $(-\infty, +\infty)$ tedy to jsou charakteristiky.[12/] A každým bodem $[x_0, y_0]$ prochází jedna z těchto křivek (stačí položit $k = y_0 - x_0^2$). Tedy to už jsou <u>všechny</u> charakteristiky. (Charakteristická funkce je tedy $\varphi(x; x_0, y_0) = x^2 + y_0 - x_0^2$). Vidíme, že k a ž d á charakteristika je definována v celém intervalu $(-\infty, +\infty)$. Zvolíme-li pevně x_0, třeba $x_0 = 0$, potom každá charakteristika prochází některým bodem $[0, y_0]$ a její rovnice je potom $y = x^2 + y_0$. Tato formule (měníme-li y_0) dává tedy <u>všechny</u> charakteristiky.



12/ Jejich definiční interval se nedá dále prodloužit.

Příklad 5. $y' = \dfrac{1}{2y}$; za $\mathcal{D}$ vezmeme polorovinu $y > 0$. Ihned vidíme, že funkce $y = \sqrt{x - c}$ v intervalu $(c, +\infty)$ (c jakákoliv konstanta) vyhovují diferenciální rovnici. Toto řešení nelze prodloužit do bodu c a nalevo od od něho (neboť pro $x \to c+$ je $y \to 0$).



Tedy to jsou charakteristiky, a to <u>všechny</u> charakteristiky: je-li x_0 jakékoliv, y_0 je kladné, prochází bodem $[x_0, y_0]$ křivka $y = \sqrt{x - c}$, kde $c = x_0 - y_0^2$. Charakteristická funkce je $\varphi(x; x_0, y_0) = \sqrt{x - x_0 + y_0^2}$, s definičním intervalem $(x_0 - y_0^2, +\infty)$. Charakteristiky jsou poloviny parabol. Zvolíme-li nějak pevně $x_0 = \alpha$, potom formule $y = \sqrt{x - \alpha + y_0^2}$ dává pouze ty charakteristiky $y = \sqrt{x - c}$, pro něž je $c = \alpha - y_0^2 < \alpha$, tj. poloviny těch parabol, jejichž vrchol leží vlevo od bodu $[\alpha, 0]$; touto formulí tedy <u>nejsou</u> vyjádřeny ty charakteristiky, které na obrázku leží v šrafovaném oboru.

Vidíte, že charakteristická funkce v příkladě 4. pro konstantní x_0 (např. $x_0 = 0$) dává všechny charakteristiky v závislosti na <u>jediné</u> konstantě y_0 : $y = x^2 + y_0$. V příkladě 5. charakteristická funkce dává při pevném $x_0 = \alpha$ také charakteristiky závislé na jediné konstantě y_0 : $y = \sqrt{x - \alpha + y_0^2}$ ($y_0 > 0$) - ale <u>nejsou to všechny</u> charakteristiky. <u>Všechny</u>

charakteristiky lze však vyjádřit jinou jednoduchou formulí, obsahující jedinou konstantu: $y = \sqrt{x - c}$. Vrátíme se k těmto věcem ještě později.

Vezměme ještě příklad, v němž není splněna Lipschitzova podmínka:

Příklad 6. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$; v polorovině $y > 0$ v i polorovině $y < 0$ je splněna Lipschitzova podmínka. Všechny charakteristiky v horní polorovině jsou dány vzorcem (c libovolné)

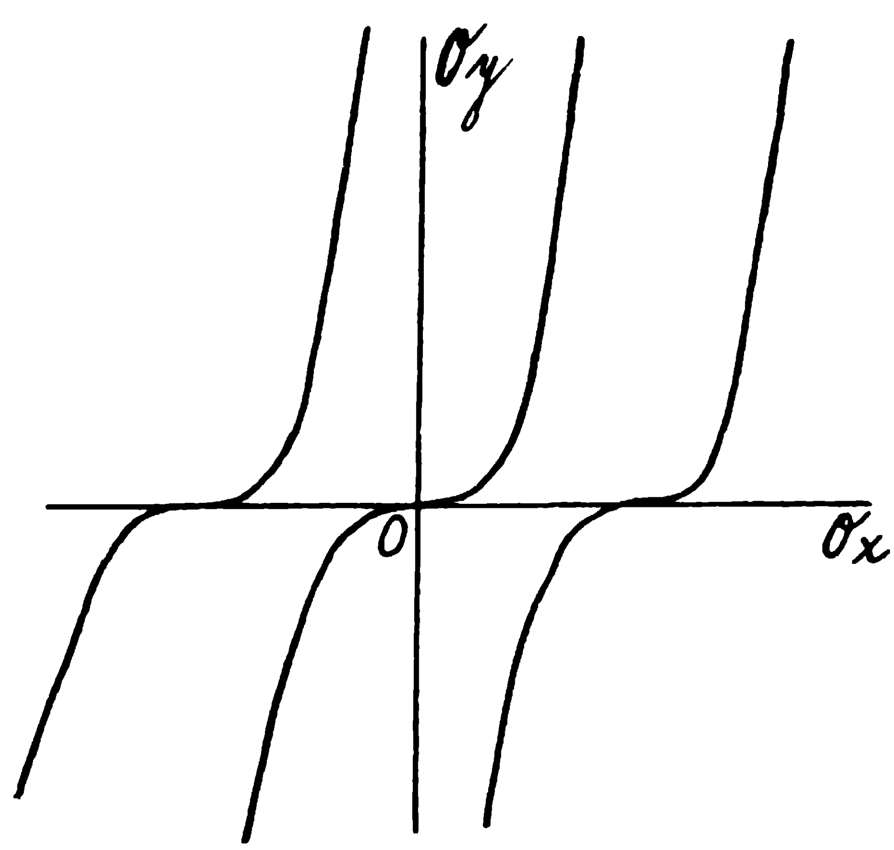
$$y = (x - c)^3 \qquad (c < x < +\infty)$$

a všechny charakteristiky v dolní polorovině jsou dány vzorcem (c libovolné)

$$y = (x - c)^3 \qquad (-\infty < x < c) .$$

Ale tyto funkce vyhovují rovnici i pro $x = c$ ($y(c) = 0$, $y'(c) = 0$). Tedy: $y = (x - c)^3$ je řešením v celém intervalu $(-\infty , +\infty)$. Mimo to je řešením "osa x ", $y = 0$.

Snadno zjistíte, že všechna řešení jsou dána těmito vzorci (vesměs v intervalu $(-\infty , +\infty)$[13/]



1) $y = (x - c)^3$

2) $y = 0$

3) $y = (x - c)$ pro $x \leq c$,
   $y = 0$ pro $x \geq c$

4) $y = 0$ pro $x \leq c$
   $y = (x - c)^3$ pro $x \geq c$

5) $y = (x - c)^3$ pro $x \leq c$
   $y = 0$ pro $c \leq x \leq d$
   $y = (x - d)^3$ pro $x \geq d$ $(c < d)$.

13/ V tom smyslu, že každé řešení je částí některého z uvedených řešení.

Že toto jsou řešení, je jasné; že to jsou všechna řešení, snadno zjistíte (ovládáte totiž všechna řešení v polorovině $y > 0$ i v polorovině $y < 0$ a stačí zjistit, co se může dít, když některé řešení nabude hodnoty $y = 0$).

Jednoznačnost je porušena "v blízkosti" osy $y = 0$ - tamtéž je tedy jistě porušena Lipschitzova podmínka - přesvědčte se o tom!

Připomeňme, že Peano dokázal tuto větu: Jestliže $f(x, y)$ je spojitá v otevřené množině $\mathcal{D} \subset E_2$, potom každým bodem otevřené množiny $\mathcal{D}$ prochází <u>aspoň</u> jedno řešení rovnice (1).

Ovšem netvrdí se zde nic o jednoznačnosti; příklad 8 (kde $\mathcal{D} = E_2$) ukazuje, že zde jednoznačnost může být porušena.

Všimneme si nyní celkového průběhu charakteristik v otevřené množině $\mathcal{D}$, ve které $f(x, y)$ je spojitá a lokálně splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k y. Je-li $y(x)$ charakteristika s oborem (A, B) , potom dokážeme, že $y(x)$ se pro $x \to A+$ a pro $x \to B-$ "neomezeně blíží hranici otevřené množiny $\mathcal{D}$ ". Co tím přesně rozumíme, řekneme si ve větě 3. V této větě kromě toho také shrneme hlavní výsledky tohoto paragrafu.

<u>Věta 3.</u> Nechť funkce $f(x, y)$ v otevřené množině $\mathcal{D}$ je spojitá a lokálně splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k y.

1) Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$ prochází právě jedno řešení $y(x)$ rovnice (1), které má tyto vlastnosti: leží v $\mathcal{D}$ a každé řešení $z(x)$, procházející bodem $[x_0, y_0]$ a ležící v $\mathcal{D}$ je částí řešení $y(x)$. Toto řešení nazýváme <u>charakteristikou</u> rovnice (1) pro otevřenou množinu $\mathcal{D}$ (určenou bodem $[x_0, y_0]$). Oborem této charakteristiky je jistý otevřený interval $\mathcal{J}_{x_0, y_0}$ (obsahující ovšem bod x_0).

2) Každé řešení rovnice (1), ležící v $\mathcal{D}$, je částí některé charakteristiky.

3) Dvě charakteristiky, které mají společný bod, jsou totožné.

4) Definujme funkci $\varphi(x; x_0, y_0)$ takto: Rovnice $y = \varphi(x; x_0, y_0)$ značí, že bod $[x, y]$ leží na charakte-

ristice procházející bodem $[x_0, y_0]$. Funkce φ je tedy definována pro $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$, $x \in \mathcal{J}_{x_0, y_0}$ (a nikde jinde).

Funkci φ nazvu <u>charakteristickou funkcí</u> rovnice (1) pro otevřenou množinu $\mathcal{D}$.

5) Platí ekvivalence

$$(y = \varphi(x; x_0, y_0)) \Leftrightarrow (y_0 = \varphi(x_0; x, y)).$$

Dále je $y_0 = \varphi(x_0; x_0, y_0)$ pro $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$.

6) Budiž $y(x)$ jistá charakteristika s oborem (a, b)[14/]. Potom platí:

a) Jestliže $x_n < b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, potom posloupnost bodů $[x_n, y(x_n)]$ nemá žádný hromadný bod v $\mathcal{D}$ (podobně pro $x_n > a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$).

b) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $b' < b$ tak, že pro každé $x \in (b', b)$ je buďto dist $([x, y(x)], H(\mathcal{D})) < \varepsilon$ nebo max $(|x|, |y(x)|) > \frac{1}{\varepsilon}$. Podobně pro bod a.[15/]

D ů k a z : Body 1, 2, 3 už byly dokázány; 4 je definice, 5 bylo už dokázáno. Dokažme teď 6a). Důkaz zjednodušen podle posl. J. Jelínka.)

Nechť naopak posloupnost bodů $[x_n, y(x_n)]$ má hromadný bod v $\mathcal{D}$; mohu tedy (přechodem k vybrané posloupnosti) předpokládat, že existuje limita této posloupnosti, tj.
lim $y(x_n) = \bar{y}$ a ovšem lim $x_n = b$; $[b, \bar{y}] \in \mathcal{D}$[16/].
Ježto $[b, \bar{y}] \in \mathcal{D}$, existují $A > 0$, $B > 0$ tak, že interval $\mathcal{J}$: $|x - b| \le A$, $|y - \bar{y}| \le B$ leží v D. Tedy f je omezená v $\mathcal{J}$, tj. $|f(x, y)| \le M$ ($M > 0$) a f splňuje

---

14/ To tedy značí: Existuje jistý bod $[x_0, y_0] \in \mathcal{D}$ tak, že $(a, b) = \mathcal{J}_{x_0, y_0}$ a $y(x) = \varphi(x; x_0, y_0)$ pro $x \in (a, b)$.

15/ 6b) znamená totéž jako 6a).

16/ Tedy číslo b je nutně konečné.

v $\mathcal{J}$ Lipschitzovu podmínku vzhledem k y. Zmenšením čísla A nebo B mohu dosáhnout toho, že $B = MA$. Ježto body $[x_n, y(x_n)]$ mají za limitu bod $[b, \bar{y}]$, existuje zřejmě n tak, že

a) Interval

$$\mathcal{K} : |x - x_n| \leq \frac{A}{2}, \quad |y - y(x_n)| \leq \frac{B}{2}$$

leží v $\mathcal{J}$

b) bod $[b, \bar{y}]$ leží uvnitř $\mathcal{K}$.

Ježto $\frac{B}{2} = M\frac{A}{2}$, $|f(x,y)| \leq M$ v $\mathcal{K}$, můžeme na interval $\mathcal{K}$ užíti věty 2 (místo x_0, y_0 píšeme x_n, y_n místo a, b píšeme $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$; ježto $\frac{\frac{1}{2}B}{M} = \frac{A}{2}$, píšeme $\frac{A}{2}$ místo h). Tedy existuje řešení $z(x)$ rovnice (1) v intervalu $x_n - \frac{A}{2} \leq x \leq x_n + \frac{A}{2}$ takové, že $z(x_n) = y(x_n)$.

Položíme-li $v(x) = y(x)$ pro $a \leq x \leq x_n$, $v(x) = z(x)$ pro $x_n \leq x \leq x_n + \frac{A}{2}$, dostaneme řešení rovnice (1) v intervalu $(a, x_n + \frac{A}{2}\rangle$; toto řešení je tedy částí charakteristiky, procházející bodem $[x_n, y(x_n)]$, tj. charakteristiky $y(x)$. Ale tato charakteristika má definiční interval (a, b), kde $b < x_n + \frac{A}{2}$ což je spor.

Dokážeme 6b). Nechť tvrzení 6b není pravdivé, tj. existuje $\varepsilon_0 > 0$, k němuž neexistuje příslušné b'. Zvolme posloupnost $b_1 < b_2 < \dots$ tak, že $\lim b_n = b$. Ke každému n existuje potom $x_n \in (b_n, b)$ tak, že $\operatorname{dist}([x_n, y(x_n)], H(\mathcal{D})) \geq \varepsilon_0$ a současně $\max(|x_n|, |y(x_n)|) \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$.

Posloupnost bodů $[x_n, y(x_n)]$ je tedy omezená a tedy má hromadný bod: ten neleží na $H(\mathcal{D})$, tedy nutně leží v $\mathcal{D}$. Mimo to je $x_n < b$, $\lim x_n = b$. Ale to je ve sporu s dokázaným tvrzením 6a).

<u>Příklad 7.</u> U rovnice $y' = y^2$, $\mathcal{D} = E_2$ zjistíme ihned charakteristiky:

$$y = 0, \text{ interval } (-\infty, +\infty)$$
$$y = \frac{1}{c-x}, \text{ interval } (-\infty, c);$$
$$y = \frac{1}{c-x}, \text{ interval } (c, +\infty).$$

Vidíme, že táž formule (při daném c), dává dvě charakteristiky. Při tom bod $[x, y]$ se vzdaluje do nekonečna pro $x \to -\infty$ i pro $x \to c$ a podobně pro $x \to +\infty$ i pro $x \to c+$ (Načrtněte!) Ačkoliv zde $\mathcal{D}$ je celá rovina, nejsou charakteristiky definovány v intervalu $(-\infty, +\infty)$ (s výjimkou charakteristiky $y = 0$).

§ 3. Závislost řešení na počátečních hodnotách.

Představme si, že rovnice $y' = f(x, y)$ popisuje nějaký fysikální děj; průběh tohoto děje (t.j. závislost veličiny y na x) je dán rovnicí (φ je charakteristická funkce)

(16) $$y = \varphi(x; x_0, y_0)$$

a závisí tedy na "počátečních podmínkách" x_0, y_0. Značí-li např. x čas, znamená to, že musíme v určitý okamžik x_0 stanovit (řekněme: změřit) příslušnou hodnotu y_0, abychom mohli rovnicí (16) určiti průběh děje. Ale x_0, y_0 dovedeme měřit jen p ř i b l i ž n ě ; je proto zásadně důležité zjistit, že malým chybám v určení čísel x_0, y_0 odpovídá také malá chyba v určení funkce $\varphi(x; x_0, y_0)$; jinak by naše řešení nemělo pro fysiku cenu. Jde tedy o to, zda φ závisí spojitě na x_0, y_0. To si dokážeme.

Věta 4. Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá a splňuje lokálně Lipschitzovu podmínku v otevřené množině $\mathcal{D} \subset E_2$. Buďiž $\varphi(x; x_0, y_0)$ charakteristická funkce rovnice (1) pro množinu $\mathcal{D}$. Potom definičním oborem funkce φ (tří proměnných) je jistá otevřená množina $\mathcal{D}_1 \subset E_3$ a funkce φ je spojitá v $\mathcal{D}_1$.

D ů k a z : Vezměme libovolný bod $[\xi_0, \eta_0] \in \mathcal{D}$ a libovolné číslo $\xi \in \mathcal{J}_{\xi_0, \eta_0}$; položme $\mathcal{J}_{\xi_0, \eta_0} = (a, b)$. Máme dokázati:

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|x - \xi| < \delta$, $|x_0 - \xi_0| < \delta$, $|y_0 - \eta_0| < \delta$ je $\varphi(x; x_0, y_0)$ definováno a splňuje nerovnost $|\varphi(x; x_0, y_0) - \varphi(\xi; \xi_0, \eta_0)| < \varepsilon$.

Zvolme především ξ_{-1}, ξ_1 tak, že $a < \xi_{-1} < \xi_1 < b$, $\xi_{-1} < \xi_0 < \xi_1$, $\xi_{-1} < \xi < \xi_1$. Funkci $\varphi(x; \xi_0, \eta_0)$ (při daných ξ_0, η_0) označme $\psi(x)$. "Čára"

(17) $$y = \psi(x) \qquad \xi_{-1} \leq x \leq \xi_1$$

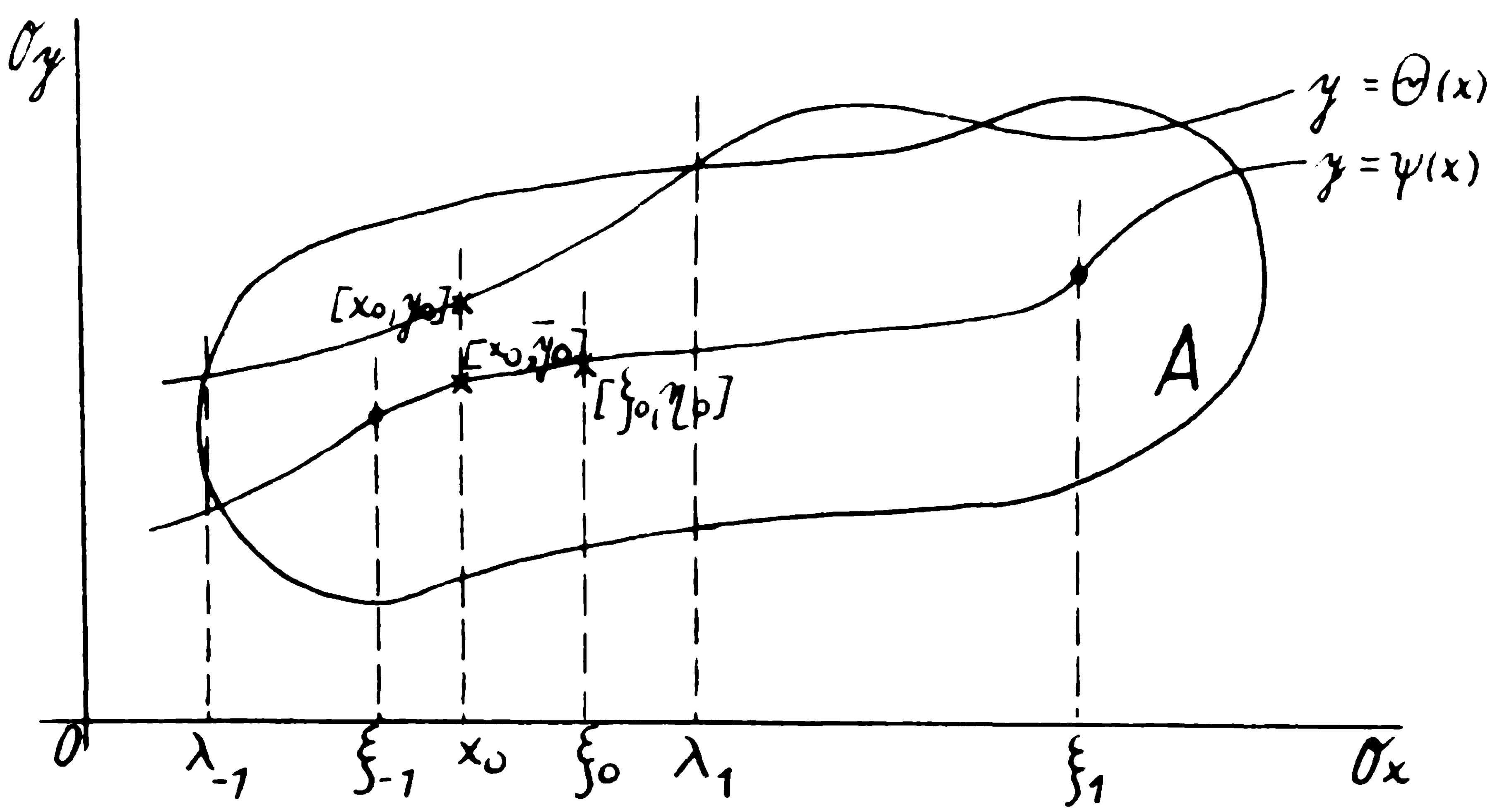
je kompaktní množina ležící v $\mathcal{D}$; zvolme $\rho > 0$ menší než vzdálenost množiny (17) od uzavřené množiny $E_2 - \mathcal{D}$. Označme znakem A množinu všech bodů v E_2, které mají od množiny (17) vzdálenost $\leq \rho$. Zřejmě je $A \subset \mathcal{D}$ a A je kompaktní (omezená a uzavřená). Tedy je spojitá funkce f omezená v A a splňuje (viz větu 1.) v A Lipschitzovu podmínku. Tj. existují čísla $M > 0$, $N > 0$ tak, že platí

(18) $$([x, y] \in A) \Rightarrow (|f(x, y)| \leq M)$$

(19) $$([x, y_1] \in A, [x, y_2] \in A) \Rightarrow (|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N|y_2 - y_1|).$$

Podotkněme, že

(20) $$(\xi_{-1} \leq x \leq \xi_1, \psi(x) - \rho \leq y \leq \psi(x) + \rho) \Rightarrow ([x, y] \in A)$$



Budiž nyní x_0 zvoleno tak, že

(21) $$\xi_{-1} < x_0 < \xi_1$$

Označme $\bar{y}_0 = \psi(x_0) = \varphi(x_0; \xi_0, \eta_0)$,

takže $|\bar{y}_0 - \eta_0| = \left| \int_{\xi_0}^{x_0} f(t, \psi(t))dt \right| \leq M\,|x_0 - \xi_0|$.

Zvolíme-li ještě jakkoliv y_0 , bude

(22) $$|\bar{y}_0 - y_0| \leq |\bar{y}_0 - \eta_0| + |\eta_0 - y_0| \leq M|x_0 - \xi_0| + |y_0 - \eta_0| .$$

Položme $M|x_0 - \xi_0| + |y_0 - \eta_0| = \tau$.

Bude-li x_0 , y_0 zvoleno tak, že

(23) $$\tau < \rho ,$$

bude podle (22) bod $[x_0, y_0]$ ležeti <u>uvnitř</u> A . Zvolme tedy x_0, y_0 tak, aby platilo (21), (23). Bodem $[x_0, y_0]$ prochází chází určitá charakteristika

(24) $$y = \Theta(x) = \varphi(x; x_0, y_0) .$$

Budiž (c, d) definiční interval funkce Θ ; je $c < x_0 < d$ Podle věty 3 existuje určité číslo d' ($x_0 < d' < d$) a číslo c' ($c < c' < x_0$) tak, že body $[d', \Theta(d')]$, $[c', \Theta(c')]$ leží v $\mathfrak{D} - A$. [17/] Množina bodů $[x, \Theta(x)]$, $x_0 \leq x < d$ má bod (totiž $[x_0, \Theta(x_0)]$, uvnitř A a má též bod mimo A . Budiž λ_1 supremum oněch $x \in (x_0, d)$, pro něž celý oblouk

$$y = \Theta(z) , \quad x_0 \leq z \leq x$$

leží <u>uvnitř</u> A ; zřejmě $x_0 < \lambda_1 \leq d' < d$.

17/ Kdyby takové d' neexistovalo, volme posloupnost $x_1 < x_2 < \ldots$, $\lim x_n = d$; bylo by $[x_n, \Theta(x_n)] \in A$, tedy by posloupnost bodů $[x_n, \Theta(x_n)]$ byla omezená, tedy by měla hromadný bod, ležící ovšem v A , tedy v $\mathfrak{D}$ - proti větě 3.

Bod $[\lambda_1, \Theta(\lambda_1)]$ leží tedy v A (uzavřenost množiny A), ale nemůže ležet uvnitř A, tedy leží v $H(A)$, a ovšem oblouk

$$y = \Theta(x), \quad x_0 \leq x < \lambda_1$$

leží uvnitř A.

Obdobně najdeme bod $\lambda_{-1} \in (c, x_0)$ tak, že $[\lambda_{-1}, \Theta(\lambda_{-1})] \in H(A)$ ale oblouk $y = \Theta(x)$, $\lambda_{-1} < x \leq x_0$ leží uvnitř A. Tedy celkem:

$$c < \lambda_{-1} < x_0 < \lambda_1 < d \tag{25}$$

body $[\lambda_{-1}, \Theta(\lambda_{-1})]$, $[\lambda_1, \Theta(\lambda_1)]$ leží v $H(A)$, oblouk

$$y = \Theta(x), \quad \lambda_{-1} < x < \lambda_1 \tag{26}$$

leží <u>uvnitř</u> A.

Budiž Δ průměr množiny A. Pro

$$\max(\xi_{-1}, \lambda_{-1}) \leq x \leq \min(\xi_1, \lambda_1) \tag{27}$$

je $|\psi(x) - \Theta(x)| \leq \Delta$; podle vzorce

$$\Theta(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} [f(t, \Theta(t)) - f(t, \psi(t))]\,dt + y_0 - \bar{y}_0 \tag{28}$$

potom plyne (τ bylo definováno v (22))

$$|\Theta(x) - \psi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} N\, |\Theta(t) - \psi(t)|\,dt \right| + \tau \leq \Delta N |x - x_0| + \tau ;$$

odtud a z (28) dále (stále pro x z intervalu (27))

$$|\Theta(x) - \psi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} N\, |\Theta(t) - \psi(t)|\,dt \right| + \tau \leq$$

$$\leq \Delta N^2 \frac{|x - x_0|^2}{2!} + N\tau\, |x - x_0| + \tau .$$

Tvrdím, že pro každé přirozené n je

$$(29)\qquad |\theta(x)-\psi(x)| \le \tau\sum_{k=0}^{n}\frac{N^k|x-x_0|^k}{k!} + \Delta\frac{N^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Vskutku, platí-li (29) pro jisté n, plyne z (28)

$$|\theta(x)-\psi(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} N\,|\theta(t)-\psi(t)|\,dt\right| + \tau =$$

$$= \tau + \tau\sum_{k=0}^{n}\frac{N^{k+1}|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} + \Delta\frac{N^{n+2}|x-x_0|^{n+2}}{(n+2)!}$$

tj. táž formule pro $n+1$.

Poslední člen ve (29) 18/ má pro $n \to \infty$ za limitu nulu, a tedy pro $n \to \infty$ dostáváme z (29)

$$(30)\qquad |\theta(x)-\psi(x)| \le \tau\sum_{k=0}^{\infty}\frac{N^k|x-x_0|^k}{k!} = \tau e^{N|x-x_0|} < \tau e^{N|\xi_1-\xi_{-1}|}$$

To platí v intervalu (27).

Budiž nyní číslo $\tau = |y_0-\eta_0| + M|x_0-\xi_0|$ tak malé, že

$$(31)\qquad \tau e^{N(\xi_1-\xi_{-1})} < \rho \qquad\qquad \text{(tím spíše tedy } \tau<\rho\text{)}$$

Tvrdím, že potom je $\lambda_{-1}<\xi_{-1}$, $\lambda_1>\xi_1$. Kdyby totiž bylo např. $\lambda_1 \le \xi_1$, platila by pro $x_0<x\le\lambda_1$ podle (30), (31) nerovnost $|\theta(x)-\psi(x)|<\rho$, tedy speciálně

$$|\theta(\lambda_1) - \psi(\lambda_1)| < \rho\ ;$$

potom by však bod $[\lambda_1,\ \theta(\lambda_1)]$ ležel <u>uvnitř</u> A - a on leží na hranici.

Tedy vskutku $\lambda_{-1}<\xi_{-1}<\xi_1<\lambda_1$ a tedy $\theta(x)$ je definováno v celém intervalu $(\xi_{-1},\ \xi_1)$ a platí tam (30), pokud je splněno (31).

18/ Ten je nepříjemný, ježto neobsahuje činitele τ, který lze zvolit "libovolně malý".

Budiž nyní zvoleno $x \in (\xi_{-1}, \xi_1)$; potom je

$$|\Theta(x)-\psi(\xi)| \leq |\Theta(x)-\psi(x)| + |\psi(x)-\psi(\xi)| \leq$$

$$\leq \tau e^{N(\xi_1-\xi_{-1})} + \left|\int_\xi^x f(t,\psi(t))dt\right|,$$

tedy (vlevo teď obšírně vypisuji)

(32) $$|\varphi(x;x_0,y_0) - \varphi(\xi;\xi_0,\eta_0)| \leq$$

$$\leq e^{N(\xi_1-\xi_{-1})} (|y_0-\eta_0| + M|x_0-\xi_0|) + M|x-\xi| .$$

Budiž nyní dáno $\varepsilon > 0$.

Je-li $|x_0-\xi_0|$, $|y_0-\eta_0|$, $|x-\xi|$ tak malé, že

(33) $$\begin{cases} \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 , \quad \xi_{-1} < x < \xi_1 \\ (|y_0-\eta_0| + M|x_0-\xi_0|) e^{N(\xi_1-\xi_{-1})} < \rho , \\ e^{N(\xi_1-\xi_{-1})} (|y_0-\eta_0| + M|x_0-\xi_0|) + M|x-\xi| < \varepsilon \end{cases}$$

potom podle (32) je $\varphi(x;x_0,y_0)$ definováno a je

$$|\varphi(x;x_0,y_0) - \varphi(\xi;\xi_0,\eta_0)| < \varepsilon$$

Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Levá strana předposlední nerovnosti v (33) je nejvýše rovna levé straně poslední nerovnosti, tj. pro $\varepsilon < \rho$ plyne předposlední nerovnost z poslední, jinými slovy : je-li

$$0 < \varepsilon < \rho , \quad \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 , \quad \xi_{-1} < x < \xi_1 ,$$

$$e^{N(\xi_1-\xi_{-1})} (|y_0-\eta_0| + M|x_0-\xi_0|) + M|x-\xi| < \varepsilon$$

je

$$|\varphi(x;x_0,y_0) - \varphi(\xi;\xi_0,\eta_0)| < \varepsilon .$$

Pro praxi není ovšem důležité jen to, že funkce φ je spojitá, tj. že průběh děje, popsaného rovnicí

$$y = \varphi(x; x_0, y_0)$$

bychom dovedli stanovit s libovolnou přesností, kdybychom x_0, y_0 dovedli stanovit (např. změřit) s libovolnou přesností,[19/] nýbrž je důležitý též <u>kvantitativní odhad</u>. Jakou přesnost dostaneme, jestliže x_0, y_0 dovedeme změřit s určitou přesností (tj. známe-li "horní mez" rozdílů $|x_0 - \xi_0|$, $|y_0 - \eta_0|$) - odpověď na tuto otázku nám dávají nerovnosti (33), nebo ještě lépe nerovnosti, uvedené v této poznámce.

§ 4. Formální poznámky o diferenciálních rovnicích vyššího řádu a o systémech diferenciálních rovnic.

Tyto poznámky uvádím jen proto na tomto místě, abych je později nemusil při různých příležitostech opakovat.

Rovnice 1. řádu o jedné "neznámé funkci" y ve tvaru "rozřešeném podle y'" má tvar

(1) $$y' = f(x, y) .$$

Rovnicí n-tého řádu (o jedné neznámé funkci) ve tvaru rozřešeném podle $y^{(n)}$ rozumíme rovnici tvaru

(34) $$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) ,$$

kde vpravo je jistá funkce $n+1$ proměnných; o funkci $y(x)$ říkáme, že je v intervalu (α, β) řešením této rovnice, jestliže rovnice (34) je splněna pro všechna $x \in (\alpha, \beta)$, když do ní za $y, y', \ldots, y^{(n)}$ dosadíme funkci $y(x)$ a její derivace.

Často musíme též vyšetřovat systémy diferenciálních rovnic pro několik neznámých funkcí. Poznamenávám, že se budeme zabývat pouze takovými systémy, kde počet rovnic se rovná počtu neznámých funkcí.

19/ Ve větě 4 je obsaženo trochu více: je dokázána nejenom spojitost podle x_0, y_0, nýbrž spojitost podle všech tří proměnných x, x_0, y_0.

Abych nemusil psát dvojité indexy, napíši jenom obecný tvar systému tří rovnic pro tři neznámé funkce ve tvaru rozřešeném podle nejvyšších derivací neznámých funkcí.

$$
\begin{aligned}
z^{(m)} &= f(x,z,z',\dots,z^{(m-1)},u,u',\dots,u^{(n-1)},v,v',\dots,v^{(p-1)}) \\
u^{(n)} &= g(x,z,z',\dots,z^{(m-1)},u,u',\dots,u^{(n-1)},v,v',\dots,v^{(p-1)}) \qquad (35) \\
v^{(p)} &= h(x,z,z',\dots,z^{(m-1)},u,u',\dots,u^{(n-1)},v,v',\dots,v^{(p-1)})
\end{aligned}
$$

Říkáme, že jde o systém tří rovnic, který je řádu m v z, řádu n v u, řádu p ve v.

Tento systém lze snadno převést na systém rovnic, které jsou všechny prvního řádu. Napišme totiž tento systém:

$$
(36)\quad \begin{cases}
(36a)\quad \begin{cases}
y'_m = f(x, y_1,\dots, y_m, y_{m+1},\dots, y_{m+n}, y_{m+n+1},\dots, y_{m+n+p}) \\
y'_{m+n} = g(x, y_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, y_{m+n+p}) \\
y'_{m+n+p} = h(x, y_1, \dots\dots\dots\dots\dots\dots, y_{m+n+p})
\end{cases} \\[2ex]
(36b)\quad \begin{cases}
y'_1 = y_2, \quad y'_2 = y_3, \dots, \quad y'_{m-1} = y_m \\
y'_{m+1} = y_{m+2}, \; y'_{m+2} = y_{m+3}, \dots, y'_{m+n-1} = y_{m+n} \\
y'_{m+n+1} = y_{m+n+2}, \; y'_{m+n+2} = y_{m+n+3}, \dots, y'_{m+n+p-1} = y_{m+n+1}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Je to celkem $m+n+p$ rovnic 1.řádu (jak říkáme, protože tam jsou první derivace) a je jasno toto: Je-li $y_1, y_2, \dots$ $\dots, y_{m+n+p}$ řešení systému (36) v intervalu (α,β), dávají funkce

$$
(37)\qquad z = y_1, \quad u = y_{m+1}, \qquad v = y_{m+n+1}
$$

řešení systému (35) v (α,β), neboť z rovnic (36 b) plyne

$$
(38)\qquad \begin{cases} z' = y_2, \quad z'' = y_3, \dots, z^{(m-1)} = y_m \\ u' = y_{m+2}, \ u'' = y_{m+3}, \dots, u^{(n-1)} = y_{m+n} \\ v' = y_{m+n+2}, \quad v'' = y_{m+n+3}, \dots, v^{(p-1)} = y_{m+n+p} \end{cases}
$$

a dosazením do (36 a) za $y_1, \dots, y_{m+n+p}$ plyne (35). Naopak, jestliže funkce z, u, v dávají v (α, β) řešení systému (35) a definuji-li $y_1, \dots, y_{m+n+p}$ rovnicemi (37), (38), platí zřejmě (36). Řešení systému (35) a řešení systému (36) jsou tedy dvě úlohy ekvivalentní. A ještě více: Mysleme si, že máme nějaké řešení z, u, v systému (35), kterému rovnicemi (37), (38) je přiřazeno $y_1, \dots, y_{m+n+p}$: je-li pak pro jistou hodnotu $x = x_0$

$$
(39)\qquad y_1(x_0) = \alpha_1, \quad y_2(x_0) = \alpha_2, \dots, y_{m+n+p}(x_0) = \alpha_{m+n+p},
$$

je podle (37), (38) zřejmě

$$
(40)\qquad \begin{cases} z(x_0) = \alpha_1, \quad z'(x_0) = \alpha_2, \dots, z^{(m-1)}(x_0) = \alpha_m, \\ u(x_0) = \alpha_{m+1}, u'(x_0) = \alpha_{m+2}, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{m+n}, \\ v(x_0) = \alpha_{m+n+1}, \ v'(x_0) = \alpha_{m+n+2}, \dots, v^{(p-1)}(x_0) = \\ \qquad = \alpha_{m+n+p} \end{cases}
$$

Tedy úloha "nalézti řešení systému (36) s danými hodnotami funkcí $y_1, \dots, y_{m+n+p}$ v bodě x_0 "je ekvivalentní s úlohou "nalézti řešení systému (35) s danými hodnotami funkcí z, z', ..., $z^{(m-1)}$, u, u', ..., $u^{(n-1)}$, v, v', ..., $v^{(p-1)}$ v bodě x_0".

Speciálně: Řešení rovnice (34) s podmínkami (posunuji trochu indexy)

$$
(41)\qquad y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}
$$

je ekvivalentní s řešením systému

(42) $y'_{n-1} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}), y' = y_1, y'_1 = y_2, \ldots, y'_{n-2} = y_{n-1}$

a podmínkami $y(x_0) = \alpha_0$, $y_1(x_0) = \alpha_1, \ldots, y_{n-1}(x_0) = \alpha_{n-1}$.

Můžeme se tedy v dalším omezit na systémy rovnic 1. řádu (rozřešené podle derivací)

(43) $y'_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. 20/

Bude nás také speciálně zajímat případ jedné rovnice n-tého řádu (34), a proto budeme na ni často přenášet výsledky, získané pro systém (43).

Budiž nyní předložen systém (43). Budeme říkat, že funkce $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ jsou řešením systému (43) v intervalu $\mathcal{J}$, jestliže rovnice (43) jsou splněny pro všechna $x \in \mathcal{J}$, když do nich za y_j dosadíme funkce $y_j(x)$ a za y'_j derivace $y'_j(x)$; přitom derivací v koncovém (počátečním)bodě intervalu $\mathcal{J}$ - patří-li tento bod k $\mathcal{J}$ - rozumím derivaci zleva (zprava).

Budiž nyní $\mathcal{D}$ nějaká množina v E_{n+1} a předpokládejme, že $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou funkce spojité v $\mathcal{D}$. Budiž dále dán bod $[x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0] \in \mathcal{D}$ a n funkcí $y_1(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$ takových, že pro $x \in \mathcal{J}$ (kde $\mathcal{J}$ je nějaký interval, obsahující bod x_0) je $[x, y_1(x), \ldots, y_n(x)] \in \mathcal{D}$. Tvrdím: Jest

(44) $y'_i(x) = f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$, $y_i(x_0) = y_i^0$

pro všechna $x \in \mathcal{J}$ a pro $i = 1, 2, \ldots, n$

tehdy a jen tehdy, jestliže

(45) $y_i(x) = \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\,dt + y_i^0$

pro všechna $x \in \mathcal{J}$ a pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

20/ Systém (36) je jen speciálním případem typu (43).

D ů k a z : Platí-li (45), je $y_i(x_0) = y_i^0$ a dále $y_i(x)$ jsou spojité v $\mathcal{J}$, takže také integrand vpravo je spojitý v $\mathcal{J}$, takže derivace integrálu podle horní meze se rovná $f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x))$ a tedy platí (44). Platí-li naopak (44), jsou funkce $y_i(x)$ spojitá v $\mathcal{J}$, ježto tam mají derivace, a přechodem k primitivním funkcím dostáváme

$$y_i(x) = \int_{x_0}^{x} y_i'(t)\,dt + C_i = \int_{x_0}^{x} f_i(t, y_1(t), \dots, y_n(t))\,dt + C_i ;$$

dosazením $x = x_0$ plyne pak $C_i = y_i^0$, tj. platí (45). Tohoto přechodu jsme již užili v § 1 při jedné rovnici

$$(1) \qquad y' = f(x, y) .$$