2. Aritmetika podle Boethiova Úvodu

In: Marek Otisk (author); Richard Psík (author); Gerbert of Reims (other): Matematické listy Gerberta z Remeše. (Czech). Praha: Centrum Vivarium FF OU, 2014. pp. 39–80.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402406

2. Aritmetika podle Boethiova *Úvodu*

Sed omnia in mensura et numero et pondere disposuisti.
(*Liber Sapientiae* 11, 20)

Intuere caelum et terram et mare et quaecumque in eis uel desuper fulgent uel deorsum repunt uel uolant uel natant. Formas habent quia numeros habent; adime illis haec, nihil erunt. A quo ergo sunt nisi a quo numerus? Quandoquidem in tantum illis est esse in quantum numerosa esse.
(Augustinus Hipponensis, *De libero arbitrio* II, 16)[1]

Quae igitur ex hisce prima discenda est nisi ea, quae principium matris que quodammodo ad ceteras obtinet portionem? Haec est autem arithmetica. Haec enim cunctis prior est, non modo quod hanc ille huius mundanae molis conditor deus primam suae habuit ratiocinationis exemplar et ad hanc cuncta constituit, quaecumque fabricante ratione per numeros assignati ordinis inuenere concordiam, sed hoc quoque prior arithmetica declaratur quod, quaecumque natura priora sunt, his sublatis simul posteriora tolluntur…
(Boethius, *De institutione arithmetica* I, 1, 12)

Adime saeculo conputum, et cuncta ignorantia caeca conplectitur, nec differri potest a ceteris animalibus, qui calculi nesciunt rationem.
(Isidorus Hispalensis, *Etymologiae* III, 4, 4)[2]

V křesťanských latinských středověkých školách mělo aritmetické umění své pevné a nezastupitelné místo. Nemalou zásluhu na této skutečnosti měly vlivné autoritativní texty 4.–6. století, v nichž byly prezentována základy aritmetiky a zároveň v nich bylo patřičně zdůvodněno, v čem tkví hlavní užitek tohoto vědění pro Kristu oddaného učence.

Vedle encyklopedicky laděných přehledů Martiana Capelly, Cassiodora či Isidora ze Sevilly to byl zejména biskup z Hippo Regia a světec Aurelius Augustinus,[3] který zformuloval slavné podobenství o tzv. *egyptské kořisti*, v němž zdůvodnil zájem o pohanskou moudrost možností jejího využití ve prospěch křesťanských záměrů.[4] Prospěšnost aritemtiky je pak podle Augustina především dvojí:

(1) Bez její znalosti není možné porozumět biblické zvěsti – stačí pouze letmý pohled na Písmo svaté, aby bylo zřejmé, že je doslova přeplněno číselnými odkazy, a jelikož by bylo hodně rouhavé předpokládat, že by Slovo Boží

[1] Česky [ASR], s. 185.
[2] Česky [IsEt], s. 287.
[3] Srov. [Bč2], s. 69–76.
[4] [ADC], II, 40–42; česky [AKK], s. 126–130.

zvěstovalo na tolika místech číselné údaje jen tak pro nic za nic, musí být znalost čísel a jejich vlastností nezbytnou propedeutikou pro četbu biblických knih.[5] Samotný Augustin to názorně dokládá např. v *De civitate Dei*, když pouze na základě pýthagorejského učení o vlastnostech čísel demonstruje důvody, proč Bůh stvořil svět v šesti dnech a proč sedmý den odpočíval.[6]

(2) Dále pak čísla a číselné vztahy nejsou a nemohou být lidským výtvorem. Jejich autorem není nikdo jiný než Stvořitel veškerenstva a lidé pouze odhalují, co a podle jakého klíče bylo Bohem vytvořeno. Poznání řádu čísel nám umožňuje seznámit se s principy tohoto světa, jak byly použity Bohem při tvorbě veškerenstva, resp. odpoutat se od materiálně podmíněné danosti námi žité reality a postupně se přibližovat k Tvůrci, který vše vytvořil s pomocí matematických pravidel.[7] Není proto asi příliš překvapivé, že aritmetika je pro Augustina také jednou z možností, jak nezpochybnitelně doložit nezbytnost Boží existence.[8] V tomto kontextu Augustin (podobně jako později celá řada učenců, kteří chtěli upozornit na chvályhodnost a dokonalou zbožnost své práce na poli matematiky) připomíná v úvodu této kapitoly citovaný výrok z biblické knihy *Moudrosti*, že vše na tomto světě bylo Bohem uspořádáno podle míry, čísla a váhy.[9]

Zatímco Augustin ve středověku namnoze platil za nejdůležitější autoritu, která podpořila intenzivní a bohulibý, tj. křesťansky relevantní zájem o aritmetiku, nejužívanějším textem pro skutečné seznámení se s tímto uměním byl Boethiův *Úvod do aritmetiky*. Toto dílo, které je pokládáno za výsledek rané Boethiovy tvorby,[10] je překladem stejnojmenného díla Níkomacha z Gerasy, jak uvádí sám autor, ovšem své předlohy se nedržel zcela striktně – některé pasáže pro názornost rozšířil či doplnil o schématické obrazce, jiné zpracoval zase stručněji.[11]

Členění Boethiova (a tedy i Níkomachova) textu lze shrnout do přibližně šesti základních předmětných oblastí:

(A) prezentace role a postavení aritmetiky v systému pozdně antického vědění, včetně upozornění na nezbytnost aritmetických znalostí nejen pro další obory *quadrivia*, ale také pro každého filosofa;
(B) vymezení a definice čísla;
(C) vlastnosti čísla jako takového;

[5] [ADC], II, 16; česky [AKK], s. 99–101.
[6] [ACD], XI, 30–31; česky [ABO], s. 589–590.
[7] [ADC], II, 38; česky [AKK], s. 126–127.
[8] [ALA], II, 3–13, česky [ASR], s. 156–181.
[9] [ACD], XI, 30; česky [ABO], s. 590.
[10] Viz např. [Mr1], s. 14–16; [Mr2], s. 303 etc.
[11] [BoAr], prol., s. 5.

(D) vlastnosti čísla, je-li kladeno do vztahu k jinému číslu;
(E) představení figurálních čísel;
(F) pojednání o číselných úměrách, tzn. nauka o harmoniích.[12]

2.1 První ze všech věd a definice čísla

Důležitost aritmetiky a čísla (A) je Boethiem popsána v podobném duchu, jako tomu bylo v případě Augustina. Přirozenost všech věcí je dána skrze číslo, číslo je podstatou všech věcí, číselné poměry od počátku formují řád, s nímž se setkáváme ve stvořeném světě, neboť čísla a jejich vzájemné vztahy jsou původní formy v mysli Boží, jejichž rozvinutím vznikly prvky hmotného světa, roční období, pravidelné pohyby vesmírných těles apod.[13] Aritmetika je proto základní vědou, která v sobě skýtá možnost pozorumění metafyzickým základům veškerenstva.

Zároveň je aritmetika první z věd o přírodě, neboť bez její znalosti nelze pěstovat ostatní *quadriviální* umění. Boethius to dokládá pomocí dvou distinkcí. Nejprve rozlišuje mezi množstvím (*multitudo*) a velikostí (*magnitudo*) jakožto dvěma druhy akcidentu kvantity;[14] a dále mezi kvantitativním určením jako takovým, stabilním, stálým, tzn. jak je sám o sobě (*per se*), a mezi kvantitou, která je vyjádřena vztahem k jinému, pohyblivostí, tzn. jak je vymezena dalšími určeními (*ad aliud*, resp. *mobilis*). V tomto rámci je aritmetika první vědou, neboť se věnuje množství o sobě (*multitudo per* se) a jejím předmětem je samotné číslo; geometrie je druhým z matematických umění, neboť se zabývá velikostí o sobě (*magnitudo per se*), tzn. tvary; následuje hudba, jež rozebírá množství ve vzájemných vztazích (*multitudo ad aliud*), tedy číselné poměry; na závěr přichází astronomie, která zkoumá velikosti, které jsou dynamické (*multitudo mobilis*) a nacházejí se ve vzájmených vztazích. Aritmetika je tak matkou veškeré matematiky (čili *quadrivia*) i celé filosofie.[15]

Číslo (B) pak Boethius (v úzké vazbě k Níkomachovi[16]) definuje jako soubor jednotek, respektive jako numerickou řadu, jež je odvozena z jednotky.[17] Jednička samotná není číslem, je to zdroj čísel, který umožňuje vznik všech

[12] Podobně postupuje Nikomachos – viz ad (A) [Nik], I, 1–6, s. 1–13; ad (B) [Nik], I, 7, s. 13; ad (C) [Nik], I, 7–16, s. 13–44; ad (D) [Nik], I, 17–II, 5, s. 44–82; ad (E) [Nik], II, 6–20, s. 82–119; ad (F) [Nik], II, 21–29, s. 119–147.

[13] [BoAr], I, 2, s. 14; srov. [Nik], I, 6, s. 12. Dále viz např. [MaNu], VII, 725–730, s. 259–262 nebo [IsEt], III, 4, s. 286; česky s. 287.

[14] Srov. např. [Cat], 6, 4b–5a; latinsky viz [CaB], s. 13–15; česky [AKa], s. 40–41.

[15] [BoAr], I, 1, s. 10–12; srov. [Nik], I, 2–5, s. 3–11. Dále viz např. [IsEt], III, 1, s. 282; česky s. 283.

[16] Níkomachos ještě dodává, že číslo může být počtem vymezeným jednotkami – viz [Nik], I, 7, s. 13; česky [NŠír], s. 439.

[17] [BoAr], I, 3, s. 15.

čísel. Jednotka je příčinou veškerého čísla, což Boethius dále potvrzuje tezí, že o každém čísle lze říci, že je vždy polovinou čísla, které mu předchází a které ho následuje, což platí jak pro bezprostředně sousedící přirozená čísla, tak pro všecha čísla stejně vzdálená od daného čísla. Tedy:

[1] $n = \frac{(n-1)+(n+1)}{2}$;

tedy např. je-li $n = 5$, pak $5 = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5$; resp.:

[1′] $n = \frac{(n-x)+(n+x)}{2}$;

tedy např. je-li $n = 5$ a $x = 3$, pak $5 = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$.

Toto pravidlo lze aplikovat na všechna přirozená čísla od dvojky nahoru. Neplatí pouze v případě jedničky, neboť ta (podle tradičního chápaní čísel, kde nula nepředstavuje žádnou hodnotu, a tudíž není ničím) nemá žádné číslo, které by jí předcházelo. Tudíž jednička není číslem, neboť není polovinou předcházejícího a následného čísla (je polovinou výhradně následného čísla). Místo toho je jednička matkou a kořenem všech čísel, které v ní mají svůj původ.[18]

2.2 Sudost a lichost

Všechna čísla jako taková pak mají určité vlastností (C), podle nichž je lze třídit do několika druhů. Boethius postupně rozvíjí dvě hlavní klasifikační schémata. V prvním členění rozlišuje čísla na sudá a lichá, přičemž nabízí tyto druhy a poddruhy čísel:

- sudá čísla:
  - sudě sudá;
  - sudě lichá;
  - liše sudá;
- lichá čísla:
  - prvotní, nesložená;
  - druhotná, složená;
  - střední.

Druhé členění (sudých) čísel pak vychází ze součtu dělitelů čísel a podle tohoto kritéria dělí čísla takto:

- nadměrná čísla;
- podměrná čísla;
- dokonalá čísla.

[18] [BoAr], I, 7, s. 19–20; srov. [Nik], I, 8, s. 14; česky [NŠír], s. 439. Dále viz také [MaNu], VII, 730–731, s. 262–263; [CaIn], II, 4, s. 392 nebo [IsEt], III, 1, s. 282; česky s. 283.

2.2.1 Čísla sudá

Na prvním místě se Boethius věnuje dělení čísel na sudá a lichá a mezi oběma typy uvádí několik rozdílů. Především platí, že sudá čísla lze rozdělit na dvě stejné poloviny (kupř. číslo 12 na 6 a 6), což ale v případě lichých čísel neplatí (např. číslo 11 lze rozdělit na 6 a 5, 7 a 4, 8 a 3, atd., nikdy ne na dvě stejné části). Dále je pro sudá čísla charakteristické, že je můžeme rozdělit na nerovné části, ale vždy buď na hodně malých hodnot (kupř. 12 na $6 \cdot 2$, tzn. na šest dvojek) nebo na málo velkých hodnot (např. $2 \cdot 6$, tj. na dvě šestky); pro lichá čísla platí, že taková nerovnost je v nich obsažena primárně a není nutno ji takto konstruovat. Sudost v sobě zahrnuje rovněž možnost rozdělit čísla na dvě položky, přičemž tyto složky rozloženého čísla jsou vždy stejného druhu – tzn. např. jsou obě sudé nebo obě liché (kupř. $12 = 8 + 4 = 10 + 2$ – vždy jde o sudé položky, ale také $12 = 7 + 5 = 9 + 3$; tzn. sudé číslo může být složeno ze dvou lichých čísel); lichost naopak tuto vlastnost nemá, neboť každé liché číslo, je-li rozloženo na dvě, se skládá z jednoho sudého a jednoho lichého čísla (např. $11 = 6 + 5 = 7 + 4 = 8 + 3$ atd.), což ukazuje, že lichá čísla v sobě zahrnují všechna čísla, kdežto sudá čísla mají v sobě vždy jen jeden druh čísel. Asi nejzřejmějším rozdílem mezi mezi oběma druhy čísel je to, že lichá se od sudých liší vždy přidáním nebo odebráním jedničky, což platí i pro sudá čísla a jejich vztahy k číslům lichým.[19]

Sudá čísla pak lze dělit na tři rozdílné druhy: sudě sudá čísla, sudě lichá čísla a liše sudá čísla.[20] První typ se vyznačuje tím, že všechna **sudě sudá čísla** (*pariter par*) lze dělit na poloviny, tyto poloviny na další poloviny a takto stále dále, dokud se nedospěje ke kořeni všech čísel, tj. k jedničce. Fakticky proto jde o mocniny čísla dvě a Boethius píše, že se vždy jedná o dvojnásobek předchozího sudě sudého čísla, což snadno poskytne řadu sudě sudých čísel, podle tohoto pravidla:

[2] $a_{n+1} = 2a_n$;

kde a_n je sudě sudé číslo a a_{n+1} je následným sudě sudým číslem.

Konkrétní řada sudě sudých čísel pak vypadá takto:

[2′] (1), 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 etc.

Získat řadu sudě sudých čísel lze i pomocí sčítání a to tak, že každé další sudě sudé číslo je výsledkem součtu předcházejících čísel řady sudě sudých čísel a jednotky, jak ukazuje tab. 1.

---

[19] [BoAr], I, 3–6, s. 15–19; srov. [Nik], I, 7, s. 13–14. Dále viz např. [MaNu], VII, 748, s. 271 nebo [IsEt], III, 5, s. 286; česky s. 287.

[20] Někdy (např. Martianus Capella nebo Isidor ze Sevilly) se přidává i další typ čísla podle této klasifikace, tj. čísla liše lichá – viz např. [MaNu], VII, 742, s. 269; nebo [IsEt], III, 5, s. 288; česky s. 289. Boethius (a částečně i Níkomachos) zde tento typ čísel neuvádí patrně proto, že se nejedná o sudá čísla, nýbrž lichá. Podle definice jsou liše lichá čísla taková, která lze rozdělit na lichý počet lichých čísel (např. $25 = 5 \cdot 5$, $49 = 7 \cdot 7$, etc.).

<table>
<tr><td rowspan="2">nalezení řady sudě sudých čísel</td><td>a_n</td><td>$a_{n+1} =$
$= a_n + 1$</td><td>$a_{n+2} = a_{n+1} +$
$+ a_n + 1$</td><td>$a_{n+3} = a_{n+2} +$
$+ a_{n+1} + a_n + 1$</td><td>$a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+2} +$
$+ a_{n+1} + a_n + 1$</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$a_{n+1} =$
$= 1 + 1$</td><td>$a_{n+2} =$
$= 2 + 1 + 1$</td><td>$a_{n+3} = 4 + 2 +$
$+ 1 + 1$</td><td>$a_{n+4} = 8 + 4 + 2 +$
$+ 1 + 1$</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td>řada [2′]</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>etc.</td></tr>
</table>

Tab. 1 – Nalezení řady sudě sudých čísel pomocí sčítání

Sudě sudá čísla se vyznačují několika dalšími pozoruhodnými vlastnostmi, o nichž se podrobněji píše v *Úvodu do aritmetiky*. Např. jsou-li sudě sudá čísla násobena mezi sebou navzájem, je výsledný součin vždy rovněž sudě sudým číslem (např. $4 \cdot 32 = 128$; $8 \cdot 16 = 128$; $2 \cdot 32 = 64$ etc.). Dále žádné ze sudě sudých čísel nelze dělit na lichý počet částí a získaný podíl při tomto dělení je také vždy sudý (např. $16 = 4 \cdot 4 = 8 \cdot 2$; $64 = 16 \cdot 4 = 32 \cdot 2$ etc.).

Je-li pak řada sudě sudých čísel (počínaje kořenem všech čísel, tedy jedničkou) složena ze sudého počtu položek, platí, že tato posloupnost má za svůj střed dvě prostřední čísla, přičemž jejich součin se rovná nejvyššímu členu této řady, což platí i pro čísla, která jsou o stejný počet pozic vzdálená na obě strany od středních čísel (viz tab. 2).

<table>
<tr><td>řada [2′]</td><td>(1)</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>32</td></tr>
<tr><td>středy řady</td><td></td><td></td><td>4</td><td>8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">součin členů řady</td><td></td><td></td><td colspan="2">$4 \cdot 8 =$ 32</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">$2 \cdot 16 =$ 32</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">$1 \cdot 32 =$ 32</td></tr>
</table>

Tab. 2 – Součiny v řadě sudě sudých čísel o sudém počtu členů posloupnosti

Naproti tomu existuje-li řada sudě sudých čísel (opět počínaje jedničkou) složená z lichého počtu členů, pak má pouze jeden střed, který vynásoben sám sebou (mocněn dvěma) poskytne nejvyšší číslo této řady, následně pak – obdobně jako u sudého počtu členů číselné řady sudě sudých čísel – platí, že součin čísel, která jsou o stejný počet pozic vzdálena na obě strany od středního čísla, dává výsledek rovný nejvyššímu členu této řady (viz tab. 3).[21]

<table>
<tr><td>řada [2′]</td><td>(1)</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>32</td><td>64</td></tr>
<tr><td>střed řady</td><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">mocnina středu / součin členů řady</td><td></td><td></td><td></td><td>$8 \cdot 8 =$ 64</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">$4 \cdot 16 =$ 64</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">$2 \cdot 32 =$ 64</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">$1 \cdot 64 =$ 64</td></tr>
</table>

Tab. 3 – Součiny v řadě sudě sudých čísel o lichém počtu členů posloupnosti

[21] [BoAr], I, 9, s. 21–25; srov. [Nik], I, 8, s. 15–19; česky viz [NŠír], s. 441. Dále viz např. [MaNu], VII, 749, s. 271 nebo [IsEt], III, 5, s. 286; česky s. 287.

Sudě lichá čísla (*pariter impar*) jsou sice čísla sudá, ale stojí v protikladu k číslům sudě sudým – jelikož to jsou sudá čísla, lze je rozdělit na dvě stejné poloviny, ovšem tímto dělením vzniknou čísla lichá, která již na dvě stejné povoliny dělit nelze. Mají tedy ve své podstatě něco ze sudých i něco z lichých čísel.

Řadu těchto čísel lze získat tak, že jsou postupně zdvojnásobena lichá čísla, tzn. podle pravidla:

[3] $a_{nx} = 2b_{nx}$;

kde a_n je sudě liché číslo, b_n je liché číslo a x předstuje umístění daného čísla v řadě těchto čísel.

Řada sudě lichých čísel vypadá takto:

[3′] (2), 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30 etc.

Pro větší názornost Boethius navrhuje vypsat lichá čísla do tabulky (viz tab. 4) a tato jedno po druhém vynásobit dvěmi.

lichá čísla	(1)	3	5	7	9	11	13	15	etc.
řada [3′]	**(2)**	**6**	**10**	**14**	**18**	**22**	**26**	**30**	**etc.**

Tab. 4 – Nalezení sudě lichých čísel

I sudě lichá čísla lze získat sčítáním – platí, že k prvnímu sudému číslu (tj. 2) se přičte hodnota 4 a všechna další sudě lichá čísla vznikají jako přičtení hodnoty 4 k předchozímu sudě lichému číslu, tedy např.:

[3a] $a_{n+4} = a_{n+3} + 4$; tzn. $a_{n+4} = 14 + 4 = 18$.

Jinými slovy lze říci, že máme-li číselnou řadu, pak počínaje dvojkou, sudě lichým číslem je každé čtvrté číslo v řadě (tzn. vždy jsou tři vynechány a další je sudě liché):

[3b] (**2**), 3, 4, 5, **6**, 7, 8, 9, **10**, 11, 12, 13, **14**, 15, 16, 17, **18**, 19, 20 etc.

Tímto se ukazuje jistá komplikace s číslem 2, které je zároveň prvním sudě sudým číslem (jeho dělením vzniká buď sudé číslo, nebo princip a počátek všech čísel, tj. 1) i prvním sudě lichým číslem (jeho dělením vzniká číslo, které již nelze rozdělit na dvě stejné části tak, aby výsledek byl přirozeným číslem).[22]

Samozřejmě i sudě lichá čísla mají určité specifické vlastnosti, které vyjadřují jejich podstatu, jež je složena z lichých i sudých čísel. Tak např. je-li sudě liché číslo rozděleno na sudý počet stejných dílků, je hodnota každého dílku vyjádřena lichým číslem (např. $18 = 6 \cdot 3 = 2 \cdot 9$) a naopak, tzn. rozdělené sudě

[22] Srov. proto např. [MaNu], VII, 745, s. 269.

liché číslo na lichý počet dílků, poskytuje sudé hodnoty těchto dílků (např. $30 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$ etc.).

Dále pro jakoukoli řadu sudě lichých čísel, která je složena ze sudého počtu členů, platí (podobně jako u sudě sudých čísel), že má za svůj střed dvě prostřední čísla, přičemž tentokrát jejich součet (nikoli součin) se rovná součtu čísel této řady, která jsou o stejný počet pozic vzdálena na obě strany od středních čísel, jak ukazuje tab. 5.

<table>
<tr><td>řada [3′]</td><td>6</td><td>10</td><td>14</td><td>18</td><td>22</td><td>26</td></tr>
<tr><td>středy řady</td><td></td><td></td><td>14</td><td>18</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">součet členů řady</td><td></td><td></td><td colspan="2">14 + 18 = 32</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">10 + 22 = 32</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">6 + 26 = 32</td></tr>
</table>

Tab. 5 – Součty v řadě sudě lichých čísel o sudém počtu členů posloupnosti

Je-li pak řada sudě lichých čísel složená z lichého počtu členů, má pouze jeden střed a jeho dvojnásobek se rovná součtu čísel této řady, která jsou o stejný počet pozic vzdálena na obě strany od středního čísla (viz tab. 6).[23]

<table>
<tr><td>řada [3′]</td><td>6</td><td>10</td><td>14</td><td>18</td><td>22</td><td>26</td><td>30</td></tr>
<tr><td>střed řady</td><td></td><td></td><td></td><td>18</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">mocnina středu / součin členů řady</td><td></td><td></td><td></td><td>18·2=36</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="3">14 + 22 = 36</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">10 + 26 = 36</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">6 + 30 = 36</td></tr>
</table>

Tab. 6 – Dvojnásobek středu a součty v řadě sudě sudých čísel o lichém počtu členů posloupnosti

Třetím a posledním typem sudých čísel jsou **čísla liše sudá** (*impariter par*), která zaujímají určitě prostřední postavení mezi čísly sudě sudými a čísly sudě lichými. Mají totiž v sobě vlastnosti sudě sudých čísel (tj. lze je dělit na poloviny a tyto poloviny lze opět dělit na poloviny) i vlastnosti sudě lichých čísel (tj. jejich dělením na poloviny nelze dospět k jedničce).

Řadu těchto čísel je možno vystavět jako součin lichých a sudě sudých čísel, počínaje od prvního nesporného sudě sudého čísla, tj. od 4, jak naznačuje toto pravidlo:

[4] $a_{nx} = b_{nx} \cdot c_{nx}$;

kde a_n je liše sudé číslo, b_n je liché číslo, c_n je sudě sudé číslo počínaje hodnotou 4 a x představuje umístění daného čísla v řadě těchto čísel.

23 [BoAr], I, 10, s. 26–30; srov. [Nik], I, 9, s. 19–21; česky viz [NŠír], s. 441. Dále viz např. [MaNu], VII, 749, s. 271 nebo [IsEt], III, 5, s. 286–288; česky s. 287–289.

Liše sudá čísla jsou tedy:

[4′] 12, 20, 24, 28, 36 etc.

Názorněji je tato skutečnost patrná v tab. 7.

lichá čísla (b_n)	3	5	7	9	etc.
řada [2′] (c)	4	8	16	32	etc.
$b_n \cdot c$	12	24	48	96	etc.
$b_{n+1} \cdot c$	20	40	80	160	etc.
$b_{n+2} \cdot c$	28	56	112	224	etc.
vzestupné sežazení čísel z předchozích součinů – tj. **řada** [4′]	**12**	**20**	**24**	**28**	**etc.**

Tab. 7 – Nalezení liše sudých čísel

Jinými slovy platí, že liše sudým číslem je takové sudé číslo, které není číslem sudě sudým, ani číslem sudě lichým, jak ukazuje tab. 8.

sudá čísla	2	4	6	8	10	**12**	14	16	18	**20**	22	**24**	26	**28**	30	32	34	**36**
je sudě sudé?	✓ (?)	✓	×	✓	×	×	×	✓	×	×	×	×	×	×	×	✓	×	×
je sudě liché?	✓ (?)	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×
je liše sudým?	×	×	×	×	×	✓	×	×	×	✓	×	✓	×	✓	×	×	×	✓

Tab. 8 – Sudá čísla a jejich dělení na sudě sudá, sudě lichá a liše sudá

Střední postavení tohoto druhu sudých čísel se odráží i v jejich vlastnostech.[24] Liše sudá čísla totiž lze (stejně jako čísla sudě sudá) dělit na sudý počet stejných dílů a hodnota tohoto dílu bude sudá (např. $24 = 4 \cdot 6$; $36 = 6 \cdot 6$ etc.), avšak umožňují také dělení na lichý počet stejných dílů, kdy hodnota tohoto dílu bude sudá, jako tomu je u sudě lichých čísel (kupř. $24 = 3 \cdot 8$; $36 = 9 \cdot 4$ atd.).

Také v případě středů číselných řad platí obojí, co bylo uvedeno o charakteristikách čísel sudě sudých i sudě lichých, pouze je zde nutno rozlišovat mezi délkou a šířkou čísla, jak to dokládá tab. 9a a 9b:

[24] [BoAr], I, 11–12, s. 30–36; srov. [Nik], I, 10, s. 21–25; česky viz [NŠír], s. 441–443. Dále viz např. [MaNu], VII, 749, s. 271 nebo [IsEt], III, 5, s. 288; česky s. 289.

	délka čísel				sudý počet členů řady		lichý počet členů řady	
trojnásobky sudě sudých čísel	12	24	48	96	součin středů se rovná součinu položek stejně vzdálených od středů	$24 \cdot 48 = 12 \cdot 96 =$ $= 1\,152$	druhá mocnina středu se rovná součinu položek stejně vzdálených od středu	$48^2 = 24 \cdot 96 = 2\,304$
pětinásobky sudě sudých čísel	20	40	80	160		$40 \cdot 80 = 20 \cdot 160 =$ $= 3\,200$		$80^2 = 40 \cdot 160 =$ $= 6\,400$
sedminásobky sudě sudých čísel	28	56	112	224		$56 \cdot 112 =$ $= 28 \cdot 224 = 6\,272$		$112^2 = 56 \cdot 224 =$ $= 12\,544$
devítinásobky sudě sudých čísel	36	72	144	288		$72 \cdot 144 =$ $= 28 \cdot 288 = 10\,368$		$144^2 = 72 \cdot 288 =$ $= 20\,736$

Tab. 9b – Součiny a součty středů či středu řad liše sudých čísel u délky čísel

šířka čísel				sudý počet členů řady		lichý počet členů řady	
12	20	28	36	součet středů se rovná součtu položek stejně vzdálených od středů	$20 + 28 =$ $= 12 + 36 = 48$	dvojnásobek středu se rovná součtu položek stejně vzdálených od středu	$28 \cdot 2 = 20 + 36 =$ $= 56$
24	40	56	72		$40 + 56 =$ $= 24 + 72 = 96$		$56 \cdot 2 = 40 + 72 =$ $= 112$
48	80	112	144		$80 + 112 =$ $= 48 + 144 = 192$		$112 \cdot 2 = 80 + 144 =$ $= 224$
96	160	224	288		$160 + 224 =$ $= 96 + 288 = 384$		$224 \cdot 2 =$ $= 160 + 288 = 448$
trojnásobky sudě sudých čísel	pětinásobky sudě sudých čísel	sedminásobky sudě sudých čísel	devítinásobky sudě sudých čísel				

Tab. 9b – Součiny a součty středů či středu řad liše sudých čísel u šířky čísel

2.2.2 Čísla lichá

Lichá čísla mají rovněž tři základní druhy: prvotní a nesložené, druhotné a složené, resp. střední, samo o sobě druhotné a složené, ve vztahu k jinému však prvotní a nesložené.[25]

Prvotní a nesložená čísla (*primus et incompositus*) jsou prvočísla, tzn. jedná se o taková čísla, která lze beze zbytku dělit pouze jimi samotnými a jedničkou. Tato čísla jsou nejvíce odolná jakékoli změně, neboť je nelze rozdělit na jiná přirozená čísla, tudíž jsou považována za důležitý základ čísel, který je odvozen přímo z jedničky (sudá čísla lze kupř. vždy dělit dvěma, tedy podléhají mnohem více štěpení, než je tomu v případě prvočísel). Z toho pak plyne, že nesložená lichá čísla jsou nejvíce podobná jednotce. Řada prvočísel vypadá takto:[26]

[25] [BoAr], I, 13, s. 36; srov. [Nik], I, 11, s. 25–26; česky viz [NŠír], s. 443. Dále viz např. [MaNu], VII, 750, s. 273 nebo [IsEt], III, 5, s. 288; česky s. 289.

[26] [BoAr], I, 14, s. 37–38; srov. [Nik], I, 11, s. 26–27.

[5] 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 etc.

Prvočísla nalezneme podle tzv. Eratosthenova síta, když ode všech lichých čísel oddělíme ta, jež jsou beze zbytku dělitelná lichými čísly a poskytují výsledek větší než 1,[27] jak ukazuje tab. 10.

lichá čísla	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**	**21**	**23**	**25**	**27**	**29**	**31**	**33**	**35**
odstranění čísel dělitelných 3	3	5	7	~~9~~	11	13	~~15~~	17	19	~~21~~	23	25	~~27~~	29	31	~~33~~	35
odstranění čísel dělitelných 5	3	5	7		11	13		17	19		23	~~25~~		29	31		~~35~~
řada [5]	**3**	**5**	**7**		**11**	**13**		**17**	**19**		**23**			**29**	**31**		

Tab. 10 – Tzv. Eratosthenovo síto

Zatímco pro prvočísla platí, že je lze určit pouze pomocí jejich vlastní hodnoty a jedničky, tak **druhotná a složená lichá čísla** (*secundus et compositus*) jsou určena čili poměřována větším počtem dělitelů, tzn. kromě sebe sama a jednotky je lze dělit ještě nějakým dalším číslem či čísly. Složená jsou označena proto, že vznikají jako násobek dvou (a více) různých čísel a jako druhotná proto, že vedle kořene všech čísel a sebe sama potřebují ke svému vzniku ještě nějaké další číslo.[28] Mezi složená lichá čísla patří např.:

[6] 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39 etc.

Jejich řadu dostaneme tak, že buď poskládáme čísla, která nepropadla Eratosthenovým sítem (určitá podoba negativního vymezení), nebo je získáme jako vzájemné násobky lichých čísel, přičemž odstraníme ta čísla, která se v tabulce objeví vícekrát, a následně je seřadíme podle přirozeného pořadí,[29] jak ukazuje tab. 11:

lichá čísla	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**	**21**	**23**	etc.
trojnásobky	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	etc.
pětinásobky	~~15~~	25	35	~~45~~	55	65	75	85	95	105	115	etc.
sedminásobky	~~21~~	~~35~~	49	~~63~~	77	91	~~105~~	119	133	~~147~~	161	etc.
řada [6]	**9**	**15**	**21**	**25**	**27**	**33**	**35**	**39**	**45**	**49**	**51**	etc.

Tab. 11 – Nalezení složených lichých čísel

Posledním druhem lichých čísel jsou podle Boethia (a Níkomacha) **čísla střední** (*medietas*). Jsou to taková čísla, která jsou vzhledem k sobě samým složená a druhotná, avšak ve vztahu k sobě navzájem se jedná o čísla neslože-

27 [BoAr], I, 17, s. 41–43; srov. [Nik], I, 13, s. 29–33; česky viz [NŠír], s. 445–447.

28 [BoAr], I, 15, s. 38–39; srov. [Nik], I, 12, s. 27–28.

29 [BoAr], I, 17, s. 43–44; srov. [Nik], I, 13, s. 33.

ná. Jelikož Eratosthenovo síto dokázalo oddělit prvočísla od všech složených lichých čísel, nepojednává třetí typ lichých čísel již o vlastnostech čísla jako takového (*per se*), nýbrž o vztahu mezi dvěma čísly. Tentokrát se jedná především o dělitelnost čísel mezi sebou navzájem, tedy o jejich vzájemné poměřování. (Právě tuto problematiku zmiňuje Gerbert ve svém dopise Remigiovi z Trevíru – *List* 6 – kde hovoří o poměřování mezi čísly navzájem, nejde mu tedy jen o lichá čísla, ale o jakákoli čísla – viz také kapitola 2.3 tohoto úvodu.) Mezi střední čísla jsou zahrnuta taková čísla, která jsou ze své podstaty lichými složenými čísly, avšak ve vztahu k jinému složenému lichému číslu nemají společného dělitele.[30]

Nalezneme je např. jako druhou mocninu dvou po sobě jdoucích lichých čísel, tedy vynásobíme dvě bezprostředně navazující lichá čísla sebou samými a výsledná čísla budou středními lichými čísly, jak ukazuje tab. 12.

<table>
<tr><th>lichá čísla</th><th>3</th><th>5</th><th>7</th><th>9</th><th>11</th><th>13</th><th>15</th><th>17</th></tr>
<tr><td>druhé mocniny lichých čísel</td><td>9</td><td>25</td><td>49</td><td>81</td><td>121</td><td>169</td><td>225</td><td>289</td></tr>
<tr><td rowspan="2">střední lichá čísla</td><td colspan="2">9 – 25</td><td colspan="2">49 – 81</td><td colspan="2">121 – 169</td><td colspan="2">225 – 289</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">25 – 49</td><td colspan="2">81 – 121</td><td colspan="2">169 – 225</td><td>etc.</td></tr>
</table>

Tab. 12 – Možné nalezení středních lichých čísel

Boethius pak představuje metodu, jak u dvou složených lichých čísel rozpoznat, zda se jedná o čísla střední nebo nikoli. Navrhuje odčítat menší z těchto dvou čísel od většího tolikrát, kolikrát je menší číslo ve větším obsaženo, následně výsledek odčítání odečítat od menšího čísla dané dvojice lichých složených čísel tolikrát, kolikrát je tento výsledek v menším čísle obsažen a pokud výsledkem těchto druhých (tohoto druhého) odčítání bude jednička, pak se jedná o střední lichá čísla, pokud číslo větší, postup se znovu opakuje, dokud výsledkem nebude jednička (tj. jedná se o střední lichá čísla), příp. společný dělitel těchto dvou čísel (tj. nejsou to střední lichá čísla). Na příklady viz tab. 13.[31]

<table>
<tr><th>dvojice lichých složených čísel</th><th>menší číslo je odčítáno od většího čísla</th><th colspan="2">získaný rozdíl je odčítán od menšího čísla, resp. od něj je odčítán výsledek dalšího odčítání</th><th>jsou to střední lichá čísla?</th></tr>
<tr><td rowspan="3">25 – 81</td><td>81 – 25 = 56</td><td>25 – 6 = 19</td><td>13 – 6 = 7</td><td rowspan="3">✓</td></tr>
<tr><td>56 – 25 = 31</td><td rowspan="2">19 – 6 = 13</td><td rowspan="2">7 – 6 = 1</td></tr>
<tr><td>31 – 25 = 6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">9 – 25</td><td>25 – 9 = 16</td><td>9 – 7 = 2</td><td>5 – 2 = 3</td><td rowspan="2">✓</td></tr>
<tr><td>16 – 9 = 7</td><td>7 – 2 = 5</td><td>3 – 2 = 1</td></tr>
<tr><td>15 – 25</td><td>25 – 15 = 10</td><td>15 – 10 = 5</td><td>10 – 5 = 5</td><td>✗</td></tr>
<tr><td>27 – 45</td><td>45 – 27 = 18</td><td>27 – 18 = 9</td><td>18 – 9 = 9</td><td>✗</td></tr>
</table>

Tab. 13 – Ověření, zda dvě lichá složená čísla jsou čísly středními

[30] [BoAr], I, 16, s. 40; srov. [Nik], I, 13, s. 28–29. Dále viz např. [MaNu], VII, 751–752, s. 274.

[31] [BoAr], I, 17–18, s. 44–47; srov. [Nik], I, 13, s. 33–36.

2.3 Čísla nadměrná, podměrná a dokonalá

Sudá čísla[32] jsou dále tříděna podle srovnání vlastní hodnoty čísla se součtem jeho dělitelů, přičemž za dělitele se považuje jednička, kdežto samotné dělené číslo se za dělitele nepovažuje. Je samozřejmé, že dělitel musí poskytnout takový podíl dělence, jehož výsledek bude přirozeným číslem. Jinými slovy jde o vztah součtu čísel, jež určité číslo poměřují, tzn. lze je vyjádřit jako konkrétně vymezenou část tohoto určitého čísla (polovina, třetina, čtvrtina, pětina atd.). Podle uvedeného kritéria rozlišují Níkomachos a Boethius čísla nadměrná, podměrná a dokonalá.

Nadměrná čísla jsou Boethiem přirovnána k obru Géryonovi, který měl tři těla. Podobně pro tzv. **abundantní čísla** (*superfluus*) platí, že mají více, než by měly mít. V rámci uvedené klasifikace jde o to, že součet dělitelů těchto čísel je větší než samotné číslo, tedy části (dělitelé) dávají dohromady více, než je samotný celek. Platí to např. o čísle 18, které je možné dělit jedničkou (tj. 18 : 1 = 18), dvojkou (tj. 18 : 2 = 9), trojkou (tj. 18 : 3 = 6), šestkou (tj. 18 : 6 = 3) a devítkou (tj. 18 : 9 = 2), čili číslo osmnáct má svou polovinu (tj. 9), třetinu (tj. 6), šestinu (tj. 3), devítinu (tj. 2) a osmnáctinu (tj. 1). Součet dělitelů osmnáctky je tudíž 21 (neboť 1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21), pročež číslo 18 musí být číslem nadměrným, neboť (podobně jako tři těla Géryonova) součet jeho dělitelů je větší, než vlastní hodnota dělence.[33] Mezi nadměrná čísla patří:

[7] 12, 18, 20, 24, 30, 36, 42, 48 atd.

Naopak **čísla podměrná** (*diminutus*) vykazují opačný rys, tedy součet jejich dělitelů je menší, než původní hodnota dělence. Tato čísla nedokáží vytvořit plnost původního čísla, něco jim chybí, proto jsou v *Úvodu do aritmetiky* přirovnána k jednookým Kyklopům. Mezi tato tzv. deficientní čísla patří např. číslo 16, které je možno dělit jedničkou (tj. 16 : 1 = 16), dvojkou (tj. 16 : 2 = = 8), čtyřkou (tj. 16 : 4 = 4) a osmičkou (tj. 16 : 8 = 2), čili má svou polovinu (tj. 8), čtvrtinu (tj. 4), osminu (tj. 2) a šestnáctinu (tj. 1), ovšem součet těchto dělitelů je 15 (neboť 1 + 2 + 4 + 8 = 15), tedy součet dělitelů je menší než původní číslo 16. Podměrných čísel[34] (včetně lichých) je nejvíce, z řady sudých čísel sem patří:

[8] 2, 4, 8, 10, 14, 16, 22, 26, 32, 34, 38, 40, 44, 46 atd.

---

[32] Aplikovat to lze i na čísla lichá, ovšem v případě lichých čísel se patrně vždy jedná o čísla podměrná.

[33] [BoAr], I, 19, s. 48–49; srov. [Nik], I, 14, s. 37–38; česky viz [NŠír], s. 449. Dále viz např. [MaNu], VII, 753, s. 275 nebo [IsEt], III, 5, s. 288; česky s. 289.

[34] [BoAr], I, 19, s. 49; srov. [Nik], I, 15, s. 38–39; česky viz [NŠír], s. 449. Dále viz např. [MaNu], VII, 753, s. 275 nebo [IsEt], III, 5, s. 288–290; česky s. 289–291.

Dokonalých čísel (*perfectus*) je naproti tomu velmi málo. Jsou to taková čísla, jejichž součet dělitelů je totožný s původní hodnotou dělence. Příkladem může být např. číslo 28, které lze dělit jedničkou (tj. 28 : 1 = 28), dvojkou (tj. 28 : 2 = 14), čtyřkou (tj. 28 : 4 = 7), sedmičkou (tj. 28 : 7 = 4) a čtrnáctkou (tj. 28 : 14 = 2), tedy číslo 28 má svou polovinu (tj. 14), čtvrtinu (tj. 7), sedminu (tj. 4), čtrnáctinu (tj. 2) a osmadvacetinu (tj. 1), takže součet dělitelů osmadvacítky je 28 (neboť 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28), tedy sečtením částí vzniká celek děleného čísla. U jednociferných čísel splňuje podmínku dokonalého číslo pouze šestka, dvouciferné dokonalé číslo je jen zde uvedená osmadvacítka, řada dokonalých čísel pak vypadá takto: [35]

[9] 6, 28, 496, 8 128, 33 550 336, 8 589 869 056 atd.

Boethius nabízí i metodu k nalezení dokonalých čísel – v případě abundantních a deficientních čísel tak nečiní, protože je jich velmi mnoho a jsou tudíž značně chaotická a vzpírají se pevnému řádu. To se ale netýká dokonalých čísel, při jejichž hledání je nutno vyjít z řady sudě sudých čísel [2'] počínaje jedničkou a postupně sčítat jednotlivé členy této řady. Vzejde-li ze sčítání prvočíslo, tzn. některé z řady prvotních a nesložených lichých čísel [5], pak je toto prvočíslo vynásobeno posledním přičítaným sudě sudým číslem. Výsledný součin poskytne dokonalé číslo.[36] Naznačený postup zachycuje tab. 14.

řada [2']	(1)	2	4	8	16	32	64
přičetní následného sudě sudého čísla	×	1 + 2 = = 3	3 + 4 = = 7	7 + 8 = = 15	15 + 16 = = 31	31 + 32 = = 63	63 + 64 = = 127
je výsledek prvočíslo?		✓	✓	×	✓	×	✓
součin prvočísla a posledního přičteného sudě sudého čísla		3 · 2 = = 6	7 · 4 = = 28		31 · 16 = = 496		127 · 64 = = 8 128
řada [9]		**6**	**28**		**496**		**8 128**

Tab. 14 – Nalezení dokonalých čísel

[35] [BoAr] I, 19, s. 49–50; srov. [Nik], I, 16, s. 39–40; česky viz [NŠír], s. 451 Dále viz např. [MaNu], VII, 753, s. 274 nebo [IsEt], III, 5, s. 290; česky s. 291.

[36] [BoAr], I, 20, s. 51–54; srov. [Nik], I, 16, s. 40–44. Jinými slovy platí, že dokonalé číslo je součinem sudě sudého čísla (tj. mocniny čísla 2) s bezprostředně následujícím sudě sudým číslem poníženým o jedna, pokud je toto ponížené sudě sudé číslo prvočíslem, tedy pokud se jedná o tzv. Mersennovo prvočíslo, tzn. takové prvočíslo, které je o jedna menší než mocnina dvojky. V podobě vzorce lze Boethiem naznačený výpočet pro nalezení dokonalého čísla (p) zapsat takto: $p = 2^{n-1}(2^n - 1)$; kde n je exponent (mocnitel) a zároveň je nezbytné, aby výsledek $2^n - 1$ byl prvočíslem.

Jelikož není dodnes známo, zda je nekonečný počet tzv. Mersennových prvočísel (v roce 2013 bylo známo 48 těchto čísel), nelze s určitostí říci, zda je nekonečný počet dokonalých čísel.

2.4 Číselné poměry

Nadměrnými čísly Boethius končí představení vlastností čísla jako takového a v dalších kapitolách přechází k tomu, co již trochu s předstihem uvedl u středního lichého čísla – tzn. věnuje se poměrům a vztahům mezi dvěma a více čísly (D). Po klasifikačních přehledech přechází ke způsobu, jakým jednotlivé poměry vznikly, a na závěr přidává pravidla k převodům mezi jednotlivými typy poměrů.

2.4.1 Rovnost a nerovnost

Rovnost (*aequalitas*, tj. stejnost, totožnost) a nerovnost (*inaequalitas*, tj. nestejnost, odlišnost) jsou v *Úvodu do aritmetiky* definovány jako dva typy relativních vlastností čísel, tj. takových vlastností čísel, které jsou určovány vztahy mezi číselnými hodnotami. V případě rovnosti nastává taková situace, jakou lze spatřit např. mezi loktem a loktem, tuctem a tuctem apod. Porovnávané hodnoty zde nejsou menší ani větší, nýbrž jsou totožné, tj. mají tutéž velikost, vyjadřují stejné kvantitativní určení.[37]

Nerovnost čísel je dána tím, že při komparaci dvou a více číselných hodnot je jedno číslo větší nebo menší než druhé, jako je tomu např. u stopy a palce nebo tuctu a kopy. Tímto jsou zároveň vymezeny dva základní druhy nestejnosti, které se pak dále dělí na pětici poddruhů:[38]

- větší číslo se srovnává s menším číslem:
    - násobky;
    - superpartikulární poměry (čísla);
    - superparcientní poměry (čísla);
    - násobné superpartikulární poměry (čísla);
    - násobné superparcientní poměry (čísla);
- menší číslo se srovnává s větším číslem:
    - dělitelé;
    - subsuperpartikulární poměry (čísla);
    - subsuperparcientní poměry (čísla);
    - subsuperpartikulární dělitelé (čísla);
    - subsuperparcientní dělitelé (čísla).

Pro stručné představení těchto čísel stačí zmínit, že v případě **násobků** (*multiplex*) se jedná o takový vztah mězi dvěma a více čísly, kdy větší číslo v sobě zahrnuje číslo menší celé a více než jednou, přičemž několikerá hodnota menšího čísla odpovídá přesně hodnotě většího čísla. Podobně v případě

[37] [BoAr], I, 21, s. 54–55; srov. [Nik], I, 17, s. 44–45. Dále viz např. [MaNu], VII, 758, s. 278 nebo [IsEt], III, 6, s. 290; česky s. 291.

[38] [BoAr], I, 22, s. 56; srov. [Nik], I, 17, s. 45–46; česky viz [NŠír], s. 451. Dále viz např. [MaNu], VII, 757, s. 277; [CaIn], II, 4, s. 135 nebo [IsEt], III, 6, s. 290; česky s. 291.

dělitelů (*submultiplex*) jde o takový vztah mezi dvěma čísly, kdy menší číslo je obsaženo ve větším čísle celé vícekrát než jednou, tedy větší číslo lze pomocí menšího čísla rozdělit na určitý počet dílů, které budou vyjádřitelné pomocí přirozeného čísla.[39]

Řady čísel podle násobného vztahu pak mohou vypadat např. takto:

[10] 3, 6, 12, 24, 48, 96 etc. (tj. dvojnásobky, poměr 2 : 1);

[10a] 3, 9, 27, 81, 243, 729 etc. (tj. trojnásobky, poměr 3 : 1).

V případě dělitelů jde např. o tyto řady čísel:

[11] 96, 48, 24, 12, 6, 3 (tj. polovina, poměr 1 : 2);

[11a] 972, 324, 108, 36, 12, 4 (tj. třetina, poměr 1 : 3).

Určující vlastností **superpartikulárních čísel** (*superparticularis*) je to, že větší číslo v sobě obsahuje jednou celé menší číslo a ještě nějakou část menšího čísla. Tuto část menšího čísla lze vyjádřit jako kmenný zlomek, tzn. jako zlomek, jehož čitatelem je jednička (polovina, třetina, čtvrtina atp.). Proto se hovoří o čísle s částí, tj. součet jedenkrát menšího čísla a nějaké jeho jasně vymezené jedné části (kupř. pětina), poskytují přesně hodnotu většího čísla – např. vztah mezi čísly 4 a 6, kde menší číslo je ve větším zahrnuto celé (tj. 4) a v součtu s polovinou menšího čísla (tj. 2) se rovná hodnotě většího čísla (tj. 6). Analogicky k tomuto jsou **subsuperpartikulární čísla** (*subsuperparticularis*) taková, že menší číslo lze nalézt ve větším čísle celé a spolu s tímto ještě nějakou jeho část, kterou lze vyjádřit jako kmenný zlomek. Subsuperpartikulární poměry jsou vztahy, které lze nazvat čísla bez části, neboť menšímu číslu chybí jedna jeho část, aby se rovnalo většímu číslu.[40]

Řady superpartikulárních a subsuperpartikulárních čísel mohou vypadat např. takto:

[12] 8, 12, 18, 27 (tj. půldruhanásobek, resp. *seskvialtera*, vztah čísla s polovinou, tj. poměr 3 : 2);

[12a] 64, 80, 100, 125 (tj. pětičtvrtinový násobek, resp. *seskvikvarta*, vztah čísla se čtvrtinou, tj. poměr 5 : 4).

[13] 27, 18, 12, 8 (tj. dvoutřetinový poměr, vztah čísla bez třetiny, tj. poměr 2 : 3);

[13a] 64, 48, 36, 27 (tj. tříčtvrtinový poměr, vztah čísla bez čtvrtiny, tj. poměr 3 : 4).

[39] [BoAr], I, 23, s. 56–59; srov. [Nik], I, 18, s. 46–48; česky viz [NŠír], s. 453. Dále viz např. [MaNu], VII, 759–760, s. 278–279; [CaIn], II, 4, s. 136; [IsEt], III, 6, s. 292; česky s. 283; resp. [AbC], s. 116–117.

[40] [BoAr], I, 24–25, s. 60–64; srov. [Nik], I, 19, s. 49–50; česky viz [NŠír], s. 453. Dále viz např. [MaNu], VII, 761, s. 279; [CaIn], II, 4, s. 136–137; [IsEt], III, 6, s. 292; česky s. 293; resp. [AbC], s. 117–118.

O **superparcientních číslech** (*superpartiens*) platí, že větší číslo v sobě obsahuje jedenkrát menší číslo a určitou část menšího čísla, kterou však není možné vyjádřit jako kmenný zlomek menšího čísla. Tento vztah mezi čísly lze označit jako čísla s částmi, neboť je součtem menšího čísla a jeho částí, které vystihuje zlomek, jehož čitatelem je číslo větší než jedna (jde tedy o více než jednu část menšího čísla – např. dvě třetiny, tři čtvrtiny, dvě pětiny atp.). Pro **subsuperparcientní čísla** (*subsuperpartiens*) je charakteristické, že se opětovně jedná o reverzní posloupnost superparcientních čísel, podobně jako v předchozích případech u dělitelů a subsuperpartikulárních poměrů.[41]

Superparcientní a subsuperparcientní čísla proto tvoří např. tyto řady:

[14] 27, 45, 75, 125 (tj. pětitřetinový násobek, poměr 5 : 3);

[14a] 125, 225, 405, 729 (tj. devítipětinový násobek, poměr 9 : 5).

[15] 125, 75, 45, 27 (tj. třípětinový poměr, tzn. 3 : 5);

[15a] 1029, 588, 336, 192 (čtyřsedminový poměr, tzn. 4 : 7).

Předposledním typem nerovnosti mezi čísly jsou **násobná superpartikulární čísla** (*multiplex superparticularis*), resp. **subsuperpartikulární dělitelé** (*submultiplex subsuperparticularis*). V obou případech jde o kombinaci prvního a druhého typu nerovnosti. U násobků se jedná o takový vztah mezi dvěma čísly, kdy větší číslo v sobě zahrnuje číslo menší více než jednou celé a poté ještě nějakou část menšího číslo, kterou lze vyjádřit zlomkem s jedničkou v čitateli. Pokud mluvíme o dělitelích, pak menším číslem lze větší číslo vydělit tak, že výsledek bude dvě a více, přičemž zbytkem z tohoto dělení bude jedna část menšího čísla, která může být zapsána jako kmenný zlomek (tedy polovina, třetina, čtvrtina atp.). Krátce lze říci, že jde o spojení násobků (dělitelů) a superpartikulárních (subsuperpartikulárních) poměrů.[42]

Řady čísel jsoucí v poměru superpartikulárních násobků a subsuperpartikulárních dělitelů mohou vypadat např. takto:

[16] 8, 20, 50, 125 (tj. dvouapůlnásobky, tj. poměr 5 : 2);

[16a] 27, 90, 300, 1 000 (tj. násobky tří a jedné třetiny, tj. poměr 10 : 3).

[17] 125, 50, 20, 8 (tj. dvoupětinový poměr, tzn. 2 : 5)

[17a] 343, 147, 63, 27 (tj. třísedminový poměr, tzn. 3 : 7).

V pátém druhu nerovnosti dochází k propojení prvních a třetích typů, tzn. násobků (dělitelů) a superparcientních (subsuperparcientních) poměrů.

---

41 [BoAr], I, 28, s. 70–73; srov. [Nik], I, 20–21, s. 55–59; česky viz [NŠír], s. 457. Dále viz např. [MaNu], VII, 762, s. 28; [CaIn], II, 4, s. 137; [IsEt], III, 6, s. 292; česky s. 293; resp. [AbC], s. 118–119.

42 [BoAr], I, 29–30, s. 73–78; srov. [Nik], I, 22, s. 59–63; česky viz [NŠír], s. 457. Dále viz např. [MaNu], VII, 763–764, s. 281–282; [CaIn], II, 4, s. 137–138; [IsEt], III, 6, s. 292; česky s. 293; resp. [AbC], s. 119–120.

Z předchozího plyne, že kategorie **násobných superparcientních čísel** (*multiplex superpartiens*), resp. **subsuperparcientních dělitelů** (*submultiplex subsuperpartiens*) označuje takový vztah mezi dvěma a více čísly, kdy větší číslo má v sobě obsaženo menší číslo více než jednou celé a ještě nějakou část menšího čísla, kterou není možné vyjádřit jako kmenný zlomek tohoto menšího čísla, čili jako menší číslo může být použit díl většího čísla, přičemž tento díl bude přítomný ve větším čísle více než jednou a k dovršení hodnoty většího čísla bude ještě scházet určitá část menšího čísla, kterou bude zastupovat zlomek, v jehož čitateli nebude figurovat jednička (resp. tento zlomek nebude možné převést na zlomek s jedničkou v čitateli).[43]

Superparcientní násobky a subsuperparcientní dělitele je možno nalézt např. v těchto číslených řadách:

[18] 27, 72, 192, 512 (tj. násobky dvou a dvou třetin, tj. poměr 8 : 3);

[18a] 64, 240, 900, 3 375 (tj. násobky tří a tří čtvrtin, tj. poměr 15 : 4).

násobky (*multiplex*)	větší číslo obsahuje v sobě menší číslo více než jednou	poměr 2 : 1 (*dvojnásobky*); poměr 3 : 1 (*trojnásobky*); poměr 4 : 1 (*čtyřnásobky*) etc.	1 – 2 – 4 1 – 3 – 9 1 – 4 – 16 etc.
super-partikulární čísla, tj. čísla s částí (*superparticularis*)	větší číslo zahrnuje celé menší číslo a ještě nějakou jeho část, kterou lze vyjádřit jako kmenný zlomek (tj. čitatelem je vždy jednička)	poměr 3 : 2 (*půldruhanásobky,* kvinta); poměr 4 : 3 (*čtyřtřetinové násobky*, kvarta); poměr 5 : 4 (*pětičtvrtinové násobky*, velká tercie) etc.	4 – 6 – 9 9 – 12 – 16 16 – 20 – 25 etc.
superparcientní čísla, tj. čísla s částmi (*superpartiens*)	větší číslo zahrnuje celé menší číslo a dále více než jednu jeho část, tzn. tuto část menšího čísla nelze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem by byla jednička	poměr 5 : 3 (*pětitřetinové násobky*); poměr 7 : 4 (*sedmičtvrtinové násobky*); poměr 9 : 5 (*devítipětinové násobky*) etc.	9 – 15 – 25 16 – 28 – 49 25 – 45 – 81 etc.
násobná superpartikulární čísla, tj. násobné vztahy čísel s částí (*multiplex superparticularis*)	větší číslo obsahuje v sobě celé menší číslo více než jednou a ještě nějakou jeho část, kterou lze vyjádřit jako kmenný zlomek	poměr 5 : 2 (*dvouapůlnásobky*); poměr 7 : 2 (*třiapůlnásobky*); poměr 7 : 3 (*násobky dvou a jedné třetiny*) etc.	4 – 10 – 25 4 – 14 – 49 9 – 21 – 49 etc.
násobná superparcientní čísla, tj. násobné vztahy čísel s částmi (*multiplex superpartiens*)	větší číslo obsahuje v sobě celé menší číslo více než jednou a ještě více než jednu jeho část, tzn. tuto část menšího čísla nelze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem by byla jednička	poměr 8 : 3 (*násobky dvou a dvou třetin*); poměr 11 : 4 (*násobky dvou a jedné čtvrtiny*); poměr 11 : 3 (*násobky tří a dvou třetin*) etc.	9 – 24 – 64 16 – 44 – 121 9 – 33 – 121 etc.

Tab. 15 – Relativní vlastnosti čísel, větší číslo se srovnává s menším

43 [BoAr], I, 31, s. 78–79; srov. [Nik], I, 23, česky viz [NŠír], s. 457; s. 63–64; Dále viz např. [CaIn], II, 4, s. 138; [IsEt], III, 6, s. 294; česky s. 295; resp. [AbC], s. 120–121.

[19] 512, 192, 72, 27 (tj. tříosminový poměr, tzn. 3 : 8);

[19a] 1 331, 484, 176, 64 (tj. čtyřjedenáctinový poměr, tzn. 4 : 11).

Ucelený přehled o všech uvedených typech nerovností, včetně základních vymezení a příkladů, nabízejí tab. 15 a 16.

dělitelé (*submultiplex*)	menší číslo je ve větším obsaženo více než jednou	poměr 1 : 2 (*polovina*); poměr 1 : 3 (*třetina*); poměr 1 : 4 (*čtvrtina*) etc.	4 – 2 – 1 9 – 3 – 1 16 – 4 – 1 etc.
subsuperpartikulární čísla; tj. čísla bez části (*subsuperparticularis*)	menší číslo je ve větším obsaženo celé spolu se svou nějakou částí, kterou lze vyjádřit jako kmenný zlomek (tj. čitatelem je vždy jednička)	poměr 2 : 3 (*dvě třetiny*); poměr 3 : 4 (*tři čtvrtiny*); poměr 4 : 5 (*čtyři pětiny*) etc.	9 – 6 – 4 16 – 12 – 9 25 – 20 – 16 etc.
subsuperparcientní čísla, tj. čísla bez částí (*subsuperpartiens*)	menší číslo je ve větším obsaženo celé spolu s více než jednou svou částí, tzn. tuto část menšího čísla nelze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem by byla jednička	poměr 3 : 5 (*tři pětiny*); poměr 4 : 7 (*čtyři sedminy*); poměr 5 : 9 (*pět devítin*) etc.	25 – 15 – 9 49 – 28 – 16 81 – 45 – 25 etc.
subsuperpartikulární dělitelé, tj. dělitelé čísel bez části (*submultiplex subsuperparticularis*)	menší číslo je ve větším obsaženo celé více než jednou spolu se svou nějakou částí, kterou lze vyjádřit jako zlomek, jehož čitatelem je jednička	poměr 2 : 5 (*dvě pětiny*); poměr 2 : 7 (*dvě sedminy*); poměr 3 : 7 (*tři sedminy*) etc.	25 – 10 – 4 49 – 14 – 4 49 – 21 – 9 etc.
subsuperparcientní dělitelé, tj. dělitelé čísel s částmi (*submultiplex subsuperpartines*)	menší číslo je ve větším obsaženo celé více než jednou spolu se svou nějakou částí, kterou nelze vyjádřit jako kmenný zlomek	poměr 3 : 8 (*tři osminy*); poměr 4 : 11 (*čtyři jedenáctiny*); poměr 3 : 11 (*tři jedenáctiny*) etc.	64 – 24 – 9 121 – 44 – 16 121 – 33 – 9 etc.

Tab. 16 – Relativní vlastnosti čísel, menší číslo se srovnává s větším

2.4.2 Přechody mezi poměry

Všechny tyto vlastnosti čísel, které jsou důsledkem vztahů mezi čísly, mají totožný původ a vznikají podle jednotného postupu, který Boethius představuje na příkladech tříčlenné číselné posloupnosti. Podobně jako na počátku veškerenstva stojí jediná prvotní příčina, kterou je Bůh, tak u číselných posloupností je základem všeho rovnost či totožnost, kterou reprezentují tři stejné položky (např. 1 – 1 – 1). Z této rovnosti povstávají násobky, nejprve dvojnásobky (např. 1 – 2 – 4), poté trojnásobky (např. 1 – 3 – 9), čtyřnásobky (např. 1 – 4 – 16) atd.

Násobky jsou bezprostřední příčinou vzniku superpartikulárních poměrů mezi čísly, které se odvíjejí od obrácených násobných posloupností (tj. např.

4 – 2 – 1 nebo 64 – 16 – 4 etc.), když z dvojnásobků vznikají poměry 3 : 2, tedy půldruhanásobky čili seskvialtery (např. 4 – 6 – 9); z trojnásobků poměry 4 : 3, tj. čtyřtřetinové násobky čili seskvitercie (např. 9 – 12 – 16), ze čtyřnásobků poměry 5 : 4, tzn. pětičtvrtinové násobky resp. seskvikvarty (např. 16 – 20 – 25) atd. Po opětovném obrácení posloupností uspořádaných v superpartikulárních poměru (tzn. např. 9 – 6 – 4) vznikají čísla v superparcientních poměrech a také tentokrát je poměr 3 : 2 čili půldruhanásobek kořenem pro poměr 5 : 3, tj. pětitřetinový násobek (např. 9 – 15 – 25); poměr 4 : 3, tedy čtyřtřetinový násobek produkuje poměr 7 : 4 čili sedmičtvrtinový násobek (např. 16 – 28 – 49), poměr 5 : 4 zakládá poměr 9 : 5 (např. 25 – 45 – 81) atd.

rovnost / *aequalitas*		$a_{n+1} = a_n$	3 – 3 – 3
násobek / *multiplex*	dvojnásobek / *duplex*	$a_{n+1} = 2a_n$	3 – 6 – 12
	trojnásobek / *triplex*	$a_{n+1} = 3a_n$	3 – 9 – 27
	čtyřnásobek / *quadruplex*	$a_{n+1} = 4a_n$	3 – 12 – 48
	atd.		
supertikulární poměr / *superparticularis* (vznikají z násobků po reverzi posloupnosti)	dvojnásobek → půldruhanásobek / *sesquialtera*	$a_{n+1} = (3/2)a_n$	12 – 18 – 27
	trojnásobek →čtyřtřetinový násobek / *sesquitertia*	$a_{n+1} = (4/3)a_n$	27 – 36 – 48
	čtyřnásobek →pětičtvrtinový násobek / *sesquiquarta*	$a_{n+1} = (5/4)a_n$	48 – 60 – 75
	atd.		
superparcientní poměr / *superpartiens* (vznikají ze superpartikulárních poměrů po reverzi posloupnosti)	půldruhanásobek → pětitřetinový násobek / *superbipartiens*	$a_{n+1} = (5/3)a_n$	27 – 45 – 75
	čtyřtřetinový násobek → sedmičtvrtinový násobek / *supertripartiens*	$a_{n+1} = (7/4)a_n$	48 – 84 – 147
	pětičtvrtinový násobek → devítipětinový násobek / *superquadripartiens*	$a_{n+1} = (9/5)a_n$	75 – 135 – 243
	atd.		
násobný superpartikulární poměr / *multiplex superparticularis* (vznikají z posloupností superpartikulárních poměrů)	půldruhanásobek → dvouapůlnásobek / *dupla sesquialtera*	$a_{n+1} = (5/2)a_n$	12 – 30 – 75
	čtyřtřetinový násobek → násobek dvou a jedné třetiny / *dupla sesquitertia*	$a_{n+1} = (7/3)a_n$	27 – 63 – 147
	pětičtvrtinových násobek → násobek dvou a jedné čtvrtiny / *dupla sesquiquarta*	$a_{n+1} = (9/4)a_n$	48 – 108 – 243
	atd.		
násobný superparcientní poměr / *multiplex superpartiens* (vznikajíz posloupností superparcientních poměrů)	pětitřetinový násobek → násobek dvou a dvou třetin / *dupla superbipartiens*	$a_{n+1} = (8/3)a_n$	27 – 72 – 192
	sedmičtvrtiný násobek → násobek dvou a tří čtvrtin / *dupla supertripartiens*	$a_{n+1} = (11/4)a_n$	48 – 132 – 363
	devítipětinový násobek → násobek dvou a čtyř pětin / *dupla superquadripartiens*	$a_{n+1} = (14/5)a_n$	75 – 210 – 588
	atd.		

Tab. 17 – Vznik nerovnosti z původní rovnosti

Standardně (nikoli reverzně) uspořádané superpartikulární čísla (tj. např. 4 – 6 – 9) umožňují získat násobná superpartikulární čísla: z poměru 3 : 2 vzniká poměr 5 : 2 (např. 4 – 10 – 25), z poměru 4 : 3 poměr 7 : 3 (např. 9 – 21 – 49) a z poměru 5 : 4 poměr 9 : 4 (např. 16 – 36 – 81). Podobně pak ze vzestupně uspořádaných čísel v superparcientních poměrech (tzn. např. 9 – 15 – 25) jsou vytvořena násobná superparcientní čísla: poměr 5 : 3 dává poměr 8 : 3 (např. 9 – 24 – 64), poměr 7 : 4 zakládá poměr 11 : 4 (např. 16 – 44 – 121) a poměr 9 : 5 zase 14 : 5 (např. 25 – 70 – 196).[44] Celý tento proces je zachycen v tab. 17 a 18.

rovnost	1 – 1 – 1 ↓					
násobky	1 – 2 – 4 → *po reverzi* ↓		1 – 3 – 9 → *po reverzi* ↓		1 – 4 – 16 → *etc.* *po reverzi* ↓	
superpartikulární čísla	4 – 6 – 9 *po reverzi* ↓	↓	9 – 12 – 16 *po reverzi* ↓	↓	16 – 20 – 25 *po reverzi* ↓	↓
superparcientní čísla	9 – 15 – 25	↓	16 – 28 – 49	↓	25 – 45 – 81	↓
násobná superpartikulární čísla	↓	4 – 10 – 25	↓	9 – 21 – 49	↓	16 – 36 – 81
násobná superparcientní čísla	9 – 24 – 64		16–44–121		25–70–196	

Tab. 18 – Příklady vzniku poměrně uspořádaných posloupností

K nalezení vzniku a hodnot všech těchto posloupností čísel určených danými poměry stačí znát tři jednoduchá pravidla. Při přeměně tříčlenné posloupnosti (tj. z $a - b - c$ na $a_1 - b_1 - c_1$) jednoho poměru v druhý (např. rovnosti, tj. poměr 1 : 1, na dvojnásobky, tj. poměr 2 : 1) podle Boethia (a samozřejmě i Níkomacha) platí:[45]

[P1] $a_1 = a$
[P2] $b_1 = a + b$
[P3] $c_1 = a + 2b + c$

Aplikací těchto tří regulí lze rekonstruovat vznik všech typů nerovností z původní totožnosti a jednoty. Tato pravidla nám poskytují snadná vodítka pro pochopení řádu, s nímž se setkáváme v námi žitém světě. Neustále jsme totiž konfrontováni s mnohostí, která však není zcela chaotická, nýbrž zjevně vytváří určitý soulad – vše hmotné je kupř. vždy určitým způsobem sestavené ze čtyř základních prvků, naše řeč je vhodně seskládaným systémem hlásek či písmen, hudba není ničím jiným než číselnými poměry, v nichž spočívá základ jejího souzvuku atp. Tyto jednotlivosti vznikly postupně z původní jednoty,

[44] [BoAr], I, 32, s. 81–87; srov. [Nik], I, 23, s. 64–72.
[45] [BoAr], I, 32, s. 81; srov. [Nik], I, 23, s. 66–67.

rovnosti a dokonalosti[46] s využitím relativních vlastností čísel, a protože pouze Bůh je jedinečným, jedním, stále se sebou totožným a nesloženým bytím,[47] je zřejmé, že každá proporce či poměr má svůj kořen v rovnosti a stejnosti.[48] Pravidla [P1–P3] ukazují cestu, jak vše stvořené vzniklo, a zároveň vysvětlují důvody určitého jasného a řádného uspořádání, s nímž se v realitě setkáváme.

Cílem stvořeného je samozřejmě pokus o návrat k původní dokonalosti, tj. rovnosti a jednotě, což je další téma, které Boethius popisuje v souvislosti s převody jednotlivých poměrů. Opět užívá tříčlenné posloupnosti čísel uspořádané podle některého z uvedených poměrů, kteréžto jako výraz nerovnosti lze poměrně lehce a názorně převést na stejnost. I tentokrát si stačí osvojit tři základní pravidla:[49]

[R1] $a_1 = a$
[R2] $b_1 = b - a$
[R3] $c_1 = c - (2b_1 + a)$

Použitím těchto pravidel lze posloupnost tří čísel uspořádaných v určitém poměru převést na základnější poměr, z něhož tento pozdější poměr vznikl. Takto např. v případě násobků dochází k tomu, že čtyřnásobky jsou převáděny na trojnásobky, trojnásobky na dvojnásobky a tyto zase na rovnost; u superpartikulárních poměrů je poměr 5 : 4 změněn na původnější poměr 4 : 3, poměr 4 : 3 následně na poměr 3 : 2, z něhož jsou odvozeny tři stejné číselné hodnoty. Konkrétní příklad však Boethius uvádí jen jeden.[50] Zvolil si poměrně jednoduchý převod čtyřnásobků na rovnost (viz tab. 19), což se patrně stalo příčinou následných středověkých diskusí o převodech nerovných číselných poměrů, neboť Boethiův text umožňuje rozdílné interpretace.[51] Na naznačenou nejednoznačnost Boethiova textu zřejmě reaguje i Gerbert ve svým *Listu* 1.

1.	8 – 32 – 128	čtyřnásobky (poměr 4 : 1)	aplikace pravidel [R1–R3]	↓
2.	8 – 24 – 72	trojnásobky (poměr 3 : 1)	aplikace pravidel [R1–R3]	↓
3.	8 – 16 – 32	dvojnásobky (poměr 2 : 1)	aplikace pravidel [R1–R3]	↓
4.	8 – 8 – 8	rovnost (poměr 1 : 1)		

Tab. 19 – Příklad převodu násobků na rovnost

Boethius dále v Níkomachových šlépějích přidává dvě informace o násobných a superpartikukárních číslech. Nejprve názorně demonstruje, jakým způsobem lze z řady čísel sestavené podle určitého násobného poměru, získat příslušné řady

[46] [BoAr], II, 1, s. 93–94; srov. [Nik], II, 1, s. 73–74.
[47] [BT1], s. 28; česky [BTT], s. 17; resp. [BT2], s. 40–48; česky [BTT], s. 22–23.
[48] [BoAr], I, 32, s. 80; srov. [Nik], I, 23, s. 65; viz také kupř. [AbC], s. 85–86.
[49] [BoAr], II, 1, s. 94; srov. [Nik], II, 2, s. 74–75.
[50] [BoAr], II, 1, s. 94–96.
[51] Srov. např. [Bub], s. 31–35; resp. s. 297–299 nebo [AbC], s. 86–88.

superpartikulárních čísel. Jak bylo uvedeno, dvojnásobná čísla vedou ke vzniku poměru 3 : 2, trojnásobky k superpartikulárnímu poměru 4 : 3 atd.

Metoda matematické rekonstrukce toho vzniku je následující: Je-li vypsána řada čísel v daném násobném vztahu (kupř. dvojnásobky nebo trojnásobky [10a]), včetně kořene všech čísel, pak stačí postupně sčítat sousední hodnoty této řady od jedničky dále a zapisovat je do druhého řádku, kde vznikne řada čísel ve stejném poměru, ovšem s jiným počáteční číslenou hodnotou (nikoli jednotkou – např. v případě dvojnásobků řada čísel [10]); stejný postup sčítání se pak opakuje u členů posloupnosti ve druhé řadě, čímž vznikne třetí řada čísel, jejímž výsledkem bude posloupnost uspořádaná podle téhož násobného poměru, atd. Zároveň tak vznikají sloupce, které představují sestavy čísel, které reprezentují superpatikulární poměr odvozený z daného násobku. Poslední čísla sloupců pak tvoří další řadu čísel, která je sestavena podle násobného vztahu, jež bezprostředně následuje po daném násobku. Jelikož násobky jsou zdrojem nejen pro superpartikulární čísla, ale také pro vyšší násobky, umožňuje tento postup sčítaní a zapisování výsledků rekonstruovat obojí.[52] Dvojnásobky a vznik poměru 3 : 2 a trojnásobku zachycuje tab. 20; způsob, jak z trojnásobků odvodit poměry 4 : 3, resp. čtyřnásobky (poměr 4 : 1) představuje tab. 21.

dvojnásobky (2 : 1)	a_n	(1)	2	4	8	16	32	64	128	etc.
			3	6	12	24	48	96	192	etc.
				9	18	36	72	144	288	etc.
					27	54	108	216	432	etc.
řady čísel v poměrech 2 :1	$a_n + a_{n+1}$					81	162	324	648	etc.
							243	486	972	etc.
								729	1 458	etc.
									2 187	etc.
			sloupce čísel v poměrech 3 : 2							**poměr 3 : 1**

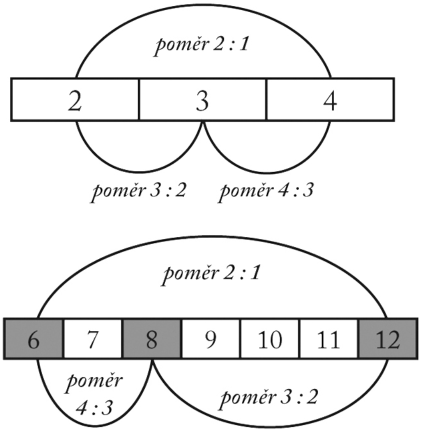
Tab. 20 – Vznik poměrů 3 : 2 a 3 : 1 z poměru 2 : 1

trojnásobky (3 : 1)	a_n	(1)	3	9	27	81	243	729	2 187	etc.
			4	12	36	108	324	972	2 916	etc.
				16	48	144	432	1 296	3 888	etc.
					64	192	576	1 728	5 184	etc.
řady čísel v poměrech 3 :1	$a_n + a_{n+1}$					256	768	2 304	6 912	etc.
							1 024	3 072	9 216	etc.
								4 096	12 288	etc.
									16 384	etc.
			sloupce čísel v poměrech 4 : 3							**poměr 4 : 1**

Tab. 21 – Vznik poměrů 4 : 3 a 4 : 1 z poměru 3 : 1

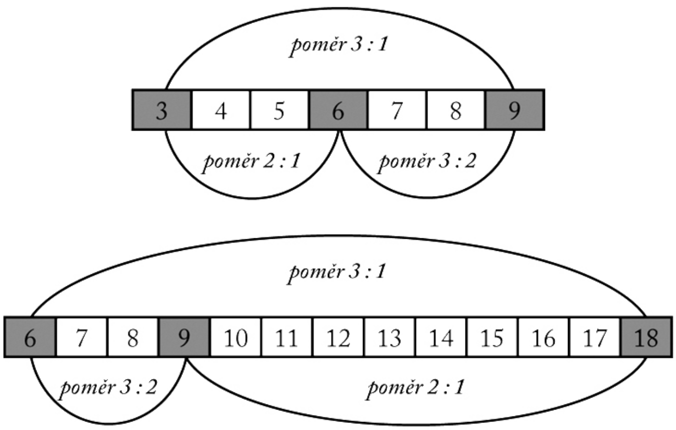
[52] [BoAr], II, 2, s. 97–102; srov. [Nik], II, 3–4, s. 76–79.

Mezi násobnými a superpartikulárními čísly je však ještě další společný vztah. Každý dvojnásobek je totiž složen ze dvou superpartikulárních poměrů (3 : 2 a 4 : 3), což je dobře patrné v hudbě, kde oktáva (2 : 1) je složena z kvarty (4 : 3) a kvinty (3 : 2). Tedy součet jedné seskvialtery (3 : 2) a seskvitercie (4 : 3) poskytuje jeden dvojnásobek, jak ukazuje obr. 9.



Obr. 9 – Součet poměrů 3 : 2 a 4 : 3

Trojnásobek je ve shodě se vznikem čísel součtem dvojnásobku (2 : 1) a kvinty, poměru 3 : 2 (viz obr. 10), čtyřnásobek součtem trojnásobku a kvarty (4 : 3) atd.[53]



Obr. 10 – Součet poměrů 3 : 2 a 2 : 1

[53] [BoAr], II, 3, s. 102–105; srov. [Nik], II, 5, s. 80–82.

Na tento exkurs o vybraných početních operacích s číselnými poměry, kterým přerušil svůj výklad o poměrech a posloupnostech, Boethius navázal jednak na závěr svého aritmetického pojednání a zejména pak v dalším svém díle (*Úvod do hudby*). Právě matematický základ hudebních vztahů a aritmetické operace s číselnými poměry jsou hlavní náplní dvou Gerbetrových dopisů Konstantinovi (*List 2* a *List 3*), které jsou psány jako komentář k Boethiovu hudebnímu textu.

2.5 Figurální čísla

Zatímco tematika číselných řad, posloupností, poměrů, jejich vzájemných vztahů a převodů představuje přirozený přechod z aritmetické nauky o vlastnostech čísel, nakolik jsou kladena do vztahů k jiným číslům, k hudební teorii, další Boethiův (a Níkomachův) výklad se obrací ke geometrickým konotacím nauky o číslech. Poslední probíranou klasifikací je totiž figurální ztvárnění čísel (E). V Boethiově klasifikaci se zde nejedná o „dohodnuté" označování jednotlivých čísel (např. „8" je symbolem pro osmičku, stejně jako „VIII"), nýbrž o způsob převedení čísla, které se skládá z určitého počtu jednotek, na jistý geometrický útvar.[54]

Podle této klasifikace jsou rozlišována čísla:

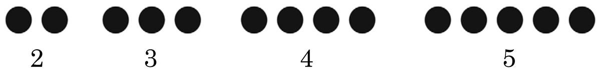
- přímočará;
- plošná:
  - trojúhelníková;
  - čtvercová;
  - pětiúhelníková;
  - kruhová etc.
- prostorová:
  - jehlanová:
    - s trojúhelníkovou základnou;
    - se čtyřúhelníkovou základnou etc.
  - krychlová (kubická);
  - kulová (sférická).

2.5.1 Přímočará čísla

Čísla přímočará (*linealis*) vycházejí, stejně jako všechna čísla, z prvopočátku v podobě jednotky. Pokud je tato jednotka vizualizována jako bod, pak přímočará čísla představují rozvinutí bodu do délky, čímž vzniká čára, jejíž délka je dána počty bodů (jednotek), které dané číslo reprezentují. Pohyb bodu

[54] Podrobnější rozbor starší pythagorejské tradice nabízí např. [Bč1], s. 42–50.

jedním směrem – tj. do délky – je takto příčinou vzniku všech přímočarých čísel.[55] Jejich zobrazení nabízí obr. 11.

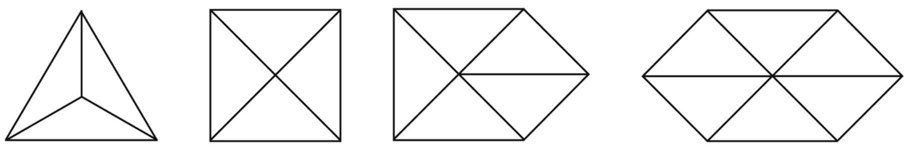


Obr. 11 – Přímočará čísla

2.5.2 Plošná čísla

Podobně jako přímočará čísla vznikají z pohybu bodu a můžeme u nich sledovat posun dopředu, tj. přičítání, tzn. růst řady přirozených čísel, nebo nazpátek, tj. odčítání, tzn. návrat či sestup řady přirozených čísel ke kořeni všech čísel, tak čísla plošná (*superficialis*) je možné znázornit jako pohyb čáry. Tato čísla mají krom délky i šířku a vedle pohybu dopředu a dozadu lze uvažovat i o posunech doprava a doleva.

Základem takřka všech plošných čísel je trojúhelník, neboť ten je reprezentantem nejen trojúhelníkových čísel (lze v nich určit tři trojúhelníky), ale také čtvercových čísel (skládají se ze čtyř trojúhelníků), pětiúhelníkových čísel (pět trojúhelníků), šestiúhelníkových čísel (šest trojúhelníků) atd.[56] Názorněji viz obr. 12.



Obr. 12 – Trojúhelníkový základ plošných úhelníkových čísel

Nejprve je proto pozornost věnována **trojúhelníkovým číslům** (*triangulus*), jejichž sled vypadá takto:

[20] (1), 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, etc.

Získat tuto řadu lze sestavením všech přirozených čísel (počínaje jednotkou), sečtením prvních dvou po sobě jdoucích hodnot a k tomuto výsledku se následně přičítá vždy hodnota dalšího čísla v řadě. Prvním trojúhelníkovým číslem je tedy součet jednotky a prvního čísla (2), tzn. 3 – jednička samotná je trojúhelníkem pouze v možnosti, nikoli aktuálně. Druhým trojúhelníkovým číslem je pak 6, třetím 10 atd.[57] Postup jejich nalezení naznačuje tab. 21, jejich figurální znázornění pak obr. 13.

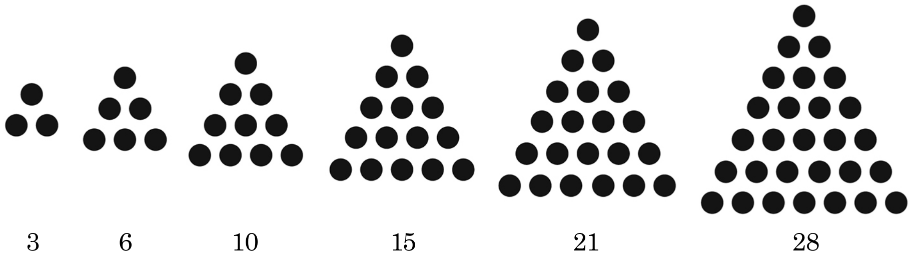
[55] [BoAr], II, 5, s. 110–111. Srov. např. [IsEt], III, 7, s. 296; česky s. 297.

[56] [BoAr], II, 6, s. 111–114.

[57] [BoAr], II, 7–9, s. 114–117; srov. [Nik], II, 8, 87–89; česky viz [NŠír], s. 461–463. Dále viz např. [MaNu], VII, 755, s. 276 nebo [IsEt], III, 7, 296; česky s. 297.

přirozená čísla	**(1)**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**etc.**
	(1)	1 + 2	3 + 3	6 + 4	10 + 5	15 + 6	21 + 7	28 + 8	etc.
řada [20]	**(1)**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**etc.**

Tab. 21 – Nalezení řady trojúhelníkových čísel



Obr. 13 – Trojúhelníková čísla

Toto aritmetické znázornění a určení hodnot trojúhelníkových čísel se samozřejmě liší od geometrických výpočtů, podle nichž lze stanovit obsah trojúhelníků. Na tuto skutečnost reaguje Gerbert ve svém dopisu Adelboldovi, kde popisuje trojúhelník, jehož trojúhelníkovým číslem je 28 (*List* 7).

Čtvercová čísla (*quadratus*) představují tuto číselnou řadu:

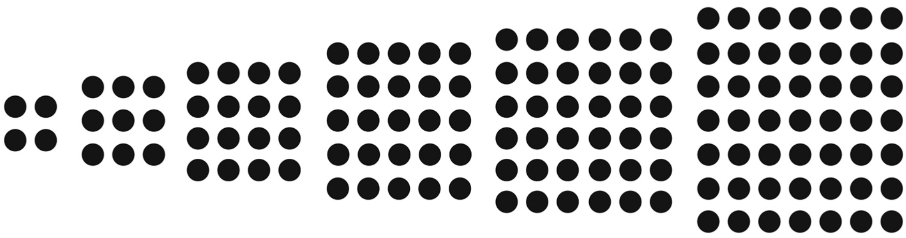
[21] (1), 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 etc.

K jejich nalezení se užívá podobného pravidla, jako v případě trojúhelníkových čísel. Jelikož je zde o jeden úhel více, v řadě přirozených čísel, která jsou postupně přičítána k předchozímu součtu, se vždy musí jedno číslo vynechat. I v tomto případě se začíná jednotkou, která je i zde prvním čtvercovým číslem v potenci a je nutno začít od ní. K ní se ovšem nepřičítá dvojka ale až trojka; vynechá se čtyřka a přičte se pětka atd. Ve výsledku se tak přičítají pouze lichá čísla.[58] Způsob nalezení čtvercových čísel uvádí tab. 22, jejich figurální podobu pak obr. 14.

přirozená čísla (každé druhé se vynechává)	**(1)**	~~**2**~~	**3**	~~**4**~~	**5**	~~**6**~~	**7**	~~**8**~~	**9**	~~**10**~~	**11**	~~**12**~~	**13**	**etc.**
	(1)		1+3		4+5		9+7		16+9		25+11		36+13	etc.
řada [21]	**(1)**		**4**		**9**		**16**		**25**		**36**		**49**	**etc.**

Tab. 22 – Nalezení řady čtvercových čísel

[58] [BoAr], II, 10–12, s. 117–119; srov. [Nik], II, 9, s. 90–91.



4 9 16 25 36 49

Obr. 14 – Čtvercová čísla

Analogicky k předchozímu postupu Boethius pojednává o pětiúhelníkových, šestiúhelníkových atd. číslech. Řady těchto čísel lze sestavit stejně, jako tomu bylo v případě čtvercových čísel – pouze je zde vždy o jeden či více trojúhelníků více, tudíž se při sčítání vynechávají dvě čísla či příslušný počet podle množství úhlů (u pětiúhelníků dvě, u sedmiúhelníků čtyři atd.).[59]

Jelikož trojúhelníkové číslo je základem pro takřka všechna plošná čísla, platí, že z řady trojúhelníkových čísel lze získat řady ostatních čísel. Čtvercová čísla vzniknou součtem hodnot dvou sousedních členů řady trojúhelníkových čísel, počínaje jednotkou. Když stejným způsobem sčítáme členy posloupnosti trojúhelníkových čísel s bezprostředně následujícím číslem čtvercovým, vzniknou čísla pětiúhelníková, ze součtu trojúhelníkových a následných pětiúhelníkových čísel vzejdou čísla šetiúhelníková etc.[60] Přehledně viz tab. 23.

<table>
<tr><td>řada [20] (a_n)</td><td>(1)</td><td>3</td><td>6</td><td>10</td><td>15</td><td>21</td><td>28</td><td>36</td><td>45</td><td>55</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_n + a_{n+1}$</td><td>(1)</td><td colspan="2">3 + 6</td><td colspan="2">10 + 15</td><td colspan="2">21 + 28</td><td colspan="2">36 + 45</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 + 3</td><td colspan="2">6 + 10</td><td colspan="2">15 + 21</td><td colspan="2">28 + 36</td><td colspan="2">45 + 55</td></tr>
<tr><td>řada [21] (b_n)</td><td>(1)</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>36</td><td>49</td><td>64</td><td>81</td><td>100</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_n + b_{n+1}$</td><td>(1)</td><td colspan="2">3 + 9</td><td colspan="2">10 + 25</td><td colspan="2">21 + 49</td><td colspan="2">36 + 81</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 + 4</td><td colspan="2">6 + 16</td><td colspan="2">15 + 36</td><td colspan="2">28 + 64</td><td colspan="2">45 + 100</td></tr>
<tr><td>pětiúhelníková čísla (c_n)</td><td>(1)</td><td>5</td><td>12</td><td>22</td><td>35</td><td>51</td><td>70</td><td>92</td><td>117</td><td>145</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_n + c_{n+1}$</td><td>(1)</td><td colspan="2">3 + 13</td><td colspan="2">10 + 35</td><td colspan="2">21 + 70</td><td colspan="2">36 + 117</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 + 5</td><td colspan="2">6 + 22</td><td colspan="2">15 + 51</td><td colspan="2">28 + 92</td><td colspan="2">45 + 145</td></tr>
<tr><td>šestiúhelníková čísla (d_n)</td><td>(1)</td><td>6</td><td>15</td><td>28</td><td>45</td><td>66</td><td>91</td><td>120</td><td>153</td><td>190</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_n + d_{n+1}$</td><td>(1)</td><td colspan="2">3 + 15</td><td colspan="2">10 + 45</td><td colspan="2">21 + 91</td><td colspan="2">36 + 153</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td colspan="2">1 + 6</td><td colspan="2">6 + 28</td><td colspan="2">15 + 66</td><td colspan="2">28 + 120</td><td colspan="2">45 + 190</td></tr>
<tr><td>sedmiúhelníková čísla</td><td>(1)</td><td>7</td><td>18</td><td>34</td><td>55</td><td>81</td><td>112</td><td>148</td><td>189</td><td>235</td></tr>
</table>

Tab. 23 – Nalezení plošných čísel

[59] [BoAr], II, 13–16, s. 120–124; srov. [Nik], II, 10–11, s. 92–95; česky viz [NŠír], s. 463–465.

[60] [BoAr], II, 17–18, s. 125–127; srov. [Nik], II, 12, s. 95–99.

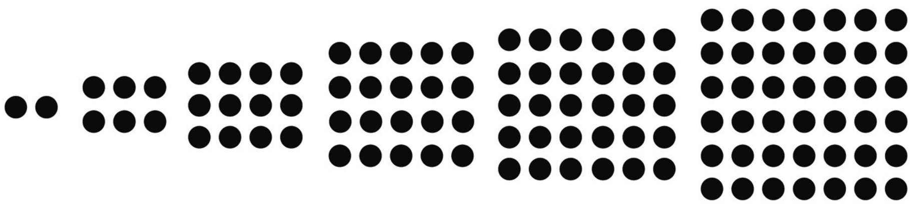
Vedle těchto pravidelných čísel, která poskytují harmonické geometrické obrazce, jsou však mezi plošnými čísly i nepravidelná čísla – jejich znázornění pomocí bodů však není reprezentováno pravidelným růstem jako např. v případě čtverce, nýbrž např. jedna strana je delší, takže vznikají obdélníky, tzn. plošné čtyřúhelníkové útvary, kde dvě strany jsou delší než druhé dvě strany. Jinými slovy délka a šířka nejsou v rovnosti. **Obdélníková čísla** (*parte altera longior*), pokud se jejich nerovné strany vždy liší pouze o jednotku, vypadají např. takto:

[22] 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72 etc.

Nalezneme je tak, že použijeme řadu přirozených čísel počínaje jednotkou a postupně násobíme sousední členy této řady.[61] Přehledněji viz tab. 24 a obr. 15.

přirozená čísla	**(1)**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**etc.**
	(1)	$1 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$3 \cdot 4$	$4 \cdot 5$	$5 \cdot 6$	$6 \cdot 7$	$7 \cdot 8$	$8 \cdot 9$	$9 \cdot 10$	etc.
řada [22]	**(1)**	**2**	**6**	**12**	**20**	**30**	**42**	**56**	**72**	**90**	**etc.**

Tab. 24 – Nalezení obdélníkových čísel



2 6 12 20 30 42

Obr. 15 – Obdélníková čísla

Je zřejmé, že v případě představených obdélníkových čísel se strany čtyřúhelníku liší o jednotku. Existují však i jinak uspořádané obdélníky, kde je jiný rozdíl v délkách stran. Získat tato nepravidelná čtyřúhelníková čísla je pak procesně stejné, pouze se musí zohlednit délka stran: Např. v obdélníku o délce stran 3 a 7 bude prvním nepravidelným obdélníkovým číslem 21, dalším pak součin bezprostředně následujících přirozených čísel za oběma činiteli prvního násobení, tj. 4 a 8, tzn. druhým nepravidelným obdélníkovým číslem je 32, třetím 45, neboť se jedná o součin 5 a 9 atd.[62]

61 [BoAr], II, 26, s. 143–144; srov. [Nik], II, 17, s. 108.

62 [BoAr], II, 27, s. 145–146; srov. [Nik], II, 17, s. 108–109.

Boethius dodává, že všechny obdélníky vyjadřují větší míru disharmonie, neboť jejich zdrojem jsou sudá čísla, kdežto čtvercová čísla jsou odvozena z čísel lichých. Všechna čtvercová čísla jsou totiž součtem řady lichých čísel počínaje principem všech čísel, kdežto (pravidelná) obdélníková čísla jsou součtem řady sudých čísel,[63] jak ukazuje tab. 25.

lichá čísla	**(1)**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**etc.**
		1 + 3	1 + 3 + 5	1 + 3 + 5 + 7	1 + 3 + 5 + 7 + 9	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11	etc.
řada [21]	**(1)**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**etc.**
sudá čísla	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**etc.**
		2 + 4	2 + 4 + 6	2 + 4 + 6 + 8	2 + 4 + 6 + 8 + 10	2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12	etc.
řada [22]		**6**	**12**	**20**	**30**	**42**	**etc.**

Tab. 25 – Zrod čtvrcových a obdélníkových čísel z řad lichých a sudých čísel

Zcela specifickým případem plošného čísla jsou pak **čísla kruhová** (*cyclicus*). Základní charakteristika těchto čísel již nesouvisí se znázorňováním pomocí bodů, navíc jejich základem není trojúhelník, jako u ostatních plošných čísel. V tomto případě jde o takovou vlastnost, že určité číslo, je-li vynásobeno samo sebou, tj. druhá mocnina čísla, dává takový výsledek, v němž se číselná hodnota jednotek čísla a součinu rovnají. Kruhovými čísly jsou proto např. 5 (neboť $\underline{5}^2 = 2\underline{5}$), 6 ($\underline{6}^2 = 3\underline{6}$), 10 ($1\underline{0}^2 = 10\underline{0}$), 11 ($1\underline{1}^2 = 12\underline{1}$) atd.[64]

2.5.3 Prostorová čísla

Zatímco přímočará čísla se znázorňují jako posun bodu po jedné linii a plošná čísla vznikají jako pohyb čáry, čímž se vymezuje druhý rozměr, je pro prostorová čísla (*solidus*) typický posun plochy – tedy k pohybům dopředu a dozadu, resp. doprava a doleva, se přidávají ještě posuny nahoru a dolů. Prostorová čísla jsou tedy trojrozměrná a k dřívějším délkám (přímočará čísla) a šířkám (prostorová čísla) je přidána ještě výška neboli hloubka. Podobná role, jaká je vymezena trojúhelníku v případě plošných čísel, je u prostorových čísel vyhrazena jehlanu. Jehlan, tzn. mnohoúhelník s jedním bodem mimo plochu, který stanoví výšku tohoto jehlanu, je zdrojem takřka všech třírozměrných tvarů a umožňuje vznik nejrůznějších mnohostěnů.[65]

[63] [BoAr], II, 28, s. 146–149; srov. [Nik], II, 17, s. 109–110.

[64] [BoAr], II, 30, s. 151; srov. [Nik], II, 17, s. 111–112; dále viz např. [IsEt], III, 7, s. 296–298; česky s. 297–299.

[65] [BoAr], II, 20–22, s. 129–131; srov. [Nik], II, 13, s. 99–101; česky viz [NŠír], s. 465. Dále viz např. [MaNu], VII, 754, s. 276 nebo [IsEt], III, 7, s. 296; česky s. 297.

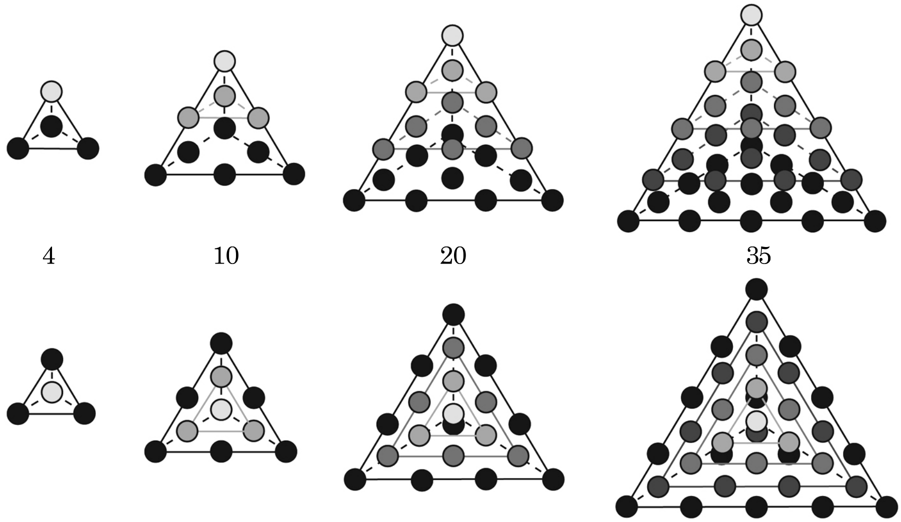
Prvním z prostorových čísel je proto **číslo jehlanové** (*pyramis*). Mezi jehlanovými čísly je primární to, jež vychází z trojúhelníkové základny. Jejich řada vypadá takto:

[23] (1), 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120 etc.

Zjistit posloupnost jehlanových čísel s trojúhelníkovou základnou lze poměrně snadno s využitím trojúhelníkových čísel. Když tato sestavíme do vzestupné řady a budeme postupně přičítat další trojúhelníkové číslo, dostaneme posloupnost jehlanových čísel s trojúhelníkovou základnou. Názorně to zachycuje tab. 26 a možné vyobrazení nabízí obr. 16.

řada [20]	**(1)**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**etc.**
		1 + 3	4 + 6	10 + 10	20 + 15	35 + 21	56 + 28	84 + 36	etc.
řada [23]	**(1)**	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**	**84**	**120**	**etc.**

Tab. 26 – Nalezení jehlanových čísel s trojúhelníkovou základnou



Obr. 16 – Jehlanová čísla s trojúhelníkovou základnou (spodní schémata ukazují pohled shora)

Podobný postup, pouze s využitím čtvercových čísel, poskytne řadu jehlanových čísel se čtvercovou základnou. Analogicky pak lze jít dále a získat jehlanová čísla s pětiúhelníkovou, šestiúhelníkovou atd. základnou, pouze se tentokrát vzájemně přičítají další pětiúhelníková, šestiúhelníková etc. plošná čísla.[66]

[66] [BoAr], II, 23, s. 132–135; srov. [Nik], II, 13–14, s. 101–103; česky viz [NŠír], s. 465–467.

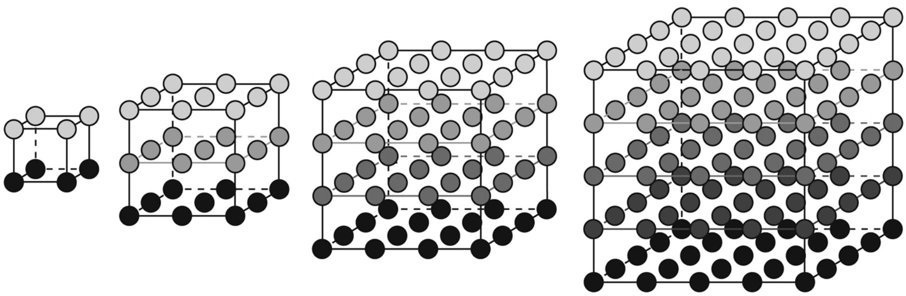
Krátkým mezičlánkem v podobě „zkrácené“ pyramidy, tj. komolého jehlanu,[67] přechází Boethius ke **kubickým číslům** (*cybus*). Tato čísla jsou reprezentována body, jejichž uspořádání vytváří šestistěny. Největší pozornost je věnována krychlovým číslům, která jsou odvozena ze čtvercových čísel a všechny stěny ve figurálním zobrazení mají tvar čtverce. Jelikož ke čtvercovým číslům se v případě krychlových čísel přidává třetí rozměr (tj. výška, resp. hloubka), je nutno přidat takové množství jednotek, které odpovídá součinu čtvercového čísla s délkou strany odpovídající danému čtverci. Jinými slovy jedná se o třetí mocniny přirozených čísel, jak ukazuje řada kubických čísel:

[24] (1), 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 etc.

Boethius ve svém *Úvodu do aritmetiky* ctí především řád přirozených čísel, a proto uvádí, že posloupnost krychlových čísel povstane ze součinu daného přirozeného čísla se čtvercovým číslem, které ve vzestupné řadě zastává stejné umístění v řadě jako dané přirozené číslo. Tzn. je-li čtvrtým přirozeným číslem čtyřka, pak čtvrté krychlové číslo (tj. 64) je součinem čtyřky se čtvrtým čtvercovým číslem, tj. 16.[68] Naznačenou metodu zachycuje tab. 27 a vizualizaci krychlových čísel ukazuje obr. 17.

přirozená čísla	**(1)**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**etc.**
řada [21]	**(1)**	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**	**etc.**
	1·1	2·4	3·9	4·16	5·25	6·36	7·49	8·64	9·81	10·100	etc.
řada [24]	**(1)**	**8**	**27**	**64**	**125**	**216**	**343**	**512**	**729**	**1000**	**etc.**

Tab. 27 – Nalezení krychlových čísel



8 27 64 125

Obr. 17 – Krychlová čísla

Kvadrátová čísla vycházejí z obdélníkových základen, a tudíž se jejich řady získávají z patřičných obdélníkových čísel, ať již pravidelných či nepravidelných.[69]

[67] [BoAr], II, 24, s. 136–137; srov. [Nik], II, 14, s. 104.
[68] [BoAr], II, 25, s. 138–140; srov. [Nik], II, 15, s. 105–106; česky viz [NŠír], s. 467.
[69] [BoAr], II, 29, s. 150; srov. [Nik], II, 16, s. 106–108.

Čísla kulová (*sphericus*) zase následují čísla kruhová – nejedná se zde o výraz prostorové reprezentace čísel pomocí bodů, nýbrž o tu vlastnost, kdy se shoduje číselná hodnota řádu jednotek určitého čísla s číselnou hodnotou jednotek třetí mocniny téhož čísla. Kulová čísla jsou tudíž podobná jako kruhová: např. 5 ($\underline{5}^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 12\underline{5}$), 6 ($\underline{6}^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 21\underline{6}$), 10 ($1\underline{0}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,00\underline{0}$) či 11 ($1\underline{1}^3 = 11 \cdot 11 \cdot 11 = 133\underline{1}$).[70]

2.5.4 Figurální čísla a číselné poměry

Skrze neměnnost a proměnlivost a s odkazy např. na Platóna či Filolaa Boethius krátce připomíná metafyzickou důležitost čísel a jejich ontologickou roli, především pak ve vztahu čísel k neměnnému božskému řádu a k duši, resp. k věcem hmotného světa, v nichž se prolíná konečnost i nekonečnost, která je uspořádána do souladné harmonie a řádu.[71] Řady figurálních čísel nejsou pouze výrazem geometrizace aritmetiky, ale odkazují na vzájemné poměrné uspořádání jednotlivých věcí ve veškerenstvu.

Za základní výraz souladu mezi čísly a jejich prezentace v jednotlivinách uvádí Boethius vztah mezi čtvercovými a pravidelnými obdélníkovými čísly. Z výše uvedeného je zřejmé, že tato čísla v sobě souhrnným způsobem zachycují obě podstatné vlastnosti čísel: sudost a lichost; řada čtvercových čísel totiž vzniká postupným přičítáním lichých čísel, kdežto obdélníková čísla vznikají postupným přidáváním sudých čísel. Čtvercová a obdélníková čísla, jsou-li vzájemně porovnávána, příp. odčítána, poskytují násobný poměr 2 : 1 a pak řadu všech superpartikulárních čísel – viz tab. 28.

<table>
<tr><td>řada [21] (a_n)</td><td>(1)</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>36</td><td>49</td><td>64</td><td>81</td><td>100</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td>řada [22] (b_n)</td><td>2</td><td>6</td><td>12</td><td>20</td><td>30</td><td>42</td><td>56</td><td>72</td><td>90</td><td>110</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td>$b_n : a_n$</td><td>2 : 1</td><td>3 : 2</td><td>4 : 3</td><td>5 : 4</td><td>6 : 5</td><td>7 : 6</td><td>8 : 7</td><td>9 : 8</td><td>10 : 9</td><td>11 : 10</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td>$c_n = b_n - a_n$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$c_{n+1} : c_n$</td><td colspan="2">2 : 1</td><td colspan="2">4 : 3</td><td colspan="2">6 : 5</td><td colspan="2">8 : 7</td><td colspan="2">10 : 9</td><td rowspan="2">etc.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">3 : 2</td><td colspan="2">5 : 4</td><td colspan="2">7 : 6</td><td colspan="2">9 : 8</td><td></td></tr>
</table>

Tab. 28 – Číselné poměry mezi čtvercovými a obdélníkovými čísly

Uměřený soulad mezi oběma uvedenými čtyřúhelníkovými čísly pak dokládá jejich vzájemné sestavení do tříčlenných posloupností, kdy na prvním a třetím místě jsou dvě po sobě jdoucí čtvercová čísla a doprostřed je umístěno pravidelné obdélníkové číslo řádově odpovídající prvnímu čtvercovému číslu

[70] [BoAr], II, 30, s. 151–152; srov. [Nik], II, 17, s. 111–112; viz také např. [MaNu], VII, 756, s. 277.

[71] [BoAr], II, 31–32, s. 153–158; srov. [Nik], II, 18, s. 112–114.

(tzn. $a_n - b_n - a_{n+1}$). Takto uspořádané hodnoty poskytují opětovně řady čísel vyjadřující poměry 2 : 1, 3 : 2, 4 : 3 etc.[72] Přehledněji viz tab. 29.

<table>
<tr><td>řada [21] (a_n)</td><td>(1)</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>36</td><td>49</td><td>64</td><td>81</td><td>100</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td>řada [22] (b_n)</td><td>2</td><td>6</td><td>12</td><td>20</td><td>30</td><td>42</td><td>56</td><td>72</td><td>90</td><td>110</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_n - b_n - a_{n+1}$ / poměr</td><td colspan="2">1 – 2 – 4
2 : 1</td><td colspan="2">9 – 12 – 16
4 : 3</td><td colspan="2">25 – 30 – 36
6 : 5</td><td colspan="2">49 – 56 – 64
8 : 7</td><td colspan="2">81 – 90 – 100
10 : 9</td><td rowspan="2">etc.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">4 – 6 – 9
3 : 2</td><td colspan="2">16 – 20 – 25
5 : 4</td><td colspan="2">36 – 42 – 49
7 : 6</td><td colspan="2">64 – 72 – 81
9 : 8</td><td></td></tr>
</table>

Tab. 29 – Posloupnosti vznikající z čtvercových a obdélníkových čísel

Jelikož se vše odvíjí podle číselných poměrů, které mají svůj zrod v rovnosti (1 : 1), z níž teprve vznikají všechny nerovnosti, platí i zde, že jednotka je zdrojem a základem všeho, je tedy odrazem skutečné a neměnné podstaty či přirozenosti. Naproti tomu dvojka je výrazem změny a rozdílnosti. Proto sudá čísla mají v sobě více nepravidelnosti a proměnlivosti, jsou více vzdálená dokonalé jednotce, než je tomu v případě lichých čísel, jež se podílí na stálosti principu všech čísel. Tudíž čtvercová čísla, jejichž původ tkví v přičítání lichých čísel, jsou blíže původní dokonalosti než pravidelná obdélníková čísla, jejichž vznik je dán přičítáním sudých čísel.[73]

Společná, vzestupně uspořádaná řada čtvercových a obdélníkových čísel pak vyjadřuje tytéž číselné poměry, o nichž již byla řeč (dvojnásobky a superpartikulární poměry), což platí i o rozdílech mezi sousedními členy této společné řady[74] – viz tab. 30.

<table>
<tr><td>řada [21]</td><td>(1)</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>36</td><td>49</td><td>64</td><td>81</td><td>100</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td>řada [22]</td><td>2</td><td>6</td><td>12</td><td>20</td><td>30</td><td>42</td><td>56</td><td>72</td><td>90</td><td>110</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td>řady [21] a [22] (a_n)</td><td>(1)</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>9</td><td>12</td><td>16</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a_{n+1} : a_n$</td><td colspan="2">2 : 1</td><td colspan="2">3 : 2</td><td colspan="2">4 : 3</td><td colspan="2">5 : 4</td><td colspan="2">6 : 5</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">2 : 1</td><td colspan="2">3 : 2</td><td colspan="2">4 : 3</td><td colspan="2">5 : 4</td><td colspan="2">etc.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$b_n = a_{n+1} - a_n$</td><td colspan="2">2 – 1</td><td colspan="2">6 – 4</td><td colspan="2">12 – 9</td><td colspan="2">20 – 16</td><td colspan="2">25 – 30</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">4 – 2</td><td colspan="2">9 – 6</td><td colspan="2">16 – 12</td><td colspan="2">25 – 20</td><td colspan="2">etc.</td></tr>
<tr><td>b_n</td><td></td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td><td>5</td><td>etc.</td></tr>
<tr><td>$b_{n+1} : b_n$</td><td></td><td colspan="2">2 : 1</td><td colspan="2">3 : 2</td><td colspan="2">4 : 3</td><td colspan="2">5 : 4</td><td colspan="2">etc.</td></tr>
</table>

Tab. 30 – Čtvercová a obdélníková čísla jako základ dvojnásobného poměru a superpartikulárních čísel

72 [BoAr], II, 33, s. 158–164; srov. [Nik], II, 19, s. 114–117.
73 [BoAr], II, 36, s. 166; srov. [Nik], II, 20, s. 117–118.
74 [BoAr], II, 37, s. 157–169; srov. [Nik], II, 20, s. 114–117.

Jako základ plošných čísel však byla stanovena trojúhelníková čísla, k nimž mají čtyřúhelníková čísla bezprostřední vztah. To Boethius dokládá společnou řadou čtvercových a obdélníkových čísel, kdy součet dvou bezprostředně následujících členů této řady poskytuje řadu trojúhelníkových čísel[75] – viz tab. 31.

řady [21] **a** [22] (a_n)	**(1)**	**2**	**4**	**6**	**9**	**12**	**16**	**20**	**25**	**30**	**etc.**
$b_n = a_n + a_{n+1}$	1 + 2		4 + 6		9 + 12		16 + 20		25 + 30		etc.
		2 + 4		6 + 9		12 + 16		20 + 25		etc.	
řada [20] (b_n)		**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**55**	**etc.**

Tab. 31 – Trojúhelníková čísla jako součty čtvercových a obdélníkových čísel

Také krychlová čísla reprezentují podíl na jednotce, resp. na lichých číslech. Všechna čísla tohoto typu prostorových čísel jsou totiž součtem řady lichých čísel. Začneme-li kořenem všech čísel, tj. jedničkou, pak druhým krychlovým číslem je součet dvou následujících lichých čísel, třetím krychlovýcm číslem je součet dalších tří lichých čísel atd.[76] Přehledněji viz tab. 32.

lichá čísla	**(1)**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**	**15**	**17**	**19**	**21**	**23**	**25**	**27**	**29**	**etc.**
	(1)	3 + 5		7 + 9 + 11			13 + 15 + 17 + 19				21 + 23 + 25 +27 + 29					etc.
řada [24]	**(1)**	**8**		**27**			**64**				**125**					**etc.**

Tab. 32 – Krychlová čísla jako součty lichých čísel

2.6 Číselné posloupnosti

Posledním tématem, jemuž se Boethius v *Úvodu do artimetiky* věnuje, jsou základní typy číselných posloupností (F). Číselná posloupnost je vymezena jako řada čísel, která je dána poměrem mezi těmito čísly, přičemž daný poměr určuje rozdíl v hodnotách čísel dané posloupnosti.[77] Již od starších pýthagorejců, příp. Platóna či Aristotela, pochází dělení posloupností na několik základních typů, resp. na deset druhů, což odpovídá tradičnímu centrálnímu postavení čísla 10 v pýthagorejských naukách:[78]

- hlavní posloupnosti:
  - aritmetická;
  - geometrická;
  - harmonická;

[75] [BoAr], II, 34, s. 164–165; srov. [Nik], II, 19, s. 116–117.
[76] [BoAr], II, 39, s. 171–172; srov. [Nik], II, 19, s. 117.
[77] [BoAr], II, 40, s. 172–174; srov. [Nik], II, 21, s. 119–122; česky viz [NŠír], s. 467–469.
[78] [BoAr], II, 41, s. 175–176; srov. [Nik], II, 22, s. 122–123; česky viz [NŠír], s. 469.

- posloupnosti protikladné k uvedeným:
  - tzv. čtvrtá (protikladná k harmonické);
  - tzv. pátá (protikladná ke geometrické);
  - tzv. šestá (také protikladná ke geometrické);
- dodatečné posloupnosti:
  - tzv. sedmá;
  - tzv. osmá;
  - tzv. devátá;
  - tzv. desátá.

2.6.1 Hlavní druhy posloupností

Figurální čísla mimo jiné vyjadřovala vizualizaci číselných hodnot ve vztahu k jejich představení pomocí jednotlivých rozměrů: přímočará čísla odpovídají jednorozměrnému vyjádření, plošná čísla dvojrozměrnému znázornění, trojrozměrným objektům pak odpovídají prostorová čísla. Podobně i číselné posloupnosti odrážejí vztahy mezi jednotlivými rozměry: aritmetická posloupnost odpovídá jednomu proporčnímu poměru mezi dvěma rozměry (délka a šířka) a tudíž plošným číslům, geometrická posloupnost pak dvěma proporčním vztahům mezi třemi rozměry (délka, šířka a výška), tzn. prostorovým číslům.[79]

První posloupností je **aritmetická posloupnost**, jejíž určující vlastností je, že číselná řada roste vždy o tzv. diferenci, tedy rozdíl, který je mezi jednotlivými členy číselné řady totožný. Diferenci lze zjistit jako rozdíl následujích a bezprostředně předcházejících členů řady, tzn.:

[25] $d = a_{n+1} - a_n.$

Tuto posloupnost je tedy možné obecně charakterizovat takto:

[26] $a_{n+1} = a_n + d.$

Aritmetickou posloupnost[80] představují např. čísla 4, 7, 10, 13 etc.; diference je v tomto případě 3.

Geometrická posloupnost stanoví vztah mezi svými jednotlivými členy pomocí tzv. kvocientu či podílu, tj. číselného poměru, kterým se mění hodnota všech členů dané řady. Kvocient je dán podílem následných a bezprostředně předcházejících členů řady, tzn.:

[27] $q = a_{n+1} : a_n;$

což značí, že geometrickou posloupnost lze vymezit vzorcem

[28] $a_{n+1} = a_n \cdot q.$

79 [BoAr], II, 46, s. 191–194; srov. [Nik], II, 26, s. 135–136; česky viz [NŠír], s. 475.

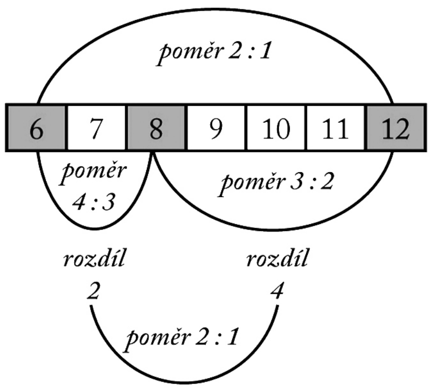
80 [BoAr], II, 42–43, s. 176–183; srov. [Nik], II, 23, s. 124–126; česky viz [NŠír], s. 469.

Tento typ posloupnosti[81] se nachází např. mezi čísly 27, 36, 48, 64 etc., kde podíl (kvocient) je dán poměrem 4 : 3.

Harmonická posloupnost vzniká mezi třemi členy číselné řady, přičemž podíl třetího a prvního členu se rovná podílu mezi rozdílem třetího a druhého členu této řady a rozdílem druhého a prvního členu této řady. Harmonie je tedy výrazem tohoto vztahu:[82]

[29] $$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}.$$

Harmonickou se tato posloupnost nazývá proto, že se v ní odráží hudební poměry, např. oktáva (2 : 1) je složena z kvinty (3 : 2) a kvarty (4 : 3).[83] Tato posloupnost také zřetelně odráží vztahy mezi kubickými čísly, resp. mezi složkami jejich objektových reprezentací: kupř. krychle nebo kvádry mají 6 stěn (jedná se o šestistěny), 8 vrcholů a 12 hran. Číselná řada 6 – 8 – 12 v sobě zahrnuje hned tři poměry geometrické posloupností: 2 : 1, 3 : 2 a 4 : 3, které zároveň odpovídají hudebním poměrům oktávy, kvinty a kvarty, a navíc rozdíl mezi třetím a druhým členem řady a druhým a prvním členem této řady jsou rovněž v poměru 2 : 1 (viz obr. 18), přičemž celá tato řada dává harmonickou posloupnost.



Obr. 18 – Poměry mezi čísly 6 – 8 – 12

Nalezení středu mezi dvěma krajními členy posloupnosti se podle uvedených třech úměr liší. V případě aritmetické posloupnosti nalezneme střední člen řady pomocí součtu prvního a třetího členu řady a vydělením získaného součtu dvěma; použít lze i postup, kdy se od třetího členu odečte první člen a výsledný rozdíl se vydělí dvěma a tento výsledek se přičte k prvnímu členu, tzn.:

[81] [BoAr], II, 44, s. 184–190; srov. [Nik], II, 24, s. 126–131; česky viz [NŠír], s. 471–473.
[82] [BoAr], II, 47, s. 195–199; srov. [Nik], II, 25, s. 131–133; česky viz [NŠír], s. 473–475.
[83] [BoAr], II, 48–49, s. 200–207; srov. [Nik], II, 26, s. 134–136; česky viz [NŠír], s. 475.

[30] $a_{n+1} = \frac{a_{n+2} + a_n}{2}$;

resp.

[30′] $a_{n+1} = a_n + \frac{(a_{n+2} - a_n)}{2}$.

U geometrické posloupnosti je nutno postupovat odlišně: Vynásobit první a třetí člen této řady a zjistit druhou odmocninu výsledného součinu – tj. hodnotu strany či stran čtyřúhelníkového čísla, tzn. jedno číslo v případě čtvercového čísla, u obdélníkových čísel dvě hodnoty, tedy:

[31] $a_{n+1} = \sqrt{a_{n+2} \cdot a_n}$.

Harmonický střed (průměr) mezi dvěma čísly lze nalézt tak, že se nejprve vypočítá rozdíl mezi větším a menším členem, získaný rozdíl je vynásoben menším členem, vzešlý součin je podělen součtem obou členů a tento podíl je přičten k menšímu členu řady, tzn.:

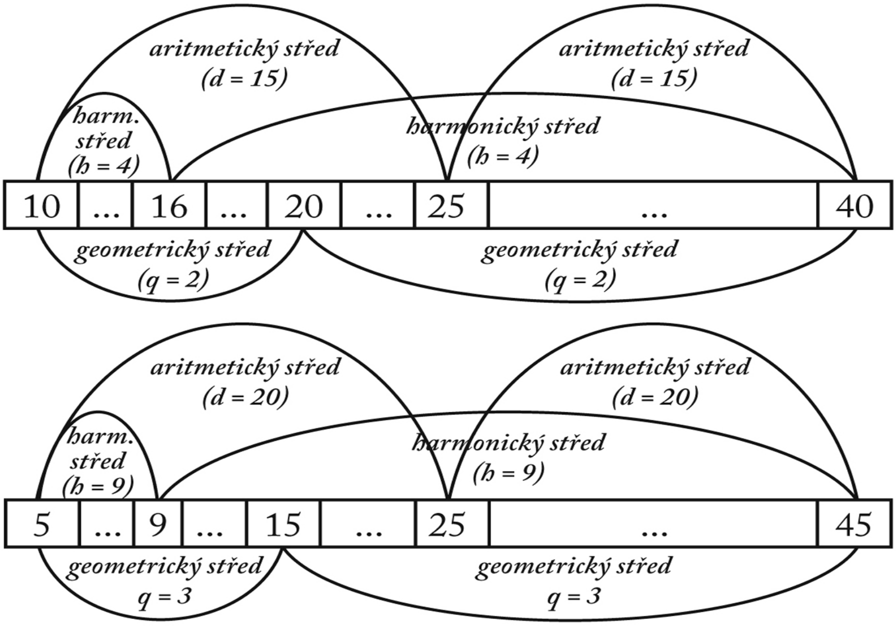
[32] $a_{n+1} = a_n + \frac{a_n \cdot (a_{n+2} - a_n)}{a_{n+2} + a_n}$.

Boethius předkládá dva příklady nalezení všech tří středů podle uvedených pravidel s použitím dvou sudých a dvou lichých čísel[84] – viz tab. 33 a obr. 19.

krajní členy posloupnosti (a_n a a_{n+2})		**10 – 40**		**5 – 45**	
aritmetický střed (a_{n+1})	*pravidlo* [30]	$a_{n+1} = \frac{40+10}{2} = \frac{50}{2} =$	**25**	$a_{n+1} = \frac{45+5}{2} = \frac{50}{2} =$	**25**
	pravidlo [30′]	$a_{n+1} = 10 + \frac{40-10}{2} = 10 + 15 =$	**25**	$a_{n+1} = 5 + \frac{45-5}{2} = 5 + 20 =$	**25**
geometrický střed (a_{n+1})	*pravidlo* [31]	$a_{n+1} = \sqrt{40 \cdot 10} = \sqrt{400} =$	**20**	$a_{n+1} = \sqrt{45 \cdot 5} = \sqrt{225} =$	**15**
harmonický střed (a_{n+1})	*pravidlo* [32]	$a_{n+1} = 10 + \frac{10 \cdot (40-10)}{40+10} = 10 + \frac{300}{50} = 10 + 6 =$	**16**	$a_{n+1} = 5 + \frac{5 \cdot (45-5)}{45+5} = 5 + \frac{200}{50} = 5 + 4 =$	**9**

Tab. 33 – Aritmetický, geometrický a harmonický střed dvou sudých a lichých čísel

[84] [BoAr], II, 50, s. 208–213; srov. [Nik], II, 27, s. 137–140; dále viz např. [IsEt], III, 8, s. 298; česky s. 299.



Obr. 19 – Aritmetický, geometrický a harmonický střed dvou sudých a lichých čísel

2.6.2 Další druhy posloupností

Vedle tří hlavních typů uvádí Boethius ještě sedm dalších možných posloupností. První tři z nich jsou označeny jako protikladné k harmonické, resp. ke geometrické úměře. V tzv. čtvrté proporci, která stojí v kontrastu k harmonické posloupnosti, je předveden takový vztah mezi třemi členy, kdy třetí se má k prvnímu stejně jako rozdíl druhého a prvního k rozdílu třetího a druhého, tedy:

[33] $$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}};$$

tzn. oproti harmonické úměře je zde obrácen poměr rozdílů.

Tzv. pátá a šestá proporce jsou protivnými ke geometrické posloupnosti, neboť je v nich (podobně jako u čtvrté posloupnosti) obrácen poměr pro vyjádření kvocientu. Zatímco v geometrické posloupnosti platí, že kvocient lze vyjádřit jako poměr mezi rozdílem třetího a druhého členu řady a rozdílem mezi druhým a prvním členem řady posloupnosti, což zároveň vyjádří poměr mezi druhým a prvním členem téže řady, resp. mezi třetím a druhým členem posloupnosti, je u páté proporce stanoveno, že podíl mezi druhým a prvním číslem je roven poměru mezi rozdílem druhého a prvního čísla a rozdílem třetího a druhého členu, tedy:

[34] $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}.$

U tzv. šesté posloupnosti se stejný vztah týká poměru mezi třetím a druhým členem této řady, tj.:

[35] $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}.$

Všechny tři tyto poměry porovnávají podíl rozdílů mezi druhým a prvním a třetím a druhým členem řady, pouze tento podíl rozdílů kladou do rovnosti s podílem mezi třetími a prvními (čtvrtá proporce), druhými a prvními (pátá proporce), resp. třetími a druhými členy posloupností.[85]

Poslední skupinou úměr je kvartet posloupností,[86] v nichž lze lze vyjádřít vztahy mezi třemi členy takto:

[36] $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+2} - a_n}{a_{n+1} - a_n}$; tj. tzv. sedmá posloupnost;

[37] $\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+2} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}$; tj. tzv. osmá posloupnost;

[38] $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2} - a_n}{a_{n+1} - a_n}$; tj. tzv. devátá posloupnost;

[39] $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}$; tj. tzv. desátá posloupnost.

Všechny zmíněné posloupnosti jsou doloženy příklady,[87] které zachycuje tab. 34.

název	**pořadí**	**poměry členů**	**posloupnost**
aritmetická	první	---	$1-2-3$
geometrická	druhá	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$	$1-2-4$
harmonická	třetí	$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$	$3-4-6$
protivná k harmonické	čtvrtá	pravidlo [33]	$3-5-6$
protivná ke geometrické (I)	pátá	pravidlo [34]	$2-4-5$
protivná ke geometrické (II)	šestá	pravidlo [35]	$1-4-6$
první ze čtyř	sedmá	pravidlo [36]	$6-8-9$
druhá ze čtyř	osmá	pravidlo [37]	$6-7-9$
třetí ze čtyř	devátá	pravidlo [38]	$4-6-7$
čtvrtá ze čtyř	desátá	pravidlo [39]	$3-5-8$

Tab. 34 – Deset druhů posloupností

[85] [BoAr], II, 51, s. 213–216; srov. [Nik], II, 28, s. 140–142.
[86] [BoAr], II, 52, s. 217–219; srov. [Nik], II, 28, s. 142–144.
[87] [BoAr], II, 53, s. 220; srov. [Nik], II, 28, s. 144.

2.6.3 Dokonalá harmonie

Na samotný závěr svého pojednání uvádí Boethius dokonalé uspořádání čtyřčlenné posloupnosti, která odráží geometrickou, aritmetickou i harmonickou úměru, přičemž dokáže vymezit i její středy (průměry) a vztahy k hudebním proporcím.[88] Jedná se o tuto posloupnost:

[40] 6 – 8 – 9 – 12.

Mezi krajními čísly se nachází geometrická úměra, kterou vystihuje poměr 2 : 1. Čísla 8 a 9 pak odpovídají geometrickému středu mezi krajními členy posloupnosti, neboť podle pravidla [31] je nutno nalézt stranu čtyřúhelníkového čísla, které vznikne součinem obou čísel, jejichž geometrický průměr je hledán. Číslo 72 (tj. součin 6 · 12) není čtvercovým číslem (tím jsou v postupném sledu 64 a pak 81 – viz řada [21]), tudíž geometrický střed nelze vyjádřit jediným přirozeným číslem. Hodnota 72 však koresponduje s pravidelným obdélníkovým číslem (viz řada [22]), které vzniká součinem stran obélníku o velikostech stran 8 a 9, tudíž jsou osmička s devítkou geometrickým středem čísel 6 a 12. Dále tato čtyřčlenná posloupnost čísel má v sobě zahrnuty i dva poměry 3 : 2 (mezi čísly 6 a 9, resp. čísly 8 a 12) a dva poměry 4 : 3 (tj. mezi čísly 6 a 8, resp. čísly 9 a 12).

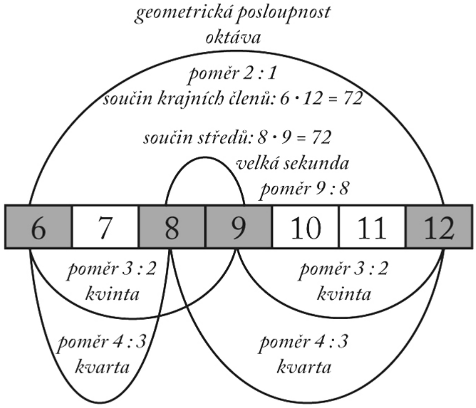
Mezi čísly 6 a 12 lze poměrně snadno nalézt i aritmetický střed, kerý je získán podle pravidel [30] jako polovina součtu obou hodnot nebo podle pravidla [30′] jako součet menšího čísla s polovinou rozídlu mezi oběma číslenými hodnotami. Výsledek je samozřejmě v obou případech stejný a dává číslo 9, neboť (6 + 12) : 2 = 9; resp. 6 + [(12 – 6) : 2] = 6 + (6 : 2) = 6 + 3 = 9. Čísla 6 – 9 – 12 dávají tedy aritmetickou posloupnost, kde diference mezi jednotlivými členy je 3.

Pravidlo [32] pak ukazuje, že mezi čísly 6 a 12 lze nalézt i harmonický střed, protože součet nižšího čísla s podílem součinu téhož čísla s rozdílem mezi vyšším a nižším číslem a součtem obou čísel dává hodnotu 8, jak je zřejmé z výpočtu: 6 + [6 · (12 – 6)] : (12 + 6) = 6 + (36 : 18) = 6 + 2 = 8. Čísla 6, 8 a 12 jsou tedy reprezentantem harmonické posloupnosti, což lze doložit tím, že skutečně poměr mezi třetím a prvním členem této řady (tj. 12 : 6, tzn. 2 : 1) se shoduje s poměrem (tj. 4 : 2, tzn. 2 : 1) mezi rozdílem třetího a druhého členu (tj. 12 – 8, tzn. 4) a rozdílem druhého a prvního členu posloupnosti (tj. 8 – 6 = 2).

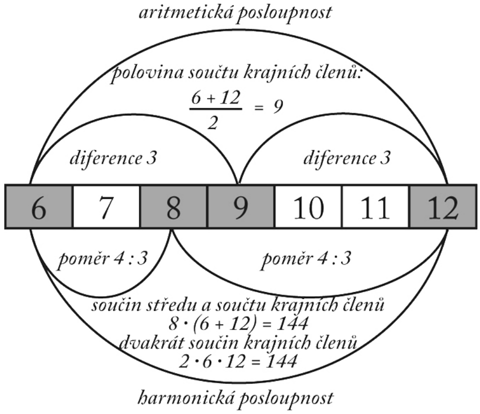
K tomuto Boethius ještě připojuje zjevnou vazbu k hudebním poměrům a s využitím hudební terminologie doplňuje, že na vztazích mezi uvedenými čtyřmi členy dokonalé harmonie lze ilustrovat oktávu (poměr 2 : 1 mezi čísly

[88] [BoAr], II, 54, s. 221–224; srov. [Nik], II, 27, s. 144–147; česky viz [NŠír], s. 477. Na výklad viz např. [Bč2], s. 102–119.

6 a 12), kvintu (poměr 3 : 2 mezi čísly 6 a 9, resp. čísly 8 a 12), kvartu (poměr 4 : 3 mezi čísly 6 a 8, resp. čísly 9 a 12) a velkou sekundu čili velký celý tón (poměr 9 : 8 mezi čísly 8 a 9). Všechny tyto vztahy zachycují obr. 20 a 21.



Obr. 20 – Geometrická posloupnost
a hudební konsonance



Obr. 21 – Aritmetická a harmonická posloupnost