Kapitola I.

Základní definice a teorémy projektivní geometrie.

Lineární systémy aritmetických bodů.

1. Buď m libovolné pevně zvolené číslo přirozené. Skupinu $m+1$ čísel*), na př. $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(m)}$ nazveme aritmetický bod, krátce ar. bod; označení $|x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(m)}|_b$. Čísla $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(m)}$ jmenujeme souřadnice ar. bodu. Při tom pořádek souřadnic považujeme za podstatný, takže na př. pro $m=1$ $|1, \sqrt{3}|_b$ a $|\sqrt{3}, 1|_b$ jsou různé ar. body. Je-li třeba vytknouti hodnotu přirozeného čísla m, mluvíme o m-rozměrných ar. bodech. Množství všech m-rozměrných ar. bodů jmenujeme prostor (m-rozměrných) ar. bodů.

Ar. body budeme zpravidla označovati jediným písmenem; zejména písmena x, x_1, x', y, z, X atd. budou vždy znamenati ar. body. Při tom vždy na př. souřadnice ar. bodu x budou $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(m)}$; podobně $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \dots x_1^{(m)}$ pro ar. bod x_1 atd.

Ar. bod $|0, 0 \dots 0|_b$ jmenujeme nulový bod; označení 0_b. Ostatní ar. body jmenujeme vlastní.

Ar. body $|1, 0, \dots 0|_b$, $|0, 1, 0, \dots 0|_b$, $|0, 0, \dots 1|_b$, t. j. ty, jichž všecky souřadnice rovnají se nule až na jedinou rovnou jedné, nazýváme souřadné ar. body.

2. Za součin čísla λ a ar. bodu $x = |x^{(0)}, x^{(1)}, \dots x^{(m)}|_b$ prohlásíme ar. bod**)

$$\lambda x = |\lambda x^{(0)}, \lambda x^{(1)}, \dots \lambda x^{(m)}|_b.$$

Zejména tedy $\lambda 0_b = 0_b$ pro každé λ, kdežto $\lambda_1 x = \lambda_2 x$ pro $x \neq 0_b$, jen když $\lambda_1 = \lambda_2$; dále $0x = 0_b$ pro každý ar. bod x.

3. Za součet ar. bodů x_1 a x_2 prohlásíme ar. bod

$$x_1 + x_2 = |x_1^{(0)} + x_2^{(0)}, x_1^{(1)} + x_2^{(1)}, \dots, x_1^{(m)} + x_2^{(m)}|_b.$$

---

*) Číslem bez dalšího dodatku rozumíme vždy číslo reálné.

**) Místo $-1\,x$ budeme psáti kratčeji $-x$.

4. Okamžitě se přesvědčíme o správnosti pravidel početních

$$(\lambda_1 + \lambda_2) x = \lambda_1 x + \lambda_2 x, \quad \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2.$$
$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1,$$
$$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$x + 0_b = x.$$

5. Pravíme, že ar. bod x_0 jest lineárně závislý na ar. bodech $x_1, x_2 \dots x_n$, existují-li čísla $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ taková, že jest

(1) $$x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Nulový bod jest lineárně závislý na kterékoli skupině ar. bodů $x_1, x_2, \dots x_n$; stačí zvoliti $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Je-li jeden z ar. bodů $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ lineárně závislý na ostatních, pravíme, že tyto ar. body jsou lineárně závislé; jinak jsou lineárně nezávislé. Nutná a postačující podmínka, aby ar. body $x_0, x_1, \dots x_n$ byly lineárně nezávislé, jest, aby rovnice

(2) $$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_b$$

platila pouze pro $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Vskutku, je-li na př. ar. bod x_0 lineárně závislý na $x_1, \dots x_n$, platí rovnice (1) a tedy i (2), kde $\lambda_0 = -1 \neq 0$. Naopak, je-li (2) splněna tak, že na př. $\lambda_0 \neq 0$, jest

$$x_0 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} x_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} x_n.$$

Aby toto kriterium zůstalo v platnosti i pro $n = 0$, budeme pod jedním lineárně nezávislým ar. bodem rozuměti vlastní ar. bod.

6. Množství všech ar. bodů lineárně závislých na ar. bodech $x_0, x_1, \dots x_n$ nazýváme lineární systém ar. bodů, nebo úplněji lin. systém určený ar. body $x_0, x_1, \dots x_n$; označení $\{x_0, x_1, \dots x_n\}$. Jest $\{0_b\} = 0_b$, t. j. nulový bod sám o sobě tvoří lin. systém; ostatní lineární systémy nazýváme vlastní. Vlastní lin. systém obsahuje zřejmě nekonečně mnoho ar. bodů, mezi nimiž vždy se vyskytuje nulový bod.

7. Je-li ar. bod x lin. závislý na ar. bodech $x_0, x_1, \dots x_n$, jest

(1) $$\{x, x_0, x_1 \dots x_n\} = \{x_0, x_1 \dots x_n\}.$$

Vskutku dle předpokladu

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Je-li tedy

$$y = \mu x + \mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n,$$

jest též

$$y = (\mu_0 + \mu\lambda_0) x_0 + (\mu_1 + \mu\lambda_1) x_1 + \dots + (\mu_n + \mu\lambda_n) x_n.$$

Každý ar. bod lineárního systému nalevo v (1) náleží tedy lineárnímu systému napravo; avšak zřejmě také obráceně.

8. Každý vlastní lin. systém $\{y_0, y_1 \ldots y_\nu\}$ ar. bodů ($\nu \geqq 0$) lze určiti $n+1$ lineárně nezávislými ar. body tak, že $n = \nu$ ($n < \nu$), jsou-li $y_0, y_1 \ldots y_\nu$ lin. nezávislé (závislé).

Je-li $\nu = 0$, je tvrzení zřejmé. Buď tedy $\nu > 0$ a dokazujme indukcí vzhledem k ν. Jsou-li ar. body $y_0, y_1, \ldots y_\nu$ lin. nezávislé, je tvrzení opět zřejmé. Jsou-li však lin. závislé, můžeme předpokládati (v. **5**), že na př. ar. bod. y_ν je lin. závislý na $y_0, y_1, \ldots y_{\nu-1}$. Pak jest dle **7**

$$\{y_0, y_1 \ldots y_\nu\} = \{y_0, y_1 \ldots y_{\nu-1}\}$$

a dle předpokladu pro indukci

$$\{y_0, y_1 \ldots y_{\nu-1}\} = \{x_0, x_1 \ldots x_n\},$$

kde ar. body napravo jsou lin. nezávislé a $n \leqq \nu - 1$. Tedy

$$\{y_0, y_1 \ldots y_\nu\} = \{x_0, x_1 \ldots x_n\},$$

a $n < \nu$.

9. Náležejí-li lin. nezávislé ar. body $y_0, y_1, \ldots y_\nu$ lineárnímu systému $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$, jest $\nu \leqq n$.

Pro $n = 0$ tvrzení se velmi snadno dokáže. Buď tedy $n > 0$ a dokazujme indukcí vzhledem k n. Dle předpokladu

$$y_i = \lambda_{i0} x_0 + \lambda_{i1} x_1 + \ldots + \lambda_{in} x_n \qquad (i = 0, 1 \ldots \nu).$$

Je-li $\lambda_{0n} = \lambda_{1n} = \ldots = \lambda_{\nu n} = 0$, náležejí ar. body $y_0, y_1, \ldots y_\nu$ lin. systému $\{x_0, x_1, \ldots x_{n-1}\}$ a tedy dle předpokladu pro indukci $\nu \leqq n - 1$. Je-li však na př. $\lambda_{\nu n} \neq 0$, náležejí ar. body

$$y_i - \frac{\lambda_{in}}{\lambda_{\nu n}} y_\nu \qquad (i = 0, 1 \ldots \nu - 1)$$

lin. systému $\{x_0, x_1, \ldots x_{n-1}\}$ a tedy dle předpokladu pro indukci $\nu - 1 \leqq n - 1$. V obou případech je tedy vskutku $\nu \leqq n$.

10. Je-li

$$\{x_0, x_1 \ldots x_n\} = \{y_0, y_1 \ldots y_\nu\} \tag{1}$$

a jsou-li ar. body $x_0, x_1, \ldots x_n$ lin. nezávislé, jest $\nu = n$ ($\nu > n$), když ar. body $y_0, y_1, \ldots y_\nu$ jsou lin. nezávislé (závislé).

Předpokládejme nejprve, že ar. body $y_0, y_1, \ldots y_\nu$ jsou lin. nezávislé. Ježto $y_0, y_1, \ldots y_\nu$ náležejí do $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$, jest dle **9** $\nu \leqq n$; ježto ar. body $x_0, x_1, \ldots x_n$ náležejí do $\{y_0, y_1, \ldots y_\nu\}$, jest dle **9** $n \leqq \nu$. Tedy jest $\nu = n$.

Jsou-li však $y_0, y_1, \ldots y_\nu$ lin. závislé, je dle **8**

(2) $$\{y_0, y_1 \ldots y_\nu\} = \{z_0, z_1 \ldots z_\mu\},$$

kde $\mu < \nu$ a ar. body $z_0, z_1, \ldots z_\mu$ jsou lin. nezávislé. Dle (1) a (2) je však

$$\{x_0, x_1 \ldots x_n\} = \{z_0, z_1 \ldots z_\mu\}$$

a tedy dle toho, co již jsme dokázali, $\mu = n$. Tedy $n < \nu$.

11. Lin. systém $\{0_b\}$ jmenujeme lin. systém dimense -1. Lin. systém určený $n+1$ lin. nezávislým bodem jmenujeme lin. systém dimense n. Z **10** vychází, že každý lin. systém má zcela určitou dimensi.

12. Dimense lin. systému ar. bodů jest vždy $\leqq m$. Prostor ar. bodů jest jediný lin. systém ar. bodů dimense m.

Všimněme si, že všecky dosud učiněné definice mají význam i pro $m = 0$ a že v tomto případě věta, kterou chceme dokázati, je zřejmá. Možno ji tedy dokazovati indukcí. Buďte $x_0, x_1 \ldots x_n$ lin. nezávislé ar. body a $n \geqq m$. Označme obecně $\bar{x}$ $(m-1)$ rozměrný ar. bod, který vznikne z m rozměrného ar. bodu x vynecháním poslední souřadnice, a $x^{(m)}$ tuto poslední souřadnici. Dle předpokladu pro indukci, a ježto $n > m - 1$, $(m-1)$ rozměrné ar. body $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ jsou lineárně závislé. Existují tedy čísla $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_n$, ne vesměs rovná nule a taková, že

$$\lambda_0 \bar{x}_0 + \lambda_1 \bar{x}_1 + \ldots + \lambda_n \bar{x}_n$$

jest $(m-1)$ rozměrný nulový bod. Naproti tomu

$$a = \lambda_0 x_0^{(m)} + \lambda_1 x_1^{(m)} + \ldots + \lambda_n x_n^{(m)} \neq 0,$$

neboť jinak by ar. body $x_0, x_1 \ldots x_n$ byly lineárně závislé. Ar. bod

$$y_m = \frac{1}{a}(\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_n x_n) = |0, 0, \ldots 0, 1|_b$$

náleží tedy lin. systému $\{x_0, x_1 \ldots x_n\}$. Podobně se vidí, že tomuto lin. náležejí také všecky ostatní souřadné ar. body a tedy všecky ar. body vůbec. Daný lin. systém je tedy prostor ar. bodů a jeho dimense je patrně rovna m.

13. Náležejí-li lin. nezávislé ar. body $y_0, y_1, \ldots y_\nu$ lin. systému S dimense n, jest $\nu \leqq n$. Je-li $\nu = n$, jest

(1) $$S = \{y_0, y_1, \ldots y_\nu\};$$

je-li $\nu < n$, existují v S ar. body $y_{\nu+1}, \ldots y_n$ takové, že

(2) $$S = \{y_0, y_1, \ldots y_n\}.$$

Dle definice dimense lin. systému jest $S = \{x_0, x_1 \ldots x_n\}$. Dle **9** je tedy $\nu \leqq n$. Buď nejprve $\nu = n$. Kdyby neplatilo (1), existoval by ar. bod z náležející do S, ne však do $\{y_0, y_1 \ldots y_\nu\}$. Není možno, aby ar. body $z, y_1 \ldots y_\nu$ byly lin. závislé, neboť pak by buď z patřil do $\{y_0, y_1 \ldots y_\nu\}$ nebo by $y_0, y_1 \ldots y_\nu$ byly lin. závislé. Lin. systém $\{x_0, x_1 \ldots x_n\}$ obsahuje tedy $\nu + 2 = n + 2$ lin. nezávislé body, což je dle **9** nemožné.

Ježto věta je nyní dokázána pro $n - \nu = 0$, můžeme předpokládati, že $n - \nu > 0$ a užíti indukce vzhledem k $n - \nu$. Rovnice (1) nyní neplatí, neboť levá strana má dimensi n a pravá dimensi ν. Existuje tedy v S ar. bod $y_{\nu+1}$ takový, že $y_0, y_1 \ldots y_{\nu+1}$ jsou lin. nezávislé. Dle předpokladu pro indukci existují tedy v S další ar. body $y_{\nu+2} \ldots y_n$ takové, že platí (2).

14. Spojením lin. systémů $\{x_0, x_1 \ldots x_n\}$ a $\{y_0, y_1 \ldots y_\nu\}$ nazýváme lin. systém $\{x_0, x_1 \ldots x_n, y_0, y_1 \ldots y_\nu\}$. Jest to lin. systém nejmenší dimense, který obsahuje všecky ar. body z $\{x_0, x_1 \ldots x_n\}$ i z $\{y_0, y_1 \ldots y_\nu\}$.

15. Z definice lin. systému je patrno, že, obsahuje-li lin. systém S ar. body x a y, a je-li λ libovolné číslo, S obsahuje též $x + y$ a λx. Naopak, má-li nějaké množství S ar. bodů tyto dvě vlastnosti, jest S lineární systém. Vskutku, obsahuje-li S jen nulový bod, je věc zřejmá. Nechť tedy lze v S udati $n + 1$ lin. nezávislý ar. bod ($n \leqq m$ dle **12**) a ne více ($n \geqq 0$). Buďte $x_0, x_1 \ldots x_n$ tyto ar. body. Pak všecky ar. body z S jsou lin. závislé na $x_0, x_1 \ldots x_n$, neboť jinak by bylo lze v S udati více než $n + 1$ lin. nezávislý bod. Na druhé straně každý ar. bod lin. závislý na $x_0, x_1 \ldots x_n$ je v S, dle předpokládaných vlastností. Tedy $S = \{x_0, x_1 \ldots x_n\}$.

16. Z věty právě dokázané vychází, že množství ar. bodů společných dvěma daným lin. systémům jest lin. systém. Vskutku jeden takový ar. bod vždy existuje, totiž 0_b. Tento lin. systém nazývá se průřez daných lin. systémů.

17. Jsou-li S_1, S_2 dva lin. systémy ar. bodů, S jejich spojení, Σ jejich průřez, a jsou-li d_1, d_2, d, δ resp. dimense S_1, S_2, S, Σ, jest $d_1 + d_2 = d + \delta$. Buď $\delta \geqq 0$. Lin. systém Σ buď určen lin. nezávislými ar. body

$$\Sigma = \{z_0, z_1 \ldots z_\delta\}.$$

Dle **13** můžeme určiti S_1 a S_2 lin. nezávislými ar. body

$$S_1 = \{z_0, z_1, \ldots z_\delta, x_1, x_2, \ldots x_{d_1 - \delta}\}.$$

$$S_2 = \{z_0, z_1, \ldots z_\delta, y_1, y_2, \ldots y_{d_2 - \delta}\}.$$

Pak jest

$$S = (z_0, z_1, \ldots z_\delta, x_1, x_2, \ldots x_{d_1-\delta}, y_1, y_2, \ldots y_{d_2-\delta}).$$

Potřebujeme pouze ukázati, že ar. body, jimiž jsme určili S, jsou lineárně nezávislé, neboť pak dimense S rovná se $d_1 + d_2 - \delta$, jak chceme dokázati.

Je-li však

$$\lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_\delta z_\delta + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_{d_1-\delta} x_{d_1-\delta} + \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 + \ldots + \\ + \nu_{d_2-\delta} y_{d_2-\delta} = 0_b,$$

jest

$$-\nu_1 y_1 - \nu_2 y_2 - \ldots - \nu_{d_2-\delta} y_{d_2-\delta} = \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_\delta z_\delta + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \\ + \mu_{d_1-\delta} y_{d_1-\delta}.$$

Ar. bod nalevo této rovnice náleží do S_2, ar. bod napravo náleží do S_1. Oba ar. body jsou rovné a tedy náležejí do Σ. Avšak ar. body, jimiž jsme určili S_1, jsou lin. nezávislé, a tedy, má-li náš ar. bod náležeti do Σ, jest

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{d_1-\delta} = 0.$$

Nato však z lin. nezávislosti ar. bodů, jimiž jsme určili S_2, plyne, že také všecky ostatní koeficienty předpokládané lineární relace rovnají se nule.

Dosud jsme předpokládali, že $\delta \geqq 0$; když $\delta = -1$, důkaz probíhá podobně.

Aritmetické nadroviny; adjungované lineární systémy.

18. Je vhodné, nedávati vždy skupině $m+1$ čísel jméno ar. bod. Někdy budeme skupinu $m+1$ čísel nazývati aritmetickou nadrovinou, krátce ar. nadrovinou. Chceme-li skupinu čísel $\xi^{(0)}, \xi^{(1)} \ldots \xi^{(m)}$ nazývati ar. nadrovinou, označíme ji $|\xi^{(0)}, \xi^{(1)} \ldots \xi^{(m)}|_r$. Také ar. nadroviny budeme zpravidla označovati jediným písmenem; tak zejména ξ, ξ_1, ξ', η, ζ, Ξ atd. budou vždy značiti ar. nadroviny. I zde na př. souřadnice ar. nadroviny ξ označíme vždy $\xi^{(0)}, \xi^{(1)} \ldots \xi^{(m)}$.

Ar. nadroviny liší se pouze jménem od ar. bodů. Ve všech definicích a teorémech předchozích odstavců můžeme tedy slovo bod nahraditi slovem nadrovina. I není třeba výkladu, co jest rozuměti pod nulovou nadrovinou 0_r, souřadnou ar. nadrovinou, lin. závislými ar. nadrovinami atd.

19. Je-li x ar. bod a ξ ar. nadrovina, klademe

$$Sx\xi = S\xi x = x^{(0)}\xi^{(0)} + x^{(1)}\xi^{(1)} + \ldots + x^{(m)}\xi^{(m)}. \tag{1}$$

Pravíme, že ar. bod x a ar. nadrovina ξ jsou incidentní, když $Sx\xi = 0$. Nulový bod jest incidentní s každou ar. nadrovinou a nulová nadrovina jest incidentní s každým ar. bodem.

Následující identity jsou zřejmé:

$$S\lambda x \,.\, \xi = Sx \,.\, \lambda\xi = \lambda Sx\xi, \tag{2}$$

$$S(x_1 + x_2)\,\xi = Sx_1\xi + Sx_2\xi, \tag{3}$$

$$Sx(\xi_1 + \xi_2) = Sx\xi_1 + Sx\xi_2. \tag{4}$$

Místo $Sx_1\xi_1 + Sx_2\xi_2$ píšeme někdy $S(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)$.

20. Ke každé definici, kterou v dalším zavedeme, jest si vždy mysliti zavedenu také t. zv. duální definici, jež vznikne z původní tím, že vždy slovo bod nahradíme slovem nadrovina a obráceně. Zpravidla tuto duální definici výslovně neuvedeme, i když jí v dalším textu užijeme. Někdy je definice totožná s duální definicí; tak tomu je na př. s definicí incidence v **19.**

Zřejmě z každého správného teorému obdržíme nový správný teorém, zvaný duální teorém, jehož netřeba již dokazovati, když opět vyměníme slova bod a nadrovina. V tom záleží t. zv. princip duality.

21. Jsou-li $x_0, x_1 \ldots x_n$ jakékoli ar. body, jest množství ar. nadrovin s nimi incidentních lineární systém Σ. Každá ar. nadrovina ze Σ jest incidentní s každým ar. bodem lineárního systému $\{x_0, x_1 \ldots x_n\}$.

Dle **19** (2), (4) vidíme, že množství Σ má obě vlastnosti, charakteristické pro lin. systém dle **15.** Dle **19** (2) (3) vidíme, že každá ar. nadrovina ze Σ jest incidentní s každým ar. bodem z $\{x_0, x_1 \ldots x_n\}$.

22. Tvoří-li ar. nadroviny incidentní s ar. body $x_1, x_2 \ldots x_n$ lineární systém Σ dimense ν, a ar. nadroviny incidentní s ar. body $x_0, x_1 \ldots x_n$ lin. systém Σ' dimense ν', jest buď $\nu' = \nu$ nebo $\nu' = \nu - 1$.

Pro $\nu = -1$ je tvrzení zřejmé. Buď tedy $\nu \geqq 0$ a

$$\Sigma = \{\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_\nu\},$$

takže ar. nadroviny $\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_\nu$ jsou lin. nezávislé a

$$Sx_i\xi_k = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \qquad k = 0, 1, \ldots \nu.$$

Aby ar. nadrovina ξ náležela do Σ', musí zřejmě náležeti do Σ, tedy

$$\xi = \lambda_0\xi_0 + \lambda_1\xi_1 + \ldots + \lambda_\nu\xi_\nu.$$

Je-li tomu tak, aby ξ náležela do Σ', je nutné a stačí, aby

$$Sx_0\xi = \lambda_0 Sx_0\xi_0 + \lambda_1 Sx_0\xi_1 + \ldots + \lambda_\nu Sx_0\xi_\nu = 0.$$

Je-li $Sx_0\xi_k = 0$ pro $k = 0, 1 \ldots \nu$, je tudíž $\Sigma' = \Sigma$ a $\nu' = \nu$. Je-li však na př. $Sx_0\xi_0 \neq 0$, máme podmínku

$$\lambda_0 = -\frac{Sx_0\xi_1}{Sx_0\xi_0}\lambda_1 - \ldots - \frac{Sx_0\xi_\nu}{Sx_0\xi_0}\lambda_\nu. \qquad (\lambda_0 = 0 \text{ pro } \nu = 0)$$

tedy

$$\xi = \lambda_1\left(\xi_1 - \frac{Sx_0\xi_1}{Sx_0\xi_0}\xi_0\right) + \ldots + \lambda_\nu\left(\xi_\nu - \frac{Sx_0\xi_\nu}{Sx_0\xi_0}\xi_0\right), \qquad (\xi = 0_r \text{ pro } \nu = 0)$$

$$\Sigma' = \left\{\xi_1 - \frac{Sx_0\xi_1}{Sx_0\xi_0}\xi_0, \ldots \xi_\nu - \frac{Sx_0\xi_\nu}{Sx_0\xi_0}\xi_0\right\}, \qquad (\Sigma' = \{0_r\} \text{ pro } \nu = 0)$$

$\nu' = \text{a}\,\nu - 1$, neboť kdyby ar. nadroviny, jimiž jsme určili Σ', byly lineárně závislé, byly by lineárně závislé i ar. nadroviny $\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_\nu$, proti předpokladu.

23. Je-li S lin. systém ar. bodů, nazveme množství Σ ar. nadrovin incidentních s každým ar. bodem z S adjungovaným lin. systémem k S; označení $\Sigma = \text{Adj.}\, S$.

Σ jest lin. systém dle **21**. Dle **20** netřeba již výslovně definovati, co jest rozuměti pod Adj. Σ, je-li Σ lin. systém ar. nadrovin.

24. Je-li S lin. systém ar. bodů dimense n, a je-li ν dimense lin. systému Adj. S, jest $n + \nu = m - 1$. Dokažme nejprve, že jest $\nu \geq m - n - 1$. To je zřejmé, když $n = -1$, i můžeme dokazovati indukcí vzhledem k n. Je-li tedy $S = \{x_0, x_1 \ldots x_n\}$, platí pro dimensi ν_1 lin. systému adjungovaného k $\{x_1 \ldots x_n\}$ dle předpokladu pro indukci nerovnost

$$\nu_1 \geq m - (n-1) - 1 = m - n.$$

Dle **22** jest však $\nu = \nu_1$ nebo $\nu = \nu_1 - 1$, tedy $\nu \geq m - n - 1$. Dokažme za druhé, že $\nu \leq m - n - 1$. To je zřejmé, když $n = m$, i můžeme dokazovati indukcí vzhledem k $m - n$. Je-li však opět $S = \{x_0, x_1 \ldots x_n\}$, $n < m$, buď y ar. bod mimo S; dle předpokladu pro indukci platí pro dimensi ν_2 lin. systému adjungovaného k $\{x_0, x_1 \ldots x_n, y\}$ nerovnost

$$\nu_2 \leq m - (n+1) - 1 = m - n - 2.$$

Dle **22**. jest však $\nu = \nu_2$ nebo $\nu = \nu_2 + 1$, tedy $\nu \leq m - n - 1$. Oba výsledky dohromady dávají $\nu = m - n - 1$.

25. Buď S lin. systém ar. bodů; buď $\Sigma = \text{Adj.}\, S$. Pak $S = \text{Adj.}\, \Sigma$. Vskutku, buď $S' = \text{Adj.}\, \Sigma$, a buďte n, ν, n' resp. dimense S, Σ, S'. Je zřejmé, že S jest obsažen v S'. Avšak dle **24**

$$n + \nu = m - 1, \quad \nu + n' = m - 1,$$

tedy $n = n'$. Tedy $S = S'$ dle **13**.

26. Jsou-li S_1, S_2 dva lin. systémy ar. bodů, S' jejich spojení a S'' jejich průřez, a je-li $\Sigma_1 = \mathrm{Adj}.\, S_1$, $\Sigma_2 = \mathrm{Adj}.\, S_2$, $\Sigma' = \mathrm{Adj}.\, S'$, $\Sigma'' = \mathrm{Adj}.\, S''$, jest Σ' průřez Σ_1, Σ_2 a Σ'' jest spojení Σ_1, Σ_2. Dle definice jest každá ar. nadrovina ze Σ' incidentní s každým ar. bodem z S'; ježto S_1 jest obsažen v S', jest každá ar. nadrovina ze Σ' incidentní s každým ar. bodem z S_1, a tedy náleží do Σ_1. Podobně se vidí, že každá ar. nadrovina ze Σ' náleží také do Σ_2, a tedy Σ' jest obsažen v průřezu lin. systémů Σ_1, Σ_2. Naopak každá ar. nadrovina z průřezu Σ_1, Σ_2 jest incidentní s každým ar. bodem z S_1 i z S_2 a tedy i s každým ar. bodem z S'; tedy průřez Σ_1, Σ_2 jest obsažen v Σ'. Je tedy vskutku Σ' průřez Σ_1 a Σ_2. Výrok o Σ'' plyne nyní dle **25** z principu duality.

Symboly $(x_0 x_1 \dots x_m)$ a $(x_1 \dots x_m)$.

27. Jsou-li x_i $(i = 0, 1 \dots m)$ ar. body v počtu $m+1$, označíme $(x_0, x_1 \dots x_m)$ číslo

$$(x_0\, x_1 \dots x_m) = \begin{vmatrix} x_0^{(0)} & x_1^{(0)} & \dots & x_m^{(0)} \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & \dots & x_m^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^{(m)} & x_1^{(m)} & \dots & x_m^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Duálně definuje se číslo $(\xi_0, \xi_1 \dots \xi_m)$.

Z definice vycházejí ihned tyto důležité vlastnosti symbolu $s = (x_0, x_1 \dots x_m)$: 1° násobíme-li jeden z ar. bodů x_i číslem λ, násobí se s týmž číslem, na př. $(\lambda x_0, x_1 \dots x_m) = \lambda (x_0, x_1 \dots x_m)$; 2° přičteme-li k jednomu z ar. bodů x_i ar. bod lineárně závislý na ostatních ar. bodech vyskytujících se v symbolu s, hodnota s se nemění, na př. $(x_0 + \lambda x_1, x_1 \dots x_m) = (x_0 x_1 \dots x_m)$; 3° vyměníme-li v symbolu s dva z ar. bodů x_i, změní s znamení, na př. $(x_1 x_0 x_2 \dots x_m) = -(x_0 x_1 x_2 \dots x_m)$; 4° je-li jeden prvek symbolu s součet několika sčítanců, jest hodnota s rovna součtu hodnot symbolů, v nichž onen součet je po řadě nahrazen jednotlivými sčítanci, na př. $(x_0' + x_0'', x_1 \dots x_m) = (x_0' x_1 \dots x_m) + (x_0'' x_1 \dots x_m)$.

28. Nutná a postačující podmínka pro lineární závislost $m+1$ ar. bodů $x_0, x_1 \dots x_m$ jest $(x_0 x_1 \dots x_m) = 0$. Vskutku ar. body x_i jsou lineárně závislé tehdy a jen tehdy, když $m+1$ lineárních rovnic o $m+1$ neznámých $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_m$

$$\lambda_0 x_0^{(i)} + \lambda_1 x_1^{(i)} + \dots + \lambda_m x_m^{(i)} = 0. \tag{1}$$

má řešení různé od triviálního řešení $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Z teorie lineárních rovnic je známé, že, aby tomu tak bylo, jest nutné a stačí, aby determinant soustavy rovnic (1) rovnal se nule. Tento determinant je však zřejmě $(x_0 x_1 \ldots x_m)$. Jsou-li ar. body $x_0, x_1 \ldots x_m$ v počtu $m+1$ lin. nezávislé, pravíme někdy, že tvoří jehlan*).

29. Je-li $(x_0 x_1 \ldots x_m) \neq 0$, a je-li x jakýkoli ar. bod, lze udati jednu a jen jednu skupinu $m+1$ čísel $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_m$ tak, aby bylo

(1) $$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m.$$

To je důsledek teorému **12**; je to však možné nahlédnouti také přímo, nahradíme-li rovnici (1) mezi ar. body ekvivalentním systémem rovnic mezi čísly. Čísla $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_m$ jmenujeme souřadnice ar. bodu x vzhledem k jehlanu $x_0, x_1 \ldots x_m$. Zejména, když $x_0, x_1 \ldots x_m$ jsou souřadné ar. body, obdržíme čísla, která jsme v **1** definovali jako souřadnice ar. bodu x.

30. Jsou-li $x_1, x_2 \ldots x_m$ ar. body v počtu m, existuje jedna a jen jedna ar. nadrovina ξ taková, že jest identicky v souřadnicích libovolného ar. bodu x.

$$(x_1 x_2 \ldots x_m x) = S\xi x.$$

Souřadnice ar. roviny ξ jsou tedy minory souřadnic ar. bodu x v determinantu $(x_1 x_2 \ldots x_m x)$. Na př. pro $m = 3$ a $x_i = |x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}|_h$ $(i = 1, 2, 3)$, $\xi = |\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}|_r$ jest

$$\xi^{(0)} = -\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix}, \xi^{(1)} = \begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix},$$

$$\xi^{(2)} = -\begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix}, \xi^{(3)} = \begin{vmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & x_3^{(0)} \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Značíme $\xi = (x_1 x_2 \ldots x_m)$. Je zřejmé, že m-členný symbol $(x_1, x_2 \ldots x_m)$ má vlastnosti $1^0, 2^0, 3^0, 4^0$ (v. **27**) $(m+1)$-členného symbolu $(x_0 x_1 \ldots x_m)$.

Duálně definujeme ar. bod $(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m)$.

31. Nutná a postačující podmínka pro lineární závislost m ar. bodů $x_1, x_2 \ldots x_m$ jest $(x_1, x_2 \ldots x_m) = 0_r$.

Důkaz jako v **28**.

32. Je-li ξ libovolná ar. nadrovina, existují vždy ar. body $x_1, x_2 \ldots x_m$ takové, že

(1) $$\xi = (x_1 x_2 \ldots x_m).$$

---

*) Duální termín jest duální jehlan.

Je-li $\xi \neq 0_r$, jest tehdy a jen tehdy též

(2) $$\xi = (y_1 y_2 \dots y_m),$$

když

(3) $$y_i = \lambda_{i1} x_1 + \lambda_{i2} x_2 + \dots + \lambda_{im} x_m, \quad i = 1, 2 \dots m.$$

(4) $$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mm} \end{vmatrix} = 1.$$

Je-li $\xi = 0_r$, platí (1) dle **31** tehdy a jen tehdy, když ar. body $x_1, x_2 \dots x_m$ jsou lin. závislé, tedy na př. když $x_m = 0_b$. Buď tedy $\xi \neq 0_r$ a buď $\{z_1, z_2 \dots z_m\} = \text{Adj.}\ \{\xi\}$. Je-li $\xi' = (z_1 z_2 \dots z_m)$, jest dle **30** (1) ξ' incidentní s $z_1, z_2 \dots z_m$, t. j. $\{\xi'\}$ jest adjungovaný lin. systém k $\{z_1, z_2 \dots z_m\}$ a tedy $\{\xi'\} = \{\xi\}$ dle **25**, t. j. $\xi = \lambda \xi'$. Je-li tedy $x_i = z_i$ $(i = 1, 2 \dots, m-1)$, $x_m = \lambda z_m$, jest $(x_1 x_2 \dots x_m) = \lambda (z_1 z_2 \dots z_m) = \lambda \xi' = \xi$. Je-li (1), tedy aby platilo (2), musí především ar. body $y_1, y_2 \dots y_m$ náležeti do $\{x_1, x_2 \dots x_m\}$, neboť i $\{y_1 y_2 \dots y_m\}$ i $\{x_1 x_2 \dots x_m\}$ jsou adjungované ke $\{\xi\}$. Platí tedy především (3), načež však formule pro násobení determinantů dává ihned

(5) $$(y_1 y_2 \dots y_m) = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{mm} \end{vmatrix} (x_1 x_2 \dots x_m).$$

33. Jsou-li $x_0, x_1 \dots x_m$ lin. nezávislé ar. body, lze určiti jedním a jen jedním způsobem ar. nadroviny $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_m$ tak, že jest

(1) $$S x_i \xi_i = 1, \ S x_i \xi_k = 0. \quad (i, k = 0, 1 \dots m; \ i \neq k).$$

Jest pak též

(2) $$(x_0 x_1 \dots x_m)(\xi_0 \xi_1 \dots \xi_m) = 1.$$

Rovnice (1) dávají pro souřadnice každé z ar. nadrovin $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_m$ $m+1$ lineárních rovnic, jichž determinant je $(x_0, x_1 \dots x_m)$ a tedy dle **28** je různý od nuly. Rovnice (2) plyne z (1) dle pravidla o násobení determinantů.

34. Platí-li rovnice **33** (1), pravíme, že jehlan $x_0, x_1 \dots x_m$ (v. **28**) a duální jehlan $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_m$ jsou adjungované.

Jehlan souřadných ar. bodů a duální jehlan souřadných ar. rovin jsou zřejmě adjungované.

Kolineace.

35. Pojem souřadnic ar. bodu vzhledem k jehlanu (**29**) vede k následující definici základní důležitosti: Buďte $x_0, x_1 \dots x_m$; $X_0, X_1 \dots X_m$ dvě skupiny $m+1$ lin. nezávislých ar. bodů, tedy $(x_0\, x_1 \dots x_m) \neq 0$, $(X_0, X_1 \dots X_m) \neq 0$. Libovolnému ar. bodu x přiřaďme ar. bod X dle tohoto pravidla: Jsou-li $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_m$ souřadnice ar. bodu x vzhledem k jehlanu $x_0, x_1 \dots x_m$, buď X ten ar. bod, jehož souřadnice vzhledem k jehlanu $X_0, X_1 \dots X_m$ jsou táž čísla $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_m$. Jinak řečeno, ar. bodu

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$$

přiřadíme ar. bod

$$X = \lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_m X_m.$$

Takto definovaná jednojednoznačná korespondence v prostoru ar. bodů nazývá se kolineace ar. bodů. Číslo

$$\mu = \frac{(X_0 X_1 \dots X_m)}{(x_0 x_1 \dots x_m)}$$

nazývá se modul kolineace. Je vždy $\mu \neq 0$; je-li $\mu > 0$ ($\mu < 0$), pravíme, že kolineace je positivní (negativní).

Je důležito povšimnoutí si, že táž kolineace dá se vytvořiti nekonečně mnoha způsoby. Vskutku, buďte $y_0, y_1 \dots y_m$ ar. body lin. nezávislé, ale jinak libovolné.

Je-li

$$y_i = \mu_{i0} x_0 + \mu_{i1} x_1 + \dots + \mu_{im} x_m \qquad (i = 0, 1 \dots m) \tag{1}$$

přísluší jim v dané kolineaci resp. ar. body $Y_0, Y_1 \dots Y_m$, kde

$$Y_i = \mu_{i0} X_0 + \mu_{i1} X_1 + \dots + \mu_{im} X_m. \tag{2}$$

Jestliže nyní v hořejší definici kolineace ar. body $x_0, x_1 \dots x_m$, $X_0, X_1 \dots X_m$ nahradíme po řadě ar. body $y_0, y_1 \dots y_m$, $Y_0, Y_1 \dots Y_m$, obdržíme novou kolineaci, v níž libovolnému ar. bodu

$$y = l_0 y_0 + l_1 y_1 + \dots + l_m y_m \tag{3}$$

je přiřazen ar. bod

$$Y = l_0 Y_0 + l_1 Y_1 + \dots + l_m Y_m. \tag{4}$$

Dle (1) a (3) je však

$$y = \sum_{i=0}^{m} l_i \mu_{i0} \, . \, x_0 + \sum_{i=0}^{m} l_i \mu_{i1} \, . \, x_1 + \dots + \sum_{i=0}^{m} l_i \mu_{im} \, . \, x_m.$$

Stejně obdržíme z (2) a (4)

$$Y = \sum_{i=0}^{m} l_i \mu_{i0} \, . \, X_0 + \sum_{i=0}^{m} l_i \mu_{i1} \, . \, X_1 + \ldots + \sum_{i=0}^{m} l_i \mu_{im} \, . \, X_m.$$

Je tedy také v původní kolineaci ar. bodu y přiřazen ar. bod Y, tedy, ježto ar. bod y je libovolný, obě kolineace splynou.

Odtud vidíme, že též číslo

$$\mu' = \frac{(Y_0 Y_1 \ldots Y_m)}{(y_0 y_1 \ldots y_m)}$$

můžeme považovati za modul dané kolineace. Přes to modul kolineace je číslo zcela určité, nezávislé na tom, jak je kolineace vytvořena; neboť snadno se ukáže, že $\mu' = \mu$. Vskutku z (1) odvodíme dle věty o násobení determinantů

$$(y_0 y_1 \ldots y_m) = M(x_0 x_1 \ldots x_m),$$

kde M je determinant $|\mu_{ik}|$, a stejně obdržíme z (2)

$$(Y_0 Y_1 \ldots Y_m) = M(X_0 X_1 \ldots X_m).$$

36. Je-li K korespondence v prostoru ar. bodů, v níž ar. bodu x je přiřazen ar. bod X, píšeme $x \sim X$ v K, nebo krátce $x \sim X$. Inversní korespondenci ke K, označení K^{-1}, definujeme takto: kdykoli $x \sim X$ v K, jest $X \sim x$ v K^{-1}. Jsou-li K_1, K_2 dvě korespondence v prostoru ar. bodů, nazýváme jejich součinem (v tomto pořádku) a značíme $K_1 K_2$ korespondenci takto definovanou: kdykoli $x \sim y$ v K_1 a $y \sim z$ v K_2, jest $x \sim z$ v $K_1 K_2$.

Množství korespondencí nazývá se grupa, má-li tuto vlastnost: kdykoli obsahuje K_1 a K_2 (K_2 nemusí býti různá od K_1), obsahuje též K_1^{-1} a $K_1 K_2$.

37. Množství všech kolineací ar. bodů je grupa. Jsou-li μ_1, μ_2 moduly kolineací K_1, K_2, jest μ_1^{-1} modul K_1^{-1} a $\mu_1 \mu_2$ jest modul $K_1 K_2$.

Důkaz je zřejmý.

38. Buď K kolineace ar. bodů modulu μ. Snadno se dokáže, že v K

1° $0_b \sim 0_b$,

2° je-li $x \sim X$, jest $\lambda x \sim \lambda X$,

3° je-li $x \sim X$, $y \sim Y$, jest $x + y \sim X + Y$,

4° je-li $x_i \sim X_i$ ($i = 0, 1 \ldots n$), jest $\{x_0, x_1 \ldots x_n\} \sim \{X_0, X_1 \ldots X_n\}$; jsou-li ar. body x_i lineárně závislé (nezávislé), platí totéž o ar. bodech X_i,

5° je-li $x_i \sim X_i$ ($i = 0, 1 \ldots m$), jest $(X_0 X_1 \ldots X_m) = \mu (x_0 x_1 \ldots x_m)$.

39. Kolineace modulu $+1$ nazývá se unimodulární. Množství všech unimodulárních kolineací jest grupa. Je-li v unimodulární kolineaci $x_i \sim X_i$ $(i=0, 1 \ldots m)$, jest $(X_0 X_1 \ldots X_m) = (x_0 x_1 \ldots x_m)$.

40. Zvolme číslo $\lambda \neq 0$ a přiřaďme každému ar. bodu x ar. bod λx; takto definovaná korespondence jmenuje se podobnost ar. bodů. Množství všech podobností jest grupa. Je-li m liché, podobnost jest positivní kolineace; je-li m sudé a $\lambda > 0$ $(\lambda < 0)$, podobnost jest positivní (negativní) kolineace. Vskutku modul jest λ^{m+1}.

41. Je-li m sudé a je-li K libovolná kolineace ar. bodů, lze určiti jedním a jen jedním způsobem unimodulární, kolineaci U a podobnost P tak, aby bylo $K = UP$. Vskutku je-li μ modul K, jest dle **37** μ též modul P a v P jest $x \sim \sqrt[m+1]{\mu} \, . \, x$. Tím je P určena a tedy $U = KP^{-1}$, což je zřejmě unimodulární kolineace.

42. Je-li m liché a je-li K positivní kolineace ar. bodů, lze určiti dvěma a jen dvěma způsoby unimodulární kolineaci U a podobnost P tak, aby bylo $K = UP$. Že je nutno předpokládati, že modul μ kolineace K jest > 0, plyne z **37** a **40**. Je-li však $\mu > 0$, lze opakovati hořejší úsudek s tím rozdílem, že $\sqrt[m+1]{\mu}$ můžeme dle libosti vzíti kladně nebo záporně.

43. Je-li K libovolná kolineace ar. bodů, existuje jedna a jen jedna kolineace K' ar. nadrovin té vlastnosti, že, kdykoli $x \sim X$ v K a $\xi \sim \Xi$ v K', jest $Sx\xi = SX\Xi$. Pravíme, že kolineace K' jest adjungována ke K a píšeme $K' = \text{Adj.}\, K$. Jest též $K = \text{Adj.}\, K'$. Jsou-li μ, μ' resp. moduly K, K', jest $\mu\mu' = 1$. Je-li

$$\xi \sim \Xi \text{ v } K', \; x_i \sim X_i \text{ v } K \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

a je-li

$$\xi = (x_1 x_2 \ldots x_m),$$

jest

$$\mu \Xi = (X_1 X_2 \ldots X_m). \tag{1}$$

Podobně, je-li

$$x \sim X \text{ v } K, \; \xi_i \sim \Xi_i \text{ v } K' \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

a je-li

$$x = (\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m),$$

jest

$$\mu^{-1} X = (\Xi_1 \Xi_2 \ldots \Xi_m). \tag{2}$$

Zvolme libovolně jehlan $y_0, y_1 \ldots y_m$. Buď $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_m$ duální jehlan adjungovaný k $y_0, y_1 \ldots y_m$ (v. **34**), takže

$$Sy_i \eta_i = 1, \; Sy_i \eta_k = 0. \qquad (i, k = 0, 1 \ldots m; \; i \neq k) \tag{3}$$

Buď $y_i \sim Y_i$ v K, a $\eta_i \sim H_i$ v žádané kolineaci K'. Dle (3) a dle předpokládané vlastnosti kolineace K' jest

$$(4) \qquad SY_i H_i = 1, \; SY_i H_k = 0. \qquad (i, k = 0, 1 \ldots m; \; i \neq k)$$

Tím jsou dle **33** ar. nadroviny H_i $(i = 0, 1 \ldots m)$ jednoznačně určeny a totéž platí tedy i o kolineaci K'. Zbývá ukázati, že takto definovaná K' má vskutku žádanou vlastnost. Avšak, je-li

$$x = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_m y_m, \quad \xi = \mu_0 \eta_0 + \mu_1 \eta_1 + \ldots + \mu_m \eta_m,$$

jest dle (3) a dle **19**

$$Sx\xi = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \lambda_m \mu_m$$

a podobně též, když $x \sim X$ v K a $\xi \sim \Xi$ v K′,

$$SX\Xi = \lambda_0 \mu_0 + \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \lambda_m \mu_m.$$

Ze **33** (2) plyne, že, je-li μ modul K, jest η^{-1} modul K'. Z rovnice $Sx\xi = SX\Xi$ vysvítá, že, jsou-li x a ξ incidentní, jsou též X a Ξ incidentní. Rovnice (1) je zřejmá, když $(x_1 x_2 \ldots x_m) = 0_r$, neboť dle **31** a **38**, 4°,je pak též $(X_1 X_2 \ldots X_m) = 0_r$. Je-li však $\xi = (x_1 x_2 \ldots x_m) \neq 0_r$, je dle **30** $\{\xi\} = \text{Adj.}\,\{x_1, x_2 \ldots x_m\}$. Ježto $S\Xi X_i = S\xi x_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots m)$, je také $\{\Xi\} = \text{Adj.}\,\{X_1, X_2 \ldots X_m\}$. Zřejmě však Adj. $\{X_1, X_2 \ldots X_m\} = \{(X_1 X_2 \ldots X_m)\}$. Tedy $\{\Xi\} = \{(X_1 X_2 \ldots X_m)\}$, t. j. existuje číslo ν takové, že $\nu\Xi = (X_1 X_2 \ldots X_m)$. Abychom dokázali formuli (1), potřebujeme ještě zjistiti, že $\nu = \mu$. Buď x_0 ar. bod neincidentní s ξ a buď $x_0 \sim X_0$ v K. Dle **38**, 5° jest

$$(X_1 X_2 \ldots X_m X_0) = \mu (x_1 x_2 \ldots x_m x_0).$$

Avšak dle definice symbolu $(x_1 x_2 \ldots x_m)$

$$(x_1 x_2 \ldots x_m x_0) = S(x_1 x_2 \ldots x_m) x_0 = S\xi x_0 \neq 0,$$
$$(X_1 X_2 \ldots X_m X_0) = S(X_1 X_2 \ldots X_m) X_0 = \nu S\Xi X_0 = \nu S\xi x_0,$$

tedy $\nu S\xi x_0 = \mu S\xi x_0$, $\nu = \mu$.

Je zřejmé, že $K = \text{Adj.}\,K'$, neboť vztah mezi K a K' je souměrný. Formule (2) je tedy duální k (1) a netřeba ji již dokazovati.

Korelace.

44. Jsou-li ar. body $x_0, x_1 \ldots x_m$, jakož i ar. nadroviny $\Xi_0, \Xi_1 \ldots \Xi_m$ lin. nezávislé, přiřaďme ar. bodu, jehož souřadnice vzhledem k jehlanu $x_0, x_1 \ldots x_m$ jsou $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_m$, t. j. ar. bodu

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m$$

ar. nadrovinu, jejíž souřadnice vzhledem k duálnímu jehlanu $\Xi_0, \Xi_1 \dots \Xi_m$ jsou táž čísla $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_m$, t. j. ar. nadrovinu

$$\Xi = \lambda_0 \Xi_0 + \lambda_1 \Xi_1 + \dots + \lambda_m \Xi_m;$$

takto definovaná korespondence nazývá se korelace prvního druhu, a číslo $\mu = \dfrac{(\Xi_0\, \Xi_1 \dots \Xi_m)}{(x_0\, x_1 \dots x_m)} \neq 0$ jmenuje se její modul. Inversní korespondence, jež ar. nadrovině Ξ přiřazuje ar. bod x, nazývá se korelace druhého druhu, modulu $\dfrac{1}{\mu}$. Je-li $\mu > 0$ $(\mu < 0)$, korelace nazývá se positivní (negativní). Stejně jak v **35** se vidí, že každá korelace má zcela určitý modul.

45. Je-li K korelace prvního druhu, existuje jedna a jen jedna korelace K' druhého druhu té vlastnosti, že, kdykoli $x \sim \Xi$ v K a $\xi \sim X$ v K', jest $Sx\xi = SX\Xi$. Pravíme, že korelace K' jest adjungována ke K a píšeme $K' = \text{Adj.}\, K$. Jest též $K = \text{Adj.}\, K'$. Jsou-li μ, μ' resp. moduly K, K', jest $\mu\mu' = 1$. Je-li

$$\xi \sim X \text{ v } K', \; x_i \sim \Xi_i \text{ v } K, \; (i = 1, 2 \dots m)$$

a je-li

$$\xi = (x_1\, x_2 \dots x_m),$$

jest

$$\mu X = (\Xi_1\, \Xi_2 \dots \Xi_m).$$

Podobně, je-li

$$x \sim \Xi \text{ v } K, \; \xi_i \sim X_i \text{ v } K', \qquad (i = 1, 2 \dots m)$$

a je-li

$$x = (\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_m),$$

jest

$$\mu^{-1} \Xi = (X_1\, X_2 \dots X_m).$$

Důkaz je úplně týž jako ve **43.**

Bodové a nadrovinové formy.

46. Buď

(1) $$P = \Sigma a_{i_0 i_1 \dots i_m} [\xi^{(0)}]^{i_0} [\xi^{(1)}]^{i_1} \dots [\xi^{(m)}]^{i_m} \qquad (i_0 + i_1 + \dots + i_m = n)$$

forma (homogenní polynom) n-ho stupně v souřadnicích proměnné ar. nadroviny ξ. Jsou-li

$$j_0 = |1, 0 \dots 0|_b,$$
$$j_1 = |0, 1 \dots 0|_b,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$j_m = |0, 0 \dots 1|_b$$

souřadné ar. body, jest zřejmě

$$P = \Sigma a_{i_0 i_1 \ldots i_m} (Sj_0 \xi)^{i_0} (Sj_1 \xi)^{i_1} \ldots (Sj_m \xi)^{i_m}. \qquad (i_0 + i_1 + \ldots + i_m = n)$$

Obecněji vidíme, že je možno nekonečně mnoha způsoby nalézti ar. body $x, y, z \ldots$ takové, že

(2) $$P = \Sigma A_{ikl} \ldots (Sx\xi)^i (Sy\xi)^k (Sz\xi)^l \ldots \qquad (i + k + l + \ldots = n)$$

Je výhodné, přiřaditi formě (2) symbol

(3) $$P_b = \Sigma A_{ikl} \ldots x^i y^k z^l \ldots, \qquad (i + k + l + \ldots = n)$$

který nazýváme bodovou formou n-ho stupně. Bodová forma prvého stupně dle **2** a **3** není nic jiného než ar. bod. I když $n > 1$, bylo by snadné definovati bodovou formu (3) jako $\left[\binom{m+n}{n} - 1\right]$-rozměrný ar. bod. Pro naše účely stačí považovati bodové formy pro $n > 1$ za pouhé symboly, přiřazené jednojednoznačně formám n-ho stupně v souřadnicích proměnné ar. nadroviny ξ, a v podstatě tedy se nelišící od takových forem. Je-li na př. bodová forma P_b dána symbolem (3), klademe pro libovolnou ar. nadrovinu ξ

(4) $$SP_b\xi = \Sigma A_{ikl} \ldots (Sx\xi)^i (Sy\xi)^k (Sz\xi)^l \ldots$$

A definujeme formálně: Bodové formy P_b a Q_b jsou rovné, když a jen když jsou identicky rovné formy $SP_b\xi$, $SQ_b\xi$ v souřadnicích proměnné ar. nadroviny ξ. To je zřejmě v souhlase s tím, že bodovou formu prvého stupně považujeme za ar. bod. Symbol $SP_b\xi$ je zobecnění symbolu $Sx\xi$. Je-li $SP_b\xi$ identicky rovno nule, klademe $P_b = Q_b$. To je zobecnění symbolu 0_b v **1**.

Nadrovina ξ nazývá se incidentní s bodovou formou P_b, když $SP_b\xi = 0$.

Bodové formy značíme obvykle P_b, P'_b, Q_b atd. Dle principu duality definujeme nadrovinové formy, které značíme obvykle P_r, P'_r, Q_r atd. Nadrovinová forma prvého stupně jest ar. nadrovina atd.

Někdy jest pohodlné, považovati čísla za bodové (nadrovinové) formy stupně nula. Je-li c číslo, klademe

$$Sc\xi = c, \qquad Scx = c.$$

47. Buď P_b bodová forma; buď ξ ar. nadrovina. Buď K kolineace ar. bodů; buď $K' = \text{Adj. } K$. Buď $P_b \sim Q_b$ v K, buď $\xi \sim \eta$ v K'. Pak jest

(1) $$SP_b\xi = SQ_b\eta.$$

Zejména tedy jest η incidentní s Q_b, když a jen když ξ jest incidentní s P_b.

Důkaz vychází ihned z definice symbolu $SP_b\xi$ ve **46** a z definice adjungované kolineace ve **43**.

48. Buď P_b bodová forma stupně n; buď P_k nadrovinová forma stupně $\nu \leqq n$. Pólem nadrovinové formy P_r vzhledem k bodové formě P_b nazýváme bodovou formu stupně $n-\nu$ (číslo, když $n=\nu$) $[P_b; P_r]$ takto definovanou: 1° Je-li

(1) $$P_b = x_1 x_2 \ldots x_n,\quad P_r = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_\nu,$$
jest
$$[P_b; P_r] = \frac{1}{n!} \Sigma\, Sx_{i_1}\xi_1 . Sx_{i_2}\xi_2 . \cdots . Sx_{i_\nu}\xi_\nu . x_{i_{\nu+1}} . \cdots . x_{i_n},$$

kde v součtu Σ indexy $i_1, i_2 \ldots i_n$ probíhají všecky permutace cifer 1, 2 ... n; 2° je-li

(3) $$P_b = \lambda' P'_b + \lambda'' P''_b + \ldots,\quad P_r = \mu' P'_r + \mu'' P''_r + \ldots,$$
jest
(4) $$[P_b; P_r] =$$
$$= \lambda'\mu' [P'_b; P'_r] + \lambda''\mu' [P''_b; P'_r] + \ldots + \lambda'\mu'' [P'_b; P''_r] + \lambda''\mu'' [P''_b; P''_r] + \ldots + \ldots$$

Je-li $[P_b; P_r] = 0_b$ ($= 0$ pro $n = \nu$), pravíme, že bodová forma P_b a nadrovinová forma P_r jsou apolární; pravíme pak také, že forma $SP_b\xi$ v souřadnicích ar. nadroviny ξ a forma $SP_r x$ v souřadnicích ar. bodu x jsou apolární.

Pro $\nu = 1$ obdržíme, že pólem ar. nadroviny ξ vzhledem k bodové formě n-ho stupně

(5) $$P_b = Ax_1 x_2 \ldots x_n + A' x_1' x_2' \ldots x_n' + \ldots$$

jest bodová forma $(n-1)$-ho stupně

(6) $$[P_b; \xi] = \frac{1}{n} A (Sx_1\xi . x_2 \ldots x_n + Sx_2\xi . x_1 x_3 \ldots x_n + \ldots + Sx_n\xi . x_1 x_2 \ldots x_{n-1}) +$$
$$+ \frac{1}{n} A' (Sx'_1\xi . x'_2 \ldots x'_n + Sx'_2\xi . x'_1 x'_3 \ldots x'_n + \ldots + Sx'_n\xi . x'_1 x'_2 \ldots x'_{n-1}) + \ldots$$

Místo $[[P_b; \xi_1]\xi_2]$ píšeme $[P_b; \xi_1; \xi_2]$; místo $[[P_b; \xi_1; \xi_2]; \xi_3]$ píšeme $[P_b; \xi_1; \xi_2; \xi_3]$ atd.

Duální definice platí pro $\nu \geqq n$. Duální výrazy k výrazům: pól, apolární jsou: polára, apolární.

Abychom ukázali, že k těmto definicím jsme oprávněni, musíme ukázati, že, když $P_b = Q_b$, $P_r = Q_r$, jest $[P_b; P_r] = [Q_b; Q_r]$, t. j. že, když jest identicky v ξ, resp. v x

$$SP_b\xi = SQ_b\xi,\quad SP_r x = SQ_r x,$$

že jest identicky v ξ

$$S[P_b; P_r]\xi = S[Q_b; Q_r]\xi,$$

Máme tedy ukázati, že 1^0

$$S[P_b; P_r]\,\xi = S[Q_b; P_r]\,\xi, \tag{7}$$

když $SP_b\xi = SQ_b\xi$; a 2^0

$$S[Q_b; P_r]\,\xi = S[Q_b; Q_r]\,\xi, \tag{8}$$

když $SP_r x = SQ_r x$. Dokažme nejprve (7). Tu zřejmě můžeme bez újmy obecnosti předpokládati, že

$$P_r = \xi_1 \xi_2 \dots \xi_\nu, \tag{9}$$

neboť když

$$P_r = \alpha P'_r + \beta P''_r + \dots,$$

jest

$$[P_b; P_r] = \alpha\,[P_b; P'_r] + \beta\,[P_b; P''_r] + \dots$$

Buďte $\Xi_1, \Xi_2 \dots \Xi_n$ libovolné ar. nadroviny $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ libovolně proměnné. Dosadíme-li do předpokládané identity $SP_b\xi = SQ_b\xi$

$$\xi = \lambda_1 \Xi_1 + \lambda_2 \Xi_2 + \dots + \lambda_n \Xi_n$$

a porovnáme-li koeficienty při $\lambda_1 \,.\, \lambda_2 \,.\, \cdots \,.\, \lambda_n$, obdržíme identitu

$$\begin{aligned}
&\Sigma\, A Sx_{i_1}\Xi_1 \,.\, Sx_{i_2}\Xi_2 \,.\, \cdots \,.\, Sx_{i_n}\Xi_n + \\
&+ \Sigma\, B Sy_{i_1}\Xi_1 \,.\, Sy_{i_2}\Xi_2 \,.\, \cdots \,.\, Sy_{i_n}\Xi_n + \dots \\
&= \Sigma\, A' Sx'_{i_1}\Xi_1 \,.\, Sx'_{i_2}\Xi_2 \,.\, \cdots \,.\, Sx'_{i_n}\Xi_n + \\
&+ \Sigma\, B' Sy'_{i_1}\Xi_1 \,.\, Sy_{i_2}\Xi_2 \,.\, \cdots \,.\, Sy'_{i_n}\Xi_n + \dots
\end{aligned}$$

Při tom

$$Q_b = A' x'_1 x'_2 \dots x'_n + B' y'_1 y'_2 \dots y'_n + \dots$$

a indexy $i_1, i_2 \dots i_n$ probíhají opět všecky permutace cifer $1, 2 \dots n$. Stačí nyní dosaditi

$$\Xi_1 = \xi_1,\ \Xi_2 = \xi_2, \dots \Xi_\nu = \xi_\nu,\ \Xi_{\nu+1} = \dots = \Xi_n = \xi,$$

abychom obdrželi (7) za učiněného předpokladu (9).

Při důkaze rovnice (8) stačí předpokládati

$$Q_b = z_1 z_2 \dots z_n, \tag{10}$$

neboť když

$$Q_b = aQ'_b + bQ''_b + \dots,$$

jest

$$[Q_b;\ P_r] = a\,[Q'_b;\ P_r] + b\,[Q''_b;\ P_r] + \dots$$

Buďte $X_1, X_2 \dots X_n$ libovolné ar. body, ξ libovolná ar. nadrovina a $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ libovolné proměnné. Dle předpokladu jest identicky $SP_r x = SQ_r x$ a tedy též $SP_r x \,.\, (S\xi x)^{n-\nu} = SQ_r x \,.\, (S\xi x)^{n-\nu}$. Dosadíme-li

$$x = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_n X_n;$$

a porovnáme-li koeficienty při $\lambda_1 \,.\, \lambda_2 \,.\, \cdots \,.\, \lambda_n$, obdržíme

$$\begin{aligned}
&\Sigma\alpha S\xi_1 X_{i_1} \,.\, S\xi_2 X_{i_2} \,.\, \cdots \,.\, S\xi_\nu X_{i_\nu} \,.\, S\xi X_{i_{\nu+1}} \,.\, \cdots \,.\, S\xi X_{i_n} + \\
+ &\Sigma\beta S\eta_1 X_{i_1} \,.\, S\eta_2 X_{i_2} \,.\, \cdots \,.\, S\eta_\nu X_{i_\nu} \,.\, S\xi X_{i_{\nu+1}} \,.\, \cdots \,.\, S\xi X_{i_n} + \ldots = \\
= &\Sigma\alpha' S\xi'_1 X_{i_1} \,.\, S\xi'_2 X_{i_2} \,.\, \cdots \,.\, S\xi'_\nu X_{i_\nu} \,.\, S\xi X_{i_{\nu+1}} \,.\, \cdots \,.\, S\xi X_{i_n} + \\
+ &\Sigma\beta' S\eta'_1 X_{i_1} \,.\, S\eta'_2 X_{i_2} \,.\, \cdots \,.\, S\eta'_\nu X_{i_\nu} \,.\, S\xi X_{i_{\nu+1}} \,.\, \cdots \,.\, S\xi X_{i_n} + \cdots.
\end{aligned}$$

Při tom jest

$$Q_r = \alpha'\xi'_1 \,.\, \xi'_2 \,.\, \cdots \,.\, \xi'_\nu + \beta'\eta'_1 \,.\, \eta'_2 \,.\, \cdots \,.\, \eta'_\nu + \cdots$$

a v součtech Σ indexy $i_1, i_2 \ldots i_n$ probíhají všecky permutace cifer od 1 do n. Stačí dosaditi

$$X_1 = x_1,\ X_2 = x_2,\ \ldots\ X_n = x_n,$$

abychom obdrželi (8) za učiněného předpokladu (10).

49. Buď P_b bodová forma stupně n; buď P_r nadrovinová forma stupně $\nu \leqq n$. Buď $[P_b;\ P_r]$ pól nadrovinové formy P_r vzhledem k bodové formě P_b. Buď K kolineace ar. bodů; buď $K' = \text{Adj}.\ K$. Buď $P_b \sim Q_b$ v K; buď $P_r \sim Q_r$ v K'. Je-li $\nu = n$, jest

$$[P_b;\ P_r] = [Q_b;\ Q_r].$$

Je-li $\nu < n$, jest v K

$$[P_b;\ P_r] \sim [Q_b;\ Q_r].$$

Jsou-li tedy P_b a P_r apolární, jsou Q_b a Q_r apolární.

Vychází ihned z definice symbolu $[P_b;\ P_r]$ ve **48** a z definice adjungované kolineace ve **43**.

50. Buď $[P_b;\ \xi]$ pól ar. nadroviny ξ vzhledem k bodové formě P_b stupně $n \geqq 2$. Jest

$$S[P_b;\ \xi]\,\xi = SP_b\,\xi.$$

Zejména tedy ξ jest incidentní s P_b, když a jen když jest incidentní s $[P_b;\ \xi]$.

Vychází ihned ze **46** (4) a **48** (2), (4).

51. Buďte $\overset{0}{P}_b, \overset{1}{P}_b, \ldots \overset{m}{P}_b$ bodové formy stupňů resp. $n_0, n_1, \ldots n_m$. Jakobienem těchto forem nazýváme bodovou formu $(\overset{0}{P}_b, \overset{1}{P}_b, \ldots \overset{m}{P}_b)$ stupně $n_0 + n_1 + \ldots + n_m - m - 1$ takto definovanou. Je-li nejprve

$$\overset{r}{P}_b = \overset{r}{x}_1 \overset{r}{x}_2 \,.\, \cdots \,.\, \overset{r}{x}_{n_r}, \qquad (r = 0,\ 1 \ldots m) \tag{1}$$

jest

$$n_0!\, n_1! \ldots n_m!\, (\overset{0}{P}_b, \overset{1}{P}_b, \ldots, \overset{m}{P}_b) = \Sigma(\overset{0}{x}_1 \overset{1}{x}_1 \ldots \overset{m}{x}_1)\, \overset{0}{x}_2 \overset{0}{x}_3 \ldots \overset{0}{x}_{n_0} \overset{1}{x}_2 \overset{1}{x}_3 \ldots \overset{1}{x}_{n_1} \ldots \overset{m}{x}_2 \overset{m}{x}_3 \ldots \overset{m}{x}_{n_m}. \tag{2}$$

Při tom symbol Σ znamená součet $n_0!\, n_1! \dots n_m!$ členů, z nichž jeden jest vypsán a ostatní z něho vzniknou tím, že pro $r = 0, 1 \dots m$ permutujeme všemi možnými způsoby dolní indexy při $\overset{r}{x}_1, \overset{r}{x}_2, \dots \overset{r}{x}_{n_r}$. Je-li však na př.

$$\overset{0}{P}_b = A\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2\dots\overset{0}{x}_{n_0} + B\overset{0}{y}_1\overset{0}{y}_2\dots\overset{0}{y}_{n_0} + \dots, \tag{3}$$

klademe

$$(\overset{0}{P}_b, \overset{1}{P}_b, \dots \overset{m}{P}_b) = A(\overset{0}{x}_1\overset{0}{x}_2\dots\overset{0}{x}_{n_0}, \overset{1}{P}_b, \dots \overset{m}{P}_b) + B(\overset{0}{y}_1\overset{0}{y}_2\dots\overset{0}{y}_{n_0}, \overset{1}{P}_b, \dots \overset{m}{P}_b) + \dots; \tag{4}$$

a podobně pro $\overset{1}{P}_b, \dots \overset{m}{P}_b$.

Je-li $n_r = 1$ $(r = 0, 1 \dots m)$, jsou-li tedy P_r ar. body, přejde symbol $(\overset{0}{P}_b \overset{1}{P}_b \dots \overset{m}{P}_b)$ v symbol definovaný ve **27**.

Jsou-li $\overset{0}{\xi}, \overset{1}{\xi}, \dots \overset{m}{\xi}$ ar. nadroviny, platí identita

$$(\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\dots\overset{m}{\xi})(\overset{0}{P}_b, \overset{1}{P}_b, \dots \overset{m}{P}_b) = \begin{vmatrix} [\overset{0}{P}_b; \overset{0}{\xi}], & [\overset{0}{P}_b; \overset{1}{\xi}], & \dots & [\overset{0}{P}_b; \overset{m}{\xi}] \\ [\overset{1}{P}_b; \overset{0}{\xi}], & [\overset{1}{P}_b; \overset{1}{\xi}], & \dots & [\overset{1}{P}_b; \overset{m}{\xi}] \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ [\overset{m}{P}_b; \overset{0}{\xi}], & [\overset{m}{P}_b; \overset{1}{\xi}], & \dots & [\overset{m}{P}_b; \overset{m}{\xi}] \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Je třeba ukázati, že jsme k učiněné definici oprávněni, t. j. že, když $\overset{0}{P}_b = \overset{0}{Q}_b, \overset{1}{P}_b = \overset{1}{Q}_b, \dots \overset{m}{P}_b = \overset{m}{Q}_b$, jest také $(\overset{0}{P}_b, \overset{1}{P}_b, \dots \overset{m}{P}_b) = (\overset{0}{Q}_b, \overset{1}{Q}_b, \dots \overset{m}{Q}_b)$. Z předpokladu však následuje dle **48**, že $[\overset{i}{P}_b; \overset{k}{\xi}] = [\overset{i}{Q}_b; \overset{k}{\xi}]$, takže z (5) vidíme, zvolíme-li za $\overset{0}{\xi}, \overset{1}{\xi} \dots \overset{m}{\xi}$ lin. nezávislé ar. nadroviny, že vskutku $(\overset{0}{P}_b, \overset{1}{P}_b \dots \overset{m}{P}_b) = (\overset{0}{Q}_b, \overset{1}{Q}_b, \dots \overset{m}{Q}_b)$. Je tedy pouze třeba odvoditi (5). Ze (3) a (4) snadno vidíme, že stačí tak učiniti za předpokladu, že platí (1) a tedy (2). Dle pravidla o násobení determinantů je však

$$(\overset{0}{x}_1\overset{1}{x}_1\dots\overset{m}{x}_1)(\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\dots\overset{m}{\xi}) = \Sigma^*(\pm 1)_k S\overset{0}{x}_1\overset{k_0}{\xi}\,.\,S\overset{1}{x}_1\overset{k_1}{\xi}\,.\,\cdots\,.\,S\overset{m}{x}_1\overset{k_m}{\xi}, \tag{6}$$

při čemž Σ^* znamená, že $k_0, k_1 \dots k_m$ probíhají všecky permutace cifer 1, 2 ... m a $(\pm 1)_k$ rovná se $+1$ (-1), když $k_0, k_1 \dots k_m$ jest positivní (negativní) permutace Dle (2) a (6) jest

$$\begin{aligned} &n_0!\, n_1! \dots n_m!\, (\overset{0}{\xi}\overset{1}{\xi}\dots\overset{m}{\xi})(\overset{0}{P}_b, \overset{1}{P}_b, \dots \overset{m}{P}_b) = \\ &= \Sigma\Sigma^*(\pm 1)_k S\overset{0}{x}_1\overset{k_0}{\xi}\,.\,\overset{0}{x}_2\overset{0}{x}_3\dots\overset{0}{x}_m\,.\,S\overset{1}{x}_1\overset{k_1}{\xi}\,.\,\overset{1}{x}_2\overset{1}{x}_3\dots\overset{1}{x}_m\,.\,\cdots\,.\,S\overset{m}{x}_1\overset{k_m}{\xi}\,.\,\overset{m}{x}_2\overset{m}{x}_3\dots\overset{m}{x}_m, \end{aligned} \tag{7}$$

při čemž Σ, Σ^* mají týž význam, jako ve (2), (6). Pravá strana v (7) rovná se dle (1) a **47** (6)

$$n_0!\, n_1! \dots n_m!\, \Sigma^*(\pm 1)_k [\overset{0}{P}_b; \overset{k_0}{\xi}]\, [\overset{1}{P}_b; \overset{k_1}{\xi}] \dots [\overset{m}{P}_b; \overset{k_m}{\xi}].$$

Porovnáním s levou stranou v (7) vychází (5).

52. Buď $(\overset{0}{P_b}\overset{1}{P_b}\ldots\overset{m}{P_b})$ jakobien bodových forem $\overset{0}{P_b}, \overset{1}{P_b},\ldots\overset{m}{P_b}$. Buď K kolineace ar. bodů modulu μ. Buď v K

$$\overset{0}{P_b}\sim\overset{0}{Q_b},\ \overset{1}{P_b}\sim\overset{1}{Q_b},\ \ldots,\ \overset{m}{P_b}\sim\overset{m}{Q_b}.$$

Buď $(\overset{0}{Q_b}\ \overset{1}{Q_b}\ldots\overset{m}{Q_b})$ jakobien forem $\overset{0}{Q_b}, \overset{1}{Q_b}\ldots\overset{m}{Q_b}$. Pak jest

$$(\overset{0}{Q_b}\overset{1}{Q_b}\ldots\overset{m}{Q_b}) = \mu(\overset{0}{P_b}\overset{1}{P_b}\ldots\overset{m}{P_b}).$$

To plyne ze **38** (5) a **51** (2), nebo také ze **38** (5), **49** a **51** (5), připomeneme-li si, že dle **43** Adj. K má modul μ^{-1}.

53. Buď P_b kvadratická bodová forma. Množství Σ ar. nadrovin, jichž pólem vzhledem ku P_b jest 0_b, je lineární systém Σ; pravíme, že Σ je vrchol formy P_b. Je-li d dimense Σ, pravíme, že hodnost formy P_b jest $m-d$. Je-li ξ ar. nadrovina incidentní s P_b, a je-li S spojení Σ a $\{\xi\}$, jest každá ar. nadrovina z S incidentní s P_b. Kvadratická bodová forma nazývá se obecná, je-li hodnosti $m+1$, když tedy $\Sigma=\{0_r\}$.

Jsou-li $x_0, x_1\ldots x_m$ lin. nezávislé ar. body, můžeme dle **29** psáti

(1) $$P_b=\Sigma a_{ik}x_i x_k. \qquad (i, k=0, 1\ldots m;\ a_{ik}=a_{ki})$$

Dle **48** (4) je tedy

(2) $$[P_b;\ \xi]=\Sigma a_{ik}\,.\,Sx_i\xi\,.\,x_k. \qquad (i, k=0, 1\ldots m)$$

Odtud vychází ihned

$$[P_b;\ \lambda\xi]=\lambda[P_b;\ \xi],$$
$$[P_b;\ \xi+\eta]=[P_b;\ \xi]+[P_b;\ \eta].$$

Když tedy ξ a η náležejí do Σ, náležejí do Σ i $\lambda\xi$ a $\xi+\eta$. Σ je tedy lineární systém dle **15**.

Z (1) a (2) se nalezne snadno

$$SP_b(\eta+\lambda\xi)=SP_b\eta+2\lambda S[P_b;\ \eta]\xi+\lambda^2 SP_b\xi.$$

Buď $\Sigma=\{\eta_0, \eta_1\ldots\eta_d\}$, $\eta=\lambda_0\eta_0+\lambda_1\eta_1+\ldots+\lambda_d\eta_d$, takže $[P_b;\eta]=0$ a dle **50** $SP_b\eta=0$. Je-li též $SP_b\xi=0$, je tedy $SP_b(\lambda_0\eta_0+\ldots+\lambda_d\eta_\lambda+\lambda\xi)=0$, t. j. každá ar. nadrovina ze spojení Σ a $\{\xi\}$ jest incidentní s P_b.

54. Buď P_b kvadratická bodová forma. Hodnost P_b jest $\leqq h\,(\leqq m+1)$, když a jen když existuje h lin. nezávislých ar. bodů $x_1, x_2\ldots x_h$ takových, že

(1) $$P_b=\Sigma a_{ik}x_i x_k. \qquad (i, k=1, \ldots h;\ a_{ik}=a_{ki})$$

Hodnost je právě h, když a jen když determinant

$$|a_{ik}| \qquad (i, k = 1, \dots h)$$

je různý od nuly.

Ukažme nejprve, že, když $x_1, x_2 \dots x_h$ $(h \leqq m+1)$ jsou lin. nezávislé ar. body takové, že platí (1), hodnost formy P_b jest $\leqq h$. Je-li Σ vrchol P_b, máme ukázati, že dimense Σ jest $\geqq m-h$. Je-li však $\Sigma' =$ Adj. $\{x_1, x_2 \dots x_h\}$, a je-li ξ v Σ', jest

$$(2) \qquad S\xi x_1 = S\xi x_2 = \dots = S\xi x_h = 0$$

a tedy pól ξ vzhledem k P_b je 0_b. Je tedy každá nadrovina ze Σ' obsažena v Σ. Avšak dimense Σ' je dle **24** rovna $m-h$, tedy dimense Σ je vskutku $\geqq m-h$.

Předpokládajíce stále, že platí (1) a že ar. body $x_1, x_2 \dots x_h$ jsou lin. nezávislé, hledejme, kdy hodnost P_b je právě h. To nastane dle předešlého, když a jen když $\Sigma = \Sigma'$, když tedy z předpokladu, že ξ náleží do Σ, plynou rovnice (2). Podmínka, aby ξ náležela do Σ, je však

$$\Sigma a_{ik} x_i S\xi x_k = 0, \qquad (i, k = 1, \dots h)$$

čili, ježto $x_1, x_2 \dots x_h$ jsou lin. nezávislé,

$$(3) \qquad \Sigma a_{1k} S\xi x_k = 0, \ \Sigma a_{2k} S\xi x_k = 0, \dots S a_{hk} S\xi x_k = 0. \qquad (k = 1, \dots h)$$

Aby z rovnice (3) plynuly rovnice (2), je však nutné a stačí $|a_{ik}| = 0$.

Zbývá ukázati, že, když hodnost P_b jest $\leqq h$, existují lin. nezávislé ar. body $x_1, x_2, \dots x_h$ takové, že platí (1). Zřejmě stačí předpokládati, že hodnost P_b rovná se h. Vrchol formy P_b buď $\Sigma = \{\xi_{h+1}, \xi_{h+2} \dots \xi_{m+1}\}$ a určeme $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_h$ tak, že $(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{m+1}) \neq 0$. Buď $x_1, x_2 \dots x_{m+1}$ jehlan adjungovaný ke $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{m+1}$, takže

$$(4) \qquad S x_i \xi_i = 1, \ S x_i \xi_k = 0. \qquad (i, k = 1, 2 \dots m+1; \ i \neq k)$$

Ježto $\{x_1, x_2 \dots x_{m+1}\}$ je prostor ar. bodů, existují čísla a_{ik} taková, že

$$(5) \qquad P_b = \Sigma a_{ik} x_i x_k. \qquad (i, k = 1, 2 \dots m+1; \ a_{ik} = a_{ki})$$

Pól ar. nadroviny ξ_i $(i = 1, 2 \dots m+1)$ vzhledem ku P_b je dle (4) a **53** (2)

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_{ik} x_k.$$

Dle definice Σ je tedy pro $i = h+1, h+2, \dots m+1$

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_{ik} x_k = 0_b,$$

a tedy, ježto ar. body $x_1, x_2 \dots x_{m+1}$ jsou lin. nezávislé, $a_{ik} = 0$ pro

$i=h+1, \dots m+1$; $k=1 \dots m+1$; a tedy též pro $i=1, \dots m+1$; $k=h+1, \dots m+1$. Tedy (5) přejde v (1).

55. Buď P_b obecná kvadratická bodová forma. Existuje korelace druhého druhu K taková, že, kdykoli $\xi \sim x$ v K, ar. bod x je pól ar. nadroviny ξ vzhledem ku P_b. Pravíme, že K je polární korelace druhého druhu o basi P_b.

Je-li P_r obecná kvadratická nadrovinová forma, definujeme duálně polární korelaci prvého druhu o basi P_r.

Buď

$$P_b = \Sigma a_{ik} x_i x_k, \qquad (i,\ k=0,\ 1 \dots m;\ a_{ik}=a_{ki})$$

takže determinant $| a_{ik} | \neq 0$ dle **54**. Buď $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_m$ duální jehlan adjungovaný k $x_0, x_1 \dots x_m$. Buď K korelace, v níž

$$\xi_i \sim \sum_{k=0}^{m} a_{ik} x_k.$$

K je korelace, neboť pravidla o násobení determinantů

$$(\sum_{k=0}^{m} a_{0k} x_k, \sum_{k=0}^{m} a_{1k} x_k, \dots \sum_{k=0}^{m} a_{mk} x_k) = | a_{ik} | \, (x_0 x_1 \dots x_m) \neq 0.$$

Snadno se vidí, že K má žádanou vlastnost.

56. Buď K korelace druhého druhu; buď $K' = \text{Adj.}\, K$. K je polární korelace, když a jen když $K' = K^{-1}$, t. j. když z relace $x \sim \eta$ v K následuje $\eta \sim x$ v K'.

Jestliže K přiřazuje lin. nezávislým ar. bodům $x_0, x_1 \dots x_m$ resp. ar. nadroviny $\eta_0, \eta_1 \dots \eta_m$, jest K polární korelace, když a jen když

$$S x_i \eta_k = S x_k \eta_i. \qquad (i, k = 0, 1 \dots m) \tag{1}$$

Buď $x_i \sim \eta_i$ $(i=0, 1 \dots m)$ v K a $(x_0 x_1 \dots x_m) \neq 0$. Buď $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_m$ duální jehlan adjungovaný k $x_0, x_1 \dots x_m$, tedy

$$S x_i \xi_i = 1,\ S x_i \xi_k = 0. \qquad (i, k = 0, 1 \dots m) \tag{2}$$

Je-li

$$\eta_i = \sum_{k=0}^{m} a_{ik} \xi_k, \qquad (i = 0, 1 \dots m) \tag{3}$$

vidíme z **55**, že nutné a postačující podmínky pro polární korelaci jsou $a_{ik} = a_{ki}$; jsou-li splněny, je $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ base korelace K.

Buď x libovolný ar. bod, η libovolná ar. nadrovina. Buď

$$x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i, \quad \eta = \sum_{i=0}^{m} \mu_i \eta_i = \sum_{i,k}^{0 \dots m} \mu_i a_{ik} \xi_k.$$

Pak jest

$$x \sim \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \eta_i = \sum_{i,k}^{0\dots m} \lambda_i a_{ik} \xi_k \text{ v } K, \quad \eta \sim \sum_{i=0}^{m} \mu_i x_i \text{ v } K^{-1}.$$

Aby $K^{-1} = \text{Adj. } K$, je nutné a stačí, aby bylo identicky v $\lambda_i \mu_i$

$$S \Sigma \lambda_i x_i \Sigma \mu_i a_{ik} \xi_k = S \Sigma \lambda_i a_{ik} \xi_k \Sigma \mu_i x_i,$$

t. j. dle (2)

$$\sum_{i,k}^{0\dots m} a_{ki} \lambda_i \mu_k = \sum_{i,k}^{0\dots m} a_{ik} \lambda_i \mu_k,$$

tedy opět $a_{ik} = a_{ki}$. Dále jest dle (2) a (3)

$$S x_i \eta_k = a_{ki},$$

takže i rovnice (1) dávají opět podmínky $a_{ik} = a_{ki}$.

57. Buď K polární korelace druhého druhu o basi P_b. Také Adj. K je polární korelace; buď P_r base korelace Adj. K. Pravíme, že kvadratická nadrovinová forma P_r jest adjungována ke kvadratické bodové formě P_b; označení $P_k = \text{Adj. } P_b$. Jest také $P_b = \text{Adj. } P_r$. Je-li Q_b bodová forma stupně $\geqq 2$, pravíme, že Q_b a P_b jsou apolární, když Q_b a Adj. P_b jsou apolární.

Z **56** vidíme ihned, že Adj. K jest polární korelace. Ježto dle **45**

$$\text{Adj. } (\text{Adj. } K) = K,$$

jest

$$\text{Adj. } (\text{Adj. } P_b) = P_b.$$

58. Buď $x_0, x_1 \dots x_m$ jehlan; buď $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_m$ duální jehlan adjungovaný k $x_0, x_1 \dots x_m$. Buď

$$(1) \qquad P_b = \Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 0, 1 \dots m;\ a_{ik} = a_{ki})$$

obecná kvadratická bodová forma, takže $D = |a_{ik}| \neq 0$. Pak jest

$$(2) \qquad \text{Adj. } P_b = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} & \xi_0 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} & \xi_1 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} & \xi_m \\ \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_m & 0 \end{vmatrix}.$$

Užíváme-li označení ze **48**, a značíme-li zatím P_r pravou stranu rovnice (2), máme ukázati, že, je-li

$$(3) \qquad x = [P_b; \xi] = \Sigma a_{ik} x_i S \xi x_k, \qquad (i, k = 0, 1 \dots m)$$

jest, ať ξ je jakákoli ar. nadrovina, $[P_r; x] = \xi$. Avšak dle tvaru P_r vidíme snadno, že

$$(4)\qquad [P_r; x] = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} & S\xi_0 x \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} & S\xi_1 x \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} & S\xi_m x \\ \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_m & 0 \end{vmatrix}.$$

Dle (3) jest, ježto jehlan $x_0, x_1 \dots x_m$ a duální jehlan $\xi_0, \xi_1 \dots \xi_m$ jsou adjungované,

$$S\xi_j x = \sum_{i,k} a_{ik} S\xi_j x_i S\xi x_k = \sum_k a_{jk} S\xi x_k. \qquad (i, k = 0, 1 \dots m)$$

Dosadíme-li do (4), máme po snadné úpravě determinantu

$$[P_r; x] = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} & 0 \\ \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_m & -\sum\limits_i^{0\dots m} \xi_i S\xi x_i \end{vmatrix} = \sum_i^{0\dots m} \xi_i S\xi x_i.$$

Zbývá tedy pouze ukázati, že jest identicky v ξ

$$\sum_i \xi_i S\xi x_i = \xi.$$

Je-li však $\xi = \sum\limits_i \lambda_j \xi_j$, jest

$$\sum_i \xi_i S\xi x_i = \sum_{ij} \lambda_j \xi_i S\xi_j x_i = \sum_i \lambda_i \xi_i = \xi,$$

jak bylo dokázati.

Geometrické body a nadroviny.

59. L i n e á r n í s y s t é m ar. b o d ů d i m e n s e n u l a n a z ý v á s e g e o m e t r i c k ý b o d, k r á t c e b o d. L i n e á r n í s y s t é m ar. n a d r o v i n d i m e n s e n u l a n a z ý v á s e g e o m e t r i c k á n a d r o v i n a, k r á t c e n a d r o v i n a. Množství všech bodů nazývá se p r o s t o r, určitěji m-rozměrný prostor; množství všech nadrovin nazývá se d u á l n í p r o s t o r.

Geometrické body $\{x\}$ a $\{y\}$ jsou rovné, když a jen když $x^{(0)} : x^{(1)} : \dots : x^{(m)} = y^{(0)} : y^{(1)} : \dots ; y^{(m)}$. Z tohoto důvodu $x^{(0)}, x^{(1)} \dots x^{(m)}$ nazývají se obvykle homogenní souřadnice bodu $\{\xi\}$, a v geometrických učebnicích zpravidla se zaměňují pojmy ar. bod a geom. bod. V diferenciální projektivní geometrii je však nevyhnutelné, uvažovati též ar. body jako samostatné elementy.

Pravíme, že geom. body $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots \{x_m\}$ jsou l i n. z á v i s l é (n e z á v i s l é), jsou-li ar. body $x_1, x_2, \dots x_m$ lin. závislé (nezávislé). Pravíme, že bod $\{x\}$ a nadrovina $\{\xi\}$ jsou i n c i d e n t n í, když ar. bod x a ar. nadrovina ξ jsou incidentní.

Pravíme, že geom. bod $\{x\}$ je incidentní s nadrovinovou formou P_r, je-li ar. bod x incidentní s P_r. Pravíme, že geom. nadrovina $\{\xi\}$ je incidentní s bodovou formou P_b, je-li ar. nadrovina ξ incidentní s P_b. Je jasné, že k těmto definicím jsme oprávněni.

60. Buď P_r kvadratická nadrovinová forma hodnosti $h \geqq 3$. Je-li ξ polára ar. bodu $x \neq 0_b$ vzhledem ku P_r a je-li $\xi \neq 0_r$, pravíme, že $\{\xi\}$ jest polára bodu $\{x\}$ vzhledem ku P_r. Existuje-li $m - h + 2$ lin. nezávislých bodů incidentních s P_r, a je-li S lin. systém ar. bodů dimense $h - 1$, jehož průřez s vrcholem formy P_r jest nulový bod, existuje v S nekonečně mnoho takových bodů; množství bodů incidentních s P_r nazývá se pak kvadrika hodnosti h; označení $M[P_r]$. Poláru bodu $\{x\}$ vzhledem ku P_r nazýváme pak také polárou $\{x\}$ vzhledem k $M[P_r]$. Vrchol formy P_r nazýváme vrcholem kvadriky $M[P_r]$.

Dle principu duality definujeme duální kvadriku hodnosti h; označení $\mathfrak{M}[P_b]$.

Buď Σ vrchol formy P_r, tedy lin. systém ar. bodů dimense $m - h$. Z daných $m - h + 2$ lin. nezávislých bodů incidentních s P_r aspoň jeden tedy není obsažen v Σ. Buď Σ' spojení tohoto bodu a Σ, tedy lin. systém ar. bodů dimense $m - h + 1$. Ze **17** se nalezne, že průřez S' lin. systémů Σ' a S má dimensi $\geqq 0$. Avšak dle **53** každý ar. bod ze Σ', tedy každý ar. bod z S', jest incidentní s P_r. Tedy existuje v S aspoň jeden vlastní ar. bod incidentní s P_r. Buď x_0 takový ar. bod a buď (v. **13**)

$$S = \{x_0, x_1 \ldots x_{h-1}\}, \quad \Sigma = \{x_h, x_{h+1} \ldots x_m\}.$$

Ježto průřez S a Σ jest $\{0_b\}$, jsou ar. body $x_0 \ldots x_m$ lin. nezávislé. Buď $\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_m$ duální jehlan adjungovaný k $x_0, x_1 \ldots x_m$. Jako v **54** nalezneme, že

$$(1) \qquad P_r = \Sigma a_{ik} \xi_i \xi_k. \qquad (i, k = 0, 1 \ldots h - 1\,;\; a_{ik} = a_{ki})$$

Jest

$$SP_r x_0 = a_{00} = 0, \; [P_r; x_0] = \Sigma a_{0k} \xi_k \neq 0_r \qquad (k = 1, 2 \ldots h - 1)$$

Je tedy aspoň jedno z čísel $a_{01}, \ldots a_{0, h-1}$ různé od nuly. Buď na př. $a_{01} \neq 0$. Dle (1) jest

$$SP_r(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + x_2) = a_{11} \lambda_1^2 + a_{22} + 2a_{01} \lambda_0 \lambda_1 + 2a_{02} \lambda_0 + 2a_{12} \lambda_1.$$

Zvolíme-li λ_1 jakkoli, pouze různé od $-\dfrac{a_{02}}{a_{01}}$, můžeme určiti λ_0 tak, že bod $\{\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + x_2\}$ jest incidentní s P_r.

61. Projektivní geometrie studuje ty vlastnosti množství lin. systémů ar. bodů a lin. systémů ar. nadrovin, (zejména tedy vlastnosti množství bodů a nadrovin), které se nemění kolineacemi (invariantní při kolineacích).

Je-li m sudé, je dle **41** každá kolineace součinem unimodulární kolineace a podobnosti. Avšak při podobnosti zřejmě každý lin. systém je invariantní. Při sudém m je tedy invariantní při kolineacích každá vlastnost množství lin. systému ar. bodů (ar. nadrovin), jež se nemění unimodulárními kolineacemi. Je-li m liché, lze dle **42** pouze positivní kolineace takto nahrazovati unimodulárními kolineacemi. Jsou-li však K_1, K_2 dvě negativní kolineace, jest $K_2 = K_3 K_1$, kde K_3 je positivní kolineace (v. **37**). Víme-li tedy při lichém m o nějaké vlastnosti množství lin. systémů, že jest invariantní při unimodulárních kolineacích, a chceme-li zjistiti, je-li invariantní při všech kolineacích, stačí zjistiti, že jest invariantní při jedné (libovolně zvolené) negativní kolineaci.

Při jakémkoli m, chceme-li zjistiti o nějaké vlastnosti, o níž víme, že jest invariantní při kolineacích, jak se změní při korelacích, stačí zjistiti, jak se změní při jedné (libovolně zvolené) korelaci. Vskutku, jsou-li L_1, L_2 dvě korelace téhož druhu, existuje kolineace K taková, že $L_2 = KL_1$.

Proměnné ar. body. Diferenciální rovnice.

62. Jsou-li souřadnice ar. bodu $x = x\,(u)$ funkcemi proměnné u, pravíme, že x je proměnný ar. bod závislý na u. Mají-li všecky souřadnice derivaci, klademe

$$\frac{dx}{du} = \left| \frac{dx^{(0)}}{du}, \frac{dx^{(1)}}{du}, \ldots \frac{dx^{(m)}}{du} \right|_b.$$

Vyskytuje-li se v nějaké úvaze vedle proměnných ar. bodů ar. bod z, jehož souřadnice jsou konstanty, pravíme, že ar. bod z je pevný. Podobně mluvíme o pevné ar. nadrovině, o pevném bodě atd.

Následující pravidla jsou zřejmá, existují-li derivace v nich se vyskytující:

$$\frac{d}{du}(\lambda x) = \frac{d\lambda}{du} x + \lambda \frac{dx}{du},$$

$$\frac{d}{du}(x_1 + x_2) = \frac{dx_1}{du} + \frac{dx_2}{du},$$

$$\frac{d}{du} Sx\xi = S\frac{dx}{du}\xi + Sx\frac{d\xi}{du},$$

$$\frac{d}{du}(x_0 x_1 \ldots x_m) = \left(\frac{dx_0}{du} x_1 \ldots x_m\right) + \ldots + \left(x_0 x_1 \ldots \frac{dx_m}{du}\right),$$

$$\frac{d}{du}(x_1 x_2 \ldots x_m) = \left(\frac{dx_1}{du} x_2 \ldots x_m\right) + \ldots + \left(x_1 x_2 \ldots \frac{dx_m}{du}\right).$$

Můžeme býti také několik nezávisle proměnných: $u, v\dots$; pak je zřejmé, co znamená $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ atd.

Je-li

$$P_b = \Sigma A_{ikl}\dots x^i y^k z^l \dots$$

bodová forma, při čemž koeficienty $A_{ikl}\dots$ jakož i ar. body $x, y, z\dots$ závisejí na proměnné u, klademe

$$\frac{d}{du} P_b = \Sigma \frac{dA_{ikl}\dots}{du} x^i y^k z^l + \Sigma i A_{ikl}\dots x^{i-1} y^k z^l + \dots .$$

Zřejmě jest $\frac{d}{du} P_b = \frac{d}{du} Q_b$, když $P_b = Q_b$.

Dle **47** (6) je patrně

$$\frac{d}{du}[P_b;\ \xi] = \left[\frac{d}{du} P_b;\ \xi\right] + \left[P_b;\ \frac{d\xi}{du}\right]. \tag{1}$$

Z téže formule soudíme snadno, že, když n je stupeň formy P_b

$$\frac{d}{du} SP_b\xi = S\left(\frac{d}{du} P_b\right)\xi + nS\left[P_b;\ \frac{d\xi}{du}\right]\xi, \qquad (n \geqq 2) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{du^2} SP_b\xi = S\left(\frac{d^2}{du^2} P_b\right)\xi + 2nS\left[\frac{d}{du} P_b;\ \frac{d\xi}{du}\right]\xi + \\ + nS\left[P_b;\ \frac{d^2\xi}{du^2}\right]\xi + n(n-1)\,S\left[P_b;\ \frac{d\xi}{du};\ \frac{d\xi}{du}\right]\xi \qquad (n \geqq 3)\end{aligned} \tag{3}$$

atd. Je zřejmé, jak je tyto formule modifikovati, když $n < 3$.

63. Buďte $a_{00}, a_{01}\cdots a_{mm}$ spojité funkce proměnné u v intervalu J (otevřeném nebo uzavřeném)*). Buď c libovolné číslo z J; buďte $\alpha_0, \alpha_1\dots\alpha_m$ libovolná čísla. Existuje jeden a jen jeden systém $m+1$ funkcí proměnné u v intervalu J: $v_0, v_1,\dots v_m$, o těchto dvou vlastnostech: 1° v celém intervalu J jsou splněny lineární diferenciální rovnice

$$\frac{dv_i}{du} = a_{i0} v_0 + a_{i1} v_1 + \dots + a_{im} v_m, \qquad (i = 0, 1\dots m) \tag{1}$$

2° pro $u = c$ jest

$$v_0 = \alpha_0, \quad v_1 = \alpha_1, \quad \dots \quad v_m = \alpha_m.$$

Snadno se vidí, že stačí provésti důkaz za předpokladu, že interval

---

*) Buď $a < b$. Množství čísel u, pro něž $a < u < b$ ($a \leqq u \leqq b$), nazývá se otevřený (uzavřený) interval; označení $\langle a+0,\ b-0\rangle$ ($\langle a,\ b\rangle$).

$J = \langle a, b\rangle$ jest uzavřený. Definujme indukcí vzhledem k ν systémy funkcí $v_0^{(\nu)}, v_1^{(\nu)} \dots v_m^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1 \dots)$ v intervalu J takto:

$$v_i^{(0)} = \beta_i$$

$$v_i^{(\nu+1)} = \alpha_i + \int_c^u (a_{i_0} v_0^{(\nu)} + a_{i_1} v_1^{(\nu)} + \dots + a_{im} v_m^{(\nu)})\, du. \tag{2}$$

Při tom β_i $(i = 0, 1 \dots m)$ jsou libovolně zvolené konstanty. Pak je zřejmě 1° v celém J:

$$\frac{dv_i^{(\nu+1)}}{du} = a_{i_0} v_0^{(\nu)} + a_{i_1} v_1^{(\nu)} + \dots + a_{im} v_m^{(\nu)}, \tag{3}$$

2° pro $u = c$, $\nu > 0$,

$$v_i^{(\nu)} = \alpha_i. \tag{4}$$

Buďte M, N kladná čísla taková, že jest v celém J

$$| a_{ik} | \leqq \frac{M}{m+1}, \quad | v_i^{(1)} - v_i^{(0)} | \leqq N, \qquad i, k = 0, 1 \dots m.$$

Pak je v celém a, b

$$| v_i^{(\nu+1)} - v_i^{(\nu)} | \leqq N \frac{M^\nu}{\nu!} | u - c |^\nu. \tag{5}$$

Vskutku, tyto nerovnosti platí pro $\nu = 0$ dle definice N. Můžeme je tedy dokazovati indukcí vzhledem k ν. Předpokládejme tedy, že (5) platí pro jisté ν. Pak jest dle (2)

$$| v_i^{(\nu+2)} - v_i^{(\nu+1)} | = | \int_c^u [a_{i_0}(v_0^{(\nu+1)} - v_0^{(\nu)}) + \dots + a_{im}(v_m^{(\nu+1)} - v_m^{(\nu)})]\, du \,| \leqq$$

$$\leqq | \int_c^u [|a_{i_0}|\, |v_0^{(\nu+1)} - v_0^{(\nu)}| + \dots + |a_{im}|\, |v_m^{(\nu+1)} - v_m^{(\nu)}|]\, du \,| \leqq N \frac{M^{\nu+1}}{\nu!} | \int_c^u |u - c|^\nu\, du |,$$

tedy

$$|v_i^{(\nu+2)} - v_i^{(\nu+1)}| \leqq N \frac{M^{\nu+1}}{(\nu+1)!} |u - c|^{\nu+1},$$

což jest právě (5), v níž místo ν je nyní $\nu + 1$. Nerovnosti (5) jsou takto obecně dokázány; z nich a z (3) plyne, že jest v celém $\langle a, b\rangle$

$$|v_i^{(\nu+1)} - v_i^{(\nu)}| \leqq N \frac{M^\nu}{\nu!} (b - a)^\nu,$$

$$\left| \frac{dv_i^{(\nu+1)}}{du} - \frac{dv_i^{(\nu)}}{du} \right| \leqq N \frac{M^\nu}{(\nu-1)!} (b - a)^{\nu-1}.$$

Odtud vidíme, že pro $i=0, 1\ldots m$ konvergují stejnoměrně v J posloupnosti $v_i^{(\nu)}$, $\frac{dv_i^{(\nu)}}{du}$ $(\nu=0, 1, 2\ldots)$ a že tedy jednak existují limity $\lim\limits_{\nu\to\infty} v_i^{(\nu)}$, jednak jest

$$\frac{d}{du}\lim_{\nu\to\infty} v_i^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{d}{du} v_i^{(\nu)}.$$

Klademe-li tedy $\lim\limits_{\nu\to\infty} v_i^{(\nu)} = v_i$ a přejdeme-li v rovnicích (3) a (4) k limitě $\nu=\infty$, vidíme, že funkce v_i splňují požadavky 1^0 i 2^0. Běží ještě o důkaz, že naopak, mají-li $v_i^{(\nu)}$ týž význam jako dosud, a splňují-li funkce v_i požadavky 1^0 a 2^0, jest $v_i = \lim\limits_{\nu\to\infty} v_i^{(\nu)}$. Avšak z 1^0 a 2^0 plyne

$$v_i = \alpha_i + \int_c^u (a_{i_0} v_0 + a_{i_1} v_1 + \ldots + a_{im} v_m)\, du,$$

tedy dle (2)

$$v_i - v_i^{(\nu+1)} = \int_c^u [a_{i_0}(v_0 - v_0^{(\nu)}) + \ldots + a_{im}(v_m - v_m^{(\nu)})]\, du. \tag{6}$$

Buď nyní N' kladné číslo takové, že jest v celém (a, b)

$$|v_i - v_i^{(0)}| \leqq N', \quad i=0, 1\ldots m.$$

Indukcí vzhledem k ν najde se z (6) podobně jako nahoře

$$|v_i - v_i^{(\nu)}| \leqq N' \frac{M^\nu}{\nu!}|u-c|^\nu,$$

a jest tedy vskutku $v_i = \lim\limits_{\nu\to\infty} v_i^{(\nu)}$.

64. Buďte φ_i $(u, w_0, w_1\ldots w_m)$ $(i=0, 1\ldots m)$ spojité funkce proměnných u, w_0, $w_1\ldots w_m$ v oboru O; $A\leqq u\leqq B$; $C_i\leqq w_i\leqq D_i$ $(i=0, 1\ldots m)$. Nechť existují a jsou spojité v O také funkce $\frac{\partial\varphi_i}{\partial w_k}$ $(i, k=0, 1\ldots m)$. Buď

$$A<c<B, \quad C_i<\alpha_i<D_i. \quad (i=0, 1\ldots m).$$

Lze určiti uzavřený interval $J=\langle a, b\rangle$ takový, že

$$A\leqq a<c<b\leqq B$$

a že v J lze určiti jedním a jen jedním způsobem $w_0, w_1\ldots w_m$ jako funkce u tak, aby 1^0 všude v J platily diferenciální rovnice

$$\frac{dw_i}{du} = \varphi_i(u, w_0, w_1\ldots w_m), \quad (i=0, 1\ldots m) \tag{1}$$

2^0 aby pro $u=c$ bylo

$$w_0=\alpha_0,\ w_1=\alpha_1,\ldots w_m=\alpha_m.$$

Obecněji lze udati $\varepsilon > 0$ tak, že lze určiti v oboru O_1:

$$a \leqq u \leqq b; \quad |h_i| \leqq \varepsilon \quad (i = 0, 1 \ldots m)$$

jedním a jen jedním způsobem $w_0, w_1, \ldots w_m$ jako funkce u, $h_0, h_1 \ldots h_m$ tak, aby 1° všude v J platily diferenciální rovnice (1); 2° aby pro $u = c$ bylo

$$w_0 = \alpha_0 + h_0, \; w_1 = \alpha_1 + h_1, \ldots w_m = \alpha_m + h_m.$$

Takto definované funkce w_i $(i = 0, 1 \ldots m)$ mají všude v O_1 spojité derivace $\frac{\partial w_i}{\partial h_r}, \frac{\partial^2 w_i}{\partial u \partial h_r} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial h_r \partial u}$ $(i, r = 0, 1 \ldots m)$; zejména pro $u = c$ jest $\frac{\partial w_i}{\partial h_i} = 1, \frac{\partial w_i}{\partial h_r} = 0$ $(i, r = 0, 1 \ldots m;\; i \neq r)$.

Určeme $H > 0$, $M > 0$ tak, aby v oboru O bylo

$$|\varphi_i| < H, \qquad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial w_k}\right| < \frac{M}{m+1}. \qquad (i, k = 0, 1 \ldots m)$$

Zvolme $a = c - \varrho$, $b = c + \varrho$, kde ϱ je menší než kterékoli z čísel

$$c - A, \quad B - c, \quad \frac{\alpha_i - C_i}{H}, \quad \frac{D_i - \alpha_i}{H}. \qquad (i = 0, 1 \ldots m)$$

Definujme indukcí vzhledem k ν systémy funkcí $w_0^{(\nu)}, w_1^{(\nu)}, \ldots w_m^{(\nu)}$ $\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ v $J = \langle a, b \rangle$ takto:

$$w_i^{(0)} = \alpha_i,$$

$$w_i^{(\nu+1)} = \alpha_1 + \int_c^u \varphi_i(u, w_0^{(\nu)}, w_1^{(\nu)}, \ldots w_m^{(\nu)})\, du. \tag{2}$$

Tato definice je přípustná; ze způsobu, jak jsme určili ϱ, vychází totiž indukcí vzhledem k ν, že pro n v J jest $C_i \leqq w_i^{(\nu)} \leqq D_i$ $(i = 0, 1, \ldots m)$. Zřejmě jest 1° všude v J

$$dw_i^{(\nu+1)} = \varphi_i(u, w_0^{(\nu)}, w_1^{(\nu)}, \ldots w_m^{(\nu)}),$$

2° pro $u = c$ jest

$$w_0^{(\nu)} = \alpha_0, \; w_1^{(\nu)} = \alpha_1, \ldots w_m^{(\nu)} = \alpha_m.$$

Dále jest pro všecka ν a pro u v J

$$|w_i^{(\nu+1)} - w_i^{(\nu)}| \leqq \varrho \frac{M^\nu}{\nu!} |u - c|^\nu. \qquad (i = 0, 1 \ldots m) \tag{3}$$

Vskutku pro $\nu = 0$ platí (3) dle (2) a dle definice ϱ. Můžeme tedy dokazovati (3) indukcí vzhledem k ν. Předpokládejme tedy, že (3) platí pro jisté ν. Dle (2) jest

$$w_i^{(\nu+2)} - w_i^{(\nu+1)} = \int_u^c [\varphi_i(u, w_0^{(\nu+1)}, w_1^{(\nu+1)}, \ldots w_m^{(\nu+1)}) - \varphi_i(u, w_0^{(\nu)}, w_1^{(\nu)} \ldots w_m^{(\nu)})]\, du.$$

Avšak dle definice čísla M

$$|\varphi_i(u, w_0^{(\nu+1)}, w_1^{(\nu+1)}, \ldots w_m^{(\nu+1)}) - \varphi_i(u, w_0^{(\nu)}, w_1^{(\nu)}, \ldots w_m^{(\nu)})| \leqq$$
$$\leqq \frac{M}{m+1} [|w_0^{(\nu+1)} - w_0^{(\nu)}| + |w_1^{(\nu+1)} - w_1^{(\nu)}| + \ldots + |w_m^{(\nu+1)} - w_m^{(\nu+1)})],$$

takže dle předpokladu pro indukci

$$|w_i^{(\nu+2)} - w_i^{(\nu+1)}| \leqq$$
$$\leqq \frac{M}{m+1} \int_u^c [|w_0^{(\nu+1)} - w_0^{(\nu)}| + |w_1^{(\nu+1)} - w_1^{(\nu)}| + \ldots + |w_m^{(\nu+1)} - w_m^{(\nu)}|]\, du| \leqq$$
$$\leqq \rho \frac{M^{\nu+1}}{\nu!} |\int_c^u |u-c|^\nu du| = \rho \frac{M^{\nu+1}}{(\nu+1)!} |u-c|^{\nu+1},$$

takže (3) platí i když píšeme $\nu + 1$ místo ν. Klademe-li

(4) $$w_i = \lim_{\nu \to \infty} w_i^{(\nu)}, \qquad (i = 0, 1 \ldots m)$$

vidíme jako v **63**, že funkce w_i mají vlastnosti 1^0 a 2^0. Obráceně, mají-li funkce w_i vlastnosti 1^0 a 2^0, je dle (1)

$$w_i = \alpha_i + \int_c^u \varphi_i(u, w_0, w_1 \ldots w_m)\, du.$$

Odtud a ze (2) soudíme opět indukcí, že

(5) $$|w_i - w_i^{(\nu)}| \leqq N' \frac{M^\nu}{\nu!} |u-c|^\nu, \qquad (i = 0, 1 \ldots m)$$

při čemž N' jest určeno tak, aby (5) platilo pro $\nu = 0$, z čehož plyne (4).

Obecněji definujeme $w_i^{(\nu)}$ $(i = 0, 1 \ldots m)$ indukcí takto:

$$w_i^{(0)} = \alpha_i + h_i,$$
$$w_i^{(\nu+1)} = \alpha_i + h_i + \int_c^u \varphi_i(u, w_0^{(\nu)}, w_1^{(\nu)}, \ldots w_m^{(\nu)})\, du,$$

a položme $(i, k = 0, 1 \ldots m)$

$$\delta_{ii} = 1, \qquad \delta_{ik} = 0, \qquad (i \neq k)$$
$$z_{ik}^{(0)} = \delta_{ik},$$

(6) $$z_{ik}^{(\nu+1)} = \delta_{ik} + \int_c^u \left[\sum_{r=0}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial w_r} z_{rk}^{(\nu)} \right]_{w_r = w_r^{(\nu)}} du$$

Indukcí vidíme, že

(7) $$z_{ik}^{(\nu)} = \frac{\partial w_i^{(\nu)}}{\partial h_k}.$$

Mimo to existují limity

$$\lim_{\nu \to \infty} z_{ik}^{(\nu)} = z_{ik}$$

a $z_{ik}^{(\nu)}$ konvergují ke svým limitám stejnoměrně, jak čtenář nyní již sám snadno dokáže. Dle (7) je tedy

(8) $$\frac{\partial w_i}{\partial h_k} = z_{ik}$$

a dle (6)

$$\frac{\partial z_{ik}}{\partial u} = \sum_{r=0}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial w_r} z_{rk},$$

takže dle (8) existuje spojitá též $\frac{\partial^2 w_i}{\partial h_k \partial u}$, takže dle známé věty $\frac{\partial^2 w_i}{\partial u \partial h_k} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial h_k \partial u}$. Pro $u = c$ je dle (6) $z_{ik} = \delta_{ik}$, tedy dle (8) $\left[\frac{\partial w_i}{\partial h_k}\right]_{u=c} = \delta_{ik}$, jako tvrzeno.

65. Je-li ar. bod x funkcí proměnné u v intervalu J a platí-li všude v J rovnice ($n \leqq m$)

(1) $$\frac{d^{n+1}x}{du^{n+1}} = a_0 x + a_1 \frac{dx}{du} + \ldots + a_n \frac{d^n x}{du^n},$$

při čemž $a_0, a_1, \ldots a_n$ jsou spojité funkce u, existuje pevný lin. systém S dimense n, jenž obsahuje x pro všecka u z J.

Zřejmě stačí udati lin. systém S dimense $\leqq n$. Zvolme libovolně hodnotu c v intervalu J a položme

$$S = \left\{[x]_{u=c}, \left[\frac{dx}{du}\right]_{u=c}, \ldots \left[\frac{d^n x}{du^n}\right]_{u=c}\right\}.$$

Lineární systém S má dimensi $\leqq n$ a obsahuje x pro každé u v J. Vskutku buď $\Sigma = \mathrm{Adj.}\, S$ a buď ξ pevná ar. nadrovina ze Σ. Položme

(2) $$v_0 = Sx\xi,\ v_1 = S\frac{dx}{du}\xi, \ldots v_n = S\frac{d^n x}{du^n}\xi.$$

Pro $u = c$ je dle definice Σ

(3) $$v_0 = v_1 = \ldots = v_n = 0.$$

Dle (1) a (2) jest všude v J

(4) $$\frac{dv_0}{du} = v_1,\ \frac{dv_1}{du} = v_2, \ldots \frac{dv_{n-1}}{du} = v_n,$$
$$\frac{dv_m}{du} = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n.$$

Víme-li o nějakých funkcích $v_0, v_1 \ldots v_n$, že 1° pro $u = c$ splňují rovnice (3) a všude v J splňují rovnice (3), můžeme souditi, že tyto funkce jsou právě ty, jež jsou definovány rovnicemi (2); neboť dle **63** vlastnostmi 1° a 2° jsou funkce $v_0, v_1 \dots v_n$ úplně určeny. Avšak funkce $v_0 = 0, v_1 = 0, \dots v_n = 0$ zřejmě mají vlastnosti 1° i 2°. Jest tedy zejména všude v $J\ Sx\xi = 0$. Jelikož ξ byla zvolena libovolně v Σ, náleží $x(u)$ do Adj. $\Sigma = S$, jak bylo dokázati.

66. Buďte $a_{00}, a_{01}, \dots a_{mm}$ spojité funkce q proměnných $u_1, u_2 \dots u_q$ v oboru O: $a_1 \leqq u_1 \leqq b_1$, $a_2 \leqq u_2 \leqq b_2, \dots a_q \leqq u_q \leqq b_q$. Buď c libovolné číslo $v \langle a_1, b_1 \rangle$ a buďte $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_m$ spojité funkce $u_2, \dots u_q$ v oboru $O_1 : a_2 \leqq u_2 \leqq b_2, \dots a_q \leqq u_q \leqq b_q$. Existuje jeden a jen jeden systém $m+1$ spojitých funkcí $v_0, v_1, \dots v_m$ proměnných $u_1, u_2, \dots u_q$ definovaných v oboru O a takových, že 1° v celém oboru O jsou splněny diferenciální rovnice

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_1} = a_{i0} v_0 + a_{i1} v_1 + \dots + a_{im} v_m, \qquad i = 0, 1, \dots m \tag{1}$$

2° pro $u_1 = c$ a $u_2, \dots u_q$ v O_1 jest

$$v_0 = \alpha_0, v_1 = \alpha_1, \dots v_m = \alpha_m. \tag{2}$$

Existují-li v oboru O spojité parciální derivace $\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_r}$ $(i, k = 0, 1 \dots m;\ r = 2, 3 \dots q)$, existují v O spojité parciální derivace $\frac{\partial v_i}{\partial u_r}, \frac{\partial^2 v_i}{\partial u_1 \partial u_r} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial u_r \partial u_1}$ $(i = 0, 1, \dots m;\ r = 2, 3 \dots q)$.

Definujeme posloupnosti $v_i^{(\nu)}$ jako v **63**, a položme opět $v_i = \lim\limits_{\nu \to \infty} v_i^{(\nu)}$. Funkce v_i splňují zřejmě požadavky 1°, 2°; potřebujeme ukázati, že jsou spojité v O. Avšak čísla M, N můžeme zřejmě voliti nezávislá na $u_2, \dots u_q$, načež **63** (5) ukazují, že $v_i^{(\nu)}$ konvergují k v_i stejnoměrně v O; mimo to, $v_i^{(\nu)}$ jsou spojité funkce v O. Zbývá ukázati existenci derivací $\frac{\partial v_i}{\partial u_r}, \frac{\partial^2 v_i}{\partial u_1 \partial u_r} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial u_r \partial u_1}$. Předpokládáme-li na okamžik, že tomu tak jest, a klademe-li $\frac{\partial v_i}{\partial u_r} = w_{r,i}$ $(i = 0, 1 \dots m;\ r = 2, 3 \dots q)$, obdržíme, derivujíce (1) a (2) dle u_r, že funkce $v_i, w_{r,i}$ mají tyto vlastnosti: *a*) v celém oboru O jest

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_1} = a_{i0} v_0 + a_{i1} v_1 + \dots + a_{im} v_m,$$

$$\frac{\partial w_{r,i}}{\partial u_1} = \frac{\partial a_{i0}}{\partial u_r} v_0 + \frac{\partial a_{i1}}{\partial u_r} v_1 + \dots + \frac{\partial a_{im}}{\partial u_r} v_m + a_{i0} w_{r,0} + a_{i1} w_{r,1} + \dots + a_{im} w_{r,m};$$

b) pro $u_1 = c$ a $u_2, u_3, \dots u_q$ v O_1 jest

$$v_i = \alpha_i, \quad w_{r,i} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_r}.$$

Víme však již, že, abychom dospěli k funkcím v_i, $w_{r,i}$ o vlastnostech $a)$, $b)$, stačí definovati $v_i^{(\nu)}$, $w_{r,i}^{(\nu)}$ indukcí rovnicemi

$$v_i^{(0)} = \alpha_i, \quad w_{r,i}^{(0)} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_r},$$

(3) $$v_i^{(\nu+1)} = \alpha_i + \int_c^{u_1} (a_{i0} v_0^{(\nu)} + a_{i1} v_1^{(\nu)} + \ldots + a_{im} v_m^{(\nu)})\, du_1,$$

$$w_{r,i}^{(\nu+1)} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial u_r} + \int_c^{u_1} \left(\frac{\partial a_{i0}}{\partial u_r} v_0^{(\nu)} + \ldots + \frac{\partial a_{im}}{\partial u_r} v_m^{(\nu)} + a_{i0} w_{r,0}^{(\nu)} + \ldots + a_{im} w_{r,m}^{(\nu)} \right) du_1,$$

a položiti $v_i = \lim\limits_{\nu\to\infty} v_i^{(\nu)}$, $w_{r,i} = \lim\limits_{\nu\to\infty} w_{r,i}^{(\nu)}$. Nyní však dle definice $w_{r,i}^{(0)} = \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial u_r}$, a z (3) se dokáže indukcí, že pro každé ν $w_{r,i}^{(\nu)} = \frac{\partial v_i^{(\nu)}}{\partial u_r}$; ježto pak $w_{r,i}^{(\nu)}$ stejnoměrně konvergují k $w_{r,i}$ jest také $w_{r,i} = \frac{\partial v_i}{\partial u_r}$. Konečně víme, že v_i, $w_{r,i}$, $\frac{\partial v_i}{\partial u_1}$, $\frac{\partial w_{ri}}{\partial u_1}$ jsou spojité funkce, t. j. že v_i, $\frac{\partial v_i}{\partial u_r}$, $\frac{\partial v_i}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2 v_i}{\partial u_r\, \partial u_1}$ jsou spojité funkce; tedy $\frac{\partial^2 v_i}{\partial u_r\, \partial u_1} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial u_1\, \partial u_r}$.

67. Buďte $a_{00}^{(r)}, a_{01}^{(r)}, \ldots a_{mm}^{(r)}$ $(r = 1, 2 \ldots k)$ spojité funkce q proměnných $u_1, u_2, \ldots u_q$ v oboru O: $a_r \leqq u_r \leqq b_r$ $(r = 1, 2 \ldots q)$; také parciální derivace $\frac{\partial a_{ik}^{(r)}}{\partial u_s}$ $(i, k = 0, 1 \ldots m;\ r, s = 1, 2 \ldots q; r \gtrless s)$ buďte spojité v O; buď $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2, \ldots u_m = c_m$ pevná soustava hodnot z oboru O. Aby, ať jakkoli zvolíme čísla $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_m$, existovalo $m+1$ funkcí, $v_0, v_1 \ldots v_m$, proměnných $u_1, u_2 \ldots u_q$, definovaných v oboru O, zde spojitých a majících spojité derivace $\frac{\partial v_i}{\partial u_r}$, $\frac{\partial^2 v_i}{\partial u_r \partial u_s}$ $(i = 0, 1 \ldots m;\ r, s = 1, 2 \ldots k; r \gtrless s)$, o těchto dvou vlastnostech: 1° v celém oboru O jest

(1) $$\frac{\partial v_i}{\partial u_r} = a_{i0}^{(r)} v_0 + a_{i1}^{(r)} v_1 + \ldots + a_{im}^{(r)} v_m,\ i = 0, 1 \ldots m;\ r = 1, 2 \ldots q$$

2° pro $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2, \ldots u_m = c_m$ jest $v_0 = \alpha_0$, $v_1 = \alpha_1, \ldots v_m = \alpha_m$: k tomu je nutné a stačí, aby byly splněny v oboru O rovnice

(2) $$\begin{aligned} &\frac{\partial a_{ik}^{(r)}}{\partial u_{(s)}} + a_{i0}^{(r)} a_{0k}^{(s)} + a_{i1}^{(r)} a_{1k}^{(s)} + a_{im}^{(r)} a_{mk}^{(s)} = \\ &= \frac{\partial a_{ik}^{(s)}}{\partial u_r} + a_{i0}^{(s)} a_{0k}^{(r)} + a_{i1}^{(s)} a_{1k}^{(r)} + \ldots + a_{im}^{(s)} a_{mk}^{(r)}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &i, k = 0, 1 \ldots m; \\ &r, s = 1, 2 \ldots q;\ r < s. \end{aligned}$$

Rovnice (2) nazývají se podmínky integrability diferenciálních rovnic (1). Jsou-li splněny, ať jakkoli zvolíme

$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m$, existuje jen jeden systém funkcí $v_0, v_1 \ldots v_m$ o vlastnostech 1⁰, 2⁰.

Ukažme nejprve, že, existují-li k jakkoli zvolenému systému konstant $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m$ funkce $v_0, v_1 \ldots v_m$ o vlastnostech 1^0, 2^0, lze zvoliti $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m$ tak, aby bylo $v_0 = \beta_0$, $v_1 = \beta_1, \ldots v_m = \beta_m$ pro $u_1 = c'_1$, $u_2 = c'_2, \ldots u_q = c'_q$, kde $c'_1, c'_2 \ldots c'_q$ jest jakkoli daná soustava hodnot z O a β_0, $\beta_1 \ldots \beta_m$ libovolně předepsané konstanty. Vskutku, užijeme-li **66** na ty rovnice (1), pro něž $r = 1$, kladouce v nich $u_2 = c_2, \ldots u_m = c_m$, vidíme, že lze těmto rovnicím jedním a jen jedním způsobem vyhověti, jednak předepíšeme-li hodnoty, jichž mají nabýti v_i $(i = 0, 1 \ldots m)$ pro $u_1 = c_1$, jednak též, předepíšeme-li hodnoty v_i pro $u_1 = c'_1$; odtud vychází, že lze $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m$ určiti tak, aby v_i nabyly libovolně předepsaných hodnot pro $u_1 = c'_1$, $u_2 = c_2, \ldots u_q = c_q$. Užijeme-li dále téhož teorému na ty rovnice (1), pro něž $r = 2$, kladouce v nich $u_1 = c'_1$, $u_3 = c_3, \ldots u_m = c_m$, vidíme, že lze libovolně předepsati hodnoty v_i pro $u_1 = c'_1$, $u_2 = c'_2$, $u_3 = c_3$, $\ldots u_m = c_m$; a takto pokračujíce, vidíme, že vskutku lze voliti $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m$, jak bylo žádáno.

Nyní jsme s to ukázati, že podmínky (2) jsou nutné. Vskutku, derivujeme-li (1) dle u_s a odečteme rovnici, vzniklou záměnou r a s, obdržíme rovnice tvaru

$$A_{i0} v_0 + A_{i1} v_1 + \ldots + A_{im} v_m = 0, \qquad i = 0, 1 \ldots m \tag{3}$$

kde

$$A_{ik} = \frac{\partial a_{ik}^{(r)}}{\partial u_s} + a_{i0}^{(r)} a_{0k}^{(s)} + \ldots + a_{im}^{(r)} a_{mk}^{(s)} - \frac{\partial a_{ik}^{(s)}}{\partial u_r} - a_{i0}^{(s)} a_{0k}^{(r)} - \ldots - a_{im}^{(s)} a_{mk}^{(r)}.$$

Běží o to, ukázati, že jest v oboru O identicky $A_{ik} = 0$ $(i, k = 0, 1 \ldots m)$. Dejme tomu, že by tomu tak nebylo, že by tedy existovala aspoň jedna soustava hodnot $u_1 = c'_1$, $u_2 = c'_2 \ldots$, $u_q = c'_q$ v oboru O a aspoň jedna soustava indexů i, k taková, že by bylo $A_{ik} \neq 0$ pro $u_r = c'_r$ $(r = 1, 2 \ldots q)$. Dle toho, co výše jsme řekli, lze $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_m$ určiti tak, aby pro $u_r = c'_r$ bylo $v_i = 0$ pro $i \gtrless k$, $v_k = 1$. Na to však rovnice (3) praví, že jest $A_{ik} = 0$ pro $u_r = c'_r$, proti předpokladu.

Abychom ukázali, že podmínky (2) také stačí, užijeme indukce vzhledem ke q; vskutku, pro $q = 1$ náš teorém nepraví více než **63.**

Buďte tedy splněny podmínky integrability. Dle předpokladu pro indukci lze určiti jedním a jen jedním způsobem funkce $w_0, w_1 \ldots w_m$ proměnných $u_2, \ldots u_q$ tak, že 1^0 pro $a_2 \leq u_2 \leq b_2, \ldots a_q \leq u_q \leq b_q$ jest

$$\frac{\partial w_i}{\partial u_r} = [a_{i0}^{(r)}]_{u_1 = c_1} w_0 + [a_{i1}^{(r)}]_{u_1 = c_1} w_1 + \ldots + [a_{im}^{(r)}]_{u_1 = c_1} w_m, \tag{4}$$
$$i = 0, 1 \ldots m, \; r = 2, 3 \ldots m$$

2^0 pro $u_2 = c_2, \ldots u_q = c_q$ jest

$$w_0 = \alpha_0, \; w_1 = \alpha_1, \; \ldots \; w_m = \alpha_m,$$

a funkce w_i, jakož i derivace $\frac{\partial w_i}{\partial u_r}$ $(i=0, 1\dots m;\ r=2, 3\dots m)$ jsou spojité v oboru, v němž w_i jsou definovány; vskutku podmínky integrability rovnic (4) jsou zřejmě splněny v důsledku (2). Hledané funkce $v_0, v_1\dots v_m$ mají pak zřejmě tyto vlastnosti: *a*) v celém oboru O jest

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_1}=a_{i0}^{(1)}v_0+a_{i1}^{(1)}v_1+\dots+a_{im}^{(1)}v_m, \qquad (i=0, 1\dots m)$$

b) pro $u_1=c_1$ jest $v_0=w_0, v_1=w_1, \dots v_m=w_m$. Dle **66** existuje však jeden a jen jeden systém funkcí v_i $(i=0, 1\dots m)$ o vlastnostech *a*), *b*), a jest $\frac{\partial^2 v_i}{\partial u_1 \partial u_r}=\frac{\partial^2 v_i}{\partial u_r \partial u_i}$. Takto definované funkce splňují jistě ty rovnice (1), v nichž $r=1$. Abychom ukázali, že je tomu tak i pro $r>1$, položme

$$(5)\qquad V_{r,i}=\frac{\partial v_i}{\partial u_r}-a_{i0}^{(r)}v_0-a_{i1}^{(r)}v_1-\dots-a_{im}^{(r)}v_m. \quad (i=0, 1\dots m;\ r=1, 2\dots q)$$

Jest tedy v celém oboru O: $V_{1,i}=0$, a mimo to dle (4) a *b*) jest $V_{r,i}=0$ pro $u_1=c_1$ $(r=2, 3\dots q)$. Derivujeme-li však (5) dle u_1, obdržíme, ježto

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial u_r \partial u_1}=\frac{\partial^2 v_i}{\partial u_1 \partial u_r}=\frac{\partial}{\partial u_r}(a_{i0}^{(1)}v_0+\dots+a_{im}^{(1)}v_m),$$

$$\frac{\partial V_{r,i}}{\partial u_1}=\frac{\partial a_{i0}^{(1)}}{\partial u_r}v_0+\dots+\frac{\partial a_{im}^{(1)}}{\partial u_r}v_m+a_{i0}^{(1)}\frac{\partial v_0}{\partial u_r}+\dots+a_{im}^{(1)}\frac{\partial v_m}{\partial u_r}-$$
$$-\frac{\partial a_{i0}^{(r)}}{\partial u_1}v_0-\dots-\frac{\partial a_{im}^{(r)}}{\partial u_1}v_m+a_{i0}^{(r)}\frac{\partial v_0}{\partial u_1}-\dots-a_{im}^{(r)}\frac{\partial v_m}{\partial u_1};$$

tedy dle (5)

$$\frac{\partial V_{ri}}{\partial u_1}=\sum_{k=1}^{q}\left[\frac{\partial a_{ik}^{(1)}}{\partial u_r}-\frac{\partial a_{ik}^{(r)}}{\partial u_1}+\sum_{h=1}^{q}(a_{ih}^{(1)}a_{hk}^{(r)}-a_{ih}^{(r)}a_{hk}^{(1)})\right]v_k+$$
$$+\sum_{k=1}^{q}(a_{ik}^{(1)}V_{r,k}-a_{ik}^{(r)}V_{1,k}),$$

čili, ježto $V_{1,k}=0$ a dle (2)

$$(6)\qquad \frac{\partial V_{r,i}}{\partial u_1}=a_{i1}^{(1)}V_{r,1}+a_{i2}^{(1)}V_{r,2}+\dots+a_{iq}^{(1)}V_{rq}. \qquad i=0, 1\dots m;\ r=2, 3\dots q.$$

Funkce $V_{r,i}$ splňují rovnice (6) a mimoto pro $u_1=c_1$ jest $V_{r,i}=0$. Těmito dvěma vlastnostmi jsou $V_{r,i}$ úplně určeny dle **66**; na druhé straně obě vlastnosti jsou splněny, když jest identicky $V_{r,i}=0$. Jest tedy vskutku $V_{r,i}=0$ a rovnice (1) jsou splněny i pro $r>1$.

68. Ar. body $x_0, x_1, \dots x_m$ buďte funkce q proměnných $u_1, u_2\dots u_q$ v oboru O: $a_r \leq u_r \leq b_r (1\leq r \leq q)$; souřadnice ar. bodů x_i,

$\frac{\partial x_i}{\partial u_r}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_r \partial u_s}$ $(i=0, 1 \ldots m;\ r, s=1, 2 \ldots q;\ r \gtrless s)$ buďte spojité v O; a všude v O buď $(x_0 x_1 \ldots x_m) \neq 0$. Pak existuje jeden a jen jeden systém funkcí $a_{ik}^{(r)}$ $(i, k=0, 1 \ldots m;\ r=1, 2 \ldots q)$ proměnných $u_1, u_2 \ldots u_q$ definovaných v O a takových, že jest všude v O

$$(1) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial u_r} = a_{i0}^{(r)} x_0 + a_{i1}^{(r)} x_1 + \ldots + a_{im}^{(r)} x_m. \qquad i=0, 1 \ldots m;\ r=1, 2 \ldots q.$$

Funkce $a_{ik}^{(r)}, \frac{\partial a_{ik}^{(r)}}{\partial u_s}$ $(i, k=0, 1 \ldots m;\ r, s=1, 2 \ldots q;\ r \gtrless s)$ jsou spojité v O. Obráceně, buďte $a_{ik}^{(r)}$ $(i, k=0, 1 \ldots m;\ r=1, 2 \ldots q)$ funkce q proměnných $u_1, u_2 \ldots u_q$ definované v oboru O; $a_{ik}^{(r)}, \frac{\partial a_{ik}^{(r)}}{\partial u_s}$ $(i, k=0\ 1 \ldots m;\ r, s=1, 2 \ldots q; r \gtrless s)$ buďte spojité v O a je-li $q>1$, splňujte rovnice **67** (2). Pak lze určiti $m+1$ lineárně nezávislých ar. bodů: $x_0, x_1 \ldots x_m$ jako funkce $u_1 \ldots u_q$ v O tak, že všude v O platí diferenciální rovnice (1). Když $a_r \leqq c_r \leqq b_r$ $(1 \leqq r \leqq q)$, jest

$$(2) \qquad \frac{(x_0 x_1 \ldots x_m)}{[(x_0 x_1 \ldots x_m)]_{u_1=c_1, \ldots u_q=c_q}} = e^{\int_{c_1, \ldots c_q}^{u_1, \ldots u_q} (\sum_{i=0}^{m} a_{ii}^{(1)} . du_1 + \ldots + \sum_{i=0}^{m} a_{ii}^{(q)} du_q)}.$$

Ar. body $x_0, x_1 \ldots x_m$ lze z rovnic (1) určiti nekonečně mnoha způsoby; je-li však $x_0, x_1 \ldots x_m$ jedno určení, obdržíme všecka ostatní, transformujeme-li $x_0, x_1 \ldots x_m$ pevnou (na $u_1, u_2 \ldots u_q$ nezávislou), ale libovolnou kolineací. Zejména, když jest

$$\sum_{i=0}^{m} a_{ii}^{(1)} = \sum_{i=0}^{m} a_{ii}^{(2)} = \ldots = \sum_{i=0}^{m} a_{ii}^{(q)} = 0,$$

a jen tehdy jest $(x_0, x_1 \ldots x_m) =$ konstantě. V tomto případě můžeme žádati, aby bylo $(x_0 x_1 \ldots x_m) = 1$; všecka řešení obdrží se pak z jednoho, libovolně zvoleného, transformujeme-li unimodulárními kolineacemi.

Prvá část teorému plyne ihned z **29**. Nalezneme na př.

$$a_{00}^{(1)} = \frac{\left(\frac{\partial x_0}{\partial u_1} x_1 \ldots x_m\right)}{(x_0 x_1 \ldots x_m)}$$

a odtud vidíme ihned, že na př. $\frac{\partial a_{00}^{(1)}}{\partial u_2}$ existuje spojitá. Buďte tedy dány diferenciální rovnice (1) a buď $u_1 = c_1, u_2 = c_2, \ldots u_q = c_q$ jakkoli zvoleno v O. Zvolme dále libovolně $m+1$ pevných lineárně nezávislých ar. bodů $y_0, y_1 \ldots y_m$. Z **67** plyne ihned, že lze jedním a jen jedním způsobem určiti jako funkce $u_1 \ldots u_q$ v O ar. body $x_0, x_1 \ldots x_m$ tak, aby 1° všude v O byly splněny rovnice (1) a 2° aby pro $u_r = c_r$ $(r = 1, 2 \ldots q)$ bylo $x_i = y_i$ $(i = 0, 1 \ldots m)$.

Z rovnic (1) pak se obdrží

$$\frac{\partial}{\partial u_r}(x_0 x_1 \ldots x_m) = \left(\frac{\partial x_0}{\partial u_r} x_1 \ldots x_m\right) + \ldots + \left(x_0 x_1 \ldots \frac{\partial x_m}{\partial u_r}\right) =$$
$$= (a_{00}^{(r)} + a_{11}^{(r)} + \ldots + a_{mm}^{(r)})(x_0 x_1 \ldots x_m),$$

z čehož plyne (2) a zejména se vidí, že ar. body $x_0, x_1 \ldots x_m$ jsou lineárně nezávislé všude v O. Ostatek teorému je pak zřejmý.

69. Jestliže lin. nezávislé ar. body $x_0, x_1, \ldots x_m$, závislé na q proměnných $u_1, u_2 \ldots u_q$ a definované v oboru O: $a_r \leq u_r \leq b_r$, splňují všude v O diferenciální rovnice

$$(1) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial u_r} = a_{i0}^{(r)} x_0 + a_{i1}^{(r)} x_1 + \ldots + a_{im}^{(r)} x_m, \qquad i = 0, 1 \ldots m;\ r = 1, 2 \ldots q$$

a tvoří-li ar. nadroviny $\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_m$ všude v B duální jehlan adjungovaný k $x_0, x_1 \ldots x_m$ (v. **34**), splňují ar. nadroviny $\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_m$ všude v B diferenciální rovnice

$$(2) \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial u_r} = -a_{0i}^{(r)} \xi_0 - a_{1i}^{(r)} \xi_1 - \ldots - a_{mi}^{(r)} \xi_m. \qquad i = 0, 1 \ldots m;\ r = 1, 2 \ldots q.$$

Diferenciální systémy (1) a (2) jmenují se adjungované.

Dle předpokladu jest

$$(3) \qquad \begin{aligned} S x_i \xi_k &= 1, \\ S x_i \xi_i &= 0, \end{aligned} \qquad i, k = 0, 1 \ldots m;\ i \gtrless k,$$

tedy

$$S x_i \xi_k = \text{konst.}, \ i, k = 0, 1 \ldots m.$$

Odtud derivováním

$$S \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \xi_k + S x_i \frac{\partial \xi_k}{\partial u_r} = 0.$$

Je-li tedy

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial u_r} = b_{k0}^{(r)} \xi_0 + b_{k1}^{(r)} \xi_1 + \ldots + b_{km}^{(r)} \xi_m,$$

jest

$$S\left(\sum_{h=0}^{m} a_{ih}^{(r)} x_h\right) \xi_k + S x_i \left(\sum_{h=0}^{m} b_{kh}^{(r)} \xi_h\right) = 0,$$

tedy dle (3)

$$a_{ik}^{(r)} + b_{ki}^{(r)} = 0.$$

Jednorozměrný prostor.

70. V **70** až **81** předpokládáme, že $m=1$.

Buď K korelace, v níž

$$|1,0|_b \sim |0,-1|_r, \quad |0,1|_b \sim |1,0|_r.$$

Je-li $x \sim \xi$, $y \sim \eta$ v K, jest patrně

(1) $$(xy)=(\xi\eta), \quad Sx\eta=(xy), \quad Sy\xi=(yx)=-(xy),$$

(2) $$\{\xi\}=\mathrm{Adj.}\{x\}, \quad \{x\}=\mathrm{Adj.}\{\xi\}.$$

Existence korelace K a zejména relací (2) je důvodem toho, že pro $m=1$ zpravidla ar. nadroviny a geom. nadroviny se neuvažují. Vskutku dle (2) není podstatného rozdílu mezi bodem a nadrovinou.

Korelace K jest nulová, t. j. z relace $x \sim \xi$ v K následuje $Sx\xi=0$.

71. Jsou-li $\{x_i\}$ $(i=1,2,3,4)$ čtyři různé body, nazýváme číslo

(1) $$d=\frac{(x_1x_3)(x_2x_4)}{(x_1x_4)(x_2x_3)}$$

jejich dvojpoměr. Jest vždy $d\neq 0$, $d\neq 1$. Jsou-li body $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$ dány, lze určiti jedním a jen jedním způsobem $\{x_4\}$ tak, aby dvojpoměr d nabyl dané hodnoty $\neq 0, 1$. Je-li $x_i \sim y_i$ v kolineaci K, jest dvojpoměr bodů $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$ roven dvojpoměru bodů $\{y_1\}$, $\{y_2\}$, $\{y_3\}$, $\{y_4\}$.

Abychom viděli, že jsme k definici dvojpoměru oprávněni, musíme ukázati, že dvojpoměr se nemění, přejdeme-li od x_i k X_i tak, že $\{x_i\}=\{X_i\}$, t. j. že $X_i=\lambda_i x_i$, $\lambda_i\neq 0$. To však plyne ihned z rovnice $(X_iX_k)=\lambda_i\lambda_k(x_ix_k)$.

Je zřejmé, že $d\neq 0$. Abychom ukázali, že $d\neq 1$, dokažme nejprve identitu

(2) $$(x_1x_2)(x_3x_4)+(x_1x_4)(x_2x_3)=(x_1x_3)(x_2x_4).$$

Je-li nejprve $x_1=0_b$, je (2) zřejmá. Buď dále $x_1\neq 0_b$, $(x_1x_2)=0$, tedy $x_2=\lambda x_1$. Pak levá i pravá strana (2) jsou rovny $\lambda(x_1x_3)(x_1x_4)$. Buď konečně*) $(x_1x_2)\neq 0$. Dle **29** jest

$$x_3=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2, \quad x_4=\mu_1x_1+\mu_2x_2,$$

takže dle **27** a **32** (3), (5)

$$(x_3x_4)=(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)(x_1x_2), \quad (x_1x_4)=\mu_2(x_1x_2), \quad (x_2x_3)=-\lambda_1(x_1x_2), \quad (x_1x_3)=\lambda_2(x_1x_2),$$
$$(x_2x_4)=-\mu_1(x_1x_2),$$

---

*) V našem případě je vždy $(x_1x_2)\neq 0$, neboť předpokládáme, že $\{x_i\}$ jsou různé body.

z čehož plyne ihned (2). Je-li nyní $d = 1$, vychází z (2), že $(x_1 x_2)(x_3 x_4) = 0$, což odporuje předpokladu, že body $\{x_i\}$ jsou různé.

Že dvojpoměr se nemění kolineacemi, vychází z **38** 5°.

72. Buďte $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ čtyři různé body, d jejich dvojpoměr. Měníme-li všemi 24 možnými způsoby pořádek bodů $\{x_i\}$, nabývá dvojpoměr celkem šesti hodnot:

$$d, \frac{1}{d}, 1-d, \frac{1}{1-d}, \frac{d-1}{d}, \frac{d}{d-1}.$$

Tyto hodnoty jsou různé, když $d \neq -1, 2, \frac{1}{2}$; v opačném případě redukují se na tři.

Důkaz vychází snadno z identity **71** (2).

73. O dvou párech bodů: $\{x_1\}, \{x_2\}$; $\{x_3\}, \{x_4\}$ pravíme, že jsou harmonické, když body $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}$ jsou různé a jejich dvojpoměr rovná se -1. Oba páry zůstanou harmonické, když v kterémkoli páru vyměníme oba body, i když vyměníme mezi sebou oba páry.

Dokáže se jako **72.**

74. Buď

$$P = A_0 t_1^n + A_1 t_1^{n-1} t_2 + \ldots + A_n t_2^n$$

forma n^{ho} stupně v souřadnicích ar. bodu $|t_1, t_2|_b$; nebuď současně $A_0, A_1 \ldots A_n = 0$. Pravíme, že bod $\{x\}$ je kořenem formy P, je-li $P = 0$, když dosadíme $t_1 = x^{(0)}$, $t_2 = x^{(1)}$. Je-li bod $\{x\}$ kořenem všech forem

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2}}, \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha),$$

není-li však kořenem všech forem

$$\frac{\partial^{\alpha+1} P}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2}}, \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha + 1),$$

pravíme, že $\{x\}$ jest α-násobným kořenem formy P. Počítáme-li α-násobný kořen za α kořenů, má forma P nejvýš n kořenů.

Plyne ze základní věty algebry.

75. Buď

$$P = At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2 \tag{2}$$

kvadratická forma v souřadnicích ar. bodu $|t_1, t_2|_b$; nebuď současně $A = B = C = 0$. Výraz $B^2 - AC$ nazývá se diskriminant formy P; je-li 1° > 0, 2° $= 0$, 3° < 0, má forma P resp. 1° dva kořeny, 2⁰ jeden dvojnásobný kořen, 3⁰ nemá žádný kořen. Forma P nazývá se v těchto případech resp. 1⁰ hyperbolická, 2⁰ parabolická, 3⁰ eliptická. Buď K kolineace ar. bodů modulu μ; buď v K

(2) $$|t_1, t_2|_b \sim |t_1^*, t_2^*|_b;$$

buď identicky

(3) $$At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 = A^*t_1^{*2} + 2B^*t_1^*t_2^* + C^*t_2^{*2}.$$

Pak jest

(4) $$B^2 - AC = \mu^2(B^{*2} - A^*C^*).$$

Význam nerovností $B^2 - AC \gtreqless 0$ je zřejmý. Je-li v K

$$|1, 0|_b \sim |\alpha, \beta|_b, \qquad |0, 1|_b \sim |\gamma, \delta|_b,$$

takže

(5) $$\mu = \alpha\delta - \beta\gamma$$

je dle (2)

$$t_1^* = \alpha t_1 + \gamma t_2, \qquad t_2^* = \beta t_1 + \delta t_2.$$

Buď $|\tau_1, \tau_2|_b$ ar. bod lin. nezávislý na t, tedy

(6) $$t_1\tau_2 - t_2\tau_1 \neq 0.$$

Je-li $|\tau_1, \tau_2|_b \sim |\tau_1^*, \tau_2^*|_b$ v K, je dle **38** 5⁰

(7) $$t_1^*\tau_2^* - t_2^*\tau_1^* = \mu(t_1\tau_2 - t_2\tau_1).$$

Zřejmě jest v K

$$|t_1, t_2|_b + \lambda|\tau_1, \tau_2|_b \sim |t_1^*, t_2^*|_b + \lambda|\tau_1^*, \tau_2^*|_b.$$

Můžeme tedy tyto dva aritmetické body dosaditi do (3), resp. za $|t_1, t_2|_b$, $|t_1^*, t_2^*|_b$. Učiníme-li tak a porovnáme-li koeficienty při prvé mocnosti λ, obdržíme identitu.

(8) $$At_1\tau_1 + B(t_1\tau_2 + t_2\tau_1) + Ct_2\tau_2 = A^*t_1^*\tau_2^* + B^*(t_1^*\tau_2^* + t_2^*\tau_1^*) + C^*t_2^*\tau_2^*.$$

Dle (3) a (8) jest

$$\begin{vmatrix} At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 & At_1\tau_1 + B(t_1\tau_2 + t_2\tau_1) + Ct_2\tau_2 \\ At_1\tau_1 + B(t_1\tau_2 + t_2\tau_1) + Ct_2\tau_2 & A\tau_1^2 + 2B\tau_1\tau_2 + C\tau_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A^*t_1^{*2} + 2B^*t_1^*t_2^* + C^*t_2^{*2} & A^*t_1^*\tau_1^* + B^*(t_1^*\tau_2^* + t_2^*\tau_1^*) + C^*t_2^*\tau_2^* \\ A^*t_1^*\tau_1^* + B^*(t_1^*\tau_2^* + t_2^*\tau_1^*) + C^*t_2^*\tau_2^* & A^*\tau_1^{*2} + 2B^*\tau_1^*\tau_2^* + C^*\tau_2^{*2} \end{vmatrix}.$$

Levá strana jest rovna

$$\begin{vmatrix} (At_1 + Bt_2)t_1 + (Bt_1 + Ct_2)t_2, & (At_1 + Bt_2)\tau_1 + (Bt_1 + Ct_2)\tau_2 \\ (A\tau_1 + B\tau_2)t_1 + (B\tau_1 + C\tau_2)t_2, & (A\tau_1 + B\tau_2)\tau_1 + (B\tau_1 + C\tau_2)\tau_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2 & Bt_1 + Ct_2 \\ A\tau_1 + B\tau_2 & B\tau_1 + C\tau_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix}^2 = -(B^2 - AC)(t_1\tau_2 - t_2\tau_1)^2.$$

Přetvoříme-li stejně i pravou stranu, obdržíme

$$-(B^2-AC)(t_1\tau_2-t_2\tau_1)^2=-(B^{*2}-A^*C^*).(t_1^*\tau_2^*-t_2^*\tau_1^*)^2.$$

Odtud plyne (4) dle (6) a (7).

76. Buďte

(1) $$P=At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2, \qquad \dot{P}=\dot{A}t_1^2+2\dot{B}t_1t_2+\dot{C}t_2^2$$

kvadratické formy v souřadnicích ar. bodu $|t_1, t_2|_b$; nebuď současně ani $A=B=C=0$ ani $\dot{A}=\dot{B}=\dot{C}=0$. Buď K kolineace ar. bodů modulu μ; buď v K

(2) $$|t_1, t_2|_b \sim |t_1^*, t_2^*|_b;$$

buď identicky

(3) $$\begin{aligned} At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2&=A^*t_1^{*2}+2B^*t_1^*t_2^*+C^*t_2^{*2}, \\ \dot{A}t_1^2+2\dot{B}t_1t_2+\dot{C}t_2^2&=\dot{A}^*t_1^{*2}+2\dot{B}^*t_1^*t_2^*+\dot{C}^*t_2^{*2}. \end{aligned}$$

Pak jest

(4) $$\dot{A}C+C\dot{A}-2B\dot{B}=\mu^2(A^*\dot{C}^*+C^*\dot{A}^*-2B^*\dot{B}^*).$$

Pravíme, že formy P a $\dot{P}$ jsou apolární, když

(5) $$\dot{A}C+C\dot{A}-2B\dot{B}=0.$$

Dvě eliptické formy nemohou býti apolární. Dvě hyperbolické formy jsou apolární, když a jen když kořeny obou forem tvoří dva páry harmonických bodů. Když forma P jest parabolická, jsou P a $\dot{P}$ apolární, když a jen když (dvojnásobný) kořen formy P jest kořenem formy $\dot{P}$.

Dle (3) a **75** (4) jest identicky

$$(B+\lambda\dot{B})^2-(A+\lambda\dot{A})(C+\lambda\dot{C})=\mu^2[(B^*+\lambda\dot{B})^2-(A^*+\lambda\dot{A}^*)(C^*+\lambda\dot{C}^*)].$$

Porovnáme-li koeficienty při prvé mocnosti λ, obdržíme (4).

Ukažme dále, že, je-li $B^2-AC<0$, je-li tedy forma P eliptická, jest

(6) $$(A\dot{C}+C\dot{A}-2B\dot{B})^2\geq 4(B^2-AC)(\dot{B}^2-\dot{A}\dot{C}).$$

Vskutku, kdyby bylo

$$(A\dot{C}+C\dot{A}-2B\dot{B})^2<4(B^2-AC)(\dot{B}^2-\dot{A}\dot{C}),$$

nebylo by možno nalézti žádné reální λ takové, aby bylo $\varphi(\lambda)=0$, kde

$$\varphi(\lambda)=B^2-AC-(A\dot{C}+C\dot{A}-2B\dot{B})\lambda+(\dot{B}^2-\dot{A}\dot{C})\lambda^2=(B+\lambda\dot{B})^2-(A+\lambda\dot{A})(C+\lambda\dot{C}).$$

Ježto dle předpokladu $\varphi(0) = B^2 - AC < 0$, bylo by tedy $\varphi(\lambda) < 0$ pro každé λ. Avšak pro $\lambda = -\frac{\dot{A}}{A}$ *) jest $\varphi(\lambda) = (B + \lambda\dot{B})^2 \geqq 0$, což je spor.

Nerovnost (6) platí zejména, když P i $\dot{P}$ jsou eliptické. Kdyby v tomto případě P a $\dot{P}$ byly apolární, byla by levá strana v (6) rovna nule, kdežto pravá je > 0, což je spor.

Důkaz výroku o tom, kdy dvě hyperbolické formy jsou apolární, plyne ze **77.**

Předpokládejme, že P je parabolická. Je-li $\{|t_1, t_2|_b\}$ kořen P, je dle **74.**

$$\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial t_1} = At_1 + Bt_2 = 0, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial t_2} = Bt_1 + Ct_2 = 0.$$

Odtud plyne, že vymizí všecky determinanty natice

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ t_2^2 & -t_1 t_2 & t_1^2 \end{pmatrix}.$$

Ježto ani všecky prvky prvého řádku ani všecky prvky druhého řádku nejsou současně rovny nule, existuje $\lambda \neq 0$ takové, že

$$A = \lambda t_2^2, \qquad B = -\lambda t_1 t_2, \qquad C = \lambda t_1^2.$$

Je pak identicky

$$A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B} = \lambda(\dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1 t_2 + \dot{C}t_2^2).$$

Je tedy $\{|t_1, t_2|_b\}$ kořenem formy $\dot{P}$, když a jen když P a $\dot{P}$ jsou apolární.

77. Buďte

(1) $$P = At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2, \qquad \dot{P} = \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1 t_2 + \dot{C}t_2^2$$

dvě kvadratické formy v souřadnicích ar. bodu $|t_1, t_2|_b$; nebuď současně ani $A = B = C = 0$ ani $\dot{A} = \dot{B} = \dot{C} = 0$. Dvojpoměrem forem $P, \dot{P}$ nazýváme kterékoliv z obou čísel d, splňujících rovnici

(2) $$4(B^2 - AC)(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C})(d + 1)^2 = (A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})^2(d - 1)^2.$$

Rovnice (2) je splněna identicky v d, když a jen když jedna z forem $P, \dot{P}$ jest parabolická a její kořen jest i kořenem druhé formy. Jest $d = 1$, když a jen když aspoň jedna z forem $P, \dot{P}$ jest parabolická. Jest $d = 0$, když a jen když buď $A:B:C = \dot{A}:\dot{B}:\dot{C}$ nebo když existuje společný kořen forem P a $\dot{P}$. Jest $d = -1$, když a jen když P a $\dot{P}$ jsou apolární. Ve všech ostatních případech má rovnice (2) v oboru

*) Jest $A \neq 0$, ježto $B^2 - AC < 0$.

čísel komplexních dva různé kořeny, jež jsou reální, když a jen když buď obě formy P a $\dot{P}$ jsou hyperbolické, nebo obě eliptické. Jsou-li obě formy P a $\dot{P}$ hyperbolické, je-li $d \neq 1$, a jsou-li $\{x_1\}, \{x_2\}$; $\{\dot{x}_1\}, \{\dot{x}_2\}$ resp. kořeny P a $\dot{P}$, je dvojpoměr bodů $\{x_1\}, \{x_2, \{\dot{x}_1\}, \{\dot{x}_2\}$ roven jednomu z dvojpoměrů d*).

Výrok o tom, kdy (2) jest identita v d, plyne snadno ze **76.** Podmínky, kdy $d = 1$ a $d = -1$, jsou zřejmé. Buď $d = 0$, ale (2) nebuď identita v d. To nastane dle (2), když a jen když

$$(3) \qquad (A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})^2 = 4(\dot{B}^2 - AC)(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C}),$$

avšak $B^2 - AC \neq 0$, $\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C} \neq 0$. Rovnice v λ

$$(4) \qquad (B + \lambda\dot{B})^2 - (A + \lambda\dot{A})(C + \lambda\dot{C}) = 0$$

má dle (3) dvojnásobný kořen, zřejmě $\neq 0$. Rovnici (3) lze však psáti

$$(5) \qquad \begin{aligned} &[(A + \lambda\dot{A})\dot{C} + (C + \lambda\dot{C})\dot{A} - 2(B + \lambda\dot{B})\dot{B}]^2 = \\ &= 4[(B + \lambda\dot{B})^2 - (A + \lambda\dot{A})(C + \lambda\dot{C})](\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C}), \end{aligned}$$

a to ať jakkoli zvolíme λ; vskutku v rovnici právě napsané λ se vyskytuje pouze zdánlivě. Zvolme nyní λ tak, že platí (4), takže forma

$$P + \lambda\dot{P} = (A + \lambda\dot{A})t_1^2 + 2(B + \lambda\dot{B})t_1 t_2 + (C + \lambda\dot{C})t_2^2$$

má buď všecky koeficienty rovny nule, takže $A:B:C = \dot{A}:\dot{B}:\dot{C}$, nebo jest parabolická. Předpokládejme, že není $A:B:C = \dot{A}:\dot{B}:\dot{C}$. Ježto dle (4) a (5)

$$(6) \qquad (A + \lambda\dot{A})\dot{C} + (C + \lambda\dot{C})\dot{A} - 2(B + \lambda\dot{B})\dot{B} = 0,$$

jsou formy $\dot{P}$ a $P + \lambda\dot{P}$ apolární. Podobně vidíme, že i P a $P + \lambda\dot{P}$ jsou apolární. Ježto forma $P + \lambda\dot{P}$ je parabolická, jest dle **76** kořen formy $P + \lambda\dot{P}$ kořenem formy P i kořenem formy $\dot{P}$. Obráceně, když formy P a $\dot{P}$ mají společný kořen, je tento kořenem formy $P + \lambda\dot{P}$ pro každé λ. Zvolíme-li λ tak, aby forma $P + \lambda\dot{P}$ měla dvojnásobný kořen, t. j. aby platilo (4), budou dle **76** formy $\dot{P}$ a $P + \lambda\dot{P}$ apolární, t. j. platí pak (6) a dle (4) též (5), což je ekvivalentní s (3); i jest $d = 1$.

Buďte P a $\dot{P}$ hyperbolické formy; $\{x_1\}, \{x_2\}$ a $\{\dot{x}_1\}, \{\dot{x}_2\}$ buďte jejich kořeny. Snadno se vidí, že jest

$$\begin{aligned} P &= 2\alpha(x_1^{(0)}t_2 - x_1^{(1)}t_1)(x_2^{(0)}t_2 - x_2^{(1)}t_1), \\ P &= 2\dot{\alpha}(\dot{x}_1^{(0)}t_2 - \dot{x}_1^{(1)}t_1)(\dot{x}_2^{(0)}t_2 - \dot{x}_2^{(1)}t_1), \end{aligned} \qquad \alpha\dot{\alpha} \neq 0$$

---

*) Kterému, to záleží na tom, v jakém pořádku uvažujeme body $\{x_1\}, \{x_2\}, \{\dot{x}_1\}, \{\dot{x}_2\}$.

takže

$$B^2 - AC = \alpha^2 (x_1 x_2)^2,\ \dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C} = \dot{\alpha}^2 (\dot{x}_1 \dot{x}_2)^2,$$
$$A\dot{C} + \dot{C}A - 2B\dot{B} = 2\alpha\dot{\alpha}\,[x_1 \dot{x}_1)(x_2 \dot{x}_2) + (x_1 \dot{x}_2)(x_2 \dot{x}_1)].$$

Rovnice (2) dá se tedy psáti, krátíme-li $4\alpha^2\dot{\alpha}^2$

$$(7) \qquad (x_1 x_2)^2 (\dot{x}_1 \dot{x}_2)^2 (d+1)^2 = [(x_1 \dot{x}_1)(x_2 \dot{x}_2) + (x_1 \dot{x}_2)(x_2 \dot{x}_1)]^2 (d-1)^2.$$

Pišme na okamžik

$$(x_1 \dot{x}_1)(x_2 \dot{x}_2) = h_1, \qquad (x_1 \dot{x}_2)(\dot{x}_2 x_1) = h_2.$$

Máme ukázati, že kořeny rovnice (7) jsou $d = \frac{h_1}{h_2}$ a $d = \frac{h_2}{h_1}$. Dle identity 71 (2) je však

$$(x_1 x_2)(\dot{x}_1 \dot{x}_2) = h_1 - h_2,$$

takže (7) dá se psáti

$$\left(\frac{d+1}{d-1}\right)^2 = \left(\frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2}\right)^2,$$

z čehož ihned vidíme, že kořeny jsou $\frac{h_1}{h_2}$ a $\frac{h_2}{h_1}$.

Z tvaru rovnice (2) vidíme ihned, že kořeny nejsou reální, když a jen když

$$(B^2 - AC)(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C}) < 0,$$

t. j. když jedna z forem P, $\dot{P}$ jest eliptická a druhá hyperbolická.

78. Buďte

$$(1) \qquad P = At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2,\ \dot{P} = \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1 t_2 + \dot{C}t_2^2$$

kvadratické formy v souřadnicích ar. bodu $|t_1, t_2|_b$; nebuď současně ani $A = B = C = 0$ ani $\dot{A} = \dot{B} = \dot{C} = 0$. Kvadratická forma v souřadnicích ar. bodu $|t_1, t_2|_b$

$$(2) \qquad Q = \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2 & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2 & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix}$$

nazývá se jakobien forem P a $\dot{P}$. Jakobien forem $\dot{P}$ a P jest $-Q$. Jest také

$$(3) \qquad Q = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ t_2^2 & -t_1 t_2 & t_1^2 \end{vmatrix}.$$

Buď K kolineace ar. bodů modulu μ; buď v K

$$(4) \qquad |t_1, t_2|_b \sim |t_1^*, t_2^*|_b.$$

Buď identicky

$$(5)\qquad \begin{aligned} At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 &= A^*t_1^{*2} + 2B^*t_1^*t_2^* + C^*t_2^{*2},\\ \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2 &= \dot{A}^*t_1^{*2} + 2\dot{B}^*t_1^*t_2^* + \dot{C}^*t_2^{*2}. \end{aligned}$$

Pak jest identicky

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2, & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} A^*t_1^* + B^*t_2^*, & B^*t_1^* + C^*t_2^* \\ \dot{A}^*t_1^* + \dot{B}^*t_2^*, & \dot{B}^*t_1^* + \dot{C}^*t_2^* \end{vmatrix}.$$

Diskriminant formy Q jest

$$(7)\qquad \tfrac{1}{4}(A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})^2 - (B^2 - AC)(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C}).$$

Formy P a Q jsou apolární; stejně formy $\dot{P}$ a Q. Forma Q jest identicky rovna nule, když a jen když $A:B:C = \dot{A}:\dot{B}:\dot{C}$. Forma Q jest parabolická, když a jen když formy P a $\dot{P}$ mají společný kořen; ten je pak dvojnásobným kořenem formy Q. Forma Q jest eliptická, když a jen když obě formy P i $\dot{P}$ jsou hyperbolické a jejich dvojpoměry záporné.

Jest identicky

$$(8)\qquad Q^2 = (\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C})P^2 + (A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})P\dot{P} + (B^2 - AC)\dot{P}^2.$$

Užijeme-li označení ze **75**, je dle (5) a **75** (8)

$$\begin{vmatrix} At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2, & At_1\tau_1 + B(t_1\tau_2 + t_2\tau_1) + Ct_2\tau_2 \\ \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2, & \dot{A}t_1\tau_1 + \dot{B}(t_1\tau_2 + t_2\tau_1) + \dot{C}t_2\tau_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A^*t_1^{*2} + 2B^*t_1^*t_2^* + C^*t_2^{*2}, & A^*t_1^*\tau_1^* + B^*(t_1^*\tau_2^* + t_2^*\tau_2^*) + C^*t_2^*\tau_2^* \\ \dot{A}^*t_1^{*2} + 2\dot{B}^*t_1^*t_2^* + \dot{C}^*t_2^{*2}, & \dot{A}^*t_1^*\tau_1^* + \dot{B}^*(t_1^*\tau_2^* + t_2^*\tau_1^*) + \dot{C}^*t_2^*\tau_2^* \end{vmatrix}.$$

Levá strana je rovna

$$\begin{vmatrix} (At_1 + Bt_2)t_1 + (Bt_1 + Ct_2)t_2, & (At_1 + Bt_2)\tau_1 + (Bt_1 + Ct_2)\tau_2 \\ (\dot{A}t_1 + \dot{B}t_2)t_1 + (\dot{B}t_1 + \dot{C}t_2)t_2, & (\dot{A}t_1 + \dot{B}t_2)\tau_1 + (\dot{B}t_1 + \dot{C}t_2)\tau_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2, & Bt_1 + Ct_2 \\ \dot{A}t_1 + \dot{B}t_2, & \dot{B}t_1 + \dot{C}t_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_1 & t_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix}.$$

Upravíme-li stejně i pravou stranu, obdržíme (6) dle **75** (6) a (7).

Je zřejmé, že ze (2) plyne (3). Ze (3) je ihned patrno, že na př. formy P a Q jsou apolární, a že Q jest identicky rovno nule, když a jen když $A:B:C = \dot{A}:\dot{B}:\dot{C}$. Diskriminant formy Q je dle (3) roven

$$\tfrac{1}{4}(A\dot{C} - C\dot{A})^2 - (A\dot{B} - B\dot{A})(B\dot{C} - C\dot{B}).$$

Snadný počet ukáže, že tento výraz jest roven výrazu (7). Je-li Q eliptická, nemůže (na př.) P býti eliptická, neboť P a Q jsou apolární (v. **76**). Je-li (na př.) P parabolická, vidíme ze (3) ihned, že Q není eliptická. Q jest eliptická, když a jen když

$$4(B^2 - AC)(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C}) > (A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B})^2,$$

tedy dle **77** (2), když a jen když

$$\left(\frac{d+1}{d-1}\right)^2 < 1,$$

čili když $d < 0$.

Dle (7) a **77** je forma Q parabolická, když a jen když formy P a $\dot{P}$ mají společný kořen. Ježto však Q a P i Q a $\dot{P}$ jsou apolární, je tento společný kořen dle **76** totožný s dvojnásobným kořenem formy Q.

Dle (3) jest

$$2Q^2 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ t_2^2 & -t_1 t_2 & t_1^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & -2B & A \\ \dot{C} & -2\dot{B} & \dot{A} \\ t_1^2 & 2t_1 t_2 & t_2^2 \end{vmatrix}.$$

Znásobíme-li dle řádků, obdržíme dle (1)

$$2Q^2 = \begin{vmatrix} -2(B^2 - AC), & A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B}, & P \\ A\dot{C} + C\dot{A} - 2B\dot{B}, & -2(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{C}), & \dot{P} \\ P, & \dot{P}, & 0 \end{vmatrix},$$

z čehož plyne identita (8).

79. Buďte

(1) $\quad P = At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2,\ \dot{P} = \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1 t_2 + \dot{C}t_2^2,\ \ddot{P} = \ddot{A}t_1^2 + 2\ddot{B}t_1 t_2 + \ddot{C}t_2^2$

kvadratické formy v souřadnicích ar. bodu $|t_1, t_2|_b$. Buď K kolineace ar. bodů modulu μ; buď v K

$$|t_1, t_2|_b \sim |t_1^*, t_2^*|_b.$$

Buď identicky

$$\begin{aligned} At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2 &= A^* t_1^{*2} + 2B^* t_1^* t_2^* + C^* t_2^{*2}, \\ \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1 t_2 + \dot{C}t_2^2 &= \dot{A}^* t_1^{*2} + 2\dot{B}^* t_1^* t_2^* + \dot{C}^* t_2^{*2}, \qquad (2) \\ \ddot{A}t_1^2 + 2\ddot{B}t_1 t_2 + \ddot{C}t_2^2 &= \ddot{A}^* t_1^{*2} + 2\ddot{B}^* t_1^* t_2^* + \ddot{C}^* t_2^{*2}. \end{aligned}$$

Pak jest

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ \ddot{A} & \ddot{B} & \ddot{C} \end{vmatrix} = \mu^3 \begin{vmatrix} A^* & B^* & C^* \\ \dot{A}^* & \dot{B}^* & \dot{C}^* \\ \ddot{A}^* & \ddot{B}^* & \ddot{C}^* \end{vmatrix}.$$

Užijeme označení ze **75**. Dle (2) a **75** (8) jest

$$\begin{vmatrix} At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2 & At_1\tau_1+B(t_1\tau_2+t_2\tau_1)+Ct_2\tau_2 & A\tau_1^2+2B\tau_1\tau_2+C\tau_2^2 \\ \dot{A}t_1^2+2\dot{B}t_1t_2+\dot{C}t_2^2 & \dot{A}t_1\tau_1+\dot{B}(t_1\tau_2+t_2\tau_1)+\dot{C}t_2\tau_2 & \dot{A}\tau_1^2+2\dot{B}\tau_1\tau_2+\dot{C}\tau_2^2 \\ \ddot{A}t_1^2+2\ddot{B}t_1t_2+\ddot{C}t_2^2 & \ddot{A}t_1\tau_1+\ddot{B}(t_1\tau_2+t_2\tau_1)+\ddot{C}t_2\tau_2 & \ddot{A}\tau_1^2+2\ddot{B}\tau_1\tau_2+\ddot{C}\tau_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A^*t_1^2+2B^*t_1t_2+C^*t_2^2 & A^*t_1\tau_1+B^*(t_1\tau_2+t_2\tau_1)+C^*t_2\tau_2 & A^*\tau_1^2+2B^*\tau_1\tau_2+C^*\tau_2^2 \\ \dot{A}^*t_1^2+2\dot{B}^*t_1t_2+\dot{C}^*t_2^2 & \dot{A}^*t_1\tau_1+\dot{B}^*(t_1\tau_2+t_2\tau_1)+\dot{C}^*t_2\tau_2 & \dot{A}^*\tau_1^2+2\dot{B}^*\tau_1\tau_2+\dot{C}^*\tau_2^2 \\ \ddot{A}^*t_1^2+2\ddot{B}^*t_1t_2+\ddot{C}^*t_2^2 & \ddot{A}^*t_1\tau_1+\ddot{B}^*(t_1\tau_2+t_2\tau_1)+\ddot{C}^*t_2\tau_2 & \ddot{A}^*\tau_1^2+2\ddot{B}^*\tau_1\tau_2+\ddot{C}^*\tau_2^2 \end{vmatrix}.$$

Levá strana je rovna

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ \ddot{A} & \ddot{B} & \ddot{C} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_1^2 & 2t_1t_2 & t_2^2 \\ t_1\tau_1 & t_1\tau_2+t_2\tau_1 & t_2\tau_2 \\ \tau_1^2 & 2\tau_1\tau_2 & \tau_2^2 \end{vmatrix} = -(t_1\tau_2-t_2\tau_1)^3 \begin{vmatrix} A & B & C \\ \dot{A} & \dot{B} & \dot{C} \\ \ddot{A} & \ddot{B} & \ddot{C} \end{vmatrix}.$$

Upravíme-li stejně i pravou stranu, obdržíme (3) dle **75** (6) a (7).

80. Buď

1) $$P = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$$

kvadratická forma v souřadnicích ar. bodu $|t_1, t_2|_b$; nebuď současně $A = B = C = 0$. Množství J_p párů bodů $\{x\}$ a $\{y\}$ takových, že

(2) $$Ax^{(0)}y^{(0)} + B(x^{(0)}y^{(1)} + x^{(1)}y^{(0)}) + Cx^{(1)}y^{(1)} = 0,$$

nazývá se involuce, určitěji involuce určená formou P; je-li $\{x\} = \{y\}$, pravíme, že $\{x\}$ je dvojný bod involuce J_p. Bod $\{x\}$ je dvojný bod involuce J_p, když a jen když jest kořenem formy P. Je-li forma P 1° hyperbolická, 2° parabolická, 3° eliptická, pravíme, že involuce J_p jest 1° hyperbolická, 2° parabolická, 3° eliptická; počet dvojných bodů jest resp. 2, 1, 0.

Je-li J_p parabolická, tvoří $\{x\}$ a $\{y\}$ pár involuce J_p, když a jen když jeden z bodů $\{x\}$, $\{y\}$ je kořenem formy P.

Je-li J_p hyperbolická, a je-li $\{x\} \neq \{y\}$, tvoří $\{x\}$ a $\{y\}$ pár involuce J_p, když a jen když pár $\{x\}$, $\{y\}$ a pár kořenů formy P jsou harmonické.

Kořeny hyperbolické nebo parabolické formy Q tvoří pár involuce určené formou P, když a jen když P a Q jsou apolární.

Je-li K kolineace ar. bodů, je-li v K

$$|t_1, t_2|_b \sim |t_1^*, t_2^*|_b, \quad x \sim x^*, \quad y \sim y^*,$$

a je-li identicky

$$At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2 = A^*t_1^{*2} + 2B^*t_1^*t_2^* + C^*t_2^{*2},$$

tvoří $\{x^*\}$ a $\{y^*\}$ pár involuce určené formou $A^*t_1^2 + 2B^*t_1t_2 + C^*t_2^2$, když a jen když $\{x\}$ a $\{y\}$ tvoří pár involuce určené formou $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$.

Jsou-li $\{x\}$ a $\{y\}$ kořeny formy Q, takže $\{x\} = \{y\}$, je-li Q parabolická, a $\{x\} \neq \{y\}$, je-li Q hyperbolická, jest

$$Q = \alpha\,(x^{(0)}t_2 - x^{(1)}t_1)\,(y^{(0)}t_2 - y^{(1)}t_1) = at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2,\quad \alpha \neq 0$$

takže

$$Ac + Ca - 2Bb = \alpha\,[Ax^{(0)}y^{(0)} + B\,(x^{(0)}y^{(1)} + x^{(1)}y^{(0)}) + Cx^{(1)}y^{(1)}],$$

a kořeny formy Q tvoří tedy pár involuce J_P, když a jen když P a Q jsou apolární. Ostatní výroky teorému plynou pak ze **76.**

81. Jsou-li $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$ tři různé body, pravíme, že jsou v positivní (negativní) orientaci, když číslo

$$(x_1x_2)\,(x_2x_3)\,(x_3x_1)$$

je kladné (záporné). Vyměníme-li mezi sebou dva z bodů $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, přejde positivní (negativní) orientace v negativní (positivní).

Buď K kolineace ar. bodů; buď $x_i \sim y_i$ $(i = 1, 2, 3)$ v K Body $\{y_1\}$, $\{y_2\}$, $\{y_3\}$ jsou v téže orientaci jako body $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, je-li K kladná kolineace; v opačné orientaci, je-li K záporná kolineace.

Že jsme k definici orientace oprávněni, plyne odtud, že, když $X_i = \lambda_i x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, jest

$$(X_1X_2)\,(X_2X_3)\,(X_3X_1) = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2\,(x_1x_2)\,(x_2x_3)\,(x_3x_1).$$

Je-li μ modul K, jest dle **38** 5°

$$(y_1y_2)\,(y_2y_3)\,(y_3y_1) = \mu^3\,(x_1x_2)\,(x_2x_3)\,(x_3x_1).$$

82. Buďte $\{x_1\}$, $\{y_1\}$; $\{x_2\}$, $\{y_2\}$; $\{x_3\}$. $\{y_3\}$ tři páry neparabolické involuce J; body $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, buďte různé. Orientace bodů $\{x_1\}$ $\{x_2\}$ $\{x_3\}$ a orientace bodů $\{y_1\}$, $\{y_2\}$ $\{y_3\}$ jsou stejné (opačné), je-li involuce J eliptická (hyperbolická).

Je-li J určena formou $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$, jest dle předpokladu

$$(Ax_i^{(0)} + Bx_i^{(1)})\,y_i^{(0)} + (Bx_i^{(0)} + Cx_i^{(1)})\,y_i^{(1)} = 0. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Odtud plyne, že

$$y_i^{(0)} = \lambda_i\,(Bx_i^{(0)} + Cx_i^{(1)}),\qquad y_i^{(1)} = -\lambda_i\,(Ax_i^{(0)} + Bx_i^{(1)}),\qquad (i = 1, 2, 3;\ \lambda_i \neq 0)$$

takže

$$(y_i y_k) = \begin{vmatrix} y_i^{(0)} y_i^{(1)} \\ y_k^{(0)} y_k^{(1)} \end{vmatrix} = -\lambda_i^2 \begin{vmatrix} Bx_i^{(0)} + Cx_i^{(1)} & Ax_i^{(0)} + Bx_i^{(1)} \\ Bx_k^{(0)} + Cx_k^{(1)} & Ax_k^{(0)} + Bx_k^{(1)} \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda_i \lambda_k \begin{vmatrix} B & C \\ A & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i^{(0)} & x_i^{(1)} \\ x_k^{(0)} & x_k^{(1)} \end{vmatrix} = -\lambda_i \lambda_k (B^2 - AC)(x_i x_k).$$

Tedy

$$(y_1 y_2)(y_2 y_3)(y_3 y_1) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 (B^2 - AC)^3 (x_1 x_2)(x_2 x_3)(x_3 x_1).$$

83. Buďte $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ dva různé body. Množství M bodů $\{x\}$ takových, že $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x\}$ jsou v positivní orientaci, nazývá se úsečka; bod $\{x_1\}$ jmenujeme počáteční, bod $\{x_2\}$ koncový bod úsečky M. Buď K kolineace ar. bodů; buď v K $x_1 \sim y_1$, $x_2 \sim y_2$, $M \sim M'$. Je-li kolineace K kladná (záporná), jest M' úsečka o počátečním (koncovém) bodě $\{y_1\}$ a koncovém (počátečním) bodě $\{y_2\}$.

Vychází ihned z **81.**

Geometrie lineárního systému.

84. Buď $n < m$. Buď S lin. systém dimense n m-rozměrných ar. bodů (nadrovin). Buď T prostor n-rozměrných ar. bodů. Buďte $x_0, x_1 \ldots x_n$ ($\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_n$) lin. nezávislé m-rozměrné ar. body (ar. nadroviny) z S; buďte $\bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ lin. nezávislé n-rozměrné ar. body. Libovolný ar. bod x (libovolná ar. nadrovina ξ) z S dá se psáti jedním a jen jedním způsobem ve tvaru

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n. \quad (\xi = \lambda_0 \xi_0 + \lambda_1 \xi_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n).$$

Přiřadíme-li mu (jí) n-rozměrný ar. bod

$$\bar{x} = \lambda_0 \bar{x}_0 + \lambda_1 \bar{x}_1 + \ldots \lambda_n \bar{x}_n,$$

obdržíme jednojednoznačnou korespondenci $\mathfrak{K}$ mezi S a T. Pravíme, že $\mathfrak{K}$ je projektivní korespondence mezi S a T.

85. Buď S lin. systém dimense n ($< m$) m-rozměrných ar. bodů (nadrovin). Buď T prostor n-rozměrných ar. bodů. Buď k kolineace n-rozměrných ar. bodů. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence S a T. Pak $\mathfrak{K} . k$ jest projektivní korespondence mezi S a T. Obráceně, když také $\mathfrak{K}'$ jest projektivní korespondence mezi S a T, existuje kolineace k n-rozměrných ar. bodů taková, že $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} . k$.

Vychází ihned ze **35.** a **84.**

86. Buďte S_1, S_2 lin. systémy dimense n ($< m$) m-rozměrných ar. bodů (ar. nadrovin)*).

Buď T prostor n-rozměrných ar. bodů. Buďte $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ projektivní korespondence resp. mezi S_1 a T, mezi S_2 a T**). Existuje kolineace K m-rozměrných ar. bodů (ar. nadrovin) taková, že $S_1 \sim S_2$ v K a že, kdykoli x $\{\xi\}$ náleží do S_1 a $x \sim y$ ($\xi \sim \eta$) v K, jest ar. bodu x (ar. nadrovině ξ) přiřazen v $\mathfrak{K}_1$ týž n-rozměrný ar. bod jako ar. bodu y (ar. nadrovině η) v $\mathfrak{K}_2$. Obráceně, buď $\mathfrak{K}_2$ projektivní korespondence mezi S_2 a T, buď K kolineace m-rozměrných ar. bodů (nadrovin), v níž $S_1 \sim S_2$, a buď $\mathfrak{K}_1$ korespondence mezi S_1 a T taková, že, je-li x $\{\xi\}$ libovolný ar. bod (libovolná ar. nadrovina) z S_1, a je-li $x \sim y$ ($\xi \sim \eta$) v K a $y \sim \overline{x}$ ($\eta \sim \overline{x}$) v $\mathfrak{K}_2$, jest $x \sim \overline{x}$ ($\xi \sim \overline{x}$) v $\mathfrak{K}_1$. Pak $\mathfrak{K}_1$ jest projektivní korespondence.

Předpokládejme na př., že S_1, S_2 jsou lin. systémy ar. bodů. Buďte $\overline{x}_0$, $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n$ lin. nezávislé n-rozměrné ar. body; buď $x_i \sim \overline{x}_i$ v $\mathfrak{K}_1$ $y_i \sim \overline{x}_i$ v $\mathfrak{K}_2$ ($i = 0, 1 \dots n$), takže

$$S_1 = \{x_0, x_1 \dots x_n\}, \qquad S_2 = \{y_0, y_1 \dots y_n\}.$$

Určeme ar. body $x_{n+1} \dots x_m$ tak, že $(x_0\ x_1 \dots x_m) \neq 0$ a ar. body y_{n+1}, $y_{n+2} \dots y_m$ tak, že $(y_0\ y_1 \dots y_m) \neq 0$. Pak kolineace K, v níž $x_i \sim y_i$ ($i = 0, 1 \dots m$), má zřejmě žádanou vlastnost. Podobně dokáže se obrácení.

87. Předchozí věty umožňují v podstatě převedení projektivní geometrie lin. systému S dimense n ($< m$) m-rozměrných ar. bodů (ar. nadrovin) na projektivní geometrii prostoru T n-rozměrných ar. bodů. K tomu stačí užíti projektivní korespondence $\mathfrak{K}$ mezi S a T. Existuje ovšem nekonečné množství korespondencí $\mathfrak{K}$. Užijeme-li jich však na přenesení do S z T některé definice (teorému atd.), jež se nemění při kolineacích n-rozměrných ar. bodů, ukazuje **85**, že je lhostejné, které z korespondencí $\mathfrak{K}$ užijeme. Mimo to ukazuje **85**, že jen v tomto případě neurčitost korespondence $\mathfrak{K}$ není na závadu. **86** pak ukazuje jednak, že tímto způsobem obdržená definice (teorém atd.), týkající se S, se nemění při kolineacích m-rozměrných ar. bodů, za druhé, že všecky definice (teorémy atd.), jež se týkají výhradně*) lin. systému S a nemění se kolineacemi m-rozměrných ar. bodů, dají se tímto způsobem obdržeti.

Lineární systém $\{x_1, x_2\}$ ar. bodů ($\{\xi_1, \xi_2\}$ ar. nadrovin) dimense 1 nazývá se řada ar. bodů (svazek ar. nadrovin).

*) Může býti $S_1 = S_2$.

**) Může býti $\mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{K}_2$, i když $S_1 = S_2$.

***) Nesmí v takové definici (teorému atd.) býti řeč na př. o ar. bodech mimo S.

Množství bodů (nadrovin), obsažených v řadě ar. bodů $\{x_1, x_2\}$ (ve svazku ar. nadrovin $\{\xi_1, \xi_2\}$) nazývá se řada bodová (svazek nadrovin); označení $\{x_1, x_2\}^{\sigma}$ ($\{\xi_1, \xi_2\}^{\mathfrak{S}}$). Dle toho, co výše řečeno, projektivní geometrie řady ar. bodů (svazku ar. nadrovin) dá se převésti na projektivní geometrii prostoru jednorozměrných ar. bodů. Tak na př. dvojpoměr čtyř různých bodů řady bodové $\{x_1, x_2\}^{\sigma}$

$$\{\overset{i}{x}\} = \{\overset{i}{t}_1 x_1 + \overset{i}{t}_2 x_2\} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

rovná se dvojpoměru (v. **71**) jednorozměrných ar. bodů

$$\{|\overset{i}{t}_1, \overset{i}{t}_2|_b\}. \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dvojpoměr nemění se kolineacemi m-rozměrných ar. bodů. Při tom jsme užili projektivní korespondence $\mathfrak{K}$ mezi $\{x_1, x_2\}$ a prostorem jednorozměrných ar. bodů, v níž

$$x_1 \sim |1, 0|_b, \qquad x_2 \sim |0, 1|_b.$$

Můžeme ovšem zvoliti jakkoli dva lin. nezávislé jednorozměrné ar. body $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ a definovati jako dvojpoměr bodů $\{x^i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) dvojpoměr jednorozměrných bodů

$$\{\overset{i}{t}_1 \overline{x}_1 + \overset{i}{t}_2 \overline{x}_2\}.$$

Podobně můžeme přenésti na řadu ar. bodů všecky výsledky v **74** až **80**. Na př. z **80** obdržíme tuto definici involuce v řadě bodové $\{x_1, x_2\}^{\sigma}$: Buď

$$x = t_1 x_1 + t_2 x_2$$

proměnný ar. bod v $\{x_1, x_2\}$. Buď

$$P = At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2$$

kvadratická forma v proměnných t_1, t_2. Množství párů bodů $\{x\}$ a $\{y\}$, kde

$$x = t_1 x_1 + t_2 x_2, \qquad y = \tau_1 x_1 + \tau_2 x_2,$$

takových, že

$$At_1 \tau_1 + B(t_1 \tau_2 + t_2 \tau_1) + Ct_2 \tau_2 = 0,$$

nazývá se involuce určená formou P. Kolineací přejde involuce v involuci atd.

Naproti tomu nemůžeme dosud přenésti definici orientace z **81** a teorémy **82**, **83**. To učiníme v **92** a **139**, omezujíce se na případy $m = 2$ a $m = 3$.

Dvojrozměrný prostor.

88. V **88** až **93** předpokládáme, že $m = 2$. V tomto případě místo slova nadrovina užívá se slova přímka. Mluvíme tedy o ar. přímce

(**18**), o (geom.) přímce (**59**), o svazku ar. přímek a svazku přímek (**87**), o přímkové formě (**46**).

Ze **17** vidíme snadno, že průřez dvou různých řad bodových (svazků přímek) jest přímka (bod). Jsou-li $\{x\}$, $\{y\}$ dva různé body, pravíme, že přímka $\{xy\}$*) jest jejich spojnice. Duálně, jsou-li $\{\xi\}$, $\{\eta\}$ dvě různé přímky, pravíme, že bod $\{\xi\eta\}$ jest jejich průsečík. Místo výrazu obecná kvadrika (**60**) užívá se pro $m=2$ zpravidla výrazu kuželosečka. Je-li P_r obecná přímková kvadratická forma, značíme kuželosečku, kterou tvoří body incidentní s P_r: $C[P_r]$ (kdežto pro $m>2$ píšeme $M[P_r]$. Důvod této změny označení vysvitne ve **169**).

Buď $C[P_r]$ kuželosečka; buď $\{x\}$ bod neobsažený v $C[P_r]$. Pravíme, že bod $\{x\}$ jest uvnitř kuželosečky $C[P_r]$, když jeho polára vzhledem k $C[P_r]$ neobsahuje žádného bodu z $C[P_r]$; v opačném případě pravíme, že bod $\{x\}$ je vně kuželosečky $C[P_r]$. Buď

$$P_r=\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k \qquad (i, k=0, 1, 2)$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Bod $\{x\}$ jest uvnitř (vně) $C[P_r]$, když a jen když $DSP_rx>0$ ($DSP_rx<0$).

Snadný důkaz ponechávám čtenáři.

89. Jsou-li x_1, x_2, x_3 ar. body, platí identity

$$[(x_1x_2)(x_1x_3)]=(x_1x_2x_3)x_1, \tag{1}$$

$$[(x_1x_2)(x_2x_3)(x_3x_1)]=(x_1x_2x_3)^2. \tag{2}$$

Při tom na př. levá strana rovnice (1) znamená $(\xi_1\xi_2)$, kde $\xi_1=(x_1x_2)$, $\xi_2=(x_1x_3)$. Pro zřetelnost v těchto a podobných případech užíváme závorky tvaru [ ].

Jsou-li ar. body x_1, x_2, x_3 lin. závislé, snadno se vidí, že levá i pravá strana formulí (1), (2) jsou rovny resp. 0_b, 0. Stačí tedy (1) a (2) dokázati, za předpokladu $(x_1x_2x_3)\neq 0$. Pak ale existuje kolineace, v níž

$$|1, 0, 0|_b \sim x_1, \qquad |0, 1, 0|_b \sim x_2, \qquad |0, 0, 1|_b \sim x_3.$$

Stačí tedy 1° verifikovati formule (1), (2) za předpokladu

$$x_1=|1, 0, 0|_b, \qquad x_2=|0, 1, 0|_b, \qquad x_3=|0, 0, 1|_b,$$

*) Místo $\{(xy)\}$ píšeme zpravidla $\{xy\}$; t. j. ovšem podstatně různé od $\{x, y\}$. Podobně místo $\{(\xi\eta)\}$ píšeme obvykle $\{\xi\eta\}$.

což je snadné, a 2⁰ ukázati, že platí-li (1) a (2), a je-li v kolineaci K $x_i \sim y_i$ $(i = 1, 2, 3)$, jest též

$$[(y_1 y_2)(y_1 y_3)] = (y_1 y_2 y_3) y_1, \tag{3}$$

$$[(y_1 y_2)(y_2 y_3)(y_3 y_1) = (y_1 y_2 y_3)^2. \tag{4}$$

Buď μ modul K; buď $K' = \text{Adj.}\ K$. Dle **38** 5⁰ jest

$$(y_1 y_2 y_3) = \mu (x_1 x_2 x_3).$$

Dle **43** (1) jest v K'

$$(x_1 x_2) = \frac{1}{\mu} (y_1 y_2), \qquad (x_1 x_3) = \frac{1}{\mu} (y_1 y_3).$$

Tedy jest dle **43** (2) v K

$$[(x_1 x_2)(x_1 x_3)] = \mu \left[\frac{1}{\mu} (y_1 y_2), \frac{1}{\mu} (y_1 y_3) \right] = \frac{1}{\mu} [(y_1 y_2)(y_1 y_3)].$$

Plyne tedy (3) vskutku z (1). Podobně vidíme, že (4) plyne z (2).

90. Jsou-li x_1, x_2 ar. body a ξ_1, ξ_2 ar. přímky, platí identita

$$S(x_1 x_2)(\xi_1 \xi_2) = \begin{vmatrix} S x_1 \xi_1 & S x_1 \xi_2 \\ S x_2 \xi_1 & S x_2 \xi_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Jsou-li ar. body x_1, x_2 lin. závislé, vidíme ihned, že obě strany (1) rovnají se nule. Stačí tedy dokázati (1) za předpokladu $(x_1, x_2) \neq 0_r$. Pak ale existuje kolineace, v níž

$$|1, 0, 0|_b \sim x_1, \qquad |0, 1, 0|_b \sim x_2.$$

Stačí tedy 1⁰ verifikovati formuli (1) za předpokladu

$$x_1 = |1, 0, 0|_b, \qquad x_2 = |0, 1, 0|_b,$$

což je snadné, a 2⁰ ukázati, že, platí-li (1), je-li K kolineace ar. bodů, je-li $K' = \text{Adj.}\ K$, a je-li $x_i \sim y_i$ v K, $\xi_i \sim \eta_i$ v K' $(i = 1, 2)$, jest také

$$S(y_1 y_2)(\eta_1 \eta_2) = \begin{vmatrix} S y_1 \eta_1 & S y_1 \eta_2 \\ S y_2 \eta_1 & S y_2 \eta_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Z definice adjungované kolineace je však patrno, že pravá strana (1) je rovna pravé straně (2). Mimo to, když μ je modul K, jest dle **43**

$$(x_1 x_2) \sim \frac{1}{\mu} (y_1 y_2) \text{ v } K, \qquad (\xi_1 \xi_2) \sim \mu (\eta_1 \eta_2) \text{ v } K',$$

takže opět dle definice adjungované kolineace

$$S(x_1 x_2)(\xi_1 \xi_2) = S \frac{1}{\mu} (y_1 y_2) . \mu (\eta_1 \eta_2) = S (y_1 y_2)(\eta_1 \eta_2).$$

91. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi řadou ar. bodů $\{x_1, x_2\}$ (svazkem ar. přímek $\{\xi_1, \xi_2\}$) a prostorem jednorozměrných ar. bodů. Buď v $\mathfrak{K}$

$$x_1 \sim \bar{x}_1, \qquad x_2 \sim \bar{x}_2, \qquad (\xi_1 \sim \bar{x}_1 \quad \xi_2 \sim \bar{x}_2).$$

Je-li $(\bar{x}_1 \bar{x}_2) = \alpha$, pravíme, že ar. přímka $\frac{1}{\alpha}(x_1 x_2)$ (ar. bod $\frac{1}{\alpha}(\xi_1 \xi_2)$) jest jednotkou při $\mathfrak{K}$.

Předpokládejme na př., že běží o řadu ar. bodů $\{x_1, x_2\}$. Buď

$$\{y_1 \, y_2\} = \{x_1, x_2\},$$

tedy

(1) $$y_i = \lambda_{i1} x_1 + \lambda_{i2} x_2. \qquad (i = 1, 2)$$

Pak jest v $\mathfrak{K}$ $y_i \sim \bar{y}_i$, kde

$$\bar{y}_i = \lambda_{i1} \bar{x}_1 + \lambda_{i2} \bar{x}_2. \qquad (i = 1, 2)$$

Klademe-li $(\bar{y}_1 \bar{y}_2) = \beta$, je tedy

$$\beta = (\lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21}) \alpha.$$

Avšak dle (1)

$$(y_1 y_2) = (\lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21})(x_1 x_2),$$

takže $\frac{1}{\beta}(y_1 y_2) = \frac{1}{\alpha}(x_1 x_2)$. Na definici jednotky při $\mathfrak{K}$ nemá tedy vlivu přechod od x_1, x_2 k y_1, y_2.

92. Buď $\{x_1, x_2\}$ řada ar. bodů. Buď $\xi = \lambda(x_1, x_2) \neq 0$, libovolná ar. přímka z Adj. $\{x_1, x_2\}$. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi $\{x_1, x_2\}$ a prostorem T jednorozměrných ar. bodů o jednotce ξ. Buďte $\{y_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ tři různé body z $\{x_1, x_2\}^{\sigma}$; buď $y_i \sim \bar{y}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ v $\mathfrak{K}$. Pravíme, že body $\{y_i\}$ jsou v positivní (negativní) orientaci vzhledem ke ξ, když jednorozměrné body $\{\bar{y}_i\}$ jsou v positivní (negativní) orientaci.

Je-li také $\xi' \neq 0$, ar. přímka z Adj. $\{x_1, x_2\}$, tedy $\xi' = \varrho\xi$ $(\varrho \neq 0)$, jest orientace vzhledem ke ξ' táž, jako orientace vzhledem ke ξ nebo opačná dle toho, zda $\varrho > 0$ či $\varrho < 0$.

Buď K kolineace ar. bodů, buď $K' = \text{Adj.}\, K$. Buď v K

$$x_1 \sim X_1, \quad x_2 \sim X_2, \quad y_1 \sim Y_1, \quad y_2 \sim Y_2, \quad y_3 \sim Y_3;$$

buď v K' $\xi \sim \Xi$. Orientace bodů $\{Y_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ vzhledem k Ξ jest táž, jako orientace bodů $\{y_i\}$ vzhledem ke ξ nebo opačná dle toho, zda K je positivní či negativní kolineace.

Duálně definuje se orientace tří různých přímek ze svazku přímek $\{\xi_1, \xi_2\}^{\mathfrak{S}}$ vzhledem k vlastnímu ar. bodu z Adj. $\{\xi_1, \xi_2\}$.

Snadno se vidí, že, ať jakkoli zvolíme vlastní ar. přímku ξ v Adj. $\{x_1, x_2\}$, projektivní korespondence $\mathfrak{K}$ o jednotce ξ existuje. Takových korespondencí je však nekonečně mnoho, a je třeba zjistiti, že všecky vedou k téže definici orientace. To však plyne z **81**, neboť, je-li $\mathfrak{K}$ jedna z uvažovaných korespondencí, z **91** vidíme, že korespondence $\mathfrak{K}.k$ (v. **85**) má touž vlastnost, když a jen když k jest unimodulární kolineace jednorozměrných ar. bodů. Obecněji vidíme z **91**, že jednotkou korespondence $\mathfrak{K}.k$ jest $\xi' = \varrho\,\xi$, když a jen když k jest kolineace jednorozměrných ar. bodů modulu $\frac{1}{\varrho}$; dle **81** je tedy orientace vzhledem ke ξ' rovna orientaci vzhledem ke ξ, když a jen když $\frac{1}{\varrho} > 0$, t. j. $\varrho > 0$.

Lehko se vidí, že orientace bodů $\{y_i\}$ vzhledem ke $\xi = \lambda(x_1\, x_2)$ je táž, jako orientace bodů $\{Y_i\}$ vzhledem k $\lambda(X_1 X_2)$. Je-li μ modul K, je však dle **43** (1) v K'

$$(x_1\, x_2) \backsim \frac{1}{\mu}\, X_1 X_2),$$

tedy $\Xi = \frac{1}{\mu} . \lambda(X_1\, X_2)$. Tedy dle toho, co již jsme dokázali, orientace bodů $\{Y_i\}$ vzhledem k Ξ je táž, jako orientace bodů $\{y_i\}$ vzhledem ke ξ, když a jen když $\mu > 0$.

93. Buď x ar. bod, buď ξ ar. přímka; buď $Sx\xi > 0$. Jsou-li $\{y_1\}$, $\{y_2\}$, $\{y_3\}$ tři různé body z Adj. $\{\xi\}$, a je-li $\{\eta_i\}$, $(i = 1, 2, 3)$ spojnice bodů $\{y_i\}$, $\{x\}$, jest orientace bodů $\{y_1\}$, $\{y_2\}$, $\{y_3\}$ vzhledem ke ξ táž, jako orientace přímek $\{\eta_1\}$, $\{\eta_2\}$, $\{\eta_3\}$ vzhledem k $\{x\}$.

Buď Adj. $\{\xi\} = \{x_1, x_2\}$. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi $\{x_1, x_2\}$ a prostorem jednorozměrných ar. bodů o jednotce ξ. Je-li v $\mathfrak{K}$

$$x_1 \backsim \bar{x}_1, \quad x_2 \backsim \bar{x}_2,$$

je tedy

$$(x_1\, x_2) = (\bar{x}_1\, \bar{x}_2)\, \xi. \tag{1}$$

Buď

$$y_i = \lambda_{i1} x_1 + \lambda_{i2} x_2, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

takže orientace bodů $\{y_i\}$ vzhledem ke ξ je táž, jako orientace jednorozměrných bodů

$$\{\lambda_{i1} \bar{x}_1 + \lambda_{i2} \bar{x}_2\}. \tag{3}$$

Dle **89** (1) jest

$$[(x\,x_1)\,(x\,x_2)] = (x\,x_1\,x_2)\,x.$$

Dle (1) je však

$$(x\,x_1\,x_2) = (\bar{x}_1\,\bar{x}_2)\,Sx\xi,$$

takže

$$[(x\,x_1)\,(x\,x_2)] = (\bar{x}_1\,\bar{x}_2)\,.\,Sx\xi\,.\,x.$$

Ježto $\{(xx_1), (xx_2)\} = \text{Adj.}\,\{x\}$, vidíme ze (4), že jednotkou projektivní korespondence $\mathfrak{K}'$ mezi Adj. $\{x\}$ a prostorem jednorozměrných ar. bodů, ve které

$$(xx_1) \sim \overline{x}_1 \qquad (x\vec{x}_2) \sim \overline{x}_2,$$

jest $Sx\xi \,.\, x$. Zřejmě však $\{\eta_i\} = \{xy_i\}$, takže v $\mathfrak{K}'$ přímkám $\{\eta_i\}$ $(i = 1, 2)$ jsou přiřazeny jednorozměrné body (3). Orientace jednorozměrných bodů (3) je tedy táž, jako orientace přímek $\{\eta_i\}$ vzhledem k $Sx\xi \,.\, x$, tedy dle **92** i vzhledem k x, ježto $Sx\xi > 0$.

Aritmetické komplexy.

94. V **94** až **146** předpokládáme $m = 3$. V tomto případě místo slova nadrovina užívá se slova rovina. Mluvíme tedy o ar. rovině (**18**), o (geom.) rovině (**59**), o svazku ar. rovin a svazku rovin (**87**), o rovinové formě (**46**).

Lin. systém $\{x_1, x_2, x_3\}$ ar. bodů dimense 2 nazývá se pole ar. bodů; lin. systém $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ ar. rovin dimense 2 nazývá se trs ar. rovin. Množství bodů (nadrovin) obsažených v $\{x_1, x_2, x_3\}$ $(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\})$ nazývá se pole bodové (trs rovin); označení $\{x_1, x_2, x_3\}^M$ $(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}^{\mathfrak{M}})$.

95. Při studiu projektivní geometrie trojrozměrného prostoru je výhodné uvažovati také pětirozměrné ar. body a nadroviny; nazýváme je ar. komplexy resp. prvního a druhého druhu. Ar. komplexy prvého druhu budeme značiti zpravidla p, p_1, p', q, r atd. Měníce poněkud konvenci, učiněnou v **1**, nebudeme souřadnice ar. komplexu p značiti $p^{(0)}$, $p^{(1)} \dots p^{(5)}$, nýbrž

$$p^{(01)},\ p^{(02)},\ p^{(03)},\ p^{(23)},\ p^{(31)},\ p^{(12)};$$

podobně ovšem pro p_1, p', q, r atd; důvod vysvitne v **97**. Píšeme také

$$p = |p^{(01)},\ p^{(02)},\ p^{(03)},\ p^{(23)},\ p^{(31)},\ p^{(12)}|_p,$$

t. j. k souřadnicím připojujeme index p, ponechávajíce index b pro trojrozměrné ar. body. Podobně pro ar. komplex druhého druhu ω píšeme

$$\omega = |\omega^{(01)},\ \omega^{(02)},\ \omega^{(03)},\ \omega^{(23)},\ \omega^{(31)},\ \omega^{(12)}|_\omega,$$

nahrazujíce index r indexem ω.

Ar. komplex prvého druhu $|0, 0, 0, 0, 0, 0|_p$ nazýváme nulovou přímkou a značíme 0_p. Ar. komplexy prvého druhu $|1, 0, 0, 0, 0, 0|_p, \dots$ $|0, 0, 0, 0, 0, 1|_p$ nazýváme souřadné ar. komplexy prvého druhu.

96. Ježto ar. komplexy prvého (druhého) druhu nejsou nic jiného než pětirozměrné ar. body (ar. nadroviny), můžeme na ně převésti řadu definic a teorémů dřívějších odstavců. Připomeňme ty, jichž v dalším zvláště bude třeba. Součin čísla a ar. komplexu (prvého nebo druhého druhu) definujeme dle **2**, součet dvou ar. komplexů dle **3**, lin. závislost ar. komplexů dle **5**, lin. systém ar. komplexů dle **6**, dimensi lin. systému ar. komplexů dle **11**. Je-li p ar. komplex prvního druhu a ω ar. komplex druhého druhu, klademe dle **19**

$$(1)\qquad Sp\omega = p^{(01)}\omega^{(01)} + p^{(02)}\omega^{(02)} + p^{(03)}\omega^{(03)} + p^{(23)}\omega^{(23)} + p^{(31)}\omega^{(31)} + p^{(12)}\omega^{(12)},$$

a pravíme, že p a ω jsou incidentní, když $Sp\omega = 0$.

Je-li S lin. systém ar. komplexů prvého (druhého) druhu dimense d, definujeme dle **23** adjungovaný lin. systém ar. komplexů druhého (prvého) druhu, který značíme Adj. S. Dimense Adj. S rovná se $4 - d$ dle **24**. Adj. (Adj. S) $= S$ dle **25**.

Jsou-li $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ ar. komplexy prvého druhu, definujeme dle **27** symbol $(p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)$. Podobně, jsou-li $\omega_0, \ldots \omega_5$ ar. komplexy druhého druhu, definujeme symbol $(\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5)$. Dle pravidla o násobení determinantů platí identita

$$(2)\qquad (p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)(\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5) = \begin{vmatrix} Sp_0\omega_0 & Sp_0\omega_1 & Sp_0\omega_2 & Sp_0\omega_3 & Sp_0\omega_4 & Sp_0\omega_5 \\ Sp_1\omega_0 & Sp_1\omega_1 & Sp_1\omega_2 & Sp_1\omega_3 & Sp_1\omega_4 & Sp_1\omega_5 \\ Sp_2\omega_0 & Sp_2\omega_1 & Sp_2\omega_2 & Sp_2\omega_3 & Sp_2\omega_4 & Sp_2\omega_5 \\ Sp_3\omega_0 & Sp_3\omega_1 & Sp_3\omega_2 & Sp_3\omega_3 & Sp_3\omega_4 & Sp_3\omega_5 \\ Sp_4\omega_0 & Sp_4\omega_1 & Sp_4\omega_2 & Sp_4\omega_3 & Sp_4\omega_4 & Sp_4\omega_5 \\ Sp_5\omega_0 & Sp_5\omega_1 & Sp_5\omega_2 & Sp_5\omega_3 & Sp_5\omega_4 & Sp_5\omega_5 \end{vmatrix}.$$

97. Následující definice zprostředkuje zavedení aritm. komplexů do projektivní geometrie trojrozměrného prostoru:

Jsou-li x, y ar. body, značíme (xy) ar. komplex prvého druhu p o souřadnicích

$$p^{(01)} = \begin{vmatrix} x^{(0)} x^{(1)} \\ y^{(0)} y^{(1)} \end{vmatrix}, \; p^{(02)} = \begin{vmatrix} x^{(0)} x^{(2)} \\ y^{(0)} y^{(2)} \end{vmatrix}, \; p^{(03)} = \begin{vmatrix} x^{(0)} x^{(3)} \\ y^{(0)} y^{(3)} \end{vmatrix},$$

$$p^{(23)} = \begin{vmatrix} x^{(2)} x^{(3)} \\ y^{(2)} y^{(3)} \end{vmatrix}, \; p^{(31)} = \begin{vmatrix} x^{(3)} x^{(1)} \\ y^{(3)} y^{(1)} \end{vmatrix}, \; p^{(12)} = \begin{vmatrix} x^{(1)} x^{(2)} \\ y^{(1)} y^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Zřejmě jest $(xy) = 0_p$, když a jen když ar. body x, y jsou lin. závislé.

Duálně definujeme ar. komplex druhého druhu $(\xi\eta)$, jsou-li ξ, η ar. roviny.

98. Jsou-li x_0, x_1, x_2, x_3 ar. body a $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ ar. roviny, platí identity

(1) $$S(x_0 x_1)(\xi_0 \xi_1) = \begin{vmatrix} Sx_0\xi_0 & Sx_0\xi_1 \\ Sx_1\xi_0 & Sx_1\xi_1 \end{vmatrix},$$

(2) $$S(x_0 x_1 x_2)(\xi_0 \xi_1 \xi_2) = \begin{vmatrix} Sx_0\xi_0 & Sx_0\xi_1 & Sx_0\xi_2 \\ Sx_1\xi_0 & Sx_1\xi_1 & Sx_1\xi_2 \\ Sx_2\xi_0 & Sx_2\xi_1 & Sx_2\xi_2 \end{vmatrix},$$

(3) $$S(x_0 x_1 x_2 x_3)(\xi_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3) = \begin{vmatrix} Sx_0\xi_0 & Sx_0\xi_1 & Sx_0\xi_2 & Sx_0\xi_3 \\ Sx_1\xi_0 & Sx_1\xi_1 & Sx_1\xi_2 & Sx_1\xi_3 \\ Sx_2\xi_0 & Sx_2\xi_1 & Sx_2\xi_2 & Sx_2\xi_3 \\ Sx_3\xi_0 & Sx_3\xi_1 & Sx_3\xi_2 & Sx_3\xi_3 \end{vmatrix}.$$

Předpokládáme-li na okamžik, že identity (1), (2), (3) jsou již dokázány pro $x_0 = x'_0, x''_0 \ldots$, vidíme snadno, že jsou správné i pro $x_0 = \lambda' x'_0 + \lambda'' x''_0 + \ldots$. Totéž platí o x_1, x_2, x_3. Odtud je patrno, že stačí tyto identity verifikovati pro ten případ, že x_0, x_1, x_2, x_3 jsou souřadné ar. body, což je zcela snadné.

99. Buďte $\{x, y\}$, $\{x', y'\}$ dvě řady ar. bodů. Jest

(1) $$\{x, y\} = \{x', y'\},$$

když a jen když existuje číslo λ takové, že

(2) $$(x'y') = \lambda (xy).$$

Předpokládejme nejprve, že platí (1). Pak jest

$$x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y, \qquad y' = \mu_1 x + \mu_2 y.$$

Odtud snadno se obdrží

$$(x'y') = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)(xy),$$

t. j. (2) platí pro $\lambda = \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$.

Předpokládejme za druhé, že platí (2); snadno vidíme, že $\lambda \neq 0$. Vskutku, ježto $\{x', y'\}$ jest řada ar. bodů, jsou ar. body x', y' lin. nezávislé, tedy $(x'y') \neq 0_p$ dle **97.**

Ze (2) plyne snadno, je-li z jakýkoli ar. bod,

$$(x'y'z) = \lambda (xyz).$$

Avšak $(xyz) = 0_r$, když a jen když z náleží do $\{x, y\}$; $(x'y'z) = 0_r$, když a jen když z náleží do $\{x', y'\}$. Odtud plyne (1).

100. Buď $\{x, y\}$ řada ar. bodů; buď $\{\xi, \eta\}$ svazek ar. rovin. Jest

(1) $$\{\xi, \eta\} = \mathrm{Adj.}\{x, y\},$$

když a jen když, klademe-li $(xy)=p$, $(\xi\eta)=\omega$, jest

(2) $$p^{(01)}:p^{(02)}:p^{(03)}:p^{(23)}:p^{(31)}:p^{(12)}=\omega^{(23)}:\omega^{(31)}:\omega^{(12)}:\omega^{(01)}:\omega^{(02)}:\omega^{(03)}.$$

Předpokládejme nejprve, že platí (1), takže

(3) $$Sx\xi=Sx\eta=Sy\xi=Sy\eta=0.$$

Ať jsou i, j kterékoli dvě (různé nebo stejné) z cifer 0, 1, 2, 3, položme

$$p^{(ij)}=\begin{vmatrix} x^{(i)} & x^{(j)} \\ y^{(i)} & y^{(j)} \end{vmatrix}, \qquad \omega^{(ij)}=\begin{vmatrix} \xi^{(i)} & \xi^{(j)} \\ \eta^{(i)} & \eta^{(j)} \end{vmatrix},$$

takže

$$p^{(ii)}=\omega^{(ii)}=p^{(ij)}+p^{(ji)}=\omega^{(ij)}+\omega^{(ji)}=0.$$

Ze (3) obdržíme snadno pro $i=0, 1, 2, 3$

$$\sum_{r=0}^{3} p^{(ir)}\xi_r=0, \qquad \sum_{r=0}^{3} p^{(ir)}\eta_r=0,$$

z čehož plyne pro $j=0, 1, 2, 3$

$$\sum_{r=0}^{3} p^{(ir)}\omega^{(jr)}=0.$$

Je-li i, j, r, s jakákoli permutace cifer 0, 1, 2, 3, je tedy

(4) $$p^{(ir)}\omega^{(jr)}+p^{(is)}\omega^{(js)}=0,$$

neboť v součtu Σ ty členy, pro něž $r=i$ nebo $r=j$, jsou rovny nule. Ze (4) vidíme, že jsou rovny nule všecky determinanty matice

$$\begin{pmatrix} p^{(01)} & p^{(02)} & p^{(03)} & p^{(23)} & p^{(31)} & p^{(12)} \\ \omega^{(23)} & \omega^{(31)} & \omega^{(12)} & \omega^{(01)} & \omega^{(02)} & \omega^{(03)} \end{pmatrix},$$

t. j. že platí (2).

Za druhé předpokládejme, že platí (2). Buď

(5) $$\{\xi', \eta'\}=\text{Adj.}\,\{x, y\},\quad \omega'=(\xi'\eta').$$

Dle toho, co jsme již dokázali, jest

(6) $$p^{(01)}:p^{(02)}:\ldots:p^{(12)}=\omega'^{(23)}:\omega'^{(31)}:\ldots:\omega'^{(03)}.$$

Ze (2) a (6) je patrné, že existuje λ takové, že $\omega'=\lambda\omega$. Tedy dle **99**

(7) $$\{\xi, \eta\}=\{\xi', \eta'\}.$$

Z (5) a (7) vychází (1).

101. Buď p ar. komplex prvního druhu; buď x ar. bod. Je-li

(1) $$\begin{aligned}\xi^{(0)} &= -p^{(23)}x^{(1)} - p^{(31)}x^{(2)} - p^{(12)}x^{(3)},\\ \xi^{(1)} &= p^{(23)}x^{(0)} - p^{(03)}x^{(2)} + p^{(02)}x^{(3)},\\ \xi^{(2)} &= p^{(31)}x^{(0)} + p^{(03)}x^{(1)} - p^{(01)}x^{(3)},\\ \xi^{(3)} &= p^{(12)}x^{(0)} - p^{(02)}x^{(1)} + p^{(01)}x^{(2)},\end{aligned}$$

klademe

$$(px) = \xi.$$

Pravíme, že ar. bod x a ar. komplex p jsou incidentní, když $(px) = 0_r$. Nulová přímka jest incidentní s každým ar. bodem. Je-li $\{x_1, x_2\}$ řada ar. bodů, a $p = (x_1 x_2)$, jest

(1) $$(px) = (x_1 x_2 x).$$

Ar. komplex $(x_1 x_2)$ a ar. bod x jsou pak incidentní, když a jen když x náleží do $\{x_1, x_2\}$.

Důkaz je zřejmý. Je-li ω ar. komplex druhého druhu a ξ ar. rovina, definujeme duálně symbol $(\omega\xi)$ a pravíme, že ω a ξ jsou incidentní, když $(\omega\xi) = 0_b$. Je-li $\omega = (\xi_1 \xi_2)$, jest

(2) $$(\omega\xi) = (\xi_1 \xi_2 \xi).$$

102. Teorém **100** vede nás k této definici: Je-li p ar. komplex prvého druhu a ω ar. komplex druhého druhu, klademe $p = \omega$, když a jen když

$$\begin{aligned}p^{(01)} &= \omega^{(23)}, & p^{(02)} &= \omega^{(31)}, & p^{(03)} &= \omega^{(12)},\\ p^{(23)} &= \omega^{(01)}, & p^{(31)} &= \omega^{(02)}, & p^{(12)} &= \omega^{(03)},\end{aligned}$$

Teorém **100** lze pak vysloviti takto: Buď $\{x, y\}$ řada ar. bodů, buď $\{\xi, \eta\}$ svazek ar. rovin. Jest

$$\{\xi, \eta\} = \text{Adj.}\,\{x, y\},$$

když a jen když existuje číslo λ takové, že

$$(\xi\eta) = \lambda\,(xy).$$

Ve všech předchozích definicích myslíme si nyní ar. komplex druhého druhu nahrazen jemu rovným ar. komplexem prvého druhu; následkem této dohody můžeme mluviti prostě o ar. komplexech, vynechávajíce atribut „prvého druhu“. Tak na př. z **96** (1) obdržíme tuto definici: Jsou-li p, q ar. komplexy, klademe

(1) $$Spq = p^{(01)}q^{(23)} + p^{(02)}q^{(31)} + p^{(03)}q^{(12)} + p^{(23)}q^{(01)} + p^{(31)}q^{(02)} + p^{(12)}q^{(03)};$$

pravíme, že p a q jsou incidentní, když $Spq = 0$.

Pouze na jednu okolnost je nutno upozorniti: Jsou-li p_i (ω_i) ar. komplexy prvého (druhého) druhu a je-li $p_i = \omega_i$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$, není

$$(p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5) = (\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5),$$

nýbrž

$$(p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5) + (\omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5) = 0.$$

Z identity **96**(2) plyne tedy

$$(2) \qquad (p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)^2 = -\begin{vmatrix} Sp_0p_0 & Sp_0p_1 & Sp_0p_2 & Sp_0p_3 & Sp_0p_4 & Sp_0p_5 \\ Sp_1p_0 & Sp_1p_1 & Sp_1p_2 & Sp_1p_3 & Sp_1p_4 & Sp_1p_5 \\ Sp_2p_0 & Sp_2p_1 & Sp_2p_2 & Sp_2p_3 & Sp_2p_4 & Sp_2p_5 \\ Sp_3p_0 & Sp_3p_1 & Sp_3p_2 & Sp_3p_3 & Sp_3p_4 & Sp_3p_5 \\ Sp_4p_0 & Sp_4p_1 & Sp_4p_2 & Sp_4p_3 & Sp_4p_4 & Sp_4p_5 \\ Sp_5p_0 & Sp_5p_1 & Sp_5p_2 & Sp_5p_3 & Sp_5p_4 & Sp_5p_5 \end{vmatrix}.$$

Z (1) se snadno obdrží: Jsou-li x_0, x_1, x_2, x_3 ar. body, jest

$$(3) \qquad S(x_0 x_1)(x_2 x_3) = (x_0 x_1 x_2 x_3);$$

jsou-li $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ ar. roviny, jest

$$(4) \qquad S(\xi_0 \xi_1)(\xi_2 \xi_3) = (\xi_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3).$$

103. Symbol Spq vede k důležité definici: Ar. komplex p nazývá se speciální, když $Spp = 0$. Speciální ar. komplex nazývá se často ar. přímka. Tak zejména jsme již v **95** ar. komplex 0_p nazvali nulovou přímkou. Důvod názvu ar. přímka je patrný ze **104.**

104. Buď p ar. komplex; když a jen když p jest ar. přímka, existují ar. body x, y takové, že $p = (xy)$.

Buď nejprve $p = (xy)$. Pak jest dle **102** (3) $S(xy)(xy) = 0$, t. j. (xy) jest ar. přímka.

Buď za druhé p ar. přímka, t. j. buď $Spp = 0$. Je-li $p = 0_p$, je dle **97** $p = (xy)$, jsou-li x, y lin. závislé ar. body. Buď tedy $p \neq 0_p$ a předpokládejme na př., že $p^{(23)} = 0$. Buď

$$x = |p^{(02)}, p^{(12)}, 0, -p^{(23)}|_b,$$
$$y = \frac{1}{p^{(23)}} |p^{(03)}, -p^{(31)}, p^{(23)}, 0|_b.$$

Z relace $Spp = 0$ plyne snadno $p = (xy)$.

Dle principu duality platí: Buď p ar. komplex; když a jen když p jest ar. přímka, existují ar. roviny ξ, η takové, že $p = (\xi\eta)$.

Ze **102** (3) plyne: Ar. přímky $(x_0 x_1)$, $(x_2 x_3)$ jsou incidentní, když a jen když ar. body x_0, x_1, x_2, x_3 jsou lin. závislé.

105. Souřadné ar. komplexy jsou zřejmě speciální; tedy: Každý ar. komplex dá se psáti jako součet ar. přímek. Dokonce však každý ar. komplex dá se psáti jako součet dvou ar. přímek. To plyne z věty:

Buďte p, q ar. komplexy; q buď speciální; p a q nebuďte incidentní. Pak existuje speciální ar. komplex q' takový, že

(1) $$p = q' + \lambda q.$$

Dle předpokladu jest

$$Spp \neq 0, \quad Spq \neq 0, \quad Sqq = 0.$$

Tedy

$$S(p - \lambda q)(p - \lambda q) = Spp - 2\lambda Spq.$$

Klademe-li tedy

$$\lambda = \frac{Spp}{2\,Spq},$$

jest $q' = p - \lambda q$ speciální ar. komplex a platí (1). Abychom odtud odvodili, že p lze psáti jako součet dvou ar. přímek, třeba nalézti ar. přímku q takovou, že $Spq \neq 0$. Zřejmě však stačí za q zvoliti některý (vhodný) souřadný ar. komplex.

Kolineace ar. komplexů.

106. Jsou-li x_0, x_1, x_2, x_3 ar. body, jest identicky

(1) $$[(x_0 x_1), (x_0 x_2), (x_0 x_3), (x_2 x_3), (x_3 x_1), (x_1 x_2)] = (x_0 x_1 x_2 x_3)^3.$$

Označme na okamžik A levou stranu identity (1). Klademe-li ve **102** (2)

$$p_0 = (x_0 x_1), \quad p_1 = (x_0 x_2), \quad p_2 = (x_0 x_3), \quad p_3 = (x_2 x_3), \quad p_4 = (x_3 x_1), \quad p_5 = (x_1 x_2),$$

obdržíme dle **102** (3)

$$A^2 = (x_0 x_1 x_2 x_3)^6,$$

čili

$$[A - (x_0 x_1 x_2 x_3)^3]\,[A + (x_0 x_1 x_2 x_3)^3] = 0.$$

Levá strana je součin dvou polynomů v 16 proměnných $x_i^{(k)}$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$); ježto tento součin jest identicky roven nule, jest aspoň jeden faktor identicky roven nule; pro $x_i^{(i)} = 1$, $x_i^{(k)} = 0$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$; $i \neq k$) je však druhý faktor roven 2, jak se snadno vypočte; je tedy prvý faktor identicky roven nule, t. j. platí (1).

Dle principu duality a dle poznámky učiněné ve (102) o symbolu **106** jest identicky, jsou-li ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 ar. roviny,

(2) $$[(\xi_0 \xi_1)(\xi_0 \xi_2)(\xi_0 \xi_3)(\xi_2 \xi_3), (\xi_3 \xi_1), (\xi_1 \xi_2)] = -(\xi_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3)^3.$$

107. Buď K kolineace ar. bodů. Existuje jedna a jen jedna kolineace K^* ar. komplexů taková, že, kdykoli $x \sim \bar{x}$, $y \sim \bar{y}$ v K, jest $(xy) \sim (\bar{x}\bar{y})$ v K^*. Pravíme, že kolineace K^* ar. komplexů jest asociována ke kolineaci K ar. bodů, a píšeme $K^* = \text{Ass. } K$.

Je-li μ modul K, jest μ^3 modul K^*. Jsou-li p, q ar. komplexy a je-li $p \sim \bar{p}$, $q \sim \bar{q}$ v K^*, jest $S\bar{p}\bar{q} = \mu Spq$.

Je-li $K' = \text{Adj. } K$ a je-li P podobnost ar. komplexů, v níž $p \sim \mu p$, jest $\text{Ass. } K = P. \text{ Ass. } K'$.

Buďte x_0, x_1, x_2, x_3 lin. nezávislé ar. body. Buď $x_i \sim \bar{x}_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ v K. Pak je patrně $(x_i x_k) \sim (\bar{x}_i \bar{x}_k)$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ v K^*. Dle (1) tedy modul K^* rovná se μ^3. Relace $S\bar{p}\bar{q} = \mu Spq$ plyne ze **102** (3) pro ten případ, že p a q jsou speciální ar. komplexy. Ježto každý ar. komplex je součet speciálních ar. komplexů (v. **105**), je tato relace správná obecně.

Buď $q \sim \bar{\bar{q}}$ v Ass. K'. Dle definice K' a dle **98** (1) jest $Spq = S\bar{p}\bar{\bar{q}}$ nejprve v případě, že ar. komplexy p, q jsou speciální; jako výše však vidíme, že i tato relace platí obecně. Srovnáme-li s relací $S\bar{p}\bar{q} = \mu Spq$, vidíme, že jest identicky v p: $S\bar{p}\bar{q} = \mu S\bar{p}\bar{\bar{q}}$. Odtud vychází, že $\bar{q} = \mu\bar{\bar{q}}$, t. j. že $\text{Ass. } K = P. \text{ Ass. } K'$.

108. Buď K korelace prvního druhu. Existuje jedna a jen jedna kolineace K^* ar. komplexů taková, že, kdykoli $x \sim \xi$, $y \sim \eta$ v K, jest $(xy) \sim (\xi\eta)$ v K^*. Pravíme, že kolineace K^* ar. komplexů jest asociována ke korelaci K a píšeme $K^* = \text{Ass. } K$.

Je-li μ modul K, jest $-\mu^3$ modul K^*. Jsou-li p, q ar. komplexy a je-li $p \sim \bar{p}$, $q \sim \bar{q}$ v K^*, jest $S\bar{p}\bar{q} = \mu Spq$.

Je-li $K' = \text{Adj. } K$ a je-li P podobnost ar. komplexů, v níž $p \sim \mu p$, jest $\text{Ass. } K = P. \text{ Ass. } K'$.

Že modul K^* rovná se $-\mu^3$, vychází ze **106** (1), (2). Jinak je důkaz stejný jako ve **107**.

Identity v trojrozměrném prostoru.

109. Jsou-li x_0, x_1, x_2, x_3 ar. body, platí identity

$$[(x_0 x_1 x_2),\ (x_0 x_1 x_3)] = (x_0 x_1 x_2 x_3)(x_0 x_1), \tag{1}$$

$$[(x_0 x_1 x_2),\ (x_0 x_2 x_3),\ (x_0 x_3 x_1)] = -(x_0 x_1 x_2 x_3)^2 x_0, \tag{2}$$

$$[(x_1 x_2 x_3),\ (x_0 x_2 x_3),\ (x_0 x_1 x_3),\ (x_0 x_1 x_2)] = (x_0 x_1 x_2 x_3)^3. \tag{3}$$

Identity (1), (2), (3) jsou zřejmé, když $(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$. Mimo to se snadno verifikují, když x_0, x_1, x_2, x_3 jsou souřadné ar. body. Abychom je dokázali obecně, stačí tedy ukázati, že, platí-li pro nějakou volbu ar.

bodů x_0, x_1, x_2, x_3 a je-li K kolineace ar. bodů, v níž $x_i \sim y_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, je také

(4) $$[(y_0 y_1 y_2), (y_0 y_1 y_3)] = (y_0 y_1 y_2 y_3)(y_0 y_1),$$

(5) $$[(y_0 y_1 y_2), (y_0 y_2 y_3), (y_0 y_3 y_1)] = -(y_0 y_1 y_2 y_3)^2 y_0,$$

(6) $$[(y_1 y_2 y_3), (y_0 y_2 y_3), (y_0 y_1 y_3)(y_0 y_1 y_2)] = (y_0 y_1 y_2 y_3)^3.$$

Buď μ modul K; buď $K' =$ Adj. K a $K^* =$ Ass. K. Položme

$$\xi_0 = (x_1 x_2 x_3), \quad \xi_1 = (x_0 x_2 x_3), \quad \xi_2 = (x_0 x_1 x_3), \quad \xi_3 = (x_0 x_1 x_2),$$

takže dle předpokladu

(7) $$(\xi_3 \xi_2) = (x_0 x_1 x_2 x_3)(x_0 x_1),$$

(8) $$(\xi_3 \xi_1 \xi_2) = (x_0 x_1 x_2 x_3)^2 x_0,$$

(9) $$(\xi_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3) = (x_0 x_1 x_2 x_3)^3.$$

Je-li $\xi_i \sim \eta_i$ v K', je dle **43** (1)

(10) $$\mu\eta_0 = (y_1 y_2 y_3), \quad \mu\eta_1 = (y_0 y_2 y_3), \quad \mu\eta_2 = (y_0 y_1 y_3), \quad \mu\eta_3 = (y_0 y_1 y_2).$$

Dle definice μ jest

(11) $$(y_0 y_1 y_2 y_3) = \mu (x_0 x_1 x_2 x_3).$$

Ježto modul K' jest μ^{-1} (v. **43**), jest

(12) $$(\eta_0 \eta_1 \eta_2 \eta_3) = \mu^{-1} (\xi_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3).$$

Z (9), (10), (11), (12) vychází (6). Dle **43** (2) jest v K

$$(\xi_3 \xi_1 \xi_2) \sim \mu (\eta_3 \eta_1 \eta_2),$$

takže dle (8)

(13) $$(\eta_3 \eta_1 \eta_2) = \mu^{-1} (x_0 x_1 x_2 x_3)^2 y_0.$$

Z (10), (11) a (13) vychází (5). Dle **107** jest v K^*

$$(x_0 x) \sim (y_0 y_1), (\xi_3 \xi_2) = \mu (\eta_3 \eta_2),$$

takže dle (7)

(14) $$\mu (\eta_3 \eta_2) = (x_0 x_1 x_2 x_3)(y_0 y_1).$$

Z (10), (11) a (14) vychází (4).

110. Jsou-li x_0, x_1, x_2, x_3 ar. body, jest identicky

(1) $$[(x_0 x_1)\ (x_0 x_2 x_3)] = -(x_0 x_1 x_2 x_3) x_0.$$

Jsou-li ar. body x_0, x_1, x_2, x_3 lin. závislé, je pravá strana (1) rovna 0_b. Totéž však platí o levé straně: Je-li $(x_0\, x_1) = 0_p$, je to zřejmé; je-li však $(x_0 x_1) \neq 0_p$, jest dle **101** a **102** $[(x_0\, x_1), \xi] = 0_b$, když ξ náleží do Adj. $\{x_0, x_1\}$. Je tedy třeba pouze ukázati, že $(x_0\, x_2\, x_3)$ náleží do Adj. $\{x_0, x_1\}$. Avšak $S(x_0\, x_2\, x_3)x_0 = (x_0\, x_2\, x_3\, x_0) = 0$, $S(x_0\, x_2\, x_3)x_1 = (x_0\, x_2\, x_3\, x_1) = 0$, tedy x_0 a x_1 jsou incidentní s $(x_0\, x_2\, x_3)$, t. j. $(x_0\, x_2\, x_3)$ náleží do Adj. $\{x_0, x_1\}$.

Buď tedy $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) \neq 0$. Dle **109** (1) jest

$$(x_0 x_1) = \frac{1}{(x_0 x_1 x_2 x_3)} [(x_0 x_1 x_2),\ (x_0 x_1 x_3)],$$

z čehož vidíme dle **101** (2), že

$$[(x_0 x_1),\ (x_0 x_2 x_3)] = \frac{1}{(x_0 x_1 x_2 x_3)} [(x_0 x_1 x_2), (x_0 x_1 x_3),\ (x_0 x_2 x_3)].$$

Dle **109** (2) je však

$$[(x_0 x_1 x_2),\ (x_0 x_1 x_3),\ (x_0 x_2 x_3)] = -(x_0 x_1 x_2 x_3)^2 x_0.$$

111. Buď p ar. komplex; buď x ar. bod. Je-li

(1) $$(px) = \xi,$$

jest

(2) $$(p\xi) = -\tfrac{1}{2} Spp \,.\, x.$$

Dle **105** (1) lze nalézti ar. body x_0, x_1, x_2, x_3 takové, že

(3) $$p = (x_0 x_1) + \lambda\,(x_2 x_3).$$

Není-li $p = 0_p$, kdy (2) je zřejmé, můžeme předpokládati, že $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) \neq 0$. Je-li totiž p speciální, můžeme zvoliti $p = (x_0\, x_1)$, $\lambda = 0$, a x_2, x_3 zvoliti tak, že $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) \neq 0$. Není-li však p speciální, je jistě $(x_0\, x_1\, x_2\, x_3) \neq 0$, neboť ze (3) plyne dle **102** (3)

(4) $$Spp = 2\lambda\,(x_0 x_1 x_2 x_3).$$

Buď nejprve $x = x_0$. Pak jest dle (3)

$$\xi_0 = (px_0) = \lambda\,(x_2 x_3 x_0)$$

a tedy dle (3), (4) a **110** (1)

$$(p\xi_0) = \lambda\,[(x_0 x_1)\,(x_0 x_2 x_3)] + \lambda^2\,[(x_2 x_3)\,(x_2 x_3 x_0)] = -\lambda\,(x_0 x_1 x_2 x_3)\,x_0 = -\tfrac{1}{2} Spp \,.\, x_0,$$

takže (2) platí pro $x = x_0$. Podobně se vidí, že (2) platí i pro $x = x_1, x_2, x_3$, a z toho snadno soudíme, že (2) platí i pro $x = \lambda_0\, x_0 + \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2 + \lambda_3\, x_3$, t. j. pro každý ar. bod x.

112. Buď p ar. komplex; buď x vlastní ar. bod. Jsou-li p a x incidentní, jest p ar. přímka a existuje ar. bod y takový, že $p = (xy)$.

Dle předpokladu jest $(px) = 0_r$, tedy dle **111** $Spp \cdot x = 0_b$. Ježto $x \neq 0_b$, jest $Spp = 0$, tedy dle **104** existují ar. body $\{x_1, x_2\}$ takové, že $p = (x_1\, x_2)$. Jsou-li x_1, x_2 lin. závislé, jest $p = 0_p$, tedy $p = (xy)$, zvolíme-li y lin. závislý na x. Je-li však $\{x_1, x_2\}$ řada ar. bodů, náleží x do $\{x_1, x_2\}$ dle **101** a tedy dle **13** existuje ar. bod z takový, že $\{x_1, x_2\} = \{x, z\}$. Dle **99** existuje pak λ takové, že $p = (x_1\, x_2) = \lambda\,(xz)$. Klademe-li $y = \lambda z$, máme $p = (xy)$.

Nulová korelace ($m=3$).

113. Buď p nespeciální ar. komplex. Přiřadíme-li každému ar. bodu x ar. rovinu (px), obdržíme korelaci prvého druhu K. Pravíme, že K jest nulová korelace o basi p. Modul K jest $\frac{1}{4}(Spp)^2$.

Duálně definuje se nulová korelace druhého druhu o basi p. Důvod názvu nulová korelace vysvitne ve **114.** Dle **105** (1) existují ar. body x_0, x_1, x_2, x_3 takové, že

(1) $$p=(x_0x_1)+(x_2x_3).$$

Z (1) plyne

(2) $$Spp=2(x_0x_1x_2x_3)\neq 0.$$

Ar. bodům x_0, x_1, x_2, x_3 příslušejí resp. ar. roviny

$$\xi_0=(px_0)=(x_2x_3x_0),\ \xi_1=(px_1)=(x_2x_3x_1),$$
$$\xi_2=(px_2)=(x_0x_1x_2),\ \xi_3=(px_3)=(x_0x_1x_3).$$

Dle **109** (3) je tedy

(3) $$(\xi_0\xi_1\xi_2\xi_3)=(x_0x_1x_2x_3)^3.$$

Jest $(\xi_0\,\xi_1\,\xi_2\,\xi_3)\neq 0$, tedy K je vskutku korelace. Ze (2) a (3) plyne

$$(\xi_0\xi_1\xi_2\xi_3)=\tfrac{1}{4}(Spp)^2(x_0x_1x_2x_3),$$

t. j. modul K jest $\frac{1}{4}(Spp)^2$, jak tvrzeno.

114. Buď K korelace prvního druhu. K jest nulová korelace, když a jen když z relace $x\sim\xi$ v K následuje $Sx\xi=0$.

Jsou-li x_0, x_1, x_2, x_3 lin. nezávislé ar. body a je-li v korelaci $K\,x_i\sim\xi_i$ $(i=0,1,2,3)$, jest K nulová korelace, když a jen když

(1) $$Sx_i\xi_i=0,\quad Sx_i\xi_k+Sx_k\xi_i=0. \qquad (i,k=0,1,2,3).$$

Buď $K'=\text{Adj.}\,K$. K jest nulová korelace, když a jen když z relace $x\sim\xi$ v K následuje $\xi\sim-x$ v K'.

Buď K korelace prvého druhu a buď v K

$$|1,\ 0,\ 0,\ 0|_b\sim|a_{00},\ a_{10},\ a_{20},\ a_{30}|_r,$$
$$|0,\ 1,\ 0,\ 0|_b\sim|a_{01},\ a_{11},\ a_{21},\ a_{31}|_r,$$
$$|0,\ 0,\ 1,\ 0|_b\sim|a_{02},\ a_{12},\ a_{22},\ a_{32}|_r,$$
$$|0,\ 0,\ 0,\ 1|_b\sim|a_{03},\ a_{13},\ a_{23},\ a_{33}|_r,$$

takže $x\sim\xi$ v K, když

(2) $$\begin{aligned}\xi^{(0)}&=a_{00}x^{(0)}+a_{01}x^{(1)}+a_{02}x^{(2)}+a_{03}x^{(3)},\\ \xi^{(1)}&=a_{10}x^{(0)}+a_{11}x^{(1)}+a_{12}x^{(2)}+a_{13}x^{(3)},\\ \xi^{(2)}&=a_{20}x^{(0)}+a_{21}x^{(1)}+a_{22}x^{(2)}+a_{23}x^{(3)},\\ \xi^{(3)}&=a_{30}x^{(0)}+a_{31}x^{(1)}+a_{32}x^{(2)}+a_{33}x^{(3)}.\end{aligned}$$

Dle definice jest K nulová korelace, když a jen když lze určiti ar. komplex p tak, aby rovnice (2) byly totožné r rovnicemi **101** (1). To dává zřejmě podmínky

(3) $$a_{ii}=0, \qquad a_{ik}+a_{ki}=0. \qquad (i, k=0, 1, 2, 3)$$

K týmž podmínkám však dospějeme, hledáme-li, kdy jest identicky v $x: Sx\xi=0$.

Je-li $(x_0 x_1 x_2 x_3) \neq 0$ a $x_i \sim \xi_i$ v K, jest $x \sim \xi$, když

$$x=\sum_{i=0}^{3} \lambda_i x_i, \qquad \xi=\sum_{k=0}^{3} \lambda_k \xi_k.$$

Odtud

$$Sx\xi=\sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} \lambda_i \lambda_k Sx_i \xi_k=\sum_{i=0}^{3} \lambda_i^2 Sx_i \xi_i+2\sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{i-1} \lambda_i \lambda_k S(x_i \xi_k+x_k \xi_i).$$

Je tedy identicky $Sx\xi=0$, když a jen když platí (1).

Buď K dána opět rovnicemi (2). Abychom nalezli, kdy jest identicky v x: $\xi \sim -x$ v Adj. K, musíme dle **45** nalézti, kdy z relací $x \sim \xi$, $y \sim \eta$ v K následuje $Sx\eta+Sy\xi=0$. Avšak dle (2)

$$\xi^{(i)}=\sum_{k=0}^{3} a_{ik} x^{(k)}, \qquad \eta^{(i)}=\sum_{k=0}^{3} a_{ik} y^{(k)},$$

tedy

$$Sx\eta+Sy\xi=\sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} a_{ik}(x^{(i)} y^{(k)}+x^{(k)} y^{(i)})=$$

$$=2\sum_{i=0}^{3} a_{ii} x^{(i)} y^{(i)}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=0}^{i-1} a_{ik}+a_{ki}(x^{(i)} y^{(k)}+x^{(k)} y^{(i)}).$$

Hledané podmínky jsou tedy opět (3).

115. Buď K (K') nulová korelace prvního (druhého) druhu o basi p. Buď P podobnost ar. bodů, v níž $x \sim \frac{1}{2}\, Spp \cdot x$. Pak jest $K'=\text{Adj. } K \cdot P$.

Buď $x \sim \xi=(px)$ v K. Dle **114** jest $\xi \sim -x$ v Adj. K, tedy $\xi \sim -\frac{1}{2} Spp \cdot x$ v Adj. $K \cdot P$. Dle **111** je však též $\xi \sim -\frac{1}{2} Spp \cdot x$ v K'.

Přímky ($m=3$).

116. Lineární systém $\{p\}$ ar. přímek dimense nula nazývá se geom. přímka, krátce přímka (v. **59**). Místo $\{(xy)\}$ píšeme zhusta kratčeji $\{xy\}$, což tedy má význam jiný než $\{x, y\}$. Pro lin. systém nespeciálních ar. komplexů dimense nula nezavádíme zvláštního jména. O bodu $\{x\}$ (o rovině $\{\xi\}$) pravíme, že jest incidentní s přímkou $\{p\}$, když ar. bod x (ar. rovina ξ) jest incidentní s ar. přímkou p. O přímkách $\{p\}$, $\{q\}$ pravíme, že jsou incidentní, když ar. přímky p, q jsou incidentní.

117. Pravíme, že přímka $\{xy\}$ a řada ar. bodů $\{x, y\}$ (řada bodová $\{x, y\}^{\sigma}$) jsou soumístné. Že jsme k této definici oprávněni, plyne z **99**. Dle **102** jest pak přímka $\{xy\}$ soumístná se svazkem ar. rovin $\{\xi_1, \xi_2\} =$ Adj. $\{x_1, x_2\}$ (se svazkem rovin $\{\xi_1, \xi_2\}$[5]). Dle **101** jest bod $\{x\}$ (rovina $\{\xi\}$) incidentní s přímkou $\{xy\}$, když a jen když náleží řadě bodové soumístné (svazku rovin soumístnému) s $\{xy\}$.

Pravíme, že přímka $\{xy\}$ je spojnice bodů $\{x\}$ a $\{y\}$; pravíme, že přímka $\{\xi\eta\}$ je průsečnice rovin $\{\xi\}$ a $\{\eta\}$.

118. Bod $\{x\}$ a přímka $\{p\}$ nebuďte incidentní. Rovina $\{(px)\}$ nazývá se spojnice bodu $\{x\}$ a přímky $\{p\}$. Je-li $\{x_1, x_2\}$ řada ar. bodů soumístná s $\{p\}$, vidíme ze **101** (1), že pole ar. bodů Adj. $\{(px)\}$ je spojení řady ar. bodů $\{x_1, x_2\}$ a bodu $\{x\}$. Dle **26** jest $\{(px)\}$ průřez trsu ar. rovin Adj. $\{x\}$ a svazku ar. rovin Adj. $\{x_1, x_2\}$.

Rovina $\{\xi\}$ a přímka $\{p\}$ nebuďte incidentní. Bod $\{(p\xi)\}$ nazývá se průsečík roviny $\{\xi\}$ a přímky $\{p\}$. Je-li $\{\xi_1, \xi_2\}$ svazek ar. rovin soumístný s $\{p\}$, je trs ar. rovin Adj. $\{(p\xi)\}$ spojením svazku ar. rovin $\{\xi_1, \xi_2\}$ a roviny $\{\xi\}$. Bod $\{(p\xi)\}$ je průřez pole ar. bodů Adj. $\{\xi\}$ a řady ar. bodů Adj. $\{\xi_1, \xi_2\}$.

119. Buďte $\{p\}$, $\{q\}$ dvě různé přímky. Nejsou-li $\{p\}$ a $\{q\}$ incidentní, neexistuje žádný bod ani žádná rovina incidentní s $\{p\}$ i s $\{q\}$. Jsou-li $\{p\}$ a $\{q\}$ incidentní, existuje jeden a jen jeden bod $\{x\}$ a jedna a jen jedna rovina $\{\xi\}$ incidentní s $\{p\}$ i s $\{q\}$; pravíme pak, že bod $\{x\}$ je průsečík přímek $\{p\}$ a $\{q\}$ a že rovina $\{\xi\}$ je spojnice přímek $\{p\}$ a $\{q\}$; bod $\{x\}$ a rovina $\{\xi\}$ jsou incidentní.

Buďte $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$ řady ar. bodů soumístné resp. s $\{p\}$, $\{q\}$, tedy různé. Dle **117** je bod $\{x\}$ incidentní s $\{p\}$ i s $\{q\}$, když a jen když jest obsažen v $\{x_1, x_2\}$ i v $\{y_1, y_2\}$. Nejsou-li přímky $\{p\}$, $\{q\}$ incidentní, jsou ar. body x_1, x_2, y_1, y_2 lin. nezávislé dle **104**, spojením řad ar. bodů $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$ jest prostor a tedy dle **17** jejich průřezem je nulový bod. Jsou-li však přímky $\{p\}$, $\{q\}$ incidentní, jsou ar. body x_1, x_2, x_3, x_4 lin. závislé, spojení obou řad ar. bodů je pak zřejmě pole ar. bodů a tedy průřezem jest bod $\{x\}$. Duálně se vidí, že spojnice incidentních přímek $\{p\}$, $\{q\}$ jest průřez svazků ar. rovin Adj. $\{x_1, x_2\}$ a Adj. $\{y_1, y_2\}$. Tedy Adj. $\{\xi\}$ obsahuje $\{x\}$, t. j. $\{x\}$ a $\{\xi\}$ jsou incidentní.

120. Buďte $\{p\}$, $\{q\}$ dvě různé incidentní přímky; buď $\{x\}$ jejich průsečík a $\{\xi\}$ jejich spojnice. Pak jest

$$
\begin{array}{lll}
 & \lambda x^{(1)} \xi^{(0)} = p^{(12)} q^{(31)} - p^{(31)} q^{(12)}, & \lambda x^{(0)} \xi^{(2)} = p^{(03)} q^{(01)} - p^{(01)} q^{(03)}, \\
 & \lambda x^{(2)} \xi^{(0)} = p^{(23)} q^{(12)} - p^{(12)} q^{(23)}, & \lambda x^{(1)} \xi^{(2)} = p^{(01)} q^{(31)} - p^{(31)} q^{(01)}, \\
 & \lambda x^{(3)} \xi^{(0)} = p^{(31)} q^{(23)} - p^{(23)} q^{(31)}, & \lambda x^{(3)} \xi^{(2)} = p^{(03)} q^{(31)} - p^{(31)} q^{(03)}, \\
(1) & \lambda x^{(0)} \xi^{(1)} = p^{(02)} q^{(03)} - p^{(03)} q^{(02)}, & \lambda x^{(0)} \xi^{(3)} = p^{(01)} q^{(02)} - p^{(02)} q^{(01)}, \\
 & \lambda x^{(2)} \xi^{(1)} = p^{(02)} q^{(23)} - p^{(23)} q^{(02)}, & \lambda x^{(1)} \xi^{(3)} = p^{(01)} q^{(12)} - p^{(12)} q^{(01)}, \\
 & \lambda x^{(3)} \xi^{(1)} = p^{(03)} q^{(23)} - p^{(23)} q^{(03)}, & \lambda x^{(2)} \xi^{(3)} = p^{(02)} q^{(12)} - p^{(12)} q^{(02)}.
\end{array}
$$

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
2\lambda x^{(0)}\xi^{(0)} &= -p^{(01)}q^{(23)}+p^{(23)}q^{(01)}-p^{(31)}q^{(02)}+p^{(02)}q^{(31)}+p^{(03)}q^{(12)}-p^{(12)}q^{(03)},\\
2\lambda x^{(1)}\xi^{(1)} &= -p^{(01)}q^{(23)}+p^{(23)}q^{(01)}+p^{(31)}q^{(02)}-p^{(02)}q^{(31)}-p^{(03)}q^{(12)}+p^{(12)}q^{(03)},\\
2\lambda x^{(2)}\xi^{(2)} &= p^{(01)}q^{(23)}-p^{(23)}q^{(01)}-p^{(31)}q^{(02)}+p^{(02)}q^{(31)}-p^{(03)}q^{(12)}+p^{(12)}q^{(03)},\\
2\lambda x^{(3)}\xi^{(3)} &= p^{(01)}q^{(23)}-p^{(23)}q^{(01)}+p^{(31)}q^{(02)}-p^{(02)}q^{(31)}+p^{(03)}q^{(12)}-p^{(12)}q^{(03)}.
\end{aligned}
$$

O čísle λ nemůžeme ovšem tvrditi nic více, než že jest různé od nuly. Vskutku, je-li na př. $\xi' = \mu\xi$, $\mu \neq 0$, jest $\{\xi\} = \{\xi'\}$. Ze **112** vidíme, že existují ar. body y, z takové, že $p = (xy)$, $q = (xz)$. Zřejmě můžeme předpokládati, že $\xi = (xyz)$. Ukážeme, že pak v rovnicích (1) jest $\lambda = 1$. Položme

$$\bar{x} = |x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}|_b, \qquad \bar{y} = |y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}|_b, \qquad \bar{z} = |z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}|_b.$$

Snadno nalezneme

$$(\bar{x}\bar{y}\bar{z}) = -\xi^{(0)},$$

$$(\bar{x}\bar{y}) = |p^{(23)}, p^{(31)}, p^{(12)}|_b,$$

$$(\bar{x}\bar{z}) = |q^{(23)}, q^{(31)}, q^{(12)}|_b,$$

takže

$$[(\bar{x}\bar{y}), (\bar{x}\bar{z})] = |p^{(31)}q^{(12)} - p^{(12)}q^{(31)},\ p^{(12)}q^{(23)} - p^{(23)}q^{(12)},\ p^{(23)}q^{(31)} - p^{(31)}q^{(23)}|_r.$$

Dle **89** (1) je však

$$[(\bar{x}\bar{y}), (\bar{x}\bar{z})] = (\bar{x}\bar{y}\bar{z})\,\bar{x}.$$

Odtud vycházejí prvé 3 rovnice (1) s $\lambda = 1$. Podobně dokáží se ostatní rovnice (1).

Ježto $Sx\xi = 0$, jest

$$(3)\qquad \lambda x^{(0)}\xi^{(0)} + \lambda x^{(1)}\xi^{(1)} + \lambda x^{(2)}\xi^{(2)} + \lambda x^{(3)}\xi^{(3)} = 0.$$

Dále jest

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
p^{(01)}q^{(23)} - p^{(23)}q^{(01)} &= \lambda(x^{(2)}\xi^{(2)} + x^{(3)}\xi^{(3)}) = -\lambda(x^{(0)}\xi^{(0)} + x^{(1)}\xi^{(1)}),\\
p^{(31)}q^{(02)} - p^{(02)}q^{(31)} &= \lambda(x^{(1)}\xi^{(1)} + x^{(3)}\xi^{(3)}) = -\lambda(x^{(0)}\xi^{(0)} + x^{(2)}\xi^{(2)}),\\
p^{(03)}q^{(12)} - p^{(12)}q^{(03)} &= \lambda(x^{(0)}\xi^{(0)} + x^{(3)}\xi^{(3)}) = -\lambda(x^{(1)}\xi^{(1)} + x^{(2)}\xi^{(2)}).
\end{aligned}
$$

Odvoďme na př. prvou rovnici (4), předpokládajíce, že $x^{(0)} \neq 0$, $\xi^{(1)} \neq 0$. Podobně odvodí se všecky rovnice (4) ve všech možných případech. Zřejmě jest identicky

$$
\begin{aligned}
&(p^{(01)}q^{(02)} - q^{(01)}p^{(02)})(p^{(23)}q^{(03)} - q^{(23)}p^{(03)}) +\\
&+ (p^{(01)}q^{(23)} - q^{(01)}p^{(23)})(p^{(03)}q^{(02)} - q^{(03)}p^{(02)}) +\\
&+ (p^{(02)}q^{(23)} - q^{(02)}p^{(23)})(p^{(01)}q^{(03)} - q^{(01)}p^{(03)}) = 0.
\end{aligned}
$$

Dosadíme-li z (1), obdržíme

$$\lambda^2 x^{(0)}x^{(3)}\xi^{(1)}\xi^{(3)} + \lambda x^{(0)}\xi^{(1)}[p^{(01)}q^{(23)} - p^{(23)}q^{(01)}] + \lambda^2 x^{(0)}x^{(2)}\xi^{(1)}\xi^{(2)} = 0,$$

z čehož plyne prvá rovnice (4). Ze (3) a (4) vychází (2).

121. Lin. systém ar. přímek dimense 1 nazývá se svazek ar. přímek. Lin. systém $\{p, q\}$ ar. komplexů jest svazek ar. přímek, když a jen když p a q jsou lin. nezávislé incidentní ar. přímky, tedy, když $\{p, q\}$ jest dimense 1 a

$$Spp = Spq = Sqq = 0. \tag{1}$$

Je-li $\{p, q\}$ svazek ar. přímek, existuje jeden a jen jeden bod $\{x\}$ a jedna a jen jedna rovina $\{\xi\}$ incidentní se všemi přímkami obsaženými v $\{p, q\}$; pravíme, že $\{x\}$ je střed a $\{\xi\}$ základní rovina svazku ar. přímek $\{p, q\}$. Střed a základní rovina svazku ar. přímek jsou incidentní. Obráceně, jsou-li bod $\{x\}$ a rovina $\{\xi\}$ incidentní, existuje jeden a jen jeden svazek ar. přímek o středu $\{x\}$ a základní rovině $\{\xi\}$; značíme jej někdy $\{x; \xi\}$.

Množství přímek obsažených ve svazku ar. přímek $\{p, q\} = \{x; \xi\}$ o středu $\{x\}$ a základní rovině $\{\xi\}$ nazývá se svazek přímek; označení $\{p, q\}^{\mathrm{r}} = \{x; \xi\}^{\mathrm{r}}$; bod $\{x\}$ (rovina $\{\xi\}$) nazývá se střed (základní rovina) svazku $\{x; \xi\}^{\mathrm{r}}$.

Buď $\{p, q\}$ lin. systém ar. komplexů dimense 1. Každý ar. komplex z $\{p, q\}$ je speciální, je-li identicky v λ_1, λ_2.

$$S(\lambda_1 p + \lambda_2 q)(\lambda_1 p + \lambda_2 q) = \lambda_1^2 Spp + 2\lambda_1\lambda_2 Spq + \lambda_2^2 Sqq = 0,$$

t. j. platí-li rovnice (1). Buď $\{x\}$ průsečík a $\{\xi\}$ spojnice přímek $\{p\}$, $\{q\}$, takže $\{x\}$ a $\{\xi\}$ jsou incidentní dle **119**. Ježto

$$(\lambda_1 p + \lambda_2 q,\ x) = \lambda_1 (px) + \lambda_2 (qx)$$

jest $\{x\}$ incidentní s každou přímkou obsaženou v $\{p_1, p_2\}$; stejně $\{\xi\}$.

Je-li rovina $\{\xi\}$ incidentní s bodem $\{x\}$, buď $S = \text{Adj.}\ \{\xi\}$. Ježto x náleží do S, existují dle **13** ar. body y a z takové, že $S = \{x, y, z\}$. Buď $p = (xy)$, $q = (xz)$. Patrně $\{p, q\}$ je svazek ar. přímek o středu $\{x\}$ a základní rovině $\{\xi\}$. Snadno se však též vidí, že každá přímka $\{r\}$ incidentní s $\{x\}$ i s $\{\xi\}$ náleží do $\{p, q\}^{\mathrm{r}}$. Ježto r jest incidentní s x, existuje dle **112** ar. bod X takový, že $r = (xX)$. Ježto r jest incidentní s ξ, náleží ξ dle **117** do Adj. $\{x, X\}$, tedy $S\xi X = 0$, t. j. X náleží do S, takže

$$X = \lambda x + \mu y + \nu z,$$

$$r = \mu(xy) + \nu(xz) = \mu p + \nu q.$$

122. Jsou-li p, q; p', q' dvě dvojice ar. přímek a jsou-li vždy obě přímky téže dvojice incidentní, ale lin. nezávislé, píšeme

$$(p, q) = (p', q'), \tag{1}$$

je-li

(2) $$p' = \lambda_1 p + \lambda_2 q, \qquad q' = \mu_1 p + \mu_2 q,$$
$$\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1.$$

Symbol (p, q) je tedy jen potud definován, že jest předepsáno, kdy dva symboly tohoto druhu jest považovati za rovné; totéž platí o symbolu $(x; \xi)$: Jsou-li p, q lin. nezávislé incidentní ar. přímky, je-li x ar. bod a ξ ar. rovina, píšeme

(3) $$(p, q) = (x; \xi),$$

platí-li rovnice **120** (1), v nichž $\lambda = 1$.

Zřejmě jest $\{p, q\} = \{p', q'\}$, platí-li (1); ne však naopak. Platí-li (3), jest $\{p, q\} = \{x; \xi\}$; ne však naopak.

Ze **120** (1) jest patrno, že, abychom o rovnosti právě definované mohli tvrditi, že dva výrazy rovné třetímu jsou si rovny, je nutné a stačí definovati dále:

Jsou-li x, x' vlastní ar. body a ξ, ξ' vlastní ar. roviny a je-li $Sx\xi = Sx'\xi' = 0$, klademe

(4) $$(x; \xi) = (x'; \xi'),$$

je-li

(5) $$x' = \lambda x; \ \xi = \lambda \xi'.$$

123. Množství všech ar. přímek incidentních s bodem $\{x\}$ nazývá se trs ar. přímek; bod $\{x\}$ nazývá se střed trsu. Množství všech ar. přímek incidentních s rovinou $\{\xi\}$ nazývá se pole ar. přímek; rovina $\{\xi\}$ nazývá se základní rovina pole. Trs ar. přímek (pole ar. přímek) jest lin. systém ar. přímek dimense 2. Lineární systém ar. přímek dimense 2 jest buď trs ar. přímek nebo pole ar. přímek. Průřez dvou různých trsů (polí) ar. přímek jest přímka. Průřez pole ar. přímek a trsu ar. přímek jest nulová přímka (svazek přímek), když základní rovina pole a střed trsu nejsou (jsou) incidentní. Množství všech přímek obsažených v trsu ar. přímek o středu $\{x\}$ (v poli ar. přímek o základní rovině $\{\xi\}$) nazývá se trs přímek o středu $\{x\}$ (pole přímek o základní rovině $\{\xi\}$).

Dle **112** vidíme, že místo „množství všech ar. přímek" bylo lze říci „množství všech ar. komplexů". Opět dle **112**, je-li p ar. přímka trsu o středu $\{x\}$, existuje ar. bod y takový, že $p = (xy)$. Buďte x_1, x_2, x_3 ar. body takové, že $(x x_1 x_2 x_3) \neq 0$. Pak

$$y = \lambda x + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$
$$p = \lambda_1 (x x_1) + \lambda_2 (x x_2) + \lambda_3 (x x_3),$$

takže daný trs jest lin. systém

$$\{(xx_1), (xx_2), (xx_3)\}.$$

Duálně vidíme, že pole ar. přímek jest lin. systém.

Buď nyní $\{p, q, r\}$ lin. systém dimense 2 ar. přímek. Jako ve **121** vidíme, že každé dvě z přímek $\{p\}$, $\{q\}$, $\{r\}$ jsou incidentní. Buď $\{x\}$, $\{\xi\}$ resp. průsečík a spojnice přímek $\{q\}$, $\{r\}$; stejný význam mějte $\{y\}$, $\{\eta\}$ pro $\{p\}$, $\{r\}$ a $\{z\}$, $\{\zeta\}$ pro $\{p\}$, $\{q\}$. Lin. systém $\{x, y, z\}$ je buď dimense 2 nebo dimense nula. Vskutku, kdyby byl $\{x, y, z\}$ dimense 1, byl by zřejmě soumístný s každou z přímek $\{p\}$, $\{q\}$, $\{r\}$ a bylo by $\{p\} = \{q\} = \{r\}$. Je-li $\{x, y, z\}$ dimense nula, jest $\{x\} = \{y\} = \{z\}$ a $\{p, q, r\}$ je zřejmě trs ar. přímek o středu $\{x\}$. Buď nyní $\{x, y, z\}$ dimense 2, takže body $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$ jsou lin. nezávislé a tedy různé. Ježto na př. $\{p\}$ jest incidentní s $\{y\}$ i $\{z\}$, je dle **117** $\{p\}$ soumístná s $\{y, z\}$ a tedy $\{p\} = \{yz\}$. Podobně $\{q\} = \{xz\}$, $\{r\} = \{xy\}$, takže

$$\{p, q, r\} = \{(yz), (xz), (xy)\},$$

což je zřejmě pole ar. přímek o základní rovině $\{(xyz)\}$.

Tvrzení o průřezu dvou lin. systémů ar. přímek dimense 2 jsou zřejmá.

124. N e e x i s t u j e ž á d n ý l i n. s y s t é m a r. p ř í m e k d i m e n s e ≥ 3.

Stačí ukázati, že dimense nemůže býti rovna 3. Buď $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ lin. systém ar. přímek dimense 3. Pak $S_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$, $S_2 = \{p_0, p_1, p_3\}$, $S_3 = \{p_0, p_2, p_3\}$ jsou lin. systémy ar. přímek dimense 2. Dle **123** jest S_1 buď trs nebo pole ar. přímek. Buď S_1 na př. trs ar. přímek. Dle **17** dimense průřezu S_1 a S_2 (S_3) jest 1; tedy dle **123** S_2 a S_3 jsou pole ar. přímek; dle **123** tedy dimense průřezu S_2 a S_3 jest 0, což dle **17** je nemožné.

Reguly.

125. B u ď $S = \{p_0, p_1, p_2\}$ l i n. s y s t é m a r. k o m p l e x ů d i m e n s e 2. J e-l i p r ů ř e z S a Adj. S r o v e n 0_p, p r a v í m e, ž e l i n. s y s t é m S j e s t o b e c n ý; Adj. S j e p a k t a k é o b e c n ý. S j e s t o b e c n ý, k d y ž a j e n k d y ž

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} Sp_0p_0 & Sp_0p_1 & Sp_0p_2 \\ Sp_1p_0 & Sp_1p_1 & Sp_1p_2 \\ Sp_2p_0 & Sp_2p_1 & Sp_2p_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aby $p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ byla ar. přímka z průřezu S a Adj. S, je nutné a stačí, aby bylo $Sp_0 p = Sp_1 p = Sp_2 p = 0$ čili

$$(2) \qquad \begin{aligned} \lambda_0 Sp_0p_0 + \lambda_1 Sp_0p_1 + \lambda_2 Sp_0p_2 = 0, \\ \lambda_0 Sp_1p_0 + \lambda_1 Sp_1p_1 + \lambda_2 Sp_1p_2 = 0, \\ \lambda_0 Sp_2p_0 + \lambda_1 Sp_2p_1 + \lambda_2 Sp_2p_2 = 0. \end{aligned}$$

S jest obecný, když a jen když z (2) následuje $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, t. j. když platí (1).

126. Buď $S = \{p_0, p_1, p_2\}$ obecný lin. systém ar. komplexů dimense 2. Obsahuje-li S aspoň jednu přímku, nazývá se množství R_2 všech přímek obsažených v S regulus, určitěji regulus obsažený v S. Regulus obsahuje nekonečné množství přímek. Dvě různé přímky téhož regulu nejsou incidentní.

Aby ar. komplex $p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ byl speciální, je nutné a stačí, aby bylo $Spp = 0$, t. j.

(1) $$\lambda_1^2 Sp_0 p_0 + \lambda_1^2 Sp_1 p_1 + \lambda_2^2 Sp_2 p_2 + 2\lambda_0\lambda_1 Sp_0 p_1 + 2\lambda_0\lambda_2 Sp_0 p_2 + 2\lambda_1\lambda_2 Sp_1 p_2 = 0.$$

Dle předpokladu existuje aspoň jeden dvojrozměrný bod $\{|\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2|_b\}$, pro nějž platí (1). Dle **125** (1) a **60** existuje tedy nekonečně mnoho takových bodů, t. j. R_2 obsahuje nekonečně mnoho přímek. Jsou-li $\{p\}$, $\{q\}$ dvě různé přímky regulu R_2, jest $Spq \neq 0$. Vskutku, bez újmy obecnosti můžeme předpokládati, že $p = p_0$, $q = p_1$, tedy $Sp_0 p_0 = Sp_1 p_1 = 0$. Kdyby bylo také $Sp_0 p_1 = 0$, nebyla by splněna nerovnost **125** (1), neboť všecky prvky prvého řádku determinantu na levé straně byly by rovny nule.

127. Buď S obecný lin. systém ar. komplexů dimense 2, obsahující regulus R_2; buď $S' = \text{Adj. } S$. Také S' obsahuje regulus R'_2. Pravíme, že reguly R_2, R'_2 jsou komplementární. Regulus R'_2 jest množství přímek incidentních s každou přímkou regulu R_2.

Běží pouze o to, ukázati, že S' obsahuje aspoň jednu přímku. Buď $\{p\}$ přímka regulu R_2. Buď $\{x\}$ bod incidentní s $\{p\}$ a buď Σ trs ar. přímek o středu $\{x\}$. Zřejmě $\{p\}$ jest obsažena v průřezu S a Σ, tedy dle **17** dimense spojení S a Σ jest $\leqq 4$. Tedy dle **24** a **26** průřez Adj. S a Adj. Σ má dimensi $\geqq 0$. Zřejmě však Adj. $\Sigma = \Sigma$, tedy dimense průřezu S' a Σ jest $\geqq 0$. Buď tedy lin. systém $\{q\}$ obsažen v tomto průřezu. Ježto $\{q\}$ jest obsažen v Σ, je to přímka. Tedy S' obsahuje aspoň jednu přímku.

128. Buďte x_0, x_1, x_2, x_3 lin. nezávislé ar. body. Množství přímek

(1) $$\{(\lambda x_0 + \mu x_1, \quad \lambda x_2 + \mu x_3)\}$$

jest regulus R_2. Množství přímek

(2) $$\{(\lambda x_0 + \mu x_2, \quad \lambda x_1 + \mu x_3)\}$$

jest regulus R'_2 komplementární k R_2. Každá dvojice komplementárních regulů dá se takto vytvořiti. Při tom můžeme ještě předepsati, aby $\{x_0 x_2\}$, $\{x_1 x_3\}$ byly dvě libovolně zvolené přímky regulu R_2 a aby $\{x_0 x_1\}$, $\{x_2 x_3\}$ byly dvě libovolně zvolené přímky regulu R'_2.

Zřejmě R_2 jest regulus určený lin. systémem ar. komplexů

(3) $$\{(x_0 x_2),\ (x_0 x_3) + (x_1 x_2),\ (x_1 x_3)\}.$$

Vskutku ar. komplex

$$p = \lambda_0 (x_0 x_2) + \lambda_1 [(x_0 x_3) + (x_1 x_2)] + \lambda_2 (x_1 x_3)$$

je speciální, když a jen když

$$Spp = 2 (\lambda_1^2 - \lambda_0 \lambda_2)(x_0 x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Zřejmě však lze určiti $|\lambda, \mu|_b \neq 0$, tak, že $\lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 = \lambda^2 : \lambda\mu : \mu^2$, když a jen když $\lambda_1^2 - \lambda_0 \lambda_2 = 0$.

Lineární systémy (3) a

$$\{x_0 x_1),\ (x_0 x_3) - (x_1 x_2),\ (x_2 x_3)\}$$

jsou zřejmě adjungované. Tedy R_2 a R'_2 jsou komplementární.

Buďte nyní R_2 a R'_2 dva komplementární reguly. Buďte $\{p\}$, $\{q\}$ dvě přímky regulu R_2 a $\{p'\}$, $\{q'\}$ dvě přímky regulu R'_2. Dle **127** přímky $\{p\}$, $\{p'\}$ jsou incidentní; buď tedy $\{y_0\}$ jejich průsečík. Podobně buď $\{y_1\}$; $\{y_2\}$; $\{y_3\}$ resp. průsečík $\{q\}$ a $\{p'\}$; $\{p\}$ a $\{q'\}$; $\{q\}$ a $\{q'\}$. Kdyby $\{y_0\}$, $\{y_1\}$, $\{y_2\}$, $\{y_3\}$ byly lin. závislé, byly by, jak snadno se vidí, buď $\{p\}$ a $\{q\}$ nebo $\{p'\}$ a $\{q'\}$ incidentní, což je nemožné dle **126**. Tedy jest $(y_0 y_1 y_2 y_3) \neq 0$.

Je-li tedy $S = \{p, q, r\}$ lin. systém ar. komplexů dimense 2 obsahující R_2, můžeme položiti

$$p = (y_0 y_2), \qquad q = (y_3 y_1), \qquad p' = (y_0 y_1), \qquad q' = (y_2 y_3),$$
$$r' = \lambda_{01} (y_0 y_1) + \lambda_{02} (y_0 y_2) + \lambda_{03} (y_0 y_3) + \lambda_{23} (y_2 y_3) + \lambda_{31} (y_3 y_1) + \lambda_{12} (y_1 y_2);$$

vskutku ar. komplexy $(y_0 y_1), \ldots (y_1 y_2)$ jsou lin. nezávislé dle **106** (1). Pak jest

$$Sr'p' = \lambda_{23} (y_0 y_1 y_2 y_3), \quad Sr'q' = \lambda_{01} (y_0 y_1 y_2 y_3).$$

Avšak $Sr'p' = Sr'q' = 0$, ježto p' a q' náležejí do Adj. S a tedy $\lambda_{01} = \lambda_{23} = 0$,

$$r' = \lambda_{02} p + \lambda_{31} q + r,$$

kde

$$r = \lambda_{03} (y_0 y_3) + \lambda_{12} (y_1 y_2).$$

Jest $\lambda_{12} \neq 0$, neboť jinak by $\{p\}$ a $\{r\}$ byly dvě incidentní přímky regulu R_2, což jest nemožné. Stejně vidíme, že $\lambda_{03} \neq 0$. Položíme-li

$$x_0 = y_0, \qquad x_1 = \lambda_{12} y_1, \qquad x_2 = y_2, \qquad x_3 = \lambda_{03} y_3,$$

bude zřejmě S roven (3) a regulus R_2 bude obsahovati přímky (1). Dle předešlého R'_2 bude pak obsahovati přímky (2).

129. Buďte R_2, R'_2 komplementární reguly. Buďte $\{p\}$, $\{q\}$ dvě přímky regulu R_2. Buďte $\{x_0, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$ řady ar. bodů soumístné resp. s $\{p\}$, $\{q\}$. Buď T prostor jednorozměrných ar. bodů. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi $\{x_0, x_2\}$ a T. Existuje projektivní korespondence $\mathfrak{K}'$ mezi $\{x_1, x_3\}$ a T taková, že, kdykoli $x \sim \bar{x}$ v $\mathfrak{K}$ a $x' \sim \bar{x}$ v $\mathfrak{K}'$, přímka $\{xx'\}$ náleží regulu R'_2.

Dle **128** můžeme předpokládati, že přímky R_2, R'_2 jsou resp. **128** (1), (2). Je-li v $\mathfrak{K}$

$$x_0 \sim \bar{x}_0, \quad x_2 \sim \bar{x}_1,$$

stačí patrně zvoliti $\mathfrak{K}'$ tak, že v $\mathfrak{K}'$ jest

$$x_1 \sim \bar{x}_0, \quad x_3 \sim \bar{x}_1.$$

Věta právě dokázaná umožňuje přenášeti definice a teorémy invariantní při kolineacích z T na R'_2. Tak na př.: Množství párů přímek regulu R'_2 nazývá se involuce, když množství párů průsečíků s jednou (a tedy s kteroukoli, dle právě dokázané věty) přímkou regulu R_2 komplementárního k R'_2 jest involuce. Podobně definujeme dva harmonické páry přímek regulu R'_2.

130. Buď R_2 regulus. Množství bodů incidentních s některou přímkou regulu R_2 jest obecná kvadrika; značíme ji MR_2. Je-li R'_2 regulus komplementární k R_2. jest $MR'_2 = MR_2$.

Jsou-li **128** (1), (2) resp. přímky regulů R_2, R'_2, a je-li $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ duální jehlan adjungovaný k x_0, x_1, x_2, x_3, snadno se nalezne, že

$$MR_2 = MR'_2 = M[P_r],$$

kde

$$P_r = \xi_0 \xi_3 - \xi_1 \xi_2.$$

131. Buď $S = \{p_0, p_1, p_2\}$ lin. systém ar. komplexů dimense 2. S nebuď trs ar. přímek ani pole ar. přímek. Buď S neobsahuje žádnou přímku; nebo množství přímek obsažených v S je regulus; nebo toto množství skládá se ze dvou svazků $\{x_1; \xi_1\}^\Gamma$, $\{x_2; \xi_2\}^\Gamma$, takových, že buď $\{x_1\} = \{x_2\}$ nebo $\{\xi_1\} = \{\xi_2\}$ nebo $\{x_1 x_2\} = \{\xi_1 \xi_2\}$; nebo je to svazek přímek; nebo je to jediná přímka.

Je-li průřez S a Adj. S roven 0_p, je věta zřejmá ze **125** a **126**. Můžeme tedy předpokládati, že p_0 náleží do Adj. S, takže

$$Sp_0 p_0 = Sp_0 p_1 = Sp_0 p_2 = 0,$$

a je-li $p = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$,

$$Spp = Sp_1 p_1 . \lambda_1^2 + 2 Sp_1 p_2 . \lambda_1 \lambda_2 + Sp_2 p_2 . \lambda_2^2.$$

Pravá strana není identicky rovna nule, neboť pak by všecky ar. komplexy z S byly speciální a S by byl dle **123** buď trs nebo pole přímek. Rovnice

$$(1) \qquad Sp_1 p_1 . \lambda_1^2 + 2 Sp_1 p_2 . \lambda_1 \lambda_2 + Sp_2 p_2 . \lambda_2^2 = 0$$

v souřadnicích jednorozměrného ar. bodu $|\lambda_1, \lambda_2|_b$ má tedy buď dva, nebo jeden, nebo žádný kořen. Je-li však $\{|\lambda_1, \lambda_2|_b\}$ kořen rovnice (1), jest patrně

$$\{p_0, \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2\}^{\Gamma}$$

svazek přímek obsažený v S. Existují-li dva svazky $\{x_1; \xi_1\}^{\Gamma}$, $\{x_2; \xi_2\}^{\Gamma}$, mají zřejmě společnou přímku $\{p\}$, z čehož snadno je patrno, že buď $\{x_1\} = \{x_2\}$, nebo $\{\xi_1\} = \{\xi_2\}$, nebo $\{x_1 x_2\} = \{\xi_1 \xi_2\}$.

Lineární kongruence a lineární komplexy.

132. Buď $S = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ lin. systém ar. komplexů dimense 3. Množství L přímek obsažených v S nazývá se lineární kongruence, určitěji lin. kongruence obsažená v S. Lineární kongruence obsahuje vždy nekonečně mnoho přímek.

Řídící přímkou lin. kongruence L nazývá se přímka incidentní s každou přímkou z L. Buď $\Sigma = \{q_0, q_1\} =$ Adj. S. Přímka $\{q\}$ jest řídící přímka lin. kongruence L, když a jen když jest obsažena v Σ. Je-li Σ svazek přímek $\{x; \xi\}$, rozpadá se L v trs přímek o středu $\{x\}$ a v pole přímek o základní rovině $\{\xi\}$; pravíme pak, že L jest degenerovaná.

Není-li L degenerovaná, má buď 1° dvě, nebo 2° jednu, nebo 3° nemá žádnou přímku řídící. Pravíme pak, že L jest 1° hyperbolická, 2° parabolická, 3° eliptická. Řídící přímky hyperbolické lin. kongruence nejsou incidentní.

Ukažme nejprve, že v L lze udati čtyři lin. nezávislé přímky. Není-li tomu tak, můžeme předpokládati, že neexistuje v L žádná přímka, jež by nebyla obsažena v $S' = \{p_0, p_1, p_2\}$. Není-li S' trs, vidíme ze **130** a **131**, že existuje bod $\{x\}$ takový, že S' neobsahuje žádnou přímku incidentní s $\{x\}$. Buď S'' trs ar. přímek o středu $\{x\}$. Průřez S a S'' obsahuje aspoň jednu přímku; vskutku dle **17** dimense tohoto průřezu jest $\geqq 0$ a všecky ar. komplexy z S'' jsou speciální. Buď tedy $\{r\}$ taková přímka. Ježto $\{r\}$ jest obsažena v S, je dle předpokladu obsažena v S', což je však nemožné, ježto $\{r\}$ a $\{x\}$ nejsou incidentní. Je-li S' trs, dospějeme k témuž sporu, volíce za S'' pole ar. přímek, jehož základní rovina není incidentní se středem trsu S'.

Ježto každý trs přímek obsahuje aspoň jednu přímku z L, vidíme, že L obsahuje nekonečně mnoho přímek.

Z identity

$$S(\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1)(\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1) = Sq_0 q_0 \,.\, \lambda_0^2 + 2 Sq_0 q_1 \,.\, \lambda_0 \lambda_1 + Sq_1 q_1 \,.\, \lambda_1^2$$

vychází, že Σ je buď svazek ar. přímek, nebo obsahuje jednu, nebo žádnou přímku. Obsahuje-li Σ právě dvě přímky, můžeme předpokládati, že to jsou $\{q_0\}$ a $\{q_1\}$; pak $\{q_0\}$ a $\{q_1\}$ nejsou incidentní, ježto jinak by Σ byl svazek ar. přímek.

Ježto L obsahuje čtyři lin. nezávislé přímky, je patrné, že přímka $\{q\}$ jest řídící přímkou lin. kongruence L, když a jen když jest obsažena v Σ.

Je-li Σ svazek ar. přímek $\{x; \xi\}$, vidíme snadno, že přímka $\{p\}$ náleží do L, když a jen když jest incidentní buď s $\{x\}$ nebo s $\{\xi\}$.

133. Buď $S = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ lin. systém ar. komplexů dimense 4. Množství K přímek obsažených v S nazývá se lineární komplex, určitěji lin. komplex obsažený v S. Je-li $\{q\} = \text{Adj.}\, S$, pravíme též, že K jest lin. komplex adjungovaný ku $\{q\}$. Řídící přímkou lin. komplexu K nazývá se přímka incidentní s každou přímkou z K. Lin. komplex K má buď 1° jednu, nebo 2° nemá žádnou přímku řídící dle toho, zda ar. komplex q jest či není speciální; pravíme pak, že K jest 1° speciální, 2° obecný. Řídící přímkou speciálního komplexu jest $\{q\}$.

Ukažme nejprve, že v K lze udati pět lin. nezávislých přímek. Dle důkazu ve **132** obsahuje $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ čtyři lin. nezávislé přímky. Totéž platí o $\{p_0, p_1, p_2, p_4\}$. Kdyby tedy K neobsahoval pět lin. nezávislých přímek, bylo by $\{p_0, p_1, p_2, p_3\} = S$, což je nemožné, ježto dimense S jest 4.

Když $\{q\}$ je přímka, jest to patrně řídící přímka lin. komplexu K. Z právě dokázaného pak vysvítá, že přímka $\{r\} \neq \{q\}$ není řídící přímkou.

134. Buď K obecný lin. komplex adjungovaný ke $\{q\}$, tedy $Sqq \neq 0$. Je-li $x \neq 0$, a $x \sim \xi$ v nulové korelaci o basi q, pravíme, že $\{\xi\}$ jest polára bodu $\{x\}$ vzhledem ke K, a že $\{x\}$ jest pól roviny $\{\xi\}$ vzhledem ke K. Bod $\{x\}$ a rovina $\{\xi\}$ jsou incidentní. Každá přímka svazku $\{x; \xi\}$ náleží do K.

Dle **113** jest $\xi = (qx)$, tedy $Sx\xi = 0$, a je-li y libovolný ar. bod,

$$S\xi y = Sq(xy). \tag{1}$$

Je-li přímka $\{xy\}$ obsažena v $\{x; \xi\}$, jest dle (1) $Sq(xy) = 0$, t. j. $\{xy\}$ náleží do K.

135. Buď K obecný lin. komplex adjungovaný ke $\{q\}$. Jsou-li poláry vzhledem ke K bodů obsažených v řadě ar. bodů S obsaženy ve svazku ar. rovin Σ, jsou poláry vzhledem ke K bodů obsažených v Adj. Σ obsaženy v Adj. S; pravíme pak, že přímky $\{p_1\}$, $\{p_2\}$ soumístné resp. s S a Σ jsou konjugovány vzhledem ke K. Když $\{p_1\}$ náleží do K, jest $\{p_2\} = \{p_1\}$. Když $\{p_1\}$ nenáleží do K, nejsou přímky $\{p_1\}$ a $\{p_2\}$ incidentní.

Přímky $\{p_1\}$ a $\{p_2\} \neq \{p_1\}$ jsou konjugovány vzhledem ke K, když a jen když ar. komplexy q, p_1, p_2 jsou lin. závislé.

Je-li K speciální ar. komplex adjungovaný ke $\{q\}$, pravíme, že přímky $\{p_1\}$, $\{p_2\}$ jsou konjugovány vzhledem ke K, když buď $\{p_1\} = \{q\}$ nebo $\{p_2\} = \{q\}$.

Buď K nulová korelace o basi q. Ježto $S \sim \Sigma$ v K, jest patrně Adj. $S \sim$ Adj. Σ v Adj. K, tedy dle **114** Adj. $\Sigma \sim$ Adj. S v K.

Náleží-li $\{p_1\}$ do K, jest $\{p_2\} = \{p_1\}$ dle **134**. Nenáleží-li $\{p_1\} = \{x_1 y_1\}$ do K, jest $Sqp_1 \neq 0$. Dle **105** existuje ar. přímka $(x_2 y_2)$ taková, že

$$q = \lambda_1 (x_1 y_1) + \lambda_2 (x_2 y_2). \tag{1}$$

Běží pouze o to, ukázati, že ze (1) plyne, že $\{x_1 y_1\}$ a $\{x_2 y_2\}$ jsou konjugovány vzhledem ke K. Je-li však x libovolný ar. bod, je dle (1)

$$(qx) = \lambda_1 (x_1 y_1 x) + \lambda_2 (x_2 y_2 x).$$

Polára vzhledem ke K bodu $\{x\}$ incidentního s $\{x_1 y_1\}$ je tedy $\{(x_2 y_2 x)\}$, t. j. tato polára jest incidentní s $\{x_2 y_2\}$.

136. Buďte R_2, R'_2 komplementární reguly. Buď L lineární kongruence obsahující R_2. Existuje množství J párů přímek regulu R'_2 takové, že, když a jen když $\{q_1\}$, $\{q_2\}$ náleží do J, existuje lin. komplex K, jemuž náležejí $\{q_1\}$, $\{q_2\}$, ale žádná jiná přímka z R'_2, a jenž obsahuje L. Množství J jest involuce. Každá dvojná přímka J jest řídící přímkou L a obráceně. Lin. kongruence L je tedy hyperbolická, parabolická nebo eliptická stejně jako involuce J. Naopak, zvolíme-li libovolně v regulu R'_2 involuci J, existuje jedna a jen jedna lin. kongruence L, vzhledem k níž má J uvedenou vlastnost.

Dle **128** můžeme nalézti lin. nezávislé ar. body x_0, x_1, x_2, x_3 takové, že R_2 jest množství přímek

$$\{(\lambda x_0 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_3)\}$$

a že R'_2 jest množství přímek -

$$\{(\lambda x_0 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_3)\}.$$

Buď S lin. systém ar. komplexů dimense 3 obsahující L. Zřejmě jest

$$S = \{(x_0 x_2), (x_1 x_3), (x_0 x_3) + (x_1 x_2), p\}, \tag{1}$$

kde p jest jistý ar. komplex. Ježto ar. přímky $(x_0 x_1)$, $(x_0 x_2)$, $(x_0 x_3)$, $(x_2 x_3)$, $(x_3 x_1)$, $(x_1 x_2)$ jsou lin. nezávislé (dle **106**), můžeme patrně předpokládati, že

$$p = \alpha (x_0 x_1) + \beta (x_2 x_3) + \gamma [(x_0 x_3) - (x_1 x_2)],$$

při čemž $|\alpha, \beta, \gamma|_b \neq 0_b$. Buď nyní K lin. komplex obsahující L a přímku $\{q\}$ regulu R'_2, takže

$$q = (\lambda x_0 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_3).$$

Aby K obsahoval též přímku $\{q'\}$ regulu R'_2, kde

$$q' = (\lambda' x_0 + \mu' x_2, \lambda' x_1 + \mu' x_3)$$

je nutné a stačí, aby ar. komplex q' byl lin. závislý na ar. komplexech napravo v (1) a na q, t. j. musí existovati čísla c_i $(i = 1, 2 \ldots 5)$ taková, že

$$\begin{aligned} &\lambda'^2 (x_0 x_1) + \mu'^2 (x_2 x_3) + \lambda' \mu' [(x_0 x_3) - (x_1 x_2)] = \\ &= c_1 (x_0 x_2) + c_2 (x_1 x_3) + c_3 [(x_0 x_3) + (x_1 x_2)] + \\ &+ c_4 \{\alpha (x_0 x_1) + \beta (x_2 x_3) + \gamma [(x_0 x_3) - (x_1 x_2)]\} + \\ &+ c_5 \{\lambda^2 (x_0 x_1) + \mu^2 (x_2 x_3) + \lambda\mu [(x_0 x_3) - (x_1 x_2)]\}. \end{aligned}$$

Vzhledem k již připomenuté lin. nezávislosti ar. komplexů $(x_0 x_1), \ldots (x_1 x_2)$ je to jen tak možno, že

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0,$$
$$c_4 \alpha + c_5 \lambda^2 = \lambda'^2, \quad c_4 \beta + c_5 \mu^2 = \mu'^2, \quad c_4 \gamma + c_5 \lambda\mu = \lambda' \mu'.$$

Eliminací čísel c_i obdržíme podmínku

$$\begin{vmatrix} \alpha & \lambda^2 & \lambda'^2 \\ \gamma & \lambda\mu & \lambda'\mu' \\ \beta & \mu^2 & \mu'^2 \end{vmatrix} = (\lambda\mu' - \lambda'\mu) [\beta\lambda\lambda' - \gamma (\lambda\mu' + \lambda'\mu) + \alpha\mu\mu'] = 0.$$

Žádanou vlastnost má tedy ta involuce J v regulu R'_2, jejíž páry přímek

$$\{(\lambda x_0 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_3)\}, \ \{(\lambda' x_0 + \mu' x_2, \lambda' x_1 \, \mu' x_3)\}$$

jsou určeny podmínkou

$$\beta\lambda\lambda' - \gamma (\lambda\mu' + \lambda'\mu) + \alpha\mu\mu' = 0.$$

Snadno vidíme nyní, že involuci J v regulu R'_2 můžeme libovolně zvoliti a že jest jí lin. kongruence L jednoznačně určena.

137. Buďte R_2, R'_2 komplementární reguly. Buď K lineární komplex obsahující R_2. Existuje involuce J v regulu R'_2, do níž náleží pár přímek z R'_2, když a jen když obě přímky páru jsou konjugované vzhledem ke K. Naopak, zvolíme-li libovolně v regulu R'_2 involuci J, existuje jeden a jen jeden lin. komplex K, vzhledem k němuž má J uvedenou vlastnost. Lin. komplex K jest speciální, když a jen když involuce J jest parabolická; řídící přímkou K jest pak dvojná přímka involuce J.

Zvolme opět lin. nezávislé ar. body x_0, x_1, x_2, x_3 tak, že přímky regulu R_2 jsou

$$\{(\lambda x_0 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_3)\},$$

a přímky regulu R'_2

$$\{(\lambda x_0 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_3)\}.$$

Lin. komplex K buď adjungován ke $\{q\}$. Snadno se nahlédne, že

$$q = \alpha (x_0 x_1) + \beta (x_2 x_3) + \gamma [(x_0 x_3) - (x_1 x_2)].$$

Buďte $\{p\}$, $\{p'\}$ dvě přímky regulu R'_2, tedy

$$p = (\lambda x_0 + \mu x_2, \lambda x_1 + \mu x_3),$$
$$p' = (\lambda' x_0 + \mu' x_2, \lambda' x_1 + \mu' x_3).$$

Jsou-li přímky $\{p\}$, $\{p'\}$ různé, jsou dle **135** konjugovány vzhledem ke K, když a jen když ar. komplexy p, p', q jsou lin. závislé, čili, ježto

$$\begin{vmatrix} \alpha & \lambda^2 & \lambda'^2 \\ \gamma & \lambda\mu & \lambda'\mu' \\ \beta & \mu^2 & \mu'^2 \end{vmatrix} = (\lambda\mu' - \lambda'\mu) [\beta\lambda\lambda' - \gamma(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + \alpha\mu\mu'],$$

když a jen když přímky $\{p\}$, $\{p'\}$ tvoří pár involuce J určené rovnicí

$$\beta\lambda\lambda' - \gamma(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + \alpha\mu\mu' = 0.$$

Totéž však platí i když $\{p\} = \{p'\}$, neboť

$$Spq = [\beta\lambda\lambda' - \gamma(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + \alpha\mu\mu'] (x_0 x_1 x_2 x_3),$$

takže přímka $\{p\}$ náleží do K, když a jen když je dvojnou přímkou involuce J.

Je-li J parabolická, jest její dvojná přímka konjugována vzhledem ke K s každou přímkou regulu R'_2, takže K nemůže býti obecný a dvojná přímka J jest řídící přímkou K. Naopak, když K je speciální, jest jeho řídící přímka $\{p\}$ incidentní s každou přímkou z R_2 a tedy dle **127** náleží do R_2. Ježto pak dle **135** $\{p\}$ jest konjugována vzhledem ke K s každou přímkou z R'_2, jest J parabolická a má dvojnou přímku $\{p\}$.

Orientace v trojrozměrném prostoru.

138. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi řadou ar. bodů $\{x_1, x_2\}$ (svazkem ar. rovin $\{\xi_1, \xi_2\}$) a prostorem jednorozměrných ar. bodů. Buď v $\mathfrak{K}$

$$x_1 \sim \bar{x}_1,\ x_2 \sim \bar{x}_2\ (\xi_1 \sim \bar{x}_1,\ \xi_2 \sim \bar{x}_2).$$

Je-li $(\bar{x}_1 \bar{x}_2) = \alpha$, pravíme, že ar. přímka $\frac{1}{\alpha}(x_1 x_2)$ $\left(\frac{1}{\alpha}(\xi_1 \xi_2)\right)$ jest jednotkou při $\mathfrak{K}$.

Jako v **91** vidíme, že definice jednotky při $\mathfrak{K}$ nezávisí na tom, kterými ar. body vytvoříme $\{x_1, x_2\}$.

139. Buď $p \neq 0_p$ ar. přímka. Buď $\{x_1, x_2\}$ řada ar. bodů soumístná s $\{p\}$. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi $\{x_1, x_2\}$ a prostorem T jednorozměrných ar. bodů o jednotce p. Buďte $\{y_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ tři různé body z $\{x_1, x_2\}^C$; buď $y_i \sim \bar{y}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ v $\mathfrak{K}$. Pravíme, že body $\{y_i\}$ jsou v positivní (negativní) orientaci vzhledem k $\{p\}$, když jednorozměrné body $\{\bar{y}_i\}$ jsou v positivní (negativní) orientaci.

Je-li $\{p'\} = \{p\}$, tedy $p' = \varrho p$ $(\varrho \neq 0)$, jest orientace vzhledem k p' táž jako orientace vzhledem k p nebo opačná dle toho, zda $\varrho > 0$ či $\varrho < 0$.

Buď K kolineace ar. bodů, buď $K^* = \text{Ass.}\,K$. Buď v K

$$x_1 \sim X_1,\ x_2 \sim X_2,\ y_1 \sim Y_1,\ y_2 \sim Y_2,\ y_3 \sim Y_3;$$

buď v K^* $p \sim \bar{p}$. Orientace bodů $\{Y_i\}$ vzhledem k $\bar{p}$ je táž jako orientace bodů $\{y_i\}$ vzhledem ku p.

Duálně definuje se orientace tří různých rovin ze svazku rovin soumístného s přímkou $\{p\}$ vzhledem k ar. přímce p.

Že jsme k učiněné definici oprávněni a že orientace vzhledem k p' souvisí s orientací vzhledem k p tak jako vysloveno, vidíme stejně jako v **92.** Že orientace se nemění kolineací, je zřejmé.

140. Buďte p, q ar. přímky; buď $Spq > 0$. Jsou-li $\{y_1\}, \{y_2\}, \{y_3\}$ tři různé body z řady bodové soumístné s $\{p\}$, a je-li $\{\eta_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ spojnice bodu $\{y_i\}$ a přímky $\{q\}$, jest orientace bodů $\{y_1\}, \{y_2\}, \{y_3\}$ vzhledem k p táž, jako orientace rovin $\{\eta_1\}, \{\eta_2\}, \{\eta_3\}$ vzhledem ke q.

Buď $p = (x_0 x_1)$, $q = (x_2 x_3)$, tedy dle **102** (1) $(x_0 x_1 x_2 x_3) > 0$. Buď

$$y_i = \lambda_{i0} x_0 + \lambda_{i1} x_1. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi $\{x_0, x_1\}$ a prostorem T jednorozměrných ar. bodů o jednotce p; je-li v $\mathfrak{K}$ $x_0 \sim \bar{x}_0$, $x_1 \sim \bar{x}_1$, je tedy $(\bar{x}_0 \bar{x}_1) = 1$. Orientace bodů $\{y_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ vzhledem k p je dle definice rovna orientaci jednorozměrných bodů

$$\{\lambda_{i0} \bar{x}_0 + \lambda_{i1} \bar{x}_1\}. \tag{1}$$

Dle **109** (1) jest

$$[(x_2 x_3 x_0), (x_2 x_3 x_1)] = (x_0 x_1 x_2 x_3)(x_2 x_3).$$

Ježto $\{(x_2 x_3 x_0), (x_2 x_3 x_1)\} = \text{Adj.}\ \{x_2, x_3\}$, a ježto $(\bar{x}_0 \bar{x}_1) = 1$, vidíme tedy, že jednotkou projektivní korespondence $\mathfrak{K}'$ mezi Adj. $\{x_2, x_3\}$ a T, v níž $(x_2 x_3 x_0) \sim \bar{x}_0$, $(x_2 x_3 x_1) \sim \bar{x}_1$, jest $(x_0 x_1 x_2 x_3)(x_2 x_3)$. Zřejmě však $\{\eta_i\} = \{(x_2 x_3 y_i)\}$, takže v $\mathfrak{K}'$ rovinám $\{\eta_i\}$ jsou přiřazeny jednorozměrné body (1). Orientace jednorozměrných bodů (1) je tedy táž jako orientace rovin $\{\eta_i\}$ vzhledem k $(x_0 x_1 x_2 x_3)(x_2 x_3)$ a tedy i vzhledem k $(x_2 x_3) = q$, ježto $(x_0 x_1 x_2 x_3) > 0$.

141. Buď $p \neq 0_p$ ar. přímka. Buď $\{x_1, x_2\}^C$ řada bodová soumístná s $\{p\}$. Buď $\mathfrak{K}$ jednojednoznačná korespondence mezi body z $\{x_1, x_2\}^C$ a rovinami obsaženými v Adj. $\{x_1, x_2\}$. Jestliže každé trojici bodů z $\{x_1, x_2\}^C$ v positivní orientaci vzhledem k p přiřazuje $\mathfrak{K}$ trojici rovin v positivní (negativní) orientaci vzhledem k p, pravíme, že $\mathfrak{K}$ zachovává (mění) orientaci.

Že definice korespondence $\mathfrak{K}$ zachovávající (měnící) orientaci se nemění, přejdeme-li od p k λp $(\lambda \neq 0)$, plyne ihned ze **139**.

142. Buď $\mathfrak{K}$ korespondence mezi body řady bodové $\{x_1, x_2\}^C$ a rovinami svazku $[\text{Adj.}\ \{x_1, x_2\}]^{\mathfrak{C}}$. Buď K kolineace ar. bodů; buď $x_1 \sim x'_1$, $x_2 \sim x'_2$ v K. Buď $\mathfrak{K}'$ korespondence mezi $\{x'_1, x'_2\}^C$ a $[\text{Adj.}\ \{x'_1, x'_2\}]^{\mathfrak{C}}$ taková, že, kdykoli $\{x\} \sim \{\xi\}$ v $\mathfrak{K}$, $x \sim x'$ v K a $\xi \sim \xi'$ v Adj. K, jest $\{x'\} \sim \{\xi'\}$ v $\mathfrak{K}'$. Když K jest positivní kolineace a když $\mathfrak{K}$ zachovává (mění) orientaci, pak $\mathfrak{K}'$ zachovává (mění) orientaci. Když K jest negativní kolineace a když $\mathfrak{K}$ zachovává (mění) orientaci, pak $\mathfrak{K}'$ mění (zachovává) orientaci.

Buďte $\{y_1\}, \{y_2\}, \{y_3\}$ tři různé body z $\{x_1, x_2\}^C$. Buď $y_i \sim y'_i$ v K, $\{y_i\} \sim \{\eta_i\}$ v $\mathfrak{K}$, $\eta_i \sim \eta'_i$ v Adj. K, takže $\{y'_i\} \sim \{\eta'_i\}$ v $\mathfrak{K}'$. Buď $p \sim p_1$ v Ass. K, buď $p \sim p_2$ v Ass. (Adj. K). Předpokládejme na př., že $\mathfrak{K}$ zachovává orientaci, takže orientace bodů $\{y_i\}$ vzhledem k p rovná se orientaci rovin $\{\eta_i\}$ vzhledem k p. Dle **139** orientace bodů $\{y'_i\}$ vzhledem k p_1 rovná se orientaci bodů $\{y_i\}$ vzhledem k p; dle duality orientace rovin $\{\eta'_i\}$ vzhledem k p_2 rovná se orientaci rovin $\{\eta_i\}$ vzhledem k p. Tedy orientace bodů $\{y'_i\}$ vzhledem k p_1 rovná se orientaci rovin $\{\eta'_i\}$ vzhledem k p_2. Je-li však μ modul K, jest $p_1 = \mu p_2$. Tedy $\mathfrak{K}'$ zachovává (mění) orientaci, když $\mu > 0$ $(\mu < 0)$.

143. Buď $\{p_1, p_2\}$ svazek ar. přímek. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi $\{p_1, p_2\}$ a prostorem jednorozměrných ar. bodů. Buď v $\mathfrak{K}$

$$p_1 \sim \bar{x}_1, \quad p_2 \sim \bar{x}_2.$$

Buď $(\bar{x}_1 \bar{x}_2) = \alpha$. Jednotkou při $\mathfrak{K}$ nazýváme každý symbol rovný symbolu $\left(\frac{1}{\alpha} p_1, p_2\right)$ dle definice ve **122.**

Jako v **91** vidíme, že definice jednotky nezávisí na tom, kterými ar. přímkami vytvoříme $\{p_1, p_2\}$.

144. Buď $\{p_1, p_2\}$ svazek ar. přímek. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi $\{p_1, p_2\}$ a prostorem T jednorozměrných ar. bodů o jednotce $(p_1, p_2) = (x; \xi)$. Buďte $\{q_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ tři různé přímky z $\{p_1, p_2\}^r$; buď $\{q_i\} \sim \{\bar{y}_i\}$ v $\mathfrak{K}$. Pravíme, že přímky $\{q_i\}$ jsou v positivní (negativní) orientaci vzhledem k (p_1, p_2) nebo vzhledem k $(x; \xi)$, když jednorozměrné body $\{y_i\}$ jsou v positivní (negativní) orientaci.

Orientace vzhledem k $(\alpha_1 p_1, \alpha_2 p_2)$ $(\alpha_1, \alpha_2 \neq 0)$ jest táž jako orientace vzhledem k (p_1, p_2) nebo opačná dle toho, zda $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ či $\alpha_1 \alpha_2 < 0$. Orientace vzhledem k $(\beta_1 x; \beta_2 \xi)$ $(\beta_1, \beta_2 \neq 0)$ jest táž jako orientace vzhledem k $(x; \xi)$ nebo opačná dle toho, zda $\beta_1 \beta_2 > 0$ či $\beta_1 \beta_2 < 0$.

Buď K kolineace ar. bodů; buď $K^* = \text{Ass.}\, K$, $K' = \text{Adj.}\, K$. Buď v K^*

$$p_1 \sim \bar{p}_1, \quad p_2 \sim \bar{p}_2, \quad q_1 \sim \bar{q}_1, \quad q_2 \sim \bar{q}_2, \quad q_3 \sim \bar{q}_3;$$

buď v K $x \sim \bar{x}$; buď v K' $\xi \sim \bar{\xi}$. Orientace přímek $\{\bar{q}_i\}$ vzhledem k $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ je táž jako orientace přímek $\{q_i\}$ vzhledem k (p_1, p_2). Orientace přímek $\{\bar{q}_i\}$ vzhledem k $(\bar{x}; \bar{\xi})$ je táž jako orientace přímek $\{q_i\}$ vzhledem k $(x; \xi)$ nebo opačná dle toho, zda K jest positivní či negativní kolineace.

Že jsme k definici orientace oprávněni, ukáže se stejně jako v **92**; totéž platí o tom, co řečeno o orientaci vzhledem k $(\alpha_1 p_1, \alpha_2 p_2)$. Výrok o $(\beta_1 x; \beta_2 \xi)$ následuje pak z definice rovnosti ve **122** (3). Že orientace přímek $\{\bar{q}_i\}$ vzhledem k $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ je táž jako orientace přímek $\{q_i\}$ vzhledem k (p_1, p_2), je zřejmé. Výrok o orientaci přímek $\{\bar{q}_i\}$ vzhledem k $(\bar{x}; \bar{\xi})$ odůvodníme ve **145.**

145. Buď $\{x; \xi\}^r$ svazek přímek; buď $\xi = (x\, x_1\, x_2)$. Jsou-li $\{y_1\}$, $\{y_2\}$, $\{y_3\}$ tři různé body z řady bodové $\{x_1, x_2\}^\sigma$ a je-li $\{q_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ přímka soumístná s $\{x; y_i\}$, jest orientace bodů $\{y_1\}$, $\{y_2\}$, $\{y_3\}$ vzhledem k $(x_1 x_2)$ táž, jako orientace přímek $\{q_1\}$, $\{q_2\}$, $\{q_3\}$ vzhledem k $(x; \xi)$.

Buď $p_1 = (x\, x_1)$, $p_2 = (x\, x_2)$; pak dle důkazu ve **120** jest $(p_1, p_2) = (x; \xi)$. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi $\{x_1; x_2\}$ a prostorem T jednorozměrných ar. bodů o jednotce $(x_1\, x_2)$, v níž $x_1 \sim \bar{x}_1$, $x_2 \sim \bar{x}_2$, takže $(\bar{x}_1\, \bar{x}_2) = 1$. Buď $y_i \sim \bar{y}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ v $\mathfrak{K}$, takže orientace bodů $\{y_i\}$ vzhledem k $(x_1\, x_2)$ rovná se orientaci jednorozměrných bodů $\{\bar{y}_i\}$. Buď $\mathfrak{K}_1$

projektivní korespondence mezi $\{p_1, p_2\}$ a T, v níž $p_1 \sim \bar{x}_1$, $p_2 \sim \bar{x}_2$. Ježto $(\bar{x}_1 \bar{x}_2) = 1$, jest (p_1, p_2) a tedy též $(x; \xi)$ jednotkou při $\mathfrak{K}_1$. Patrně jest v $\mathfrak{K}_1$ $(xy_i) \sim \bar{y}_i$. Zřejmě však $\{xy_i\} = \{q_i\}$, takže orientace přímek $\{q_i\}$ vzhledem $(x; \xi)$ rovněž se rovná orientaci jednorozměrných bodů $\{\bar{y}_i\}$.

Na základě právě dokázané věty můžeme doplniti důkaz ve **144.** Je-li totiž v K $x_1 \sim \bar{x}_1$, $x_2 \sim \bar{x}_2$, $y_i \sim \bar{y}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, jest dle této věty orientace přímek $\{\bar{q}_i\}$ vzhledem k $(\bar{x}; (\bar{x}\,\bar{x}_1\,\bar{x}_2))$ rovna orientaci bodů $\{\bar{y}_i\}$ vzhledem k $(\bar{x}_1 \bar{x}_2)$, jež opět je dle **139** rovna orientaci bodů $\{y_i\}$ vzhledem k $(x_1 x_2)$. Užijeme-li znovu věty v tomto odstavci dokázané, vidíme tedy, že orientace přímek $\{\bar{q}_i\}$ vzhledem k $(\bar{x}; (x\,x_1\,x_2))$ rovná se orientaci přímek $\{q_i\}$ vzhledem k $(x\,x_1\,x_2)$. Avšak dle **43** $(\bar{x}\,\bar{x}_1\,\bar{x}_2) = \mu\bar{\xi}$, kde μ je modul K, takže dle **144** orientace vzhledem k $\{\bar{x}; (\bar{x}\,\bar{x}_1\,\bar{x}_2)\}$ je táž jako orientace vzhledem k $(\bar{x}; \bar{\xi})$ nebo opačná dle toho, zda $\mu > 0$ či $\mu < 0$.

Geometrie pole ar. bodů.

146. Podáme nyní některé další definice a teorémy (v. **84** až **87**) o projektivních korespondencích, omezujíce se na případ $m = 3$, $n = 2$.

Buď $S = \{x_0, x_1, x_2\}$ pole ar. bodů. Buď T prostor dvojrozměrných ar. bodů. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi S a T, v níž

$$x_0 \sim \bar{x}_0, \quad x_1 \sim \bar{x}_1, \quad x_2 \sim \bar{x}_2.$$

Buď $S^* = \{(x_0 x_1), (x_0 x_2), x_1 x_2)\}$ pole ar. přímek o základní rovině Adj. S. Buď T^* prostor dvojrozměrných ar. přímek (nadrovin). Libovolná ar. přímka p z S^* dá se psáti jedním a jen jedním způsobem ve tvaru

$$p = \lambda_0 (x_0 x_1) + \lambda_1 (x_0 x_2) + \lambda_2 (x_1 x_2).$$

Přiřadíme-li jí dvojrozměrnou ar. přímku

$$\xi = \lambda_0 (\bar{x}_0 \bar{x}_1) + \lambda_1 (\bar{x}_0 \bar{x}_2) + \lambda_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_2),$$

obdržíme jednojednoznačnou korespondenci $\mathfrak{K}^*$ mezi S^* a T^*. Pravíme, že $\mathfrak{K}^*$ jest projektivní korespondence mezi S^* a T^* asociovaná ku projektivní korespondenci $\mathfrak{K}$ mezi S a T a píšeme $\mathfrak{K}^* = \text{Ass.}\,\mathfrak{K}$.

147. Buď S^* pole ar. přímek; buď T^* prostor dvojrozměrných ar. přímek. Buď k kolineace dvojrozměrných ar. přímek. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi S^* a T^*. Pak $\mathfrak{K} \,.\, k$ jest projektivní korespondence mezi S^* a T^*. Obráceně, když také $\mathfrak{K}'$ jest projektivní korespondence mezi

S^* a T^*, existuje kolineace k dvojrozměrných ar. přímek taková, že $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} \,.\, k$.

Vychází ihned ze **35** a **146**.

148. Buďte S_1, S_2 dvě pole ar. bodů, různá nebo rovná. Buď S_1^* (S_2^*) pole ar. přímek o základní rovině Adj. S_1 (Adj. S_2). Buď T (T^*) prostor dvojrozměrných ar. bodů (dvojrozměrných ar. přímek). Buď $\mathfrak{K}_1$ ($\mathfrak{K}_2$) projektivní korespondence mezi S_1 (S_2) a T. Buď $\mathfrak{K}_1^* =$ Ass. $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}^*_2 =$ Ass. $\mathfrak{K}_2$. Buď (v. **86**) K kolineace ar. bodů, v níž $S_1 \sim S_2$ a jež je taková, že, kdykoli x náleží do S_1 a $x \sim y$ v K, jest ar. bodu x přiřazen v $\mathfrak{K}_1$ týž dvojrozměrný ar. bod jako ar. bodu y v $\mathfrak{K}_2$. Buď $K^* =$ Ass. K, takže $S_1^* \sim S_2^*$ v K^*. Kdykoli ar. přímka p_1 náleží do S^*_1 a $p_1 \sim p_2$ v K^*, jest ar. přímce p_1 přiřazena v $\mathfrak{K}_1^*$ táž dvojrozměrná ar. přímka jako ar. přímce p_2 v $\mathfrak{K}_2^*$.

Důkaz je snadný.

149. Buď $S = \{x_0, x_1, x_2\}$ pole ar. bodů; buď T prostor dvojrozměrných ar. bodů. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi S a T, v níž $x_i \sim \bar{x}_i$ ($i = 0, 1, 2$). Buď $(\bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2) = \alpha$. Pravíme, že ar. rovina $\frac{1}{\alpha}(x_0 x_1 x_2)$ jest jednotkou při $\mathfrak{K}$. Je-li $\mathfrak{K}^* =$ Ass. $\mathfrak{K}$, pravíme, že $\frac{1}{\alpha}$ $(x_0 x_1 x_2)$ jest jednotkou při $\mathfrak{K}^*$.

Snadno se vidí (v. **91**), že jsme k těmto definicím oprávněni.

150. Buď S (S^*) pole ar. bodů (ar. přímek); buď T (T^*) prostor dvojrozměrných ar. bodů (ar. přímek). Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi S a T (mezi S^* a T^*). Buď k kolineace dvojrozměrných ar. bodů (ar. přímek). Ar. rovina ξ buď jednotkou při $\mathfrak{K}$. Když a jen když k jest unimodulární, jest ξ jednotkou při projektivní korespondenci $\mathfrak{K} \,.\, k$.

Důkaz je snadný.

151. Jsme nyní s to, doplniti (v případě $m = 3$, $n = 2$) poznámky učiněné v **87**. Buď ξ vlastní ar. rovina. Buď T prostor dvojrozměrných ar. bodů. Buď $\mathfrak{K}$ projektivní korespondence mezi Adj. $\{\xi\}$ a T; buď $\mathfrak{K}^* =$ Ass. $\mathfrak{K}$. Každá definice (teorém atd.) týkající se dvojrozměrných ar. bodů a dvojrozměrných ar. přímek, jež se nemění, když ar. body v ní se vyskytující změníme dle kolineace k a současně ar. přímky v ní se vyskytující změníme dle kolineace Adj. k, dá se přenésti pomocí $\mathfrak{K}$ a $\mathfrak{K}^*$ na definici (teorém atd.), týkající se trojrozměrných ar. bodů incidentních s ξ a trojrozměrných ar. přímek incidentních s ξ. Neurčitost korespondence $\mathfrak{K}$ není při tom dle **85** a **147** na závadu. Z **86** a **148** vidíme snadno, že takovým způsobem obdržená definice (teorém atd.)

se nemění, když ar. body v ní se vyskytující změníme dle kolineace trojrozměrných ar. bodů K a současně ar. přímky v ní se vyskytující změníme dle kolineace $K^* = \text{Ass. } K$. Zhusta tímto postupem neobdržíme nic nového: tak z incidence dvojrozměrného ar. bodu a dvojrozměrné ar. přímky (= nadroviny) definované v **19** obdržíme zřejmě incidenci trojrozměrného ar. bodu a trojrozměrné ar. přímky definovanou ve **101**.

Zejména si všimněme, že můžeme takto přenésti pojem kuželosečky a pojem poláry bodu vzhledem ke kuželosečce.

Můžeme také přenášeti takové definice (teorémy atd.), týkající se dvojrozměrných ar. bodů a dvojrozměrných ar. přímek, jež se nemění pouze tehdy, když ar. body v ní se vyskytující změníme dle unimodulární kolineace k a současně ar. přímky v ní se vyskytující změníme dle (rovněž unimodulární) kolineace Adj. k. Stačí se omeziti (v. **150**) na takové projektivní korespondence $\mathfrak{K}$, při nichž ξ jest jednotkou, a k definici (teorému atd.) naznačeným způsobem obdržené přidati atribut „vzhledem ke ξ“. Snadno vidíme, že takovým způsobem obdržená definice (teorém atd.) se nemění, když ar. body v ní se vyskytující změníme dle kolineace K a současně ar. přímky v ní se vyskytující změníme dle kolineace $K^* = \text{Ass. } K$; nutno pouze atribut „vzhledem ke ξ“ nahraditi atributem „vzhledem ke ξ'“, kde $\xi' = \mu\bar{\xi}$, je-li $\xi \sim \bar{\xi}$ v Adj. K a je-li μ modul kolineace K. Na př. z pojmu (definovaného v **92**) orientace trojice dvojrozměrných přímek obsažených ve svazku Adj. $\{\bar{x}\}$ dvojrozměrných ar. přímek vzhledem k ar. bodu $\bar{x}$ obdržíme tímto postupem pojem (definovaný ve **144**) orientace trojice trojrozměrných přímek obsažených ve svazku $\{x; \xi\}$ vzhledem k symbolu $(x; \xi)$. Odtud vychází snadno nový důkaz věty (v. **144** a **145**): Buď K kolineace ar. bodů; buď $x \sim \bar{x}$ v K, $\xi \sim \bar{\xi}$ v Adj. K; orientace trojice přímek svazku $\{x; \xi\}$ vzhledem k $(x; \xi)$ a orientace trojice přímek, oněm přiřazených v Ass. K, jsou stejné nebo opačné dle toho, zda K je positivní či negativní kolineace.