IX

DALŠÍ VĚTY O ÚHLECH

V celé kapitole předpokládáme, že je dána rovina E_2.

56. POJEM DUTÉHO ÚHLU. V předcházející kapitole jsme sice probírali různé vzorce pro kosinus a sinus úhlu, ale teprve nyní přistoupíme ke studiu geometrického pojmu úhlu.

Slovo úhel má v geometrii rozmanité významy, základním pojmem je však pojem dutého úhlu, který nyní budeme definovati. Buďtež dány tři různé body V, A, B, které neleží na přímce. Rovina E_2 se skládá ze všech bodů tvaru

$$V + t_1(A - V) + t_2(B - V), \tag{56.1}$$

kde t_1, t_2 jsou libovolná reálná čísla. V rovině E_2 leží polopřímka VA složená z těch bodů, u kterých $t_1 \geqq 0$, $t_2 = 0$, dále polopřímka VB složená z těch bodů, u kterých $t_1 = 0$, $t_2 \geqq 0$. Množinu těch bodů, u nichž v (56.1) je $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq 0$, označíme $\sphericalangle AVB$ nebo $\sphericalangle BVA$ a nazveme ji *dutý úhel*; bod V se jmenuje jeho *vrchol*, polopřímky VA, VB, se jmenují jeho *ramena*. Vrchol náleží do obou ramen; obě ramena jsou částí úhlu. Každý jiný bod úhlu $\sphericalangle AVB$, t. j. každý bod, pro nějž v (56.1) je $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, jmenuje se *vnitřní bod* úhlu.

Přímka VA se skládá ze všech bodů, pro něž $t_2 = 0$ a t_1 je libovolné; takový bod náleží do $\sphericalangle AVB$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $t_1 \geqq 0$. Tedy ze všech bodů přímky VA jsou to právě body polopřímky VA, které náležejí do $\sphericalangle AVB$; podobně pro přímku VB.

VĚTA 56.1. *Jestliže dva různé body X', X'' náležejí do $\sphericalangle AVB$, potom celá úsečka $X'X''$ je částí $\sphericalangle AVB$. Jestliže mimo to neleží oba body X', X'' na témž rameni úhlu $\sphericalangle AVB$* (zejména tedy, jestliže aspoň jeden z obou bodů X', X'' je vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$), *potom každý vnitřní bod úsečky $X'X''$ je vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$.*

DŮKAZ. Budiž

$$X' = V + t_1'(A - V) + t_2'(B - V),\ t_1' \geqq 0,\ t_2' \geqq 0,$$
$$X'' = V + t_1''(A - V) + t_2''(B - V),\ t_1'' \geqq 0,\ t_2'' \geqq 0,$$

při čemž není současně $t_1' = t_1''$, $t_2' = t_2''$. Bod X úsečky $X'X''$ má tvar

$$X = X' + c(X'' - X'),$$

kde $0 \leqq c \leqq 1$, takže platí (56.1), při čemž

$$t_1 = (1 - c)\, t_1' + ct_1'',\ t_2 = (1 - c)\, t_2' + ct_2'',$$

takže $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq 0$, t. j. bod X náleží do $\sphericalangle AVB$. Předpokládáme-li, že X je vnitřní bod úsečky $X'X''$, t. j., že $0 < c < 1$, bude zpravidla $t_1 > 0$, $t_2 > 0$, t. j. X bude vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$. Výjimka nastane jednak pro $t_2' = t_2'' = 0$, t. j. leží-li oba body X', X'' na polopřímce VA, jednak pro $t_1' = t_1'' = 0$, t. j. leží-li oba body X', X'' na polopřímce VB.

VĚTA 56.2. *$\sphericalangle AVB$ se skládá ze všech polopřímek tvaru VC, kde C je libovolný bod úsečky AB; je-li C vnitřní bod polopřímky AB, potom celá polopřímka VC až na bod V leží uvnitř $\sphericalangle AVB$.*

DŮKAZ. Bod C úsečky AB má tvar

(56.2) $$C = A + c(B - A),\ 0 \leqq c \leqq 1;$$

polopřímka VC se skládá ze všech bodů tvaru

(56.3) $$X = V + t(C - V),\ t \geqq 0,$$

tedy tvaru

$$X = V + t(1 - c)(A - V) + tc(B - V).$$

Potom jest $t(1 - c) \geqq 0$, $tc \geqq 0$, t. j. X náleží do $\sphericalangle AVB$; je-li C vnitřním bodem úsečky AB a je-li $X \neq V$, jest $0 < c < 1$, $t > 0$, tedy $t(1 - c) > 0$, $tc > 0$, t. j. X je vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$. Obráceně, jestliže bod $X \neq V$ náleží do $\sphericalangle AVB$, potom X má tvar (56.1), kde $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq 0$, není však současně $t_1 = t_2 = 0$, takže $t_1 + t_2 > 0$. Položíme-li

$$t_1 + t_2 = t,\quad \frac{t_2}{t_1 + t_2} = c,$$

platí (56.2), takže bod C náleží do úsečky AB, a mimo to platí (56.3), takže bod X náleží do polopřímky VC.

Z věty 56.2 plyne:

VĚTA 56.3. *Je-li $X \neq V$ bod úhlu $\sphericalangle AVB$, potom celá polopřímka VX je částí úhlu $\sphericalangle AVB$; je-li X vnitřním bodem pro $\sphericalangle AVB$, platí totéž o každém bodě $X' \neq V$ polopřímky VX.*

VĚTA 56.4. *Budiž ϱ_1 ta polorovina vyťatá přímkou VA, ve které leží bod B* (a tudíž celá polopřímka VB); *budiž ϱ_2 ta polorovina vyťatá přímkou VB, ve které leží bod A* (a tudíž celá polopřímka VA). *Potom $\sphericalangle AVB$ je průnik* (společná část) *polorovin ϱ_1, ϱ_2, vnitřek $\sphericalangle AVB$ je průnik vnitřků polorovin ϱ_1, ϱ_2.* Neboť polorovina ϱ_1 je množina těch bodů (56.1), pro něž je $t_2 \geqq 0$ a její vnitřek je množina těch bodů (56.1), pro něž je $t_2 > 0$, podobně $t_1 \geqq 0$ v polorovině ϱ_2, $t_1 > 0$ uvnitř poloroviny ϱ_2.

Z věty 56.4 se dá snadno znovu odvodit věta 56.1. Mimo to plyne z věty 56.4, že úhel $\sphericalangle AVB$ se nezmění, nahradíme-li bod A kterýmkoli bodem $A' \neq V$ polopřímky VA, bod B kterýmkoli bodem $B' \neq V$ polopřímky VB. Tedy:

VĚTA 56.5. *Dutý úhel je jednoznačně určen svými rameny.*

57. DVOJICE DUTÝCH ÚHLŮ. Buďtež dány dva duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ se společným ramenem VA. Označme p přímku VA, dále pB tu polorovinu vyťatou přímkou p, ve které leží bod B, podobně pC tu polorovinu vyťatou přímkou p, ve které leží bod C. (Podle definice dutého úhlu žádný z bodů B, C neleží na přímce p.)

Nyní jsou možné dva případy. Buďto poloroviny pB, pC jsou navzájem opačné, nebo obě tyto poloroviny splynou. V prvém případě pravíme, že $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ jsou *styčné*, ve druhém, že jsou v *zákrytu*.

Je zřejmé, že dva styčné duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ nemají společných bodů mimo body společného ramene. Důležitým zvláštním případem styčných úhlů jsou *úhly vedlejší*. Tak nazýváme dva duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ se společným ramenem VA tehdy, jestliže druhá ramena VB, VC leží v téže přímce, t. j. jestliže VB, VC jsou dvě navzájem opačné polopřímky. K danému dutému úhlu $\sphericalangle AVB$ existují právě dva vedlejší úhly; jsou-li polopřímky VA, VA' navzájem opačné a rovněž tak polopřímky VB, VB', potom úhlem vedlejším k $\sphericalangle AVB$ je jednak $\sphericalangle AVB'$, jednak $\sphericalangle A'VB$. Za téhož předpokladu, že polopřímky VA, VA', jakož i polopřímky VB, VB', jsou navzájem opačné, pravíme, že duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'VB'$ jsou *úhly vrcholové*. Je patrné, že oba úhly vedlejší k témuž dutému úhlu jsou navzájem dva úhly vrcholové.

Jsou-li p, q dvě různoběžky s průsečíkem V, potom bod V rozdělí každou z obou přímek p, q na dvě navzájem opačné polopřímky s počátkem V. Kterákoli z obou polopřímek obsažených v přímce p spolu s kteroukoli z obou polopřímek obsažených v přímce q dává dvojici ramen dutého úhlu. Jsou celkem čtyři takové úhly, které nazveme *úhly různoběžek* p, q. Tyto čtyři přímky se rozpadají na dvě dvojice navzájem vrcholových úhlů. Každý úhel první dvojice spolu s každým úhlem druhé dvojice jsou dva navzájem vedlejší úhly.

Jestliže polopřímky VB, VC splynou, potom splynou také $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ a jsou v zákrytu. Rovněž tak jsou oba úhly v zákrytu v tom případě, že polopřímka VC je vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVB$ nebo polopřímka VB je vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVC$.

VĚTA 57.1. *Jestliže polopřímka VC je vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVB$, potom $\sphericalangle AVB$ se skládá z obou dutých úhlů $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle BVC$, které jsou navzájem styčné* a tudíž nemají jiných společných bodů mimo polopřímku VB.

DŮKAZ plyne snadno z věty 56.2, neboť podle věty 56.5 můžeme předpokládati, že bod C leží na úsečce AB a potom úsečka AB se skládá z úseček AC, BC, které mají společný pouze bod B. Ježto úsečka AB protne přímku VC, jsou body A, B od sebe odděleny přímkou VC a proto $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle BVC$ jsou navzájem styčné. Obráceně platí:

VĚTA 57.2. *Jsou-li $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ dva různé duté úhly, které jsou navzájem v zákrytu, potom buďto je VC vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle AVC$ je částí $\sphericalangle AVB$ nebo je VB vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle AVC$ a $\sphericalangle AVB$ je částí $\sphericalangle AVC$.* Tyto dva případy se ovšem navzájem vylučují.

DŮKAZ. Budiž

$$C = V + t_1(A - V) + t_2(B - V).$$

Bod C podle předpokladu leží uvnitř poloroviny pB (je-li opět p přímka VA), takže $t_2 > 0$, a bod C neleží na polopřímce VB, takže $t_1 \neq 0$. Je-li $t_1 > 0$, je C vnitřní bod pro $\sphericalangle AVB$ a tudíž polopřímka VC je vnitřní pro $\sphericalangle AVB$. Je-li však $t_1 < 0$, $t_2 > 0$, jest

$$B = V - \frac{t_1}{t_2}(A - V) + \frac{1}{t_2}(C - V), \quad -\frac{t_1}{t_2} > 0, \ \frac{1}{t_2} > 0,$$

takže B je vnitřní bod pro $\sphericalangle AVC$ a tudíž polopřímka VB je vnitřní pro $\sphericalangle AVC$.

Buďtež nyní VA, VB, VC tři různé polopřímky s týmž počátkem V v naší rovině $\mathbf{E}_2$. Může se stát, že některé dvě ze tří přímek VA, VB, VC splynou. Splynou-li na př. přímky VB, VC v jedinou přímku r, potom polopřímky VB, VC jsou navzájem opačné, duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ jsou navzájem vedlejší, a polopřímky VB, VC nejsou rameny žádného dutého úhlu. Z věty 56.4 snadno plyne, že oba vedlejší úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ dohromady vyplní polorovinu rA a že body oběma společné vyplní polopřímku VA.

Předpokládejme však, že všecky tři přímky VA, VB, VC jsou navzájem různé. Potom máme tři duté úhly

$$\sphericalangle AVB, \ \sphericalangle AVC, \ \sphericalangle BVC \tag{57.1}$$

se společným vrcholem V, z nichž každé dva mají jedno společné rameno. Vektory $A - V$, $B - V$, $C - V$ roviny $\mathbf{E}_2$ jsou mezi sebou lineárně závislé, takže některá jejich netriviální lineární kombinace je rovna $\mathbf{o}$:

$$a(A - V) + b(B - V) + c(C - V) = \mathbf{o}. \tag{57.2}$$

Ježto každé dva z našich tří vektorů jsou lineárně nezávislé, je jistě $abc \neq 0$. Ve vztahu (57.2) můžeme jednak změnit znamení všech tří koeficientů, jednak změnit pořádek sčítanců. Máme tudíž v podstatě pouze dvě možnosti:

$$a > 0, \ b > 0, \ c < 0; \tag{57.3}$$

$$a > 0, \ b > 0, \ c > 0. \tag{57.4}$$

Tyto dvě možnosti jsou geometricky popsány ve větách 57.3 a 57.4.

VĚTA 57.3. *Jestliže ve vztahu* (57.2) *platí* (57.3), *potom jsou* $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle BVC$ *dva styčné úhly, které dohromady vyplní* $\sphericalangle AVB$. To plyne z věty 57.1, neboť

$$C = V - \frac{a}{c}(A - V) - \frac{b}{c}(B - V), \quad -\frac{a}{c} > 0, \quad -\frac{b}{c} > 0,$$

takže polopřímka VC je vnitřní pro $\sphericalangle AVB$.

VĚTA 57.4. *Jestliže ve vztahu* (57.2) *platí* (57.4), *potom každé dva ze tří úhlů* (57.1) *jsou navzájem styčné* (a nemají tudíž mimo společné rameno žádný další společný bod). *Všecky tři úhly* (57.1) *dohromady vyplní celou rovinu.*

DŮKAZ. Ježto ve vztahu

$$C = V - \frac{a}{c}(A - V) - \frac{b}{c}(B - V)$$

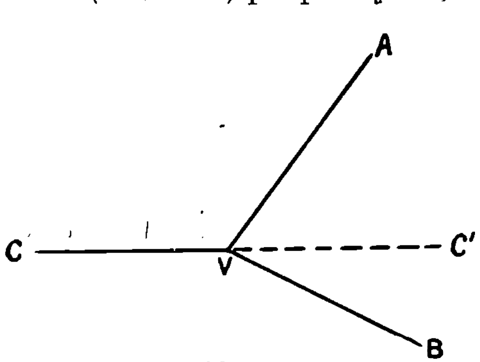
koeficient $-\frac{b}{c}$ je záporný, jsou body B, C od sebe odděleny přímkou VA, takže úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ jsou styčné; totéž plyne obdobně o kterýchkoli jiných dvou ze tří úhlů (57.1). Zaveďme bod C' rovnicí

$$C' = V - (C - V). \tag{57.5}$$

Potom z (57.2) plyne

$$a(A - V) + b(B - V) - c(C' - V) = \mathbf{o},$$

takže podle věty 57.3 $\sphericalangle AVC'$, $\sphericalangle BVC'$ dohromady vyplní $\sphericalangle AVB$. Avšak (viz obr. 4) polopřímky VC, VC' podle (57.5) jsou navzájem opačné, takže $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle AVC'$ jsou navzájem vedlejší a totéž platí o $\sphericalangle BVC$, $\sphericalangle BVC'$. Označme r přímku VC; z (57.2) a (57.4) plyne, že poloroviny rA, rB jsou navzájem opačné. Oba duté úhly $\sphericalangle AVC$, $\sphericalangle AVC'$ dohromady vyplní polorovinu rA; oba duté úhly $\sphericalangle BVC$, $\sphericalangle BVC'$ dohromady vyplní



Obr. 4.

opačnou polorovinu rB. Ježto, jak už víme, $\sphericalangle AVC'$, $\sphericalangle BVC'$ dohromady vyplní $\sphericalangle AVB$, vidíme, že duté úhly (57.1) dohromady vyplní celou rovinu.

58. KRUŽNICE. Zvolme v rovině bod S a číslo $r > 0$. Množina všech bodů X roviny, pro něž $\overline{SX} = r$, kterou označíme $(S; r)$, jmenuje se *kružnice* se *středem* S a s *poloměrem* r. Slovem *poloměr* se také označuje každá úsečka SX, kde X je libovolný bod kružnice. O bodu X pravíme, že leží *vně kružnice*, je-li $\overline{SX} > r$ a že leží *uvnitř kružnice*, je-li $\overline{SX} < r$; střed S leží tedy uvnitř kružnice.

Přímka p procházející středem se jmenuje *průměr* kružnice; z definice je jasné, že každý průměr protne kružnici ve dvou různých bodech A_1, A_2 tak, že S je střed dvojice A_1, A_2. [Slovem průměr se často označuje také úsečka A_1A_2, jakož i její velikost, která se rovná $2r$.]

Jestliže kružnice $(S_1; r_1)$ splyne s kružnicí $(S_2; r_2)$, musí býti $S_1 = S_2$, $r_1 = r_2$. Neboť kdyby bylo $S_1 \neq S_2$, potom by přímka S_1S_2 byla průměrem kružnice, kterou by protala ve dvou bodech A_1, A_2 tak, že středem dvojice A_1, A_2 by byl zároveň i bod S_1 i bod S_2, což je nemožné. Je tedy $S_1 = S_2$, načež ovšem $r_1 = r_2$.

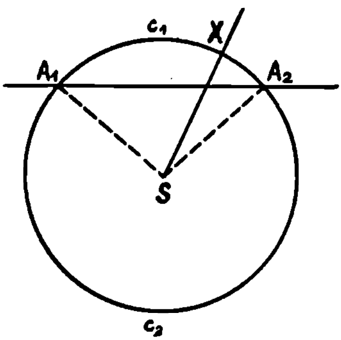
Budiž nyní p libovolná přímka. Prochází-li p středem S kružnice $(S; r)$, víme, že p protne $(S; r)$ ve dvou bodech A_1, A_2 tak, že S je středem dvojice A_1, A_2. Jestliže p neprochází středem S, budiž B pata kolmice k přímce p vedené bodem S a budiž $\overline{SB} = d$, takže d je vzdálenost středu S od přímky p. Nyní rozeznáváme tři případy podle toho, zda $d < r$, $d = r$, $d > r$.

Je-li předně $d < r$, potom podle vět 33.2 a 33.3 p protne kružnici ve dvou bodech A_1, A_2 tak, že B je střed dvojice A_1, A_2; vnitřek úsečky A_1A_2 leží uvnitř kružnice a ty body přímky p, které nenáležejí do úsečky A_1A_2, leží vně kružnice. Přímka p se jmenuje *sečna kružnice*, úsečka A_1A_2 *tětiva kružnice*. (Přímky procházející bodem S počítáme mezi sečny; bod B v tomto případě splyne s bodem S.)

Je-li za druhé $d = r$, potom přímka p má s kružnicí společný jediný bod B; všecky ostatní body přímky p leží vně kružnice. Pravíme, že p je *tečna kružnice* v bodě B, že B je její *bod dotyku*, že p se *dotýká* kružnice v bodě B.

Je-li za třetí $d > r$, potom všecky body přímky p leží vně kružnice; pravíme, že p je *nesečna kružnice.*

Zřejmě každým bodem B na kružnici $(S; r)$ prochází právě jedna tečna; je to kolmice vedená bodem B na přímku SB; bod B je jejím bodem dotyku.



Obr. 5.

Zvolme na kružnici $(S; r)$ dva různé body A_1, A_2. Jimi prochází sečna A_1A_2, která rozdělí rovinu na dvě poloroviny ϱ_1, ϱ_2; označme c_1 tu část kružnice, která leží v ϱ_1, c_2 tu část, která leží v ϱ_2. Množiny c_1, c_2 se jmenují *oblouky* naší kružnice; body A_1, A_2 se jmenují *krajní body* obou oblouků. Každý jiný bod kružnice náleží do jediného z oblouků c_1, c_2 a pravíme, že je jeho *vnitřním bodem.* Jestliže přímka A_1A_2 prochází středem S, potom oblouky c_1, c_2 se jmenují *polokružnice.*

Předpokládejme však, že přímka A_1A_2 neprochází středem S. Potom volme označení tak, že S leží v polorovině ϱ_2 (a je jejím vnitřním bodem). Potom dokážeme, *že bod X na kružnici náleží do oblouku c_1 tehdy a jenom tehdy, jestliže polopřímka SX náleží do dutého úhlu $\sphericalangle A_1SA_2$.* Stačí provésti důkaz za předpokladu, že $X \neq A_1$, $X \neq A_2$, t. j. že bod X neleží na přímce A_1A_2 (viz obr. 5). Nechť nejprve bod X náleží do oblouku c_1. Potom X leží uvnitř ϱ_1, S uvnitř ϱ_2, takže body X, S jsou od sebe odděleny přímkou A_1A_2. To znamená, že uvnitř úsečky SX leží bod B přímky A_1A_2. Zřejmě $\overline{SB} < \overline{SX}$, t. j. $\overline{SB} < r$, takže podle věty 33.3 bod B leží uvnitř úsečky A_1A_2 a tedy podle věty 56.2 polopřímka SB neboli polopřímka SX náleží do $\sphericalangle A_1SA_2$. Obráceně předpokládejme, že bod X kružnice $(S; r)$ náleží do $\sphericalangle A_1SA_2$. Podle věty 56.2 polopřímka SX obsahuje bod B úsečky A_1A_2. Ježto $A_1 \neq X \neq A_2$, jest $A_1 \neq B \neq A_2$, takže B leží uvnitř úsečky A_1A_2. Podle věty 33.3 je tedy $\overline{SB} < \overline{SA}$, t. j. $\overline{SB} < \overline{SX}$. Ježto B leží na polopřímce SX, plyne z toho, že B leží na úsečce SX, t. j. body S, X jsou od sebe odděleny přímkou A_1A_2 a bod X náleží do poloroviny ϱ_1.

Jsme nyní vedení k zobecnění pojmu úhlu. Dosud jsme v této kapitole zavedli pouze pojem dutého úhlu. Dutý úhel $\sphericalangle A_1SA_2$ jsme v článku 56 definovali jako množinu bodů; podle věty 56.2 můžeme však dutý úhel $\sphericalangle A_1SA_2$ definovat také jako množinu polopřímek s počátkem S. Definujme nyní ke každému dutému úhlu $\sphericalangle A_1SA_2$ s vrcholem v bodě S a s rameny v polopřímkách SA_1, SA_2 *vypuklý úhel* s týmž *vrcholem* S a s týmiž *rameny* SA_1, SA_2 jako množinu těch polopřímek s počátkem S, které nejsou vnitřními polopřímkami dutého úhlu $\sphericalangle A_1SA_2$. Dutý úhel $\sphericalangle A_1SA_2$ a vypuklý úhel s týmiž rameny nemají tudíž mimo SA_1, SA_2 žádnou jinou společnou polopřímku; každá jiná polopřímka SX s počátkem S náleží tedy do jediného z obou úhlů a nazývá se *vnitřní polopřímkou* tohoto úhlu. Jsou-li A_1, A_2 dva různé body na kružnici $(S; r)$, při čemž body A_1, A_2, S neleží v téže přímce, potom máme dva různé úhly s rameny v polopřímkách SA_1, SA_2, jeden dutý a druhý vypuklý. Tyto dva úhly nazveme *středové úhly* kružnice $(S; r)$ určené dvojicí A_1, A_2. Každý z obou oblouků c_1, c_2 kružnice $(S; r)$ s krajními body A_1, A_2 se skládá z těch bodů X kružnice $(S; r)$, pro které polopřímka SX náleží do příslušného z obou úhlů.

Při tom jsme předpokládali, že body S, A_1, A_2 neleží v téže přímce. Jsou-li SA_1, SA_2 dvě opačné polopřímky s počátkem S, které tedy leží obě v téže přímce p, potom p dělí rovinu na dvě poloroviny ϱ_1, ϱ_2. *Přímým úhlem s vrcholem* v bodě S a s rameny v obou polopřímkách SA_1, SA_2 nazveme množinu těch polopřímek SX s počátkem S, které leží v jedné z obou polorovin ϱ_1, ϱ_2. Máme tudíž pro dvě opačné polopřímky SA_1, SA_2 právě dva přímé úhly s rameny v polopřímkách SA_1, SA_2; jeden z nich je částí poloroviny ϱ_1, druhý je částí poloroviny ϱ_2. Leží-li body A_1, A_2 na kružnici $(S; r)$, potom ty body X kružnice, pro které polopřímka SX náleží do jednoho z obou přímých úhlů, vyplní jednu polokružnici s krajními body A_1, A_2.

Pojem dutého, vypuklého a přímého úhlu můžeme shrnout v jediný pojem *jednoduchého úhlu*; nebudeme vyšetřovat v této knize jiné než jednoduché úhly. Dvě různé polopřímky s týmž počátkem S jsou rameny právě dvou jednoduchých úhlů; při tom je z obou úhlů buďto jeden dutý a druhý vypuklý nebo jsou oba přímé.

59. PŘIROZENÉ USPOŘÁDÁNÍ ÚHLU. Definici styčných úhlů, podanou v článku 57 pro dva duté úhly, zobecníme na jednoduché úhly takto: Dva jednoduché úhly nazýváme *styčné*, jestliže mají jedno společné rameno (tudíž i společný vrchol), ale mimo toto společné rameno nemají žádnou společnou polopřímku. Z výsledků článku 57 je totiž patrné, že pro duté úhly nová definice je v souhlase se starou.

VĚTA 59.1. *Budiž dán jednoduchý úhel s rameny v polopřímkách SA, SB a budiž SC jeho vnitřní polopřímka. Potom existuje právě jeden jednoduchý úhel s rameny SA, SC a právě jeden jednoduchý úhel s rameny SB, SC tak, že oba nové úhly jsou částí původního. Oba nové úhly jsou navzájem styčné a dohromady vyplní úhel původní. Jestliže původní úhel je dutý nebo přímý, jsou oba nové úhly duté. Jestliže však původní úhel je vypuklý, je z nových úhlů aspoň jeden dutý, kdežto druhý může býti dutý, přímý nebo vypuklý.*

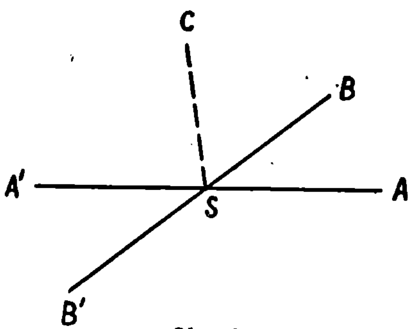
DŮKAZ. I. Dvě různé polopřímky s počátkem S jsou rameny dvou jednoduchých úhlů, které buďto jsou oba přímé nebo je jeden z nich dutý a druhý vypuklý. Tyto dva jednoduché úhly dohromady obsahují *každou* polopřímku s počátkem S a proto *nejvýš jeden* z nich může býti částí daného jednoduchého úhlu.

II. Jestliže daný úhel je dutý, plyne naše věta z věty 57.1.

III. Jestliže daný úhel je přímý, potom všecky tři body S, A, B leží v téže přímce p a existuje polorovina ϱ vyťatá přímkou p tak, že daný úhel se skládá z těch polopřímek s počátkem S, které leží v ϱ. Jsou-li σ_1, σ_2 obě poloroviny vyťaté přímkou SC, plyne naše věta z věty 56.4, při čemž jeden z obou nových úhlů se skládá z těch polopřímek s počátkem S, které leží zároveň v obou polorovinách ϱ, σ_1, druhý z těch, které leží zároveň v obou polorovinách ϱ, σ_2.

IV. Budiž posléze dán vypuklý úhel s rameny SA, SB a označme SA' polopřímku opačnou k SA, SB' polopřímku opačnou k SB. Je-li ϱ ta polorovina vyťatá přímkou SA, která neobsahuje bod B, a je-li σ ta polorovina vyťatá přímkou SB, která neobsahuje bod A, odvodíme snadno z věty 56.4, že daný úhel se skládá z dutého úhlu $\sphericalangle A'SB$ a z toho přímého úhlu s rameny SA, SA', který je částí poloroviny ϱ. Při tom oba právě zmíněné úhly jsou styčné; z toho plyne už správnost věty pro ten případ, že polopřímka SC splyne s polopřímkou SA'.

Stejně se odvodí správnost věty pro ten případ, že polopřímka SC splyne s polopřímkou SB'; v obou případech z nových úhlů jeden je dutý a druhý přímý. Jestliže polopřímka SC je různá jak od SA' tak i od SB', potom z definice daného vypuklého úhlu plyne podle věty 56.4, že SC je vnitřní polopřímkou pro aspoň jednu z polorovin ϱ, σ. Jestliže (viz obr. 6) SC je vnitřní polopřímkou pro σ, ale nikoli pro ϱ, potom podle věty 56.4 je SC vnitřní polopřímkou pro dutý úhel $\sphericalangle A'SB$, který tudíž podle věty 57.1 se skládá z obou styčných úhlů $\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle A'SC'$. Při tom $\sphericalangle A'SC$ spolu s tím přímým úhlem s rameny SA, SA', který je částí poloroviny ϱ, dohromady vyplní vypuklý úhel s rameny SA, SC. Z toho plyne snadno, že věta je v daném případě správná, při čemž z obou nových úhlů jedním je dutý úhel $\sphericalangle BSC$, druhým právě zmíněný vypuklý úhel. Stejně se dokáže správnost věty pro ten případ, že SC je vnitřní polopřímkou pro ϱ, nikoli však pro σ. Zbývá ještě ten případ, že polopřímka SC je vnitřní polopřímkou jak pro ϱ tak i pro σ. V tomto případě se snadno nahlédne, že jsou splněny předpoklady věty 57.4 (viz obr. 4 na str. 170) a podle této věty je naše věta správná i v tomto případě, při čemž novými úhly jsou duté úhly $\sphericalangle ASC$, $\sphericalangle BSC$.



Obr. 6.

Budiž opět dán jednoduchý úhel s rameny SA, SB. *Orientovat jednoduchý úhel* znamená rozlišit mezi oběma rameny SA, SB tak, že jedno nazveme *počátečním* a druhé *koncovým* ramenem.

Jsou ovšem dvě různé orientace, které nazveme navzájem *opačné.* Uvažujme na př. tu orientaci, při které počátečním ramenem je SA. Budeme definovat *přirozené uspořádání* daného orientovaného jednoduchého úhlu, složeného z polopřímek se společným počátkem S. Abychom mohli toto přirozené uspořádání stručně popsat, zaveďme pomocné označení: Je-li SX libovolná vnitřní polopřímka daného jednoduchého úhlu, potom tento úhel se podle věty 59.1 skládá ze dvou styčných jednoduchých úhlů se společným ramenem SX, při čemž jeden z nich, který označíme $\alpha(X)$, má ramena v polopřímkách SA, SX, druhý, který označíme $\beta(X)$, má ramena v polopřímkách SB, SX. Jsou-li SX, SY dvě různé vnitřní polopřímky daného jednoduchého úhlu, jsou úhly $\alpha(X)$, $\alpha(Y)$ navzájem různé; dokážeme, že jeden z nich je částí druhého, při čemž je-li na př. $\alpha(X)$ částí $\alpha(Y)$, je $\beta(Y)$ částí $\beta(X)$. Důkaz plyne snadno z věty 59.1, podle níž je SY vnitřní polopřímkou jednoho z obou dutých úhlů $\alpha(X)$, $\beta(X)$. Je-li SY vnitřní polopřímkou pro jednoduchý úhel $\alpha(X)$, aplikujeme větu 59.1 na tento jednoduchý úhel a dostaneme, že existuje právě jeden jednoduchý úhel φ s rameny SA, SY, který je částí $\alpha(X)$ a tudíž také částí původního jednoduchého úhlu s rameny SA, SB, protože však $\alpha(Y)$ je *jediný* jednoduchý úhel s rameny SA, SY obsažený v původním úhlu, musí býti $\varphi = \alpha(Y)$ a z toho plyne, že $\alpha(Y)$ je částí $\alpha(X)$; avšak $\beta(X)$ se skládá z těch polopřímek s počátkem S, které nejsou vnitřními polopřímkami pro $\alpha(X)$ a podobný vztah je také mezi $\beta(Y)$ a $\alpha(Y)$; ježto $\alpha(Y)$ je částí $\alpha(X)$, vidíme, že musí býti také $\beta(X)$ částí $\beta(Y)$. Je-li SY vnitřní polopřímkou pro $\beta(X)$, postupujeme podobně; nyní vyjde nejprve, že $\beta(Y)$ je částí $\beta(X)$ a z toho, že $\alpha(X)$ je částí $\alpha(Y)$. Na základě právě dokončeného důkazu můžeme slíbenou definici přirozeného uspořádání daného orientovaného jednoduchého úhlu s počátečním ramenem SA a koncovým ramenem SB formulovati takto: Polopřímka SA je první, polopřímka SB je poslední; jsou-li SX, SY dvě různé vnitřní polopřímky, jest SX před SY tehdy a jenom tehdy, je-li $\alpha(X)$ částí $\alpha(Y)$ neboli $\beta(Y)$ částí $\beta(X)$. Z definice plyne:

VĚTA 59.2. *Přirozené uspořádání orientovaného jednoduchého úhlu a přirozené uspořádání opačně orientovaného úhlu jsou navzájem inversní.*

Je-li SX vnitřní polopřímka jednoduchého úhlu φ a rameny SA, SB, potom částí tohoto úhlu je určitý jednoduchý úhel ψ s rameny SA, SX. Každá vnitřní polopřímka SY úhlu ψ je zároveň vnitřní polopřímkou úhlu φ a jeden a týž jednoduchý úhel s rameny SA, SY je zároveň částí ψ i částí φ. Z toho plyne, že to přirozené uspořádání úhlu φ, při kterém je SA první, určuje to přirozené uspořádání úhlu ψ, při kterém je SA první. Podobně se nahlédne, že totéž přirozené uspořádání úhlu φ

určuje přirozené uspořádání ve φ obsaženého jednoduchého úhlu s rameny SX, SB, při kterém je SX první. Buďtež posléze SX, SY dvě různé vnitřní polopřímky úhlu φ, při čemž v přirozeném uspořádání úhlu φ, při kterém je SA první, SY leží před SX. Potom ve ψ je obsažen jednoduchý úhel ω s rameny SX, SY; ω je ovšem tím spíše obsažen ve φ. Přirozeným uspořádáním úhlu φ, při kterém je SA první, je určeno přirozené uspořádání úhlu ψ, při kterém je SA první, a jím opět je určeno přirozené uspořádání úhlu ω. Tedy platí:

VĚTA 59.3. *Budiž dán jednoduchý úhel φ s rameny SA, SB a buďtež SX, SY dvě různé polopřímky náležející do φ. Potom částí φ je určitý jednoduchý úhel ω s rameny SX, SY a každým z obou přirozených uspořádání úhlu φ je určeno jedno přirozené uspořádání úhlu ω.* Mluvíme potom o přirozeném uspořádání úhlu ω *souhlasném* s uvažovaným přirozeným uspořádáním úhlu φ; také příslušné orientace úhlů φ, ω nazveme navzájem *souhlasné*. Jestliže s danou orientací úhlu φ je souhlasná ta orientace úhlu ω, při které je SX počátečním ramenem, je ovšem SX před SY v přirozeném uspořádání úhlu příslušném dané jeho orientaci.

Všimněme si blíže přirozeného uspořádání dutého úhlu. Budiž dán dutý úhel $\sphericalangle ASB$. Podle věty 56.2 mají všecky jeho vnitřní polopřímky tvar SC, kde C probíhá vnitřní body úsečky AB. Jsou-li C_1, C_2 dva různé vnitřní body úsečky AB, plyne z téže věty, že $\sphericalangle ASC_1$ je částí $\sphericalangle ASC_2$ tehdy a jenom tehdy, jestliže úsečka AC_1 je částí úsečky AC_2. Platí tudíž (viz též větu 57.1), že jestliže na úsečce AB leží bod C_1 před bodem C_2 v tom přirozeném uspořádání úsečky AB, ve kterém bod A je první, potom (a ovšem také jen potom) polopřímka SC_1 leží před polopřímkou SC_2 v tom přirozeném uspořádání dutého úhlu $\sphericalangle ASB$, ve kterém polopřímka SA je první.

60. ORIENTOVANÉ JEDNODUCHÉ ÚHLY. Předpokládáme, že rovina $\mathbf{E}_2$ jest určitým způsobem *orientována*. Je-li tomu tak, potom o orientovaném dutém úhlu $\sphericalangle AVB$ s počátečním ramenem VA pravíme, že je *kladně* nebo *záporně orientován* podle toho, zda vnější součin

$$[A - V, B - V] \tag{60.1}$$

je kladný či záporný. Z obou možných orientací dutého úhlu je tedy jedna kladná a druhá záporná. Jsou-li nyní $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle BVC$ dva styčné duté úhly se společným ramenem VB, jsou podle definice body A, C od sebe odděleny přímkou VB a z toho soudíme, že oba vnější součiny (60.1) a $[B - V, C - V]$ mají totéž znamení. Tedy platí:

VĚTA 60.1. *Orientujeme-li dva styčné duté úhly tak, aby společné rameno bylo pro jeden počátečním a pro druhý koncovým, jsou oba orientovány kladně nebo oba záporně.*

Budiž nyní dán orientovaný dutý úhel $\sphericalangle AVB$ s počátečním ramenem VA a předpokládejme pro určitost, že zvolená orientace je kladná. Je-li ϱ ta polorovina vyťatá přímkou VA, ve které leží bod B, potom podle věty 56.4 celý $\sphericalangle AVB$ leží v polorovině ϱ. Z toho plyne, že pro každou vnitřní polopřímku VX našeho úhlu ta orientace v $\sphericalangle AVB$ obsaženého $\sphericalangle AVX$, při které VA je počátečním ramenem, je kladná. Podle věty 60.1 také ta orientace rovněž v $\sphericalangle AVB$ obsaženého $\sphericalangle XVB$, při které VX je počátečním ramenem, je kladná. Jsou-li nyní VX, VY dvě různé v $\sphericalangle AVB$ obsažené polopřímky, při čemž při přirozeném uspořádání $\sphericalangle AVB$ příslušném jeho dané orientaci je na př. VX před VY, soudíme dále, že ta orientace $\sphericalangle XVY$, při které je VX počátečním ramenem, je kladná. V celku tedy vidíme, že je-li dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$ v kladné orientaci, potom pro každý v něm obsažený $\sphericalangle XVY$ je kladná ta orientace, která je příslušná dané orientaci $\sphericalangle AVB$ ve smyslu věty 59.3.

Snadná úvaha, při které se stále opíráme o větu 60.1, vede k zobecnění získaného výsledku. Je-li dán jednoduchý úhel φ, potom existuje určitá jeho orientace tak, že pro každý ve φ obsažený *dutý* úhel $\sphericalangle XVY$ orientace tohoto dutého úhlu příslušná dané orientaci úhlu φ je vždy kladná. Tuto orientaci úhlu φ nazveme *kladnou*. Snadno se také zjistí, že platí:

VĚTA 60.2. *Jsou-li VA, VB dvě polopřímky se společným počátkem V, které neleží obě v téže přímce, potom orientace dutého úhlu s počátečním ramenem VA, koncovým VB je kladná tehdy a jenom tehdy, jestliže vnější součin* (60.1) *je kladný; orientace vypuklého úhlu s počátečním ramenem VA, koncovým VB je kladná tehdy a jenom tehdy, jestliže vnější součin* (60.1) *je záporný.*

Mimo to se snadno zjistí, že platí:

VĚTA 60.3. *Je-li dán kladně orientovaný jednoduchý úhel φ a v něm obsažený jednoduchý úhel ψ, potom ta orientace úhlu ψ, která přísluší dané orientaci úhlu φ* (ve smyslu věty 59.3), *je rovněž kladná.*

61. VELIKOST DUTÉHO ÚHLU. Budiž dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$. Zřejmě existují vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ tak, že

$$(61.1) \qquad |\mathbf{u}| = 1, \ |\mathbf{v}| = 1;$$

$$(61.2) \qquad A = V + a\mathbf{u}, \ a > 0; \ B = V + b\mathbf{v}, \ b > 0.$$

Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nezávisejí na volbě bodů A, B na ramenech, nýbrž jsou daným dutým úhlem $\sphericalangle AVB$ jednoznačně určeny až na to, že pořadí ramen a tudíž i pořadí vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lze volit libovolně.

Vedle $\sphericalangle AVB$ budiž nyní dán druhý dutý úhel $\sphericalangle A'V'B'$, kterému obdobně přiřadíme vektory $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ tak, že

$$(61.1') \qquad |\mathbf{u}'| = 1, \ |\mathbf{v}'| = 1;$$

$$(61.2') \qquad A' = V' + a'\mathbf{u}', \ a' > 0; \ B' = V' + b'\mathbf{v}', \ b' > 0.$$

Definujme nyní abstrakcí (viz článek 5) pojem *velikosti dutého úhlu* takto: Naše dva duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$ mají touž velikost, jestliže existuje shodná transformace f roviny tak, že obrazem $\sphericalangle AVB$ při f jest $\sphericalangle A'V'B'$. O dvou dutých úhlech $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$, které mají touž velikost, pravíme také, že se *liší pouze polohou*; o vlastnostech dutých úhlů, které se nezmění, nahradíme-li je jinými dutými úhly, jež se od původních liší pouze polohou, pravíme, že jsou *nezávislé na poloze*.

VĚTA 61.1. *Duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$ mají touž velikost tehdy a jenom tehdy, jestliže*

$$(61.3) \qquad \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u}'\mathbf{v}'.$$

DŮKAZ. I. Předpokládejme nejprve, že platí (61.3). Jestliže pro libovolný bod

$$X = V + x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$$

jest

$$f(X) = V' + x_1\mathbf{u}' + x_2\mathbf{v}',$$

je f afinní transformace roviny, při které obrazem $\sphericalangle AVB$ je $\sphericalangle A'V'B'$.

Jsou-li
$$\mathbf{w}_1 = c_1\mathbf{u} + d_1\mathbf{v},\ \mathbf{w}_2 = c_2\mathbf{u} + d_2\mathbf{v}$$
libovolné dva vektory, jest
$$f(\mathbf{w}_1) = c_1\mathbf{u}' + d_1\mathbf{v}',\ f(\mathbf{w}_2) = c_2\mathbf{u}' + d_2\mathbf{v}'$$
a tedy podle (61.1) a (61.1')
$$\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 = c_1c_2 + d_1d_2 + (c_1d_2 + c_2d_1)\,.\,\mathbf{uv},$$
$$f(\mathbf{w}_1)\,.\,f(\mathbf{w}_2) = c_1c_2 + d_1d_2 + (c_1d_2 + c_2d_1)\,.\,\mathbf{u}'\mathbf{v}',$$
takže ze (61.3) plyne podle věty 38.1, že f je shodná transformace.

II. Budiž dána shodná transformace f roviny, při které obrazem $\sphericalangle AVB$ je $\sphericalangle A'V'B'$. Máme dokázati, že platí (61.3). Z následující věty 61.5 plyne, že obrazy ramen úhlu $\sphericalangle AVB$ jsou ramena úhlu $\sphericalangle A'V'B'$. Jestliže obrazem ramene VA je rameno $V'A'$ a tedy obrazem ramene VB rameno $V'B'$, můžeme předpokládati, že $f(A) = A'$, $f(B) = B'$. Mimo to je $f(V) = V'$, tedy

$$f(A - V) = A' - V',\ f(B - V) = B' - V'. \tag{61.4}$$

Ježto zobrazení f je shodné, jest $A - V = A' - V'$, $B - V = B' - V'$, takže podle (61.1) až (61.2') jest $a' = a$, $b' = b$. Z toho plyne podle (61.4), že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}'$, $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$ a podle věty 38.1 platí (61.3). Jestliže obrazem ramene VA je rameno $V'B'$ a tedy obrazem ramene VB rameno $V'A'$, dostaneme týmž postupem nejprve, že $\mathbf{uv} = \mathbf{v}'\mathbf{u}'$ a podle (7.3) opět platí (61.3).

Poznámka. Ježto $\mathbf{uv} = \mathbf{vu}$, soudíme z části I předcházejícího důkazu, že pro každý dutý úhel $\sphericalangle AVB$ existuje shodná transformace roviny, při které $\sphericalangle AVB$ je svým vlastním obrazem tak, že obrazem ramene VA je rameno VB, obrazem ramene VB rameno VA. Z toho soudíme dále podle věty 38.3, že platí:

VĚTA 61.2. *Mají-li duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$ touž velikost, existuje shodná transformace roviny, která ramena prvého úhlu převede v předepsaném pořadí v ramena druhého úhlu.*

VĚTA 61.3. *Budiž dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$ a polopřímka $V'A'$. Dále budiž dána polorovina ϱ vyťatá přímkou $V'A'$. Potom existuje právě jeden dutý úhel $\sphericalangle A'V'B'$, jehož velikost je rovna velikosti $\sphericalangle AVB$, jehož jed-*

ním ramenem je polopřímka $V'A'$ a jehož druhé rameno leží v polorovině ϱ.

DŮKAZ. Existují vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}'$ tak, že

$$|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}'| = 1,$$
$$A = V + a\boldsymbol{u},\ a > 0;\ B = V + b\boldsymbol{v},\ b > 0;\ A' = V' + a'\boldsymbol{u},$$
$$a' > 0.$$

Z důkazu věty 61.1 je patrné, že stačí dokázati, že existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{v}'$ tak, že

$$(61.5) \qquad |\boldsymbol{v}'| = 1,\ \boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$$

a že bod $V' + \boldsymbol{v}$ náleží do poloroviny ϱ. Určeme vektor $\boldsymbol{u}_1$ tak, aby vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_1$ byly orthonormální a aby bod $V + \boldsymbol{u}_1$ náležel do té poloroviny vyťaté přímkou VA, ve které leží bod B. Potom jest

$$\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{u}_1,\ c = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v},\ s > 0,\ c^2 + s^2 = 1.$$

Určeme vektor $\boldsymbol{u}_1'$ tak, aby vektory $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u}_1'$ byly orthonormální a aby bod $V' + \boldsymbol{u}_1'$ náležel do poloroviny ϱ'. Je-li

$$\boldsymbol{v}' = x\boldsymbol{u}' + x_1\boldsymbol{u}_1',$$

máme zjistit, že lze právě jedním způsobem určit čísla x, x_1 tak, aby bylo $x_1 > 0$ a aby platilo (61.5). Početní podmínky pro čísla x, x_1 tedy jsou

$$x^2 + x_1^2 = 1,\ x = c,\ x_1 > 0$$

a je patrné, že je jim vyhověno tehdy a jenom tehdy, jestliže $x = c$, $x_1 = s$.

Velikost dutého úhlu $\sphericalangle\, AVB$ označíme $|\sphericalangle\, AVB|$. Z věty 61.1 plyne, že nyní zavedený pojem velikosti dutého úhlu $\sphericalangle\, AVB$ se kryje s pojmem úhlu polopřímek VA, VB definovaném v kapitole VIII, kde arci nebyly vyloučeny případy (nyní vyloučené), že polopřímky VA, VB buďto splynou nebo jsou navzájem opačné. Velikosti dutých úhlů budeme značit řeckými písmeny. Je-li $|\sphericalangle\, AVB| = \alpha$, potom v souhlase s kapitolou VIII za předpokladu (61.1), (61.2) položíme

$$\cos\alpha = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}.$$

Věta 61.1 tedy praví, že *dva duté úhly mají touž velikost tehdy a jenom tehdy, mají-li týž kosinus.*

Následující věta 61.4, která mohla býti umístěna již v článku 56, je potřebná k důkazu věty 61.5, o kterou jsme se opírali v části II důkazu věty 61.1.

VĚTA 61.4. *Splynou-li dva duté úhly* $\sphericalangle A_1V_1B_1$, $\sphericalangle A_2V_2B_2$, *musí vrchol prvého splynout s vrcholem druhého a ramena prvého splynout s rameny druhého.*

DŮKAZ. I. Je-li $V_1 \neq V_2$, potom z přímky V_1V_2 náleží do $\sphericalangle A_1V_1B_1$ právě polopřímka V_1V_2, kdežto do $\sphericalangle A_2V_2B_2$ právě polopřímka V_2V_1 různá od předešlé, takže dané úhly nemohou splynout.

II. Mějme dva duté úhly $\sphericalangle A_1VB_1$, $\sphericalangle A_2VB_2$ se společným vrcholem V. Jestliže polopřímka VA_2 nesplyne ani s VA_1 ani s VB_1, je VA_2 vnitřní polopřímka pro $\sphericalangle A_1VB_1$, který tudíž (viz větu 57.1) vnikne dovnitř obou polorovin vyťatých přímkou VA_2. Naproti tomu je $\sphericalangle A_2VB_2$ částí jediné poloroviny vyťaté přímkou VA_2 (viz větu 56.4), takže dané úhly nemohou splynout.

VĚTA 61.5. *Jestliže při afinní transformaci* f *roviny obrazem dutého úhlu* $\sphericalangle AVB$ *je dutý úhel* $\sphericalangle A'V'B'$, *potom obrazem vrcholu prvého úhlu je vrchol druhého a obrazy ramen prvého jsou ramena druhého.*

DŮKAZ. Je-li $f(V) = V_0$, $f(A) = A_0$, $f(B) = B_0$, takže obrazy polopřímek VA, VB jsou polopřímky V_0A_0, V_0B_0, plyne z definice dutého úhlu, že obrazem $\sphericalangle AVB$ je $\sphericalangle A_0V_0B_0$, takže $\sphericalangle A_0V_0B_0$ a $\sphericalangle A'V'B'$ splynou a naše věta plyne z věty 61.4.

62. POROVNÁVÁNÍ VELIKOSTI DUTÝCH ÚHLŮ. Buďtež dány dva duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle A'V'B'$. Je-li

$$|\sphericalangle AVB| = \alpha, \quad |\sphericalangle A'V'B'| = \beta,$$

víme, že $\alpha = \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\cos\alpha = \cos\beta$. Je-li však $\cos\alpha \neq \cos\beta$, pravíme, že α je *menší* než β a že β je *větší* než α a píšeme $\alpha < \beta$ nebo $\beta > \alpha$, jestliže

$$\cos\alpha > \cos\beta \text{ neboli } \cos\beta < \cos\alpha.$$

Pravíme také, že $\sphericalangle AVB$ je menší než $\sphericalangle A'V'B'$, jestliže $\alpha < \beta$, t. j. jestliže velikost $\sphericalangle AVB$ je menší než velikost $\sphericalangle A'V'B'$. Tedy pro duté úhly platí: *menší úhel má větší kosinus, větší úhel má menší kosinus.*

Abychom poznali geometrický smysl nerovností

(62.1) $$\alpha < \beta,$$

zvolme libovolně polopřímku V_0A_0 a polorovinu ϱ vyťatou přímkou V_0A_0. Podle věty 61.3 lze určit právě jedním způsobem duté úhly

(62.2) $$\sphericalangle A_0V_0B_0, \quad \sphericalangle A_0V_0C_0$$

tak, že

$$|\sphericalangle A_0V_0B_0| = \alpha, \quad |\sphericalangle A_0V_0C_0| = \beta$$

a že obě polopřímky V_0B_0, V_0C_0 leží v polorovině ϱ. Duté úhly (62.2) jsou potom navzájem různé a jsou v zákrytu, takže podle věty 57.2 jeden z nich je částí druhého, při čemž ovšem oba úhly (62.2) jsou navzájem různé. Za těchto předpokladů platí:

VĚTA 62.1. *Nerovnost* (62.1) *znamená, že z obou dutých úhlů* (62.2) *první je částí druhého.*

DŮKAZ. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic $\langle V_0; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ s počátkem V_0 tak, aby bylo $A_0 = V_0 + a\boldsymbol{u}_1$, $a > 0$ a aby bod $V_0 + \boldsymbol{u}_2$ ležel v polorovině ϱ. Mimo to předpokládejme, což není na újmu obecnosti, že

$$\overline{V_0B_0} = |B_0 - V_0| = 1, \quad \overline{V_0C_0} = |C_0 - V_0| = 1.$$

Potom jest

(62.3) $$B_0 = V_0 + c_1\boldsymbol{u}_1 + s_1\boldsymbol{u}_2, \quad C_0 = V_0 + c_2\boldsymbol{u}_1 + s_2\boldsymbol{u}_2,$$
$$c_1 = \cos\alpha, \quad c_2 = \cos\beta,$$

(62.4) $$s_1 = +\sqrt{1 - c_1^2}, \quad s_2 = +\sqrt{1 - c_2^2}.$$

Při tom je $c_1 \neq c_2$ a budiž na př.

(62.5) $$c_1 > c_2.$$

Podle věty 57.2 stačí dokázati, že bod B_0 leží uvnitř $\sphericalangle A_0V_0C_0$. Podle (62.3) je však

$$B_0 = V_0 + \frac{c_1s_2 - c_2s_1}{s_2}\boldsymbol{u}_1 + \frac{s_1}{s_2}(C_0 - V_0)$$

a ježto $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, je třeba pouze dokázati, že z (62.5) plyne

(62.6) $$c_1s_2 > c_2s_1.$$

Ježto $s_1 > 0$, $s_2 > 0$, je (62.6) podle (62.5) jistě správné tehdy, jestliže jedno z čísel c_1, c_2 je rovné nule nebo jestliže $c_1 > 0$, $c_2 < 0$.

Budiž

(62.7) $$c_1 > c_2 > 0.$$

Podle (62.4) je potom

(62.8) $$s_2 > s_1 > 0$$

a znásobením nerovností (62.7), (62.8) vyjde (62.6). Zbývá případ, že

(62.7′) $$-c_2 > -c_1 > 0;$$

podle (62.4) je potom

(62.8′) $$s_1 > s_2 > 0$$

a znásobením nerovností (62.7′), (62.8′) vyjde $-c_2 s_1 > -c_1 s_2$ neboli (62.6).

V souhlase s kapitolou VIII definujeme: Dutý úhel velikosti α se jmenuje

pravý, jestliže $\cos\alpha = 0$,
ostrý, jestliže $\cos\alpha > 0$,
tupý, jestliže $\cos\alpha < 0$;

o dvou dutých úhlech, jejichž velikosti jsou α, β, pravíme, že jsou *výplňkové*, jestliže $\cos\alpha + \cos\beta = 0$. Pojmy pravého, ostrého a tupého úhlu, jakož i pojem výplňkových úhlů jsou tedy pojmy nezávislé na poloze. Dále je patrné, že ke každému dutému úhlu existuje co do velikosti (ne ovšem co do polohy) právě jeden výplňkový úhel. Mimo to dva výplňkové úhly jsou buďto oba úhly pravé nebo je jeden ostrý a druhý tupý. Z předcházejícího je patrné: Všecky pravé úhly mají touž velikost. Úhel ostrý je menší než úhel tupý. Úhel ostrý je menší než pravý a obráceně úhel menší než pravý je ostrý. Úhel tupý je větší než pravý a obráceně úhel větší než pravý je tupý. Úhel ostrý je menší než úhel k němu výplňkový a obráceně úhel menší než úhel k němu výplňkový je ostrý. Úhel tupý je větší než úhel k němu výplňkový a obráceně úhel větší než úhel k němu výplňkový je tupý.

Jsou-li $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVB'$ dva vedlejší úhly a volíme-li body A, B, B' na polopřímkách VA, VB, VB' tak, že $\overline{VA} = \overline{VB} = \overline{VB'} = 1$, existuje patrně taková kartézská soustava souřadnic $\langle V; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$, že

$$A = V + u_1, \; B = V + cu_1 + su_2, \; B' = V - cu_1 - su_2,$$

kde

$$c^2 + s^2 = 1, \; c = \cos\alpha, \; \alpha = |\sphericalangle AVB|.$$

Potom jest $\cos|\sphericalangle AVB'| = -c = -\cos\alpha$. Tedy *vedlejší úhly jsou úhly výplňkové*. Ježto ke dvěma vrcholovým úhlům existuje dutý úhel, který je současně k oběma vedlejší, plyne z toho, že *dva vrcholové úhly mají touž velikost*.

Jsou-li dány dvě různoběžky p, q, určují p, q čtyři úhly (viz článek 57). Je-li $\sphericalangle AVB$ jeden z nich, potom z ostatních tří jsou dva k němu vedlejší a zbývající je k němu vrcholový. Jestliže p a q nejsou navzájem kolmé, máme co do velikosti dva úhly různoběžek p, q, které jsou navzájem výplňkové; jeden z nich je ostrý a druhý tupý. Jestliže však p a q jsou navzájem kolmé, potom každý ze čtyř úhlů různoběžek p, q je úhel pravý. *Velikostí úhlu dvou různoběžek* p, q rozumíme velikost α ostrého nebo pravého úhlu; jsou-li $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$ směry obou různoběžek, jest

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{uv}|}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}. \tag{62.9}$$

Jsou-li však různoběžky p, q *orientovány*, potom jejich úhlem rozumíme ten $\sphericalangle AVB$, pro který polopřímka VA určuje (ve smyslu článku 28) danou orientaci ji obsahující přímky p a polopřímka VB určuje danou orientaci ji obsahující přímky q. Jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ kladné vzhledem k daným orientacím přímek p, q, potom pro velikost úhlu $\sphericalangle AVB$ orientovaných různoběžek p, q platí

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}. \tag{62.9'}$$

To vše je v souladu s kapitolou VIII (viz články 51 a 52).

63. VELIKOST JEDNODUCHÝCH ÚHLŮ. V článku 60 jsme definovali abstrakcí pojem velikosti dutých úhlů. Týmž způsobem můžeme však definovati obecněji pojem *velikosti jednoduchých úhlů*: Dva jednoduché úhly mají touž velikost, jestliže existuje shodná transformace f roviny, při které obrazem prvého úhlu je úhel druhý.

Dvě různé polopřímky VA, VB se společným počátkem V jsou, jak víme, rameny právě dvou jednoduchých úhlů, které buďto jsou oba přímé nebo je jeden z nich dutý a druhý vypuklý. Takové dva jednoduché úhly se společnými rameny nazveme pro stručnost *úhly spřízněné*. Jestliže afinní (speciálně shodná) transformace f roviny převádí jeden jednoduchý úhel ve druhý, potom f převádí také úhel spřízněný s prvým daným úhlem v úhel spřízněný s druhým. Z toho plyne, že věta 61.5 vyslovená a dokázaná pro dva duté úhly platí rovněž pro dva úhly vypuklé.

Následující věty 63.1 až 63.3 jsou zřejmé.

VĚTA 63.1. *Každé dva přímé úhly mají touž velikost.*

VĚTA 63.2. *Mají-li dva jednoduché úhly touž velikost, jsou buďto oba duté nebo oba přímé nebo oba vypuklé.*

VĚTA 63.3. *Mají-li dva jednoduché úhly vzájemně touž velikost, potom také oba jednoduché úhly spřízněné s prvými mají vzájemně touž velikost.*

Velikosti jednoduchých úhlů budeme značit řeckými písmeny. V článku 61 jsme v oboru dutých úhlů definovali číslo $\cos\alpha$. Rozšířme nyní pojem kosinu na všecky jednoduché úhly takto: *Kosinus přímého úhlu je roven číslu* -1. *Kosinus vypuklého úhlu je roven kosinu s ním spřízněného dutého úhlu.* V článku 50 bylo dokázáno, že v oboru dutých úhlů platí nerovnost $-1 < \cos\alpha < 1$ a je zřejmé, že táž nerovnost platí také v oboru vypuklých úhlů. Tedy pro všecky jednoduché úhly máme nerovnost

$$-1 \leqq \cos\alpha < 1, \tag{63.1}$$

pši čemž znamení rovnosti platí pouze pro úhly přímé.

Vedle čísla $\cos\alpha$ zavedeme ještě číslo $\sin\alpha$ takto:

$$\sin\alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \tag{63.2}$$

se znamením plus pro úhly duté, se znamením minus pro úhly vypuklé; pro přímé úhly je $\cos\alpha = -1$, tedy $\sin\alpha = 0$ a na znamení v (63.2) nezáleží. Poznamenejme, že z (63.2) plyne

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \tag{63.3}$$

Je účelné shrnout obě reálná čísla $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ v jediné komplexní číslo

$$(63.4) \qquad \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha,$$

které nazýváme *komplexní měrou* jednoduchého úhlu.

VĚTA 63.4. *Komplexní míra jednoduchého úhlu je komplexní jednotka různá od čísla* $+1$. To plyne z (63.1) a (63.3).

VĚTA 63.5. *Komplexní míra přímého úhlu je rovna číslu* -1. To je zřejmé.

VĚTA 63.6. *Dva jednoduché úhly mají touž velikost tehdy a jenom tehdy, mají-li touž komplexní míru, neboli, což je totéž, mají-li oba zároveň týž kosinus a týž sinus.*

DŮKAZ. Podle definice máme $\sin\alpha > 0$ pro duté úhly, $\sin\alpha = 0$ pro přímé úhly, $\sin\alpha < 0$ pro vypuklé úhly. Jestliže tedy dva jednoduché úhly mají týž kosinus a mimo to jsou buďto oba duté, nebo oba přímé nebo oba vypuklé, mají také týž sinus. Z toho plyne podle věty 63.2, že můžeme vyšetřovati zvlášť úhly duté, úhly přímé, úhly vypuklé a v každém ze tří případů máme zjistit, že dva úhly uvažovaného druhu mají touž velikost tehdy a jenom tehdy, mají-li týž kosinus. Pro úhly duté to bylo odvozeno již v článku 61. Pro přímé úhly je $\cos\alpha = -1$, takže žádaný výsledek plyne z věty 63.1. Případ vypuklých úhlů se převede na případ dutých úhlů podle věty 63.3.

VĚTA 63.7. *Každá komplexní jednotka* $j \neq 1$ *je komplexní měrou jednoduchého úhlu.*

DŮKAZ. Budiž $j = c + s\mathrm{i}$, tedy $c^2 + s^2 = 1$. Je-li $s = 0$, je $j = -1$, tedy j je komplexní míra přímého úhlu (viz větu 63.5). Je-li $s \neq 0$, je $-1 < c < 1$. Zaveďme libovolnou kartézskou soustavu souřadnic a položme $V = [0, 0]$, $A = [1, 0]$, $B = [c, s]$. Snadno se zjistí, že dutý úhel $\sphericalangle\, AVB$ má komplexní míru $c + \mathrm{i}|s|$ a vypuklý úhel s ním spřízněný komplexní míru $c - \mathrm{i}|s|$; jeden z obou má tudíž komplexní míru j.

V článku 62 jsme pro velikosti *dutých úhlů* definovali nerovnost $\alpha < \beta$. Zobecníme nyní definici této nerovnosti na velikosti všech *jednoduchých úhlů* takto: *Každý dutý úhel je menší než úhel přímý*; *každý vypuklý úhel je větší než úhel přímý*; *tedy každý dutý úhel je menší než každý vypuklý úhel. Ze dvou vypuklých úhlů je první menší než druhý* *tehdy a jenom tehdy, jestliže dutý úhel spřízněný s prvním je větší než dutý úhel spřízněný s prvým.* Jinak řečeno, nerovnost $\alpha < \beta$ znamená, že nastane jeden z těchto případů:

$$\cos\alpha > \cos\beta,\ \sin\alpha > 0,\ \sin\beta > 0;$$
$$\sin\alpha > 0,\ \sin\beta = 0;$$
$$\sin\alpha = 0,\ \sin\beta < 0;$$
$$\sin\alpha > 0,\ \sin\beta < 0;$$
$$\cos\alpha < \cos\beta,\ \sin\alpha < 0,\ \sin\beta < 0.$$

VĚTA 63.8. *Buďtež α, β dvě dané velikosti jednoduchých úhlů. Budiž dán jednoduchý úhel s rameny VA, VB, jehož velikost je β. Potom je $\alpha < \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže existuje vnitřní polopřímka VC daného úhlu tak, že ten jednoduchý úhel s rameny VA, VC, který je částí daného úhlu, má velikost α.*

DŮKAZ. Rozeznávejme tři případy podle toho, zda β je úhel dutý, přímý či vypuklý.

I. Je-li β úhel dutý, plyne naše věta z věty 62.1.

II. Je-li β úhel přímý, jest $\alpha < \beta$ tehdy a jenom tehdy, je-li α úhel dutý, a naše věta plyne z věty 61.3.

III. Je-li β úhel vypuklý, je naše věta zřejmá pro ten případ, že α je úhel dutý nebo přímý. Je-li však také α úhel vypuklý, převede se případ III snadno na případ I zavedením spřízněných úhlů.

VĚTA 63.9. *Buďtež α, β dvě dané velikosti jednoduchých úhlů, při čemž $\alpha < \beta$. Budiž dán jednoduchý úhel s rameny VA, VB, jehož velikost je β. Potom existuje právě jedna vnitřní polopřímka VC daného úhlu tak, že ten jednoduchý úhel s rameny VA, VC, který je částí daného úhlu, má velikost α.*

DŮKAZ. Že existuje *aspoň jedna taková* polopřímka, plyne z věty 63.8. Jsou-li však VC_1, VC_2 dvě různé vnitřní polopřímky daného úhlu, uvažujme to přirozené uspořádání daného úhlu, ve kterém je VA první, a předpokládejme, že v tomto přirozeném uspořádání jde třeba VC_1 před VC_2. Je-li α_1, resp. α_2, velikost toho v daném úhlu obsaženého jednoduchému úhlu, jehož rameny jsou polopřímky VA, VC_1, resp. VA, VC_2, je podle definice přirozeného uspořádání prvý z těchto dvou úhlů částí druhého, takže podle věty 63.8 jest $\alpha_1 < \alpha_2$ a proto nemůže býti zároveň $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha$.

64. SČÍTÁNÍ VELIKOSTI ÚHLŮ. Buďtež α, β, γ tři dané velikosti dutých úhlů. Pravíme, že velikost γ je *součtem* velikostí α, β a píšeme

$$\gamma = \alpha + \beta, \tag{64.1}$$

jestliže existuje jednoduchý úhel s rameny VA, VC, jehož velikost je rovna γ, a jeho vnitřní polopřímka VB tak, že v daném úhlu obsažený jednoduchý úhel s rameny VA, VB, resp. s rameny VB, VC, má velikost α, resp. β. Při daných α, β součet $\alpha + \beta$ nemusí existovat, ale existuje-li, je jednoznačně určen. To by bylo snadné dokázati přímo, ale je zbytečné to přímo dokazovati, neboť je to důsledkem následující věty 64.6.

Je-li α daná velikost jednoduchého úhlu, označíme α^* velikost jednoduchého úhlu spřízněného s úhlem velikosti α. Lehko se nahlédne, že velikost α^* je velikostí α jednoznačně určena a že $(\alpha^*)^* = \alpha$. Zřejmě platí:

VĚTA 64.1. *Buďtež α, β velikosti jednoduchých úhlů. Existuje-li součet $\alpha + \beta$, existuje také součet $\beta + \alpha$ a oba součty jsou si rovny.*

VĚTA 64.2. *Jsou-li α, β velikosti jednoduchých úhlů, existuje součet $\alpha + \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže*

$$\beta < \alpha^*. \tag{64.2}$$

DŮKAZ. I. Platí-li (64.1), existují tři různé polopřímky VA, VB, VC s týmž počátkem V a tři jednoduché úhly tak, že první má ramena VA, VC a velikost γ, druhý má ramena VA, VB a velikost α, třetí má ramena VB, VC a velikost β, a že druhý a třetí z daných úhlů jsou částmi prvého. Podle věty 59.1 druhý a třetí z daných úhlů jsou navzájem styčné, takže třetí je částí jednoduchého úhlu spřízněného s druhým a z toho plyne (64.2) podle věty 63.8.

II. Nechť platí (64.2). Zvolme jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}_1$ s velikostí α a s rameny VA, VB; označme $\boldsymbol{U}_2$ jednoduchý úhel spřízněný s $\boldsymbol{U}_1$, takže $\boldsymbol{U}_2$ má velikost α^*. Ze (64.2) plyne podle věty 63.8, že existuje vnitřní polopřímka VC úhlu $\boldsymbol{U}_2$ tak, že v $\boldsymbol{U}_2$ obsažený jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}_3$ s rameny VB, VC má velikost β. Podle věty 59.1 úhel $\boldsymbol{U}_2$ se skládá z úhlu $\boldsymbol{U}_3$ a z úhlu $\boldsymbol{U}_4$ s rameny VA, VC styčného k $\boldsymbol{U}_3$. Zřejmě oba úhly $\boldsymbol{U}_1$ a $\boldsymbol{U}_3$ jsou navzájem styčné a dohromady vyplní úhel $\boldsymbol{U}_5$ spřízněný s $\boldsymbol{U}_4$, takže platí (64.1), znamená-li γ velikost úhlu $\boldsymbol{U}_5$.

VĚTA 64.3. *Buďtež α, β takové velikosti dutých úhlů, že existuje součet $\gamma = \alpha + \beta$. Jestliže*

$$\alpha' \leqq \alpha, \quad \beta' \leqq \beta, \tag{64.3}$$

potom existuje také součet $\gamma' = \alpha' + \beta'$. Mimo to jest

$$\gamma' \leqq \gamma \tag{64.4}$$

a v (64.4) *platí znamení rovnosti tehdy a jenom tehdy, jestliže v* (64.3) *platí současně na obou místech znamení rovnosti.*

DŮKAZ. I. Ježto existuje součet $\alpha + \beta$, je $\beta < \alpha^*$ podle věty 64.2. Ježto $\alpha' \leqq \alpha$, je zřejmě $\alpha^* \leqq (\alpha')^*$; mimo to $\beta' \leqq \beta$, takže $\beta' < (\alpha')^*$ a z věty 64.2 plyne existence součtu $\alpha' + \beta'$.

II. Podle definice součtu existuje jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}$ s velikostí γ a s rameny VA, VC a uvnitř $\boldsymbol{U}$ polopřímka VB, která podle věty 59.1 rozdělí $\boldsymbol{U}$ na dva styčné úhly $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, z nichž prvý má velikost α a ramena VA, VB, druhý má velikost β a ramena VB, VC. Ježto $\alpha' \leqq \alpha$, existuje podle věty 63.8 v úhlu $\boldsymbol{U}_1$ polopřímka $VA_0 \neq VB$ tak, že v tomto úhlu obsažený jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}_3$ s rameny VA_0, VB má velikost α'; podobně existuje v úhlu $\boldsymbol{U}_2$ polopřímka $VC_0 \neq VB$ tak, že v tomto úhlu obsažený jednoduchý úhel $\boldsymbol{U}_4$ s rameny VB, VC_0 má velikost β'. Ježto úhly $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ jsou navzájem styčné, ježto úhel $\boldsymbol{U}_3$ je částí úhlu $\boldsymbol{U}_1$ a ježto úhel $\boldsymbol{U}_4$ je částí úhlu $\boldsymbol{U}_2$, jsou také úhly $\boldsymbol{U}_3$, $\boldsymbol{U}_4$ navzájem styčné. V přirozeném uspořádání úhlu $\boldsymbol{U}$, ve kterém polopřímka VA je první, jdou za sebou polopřímky VA_0, VB, VC_0 a proto oba úhly $\boldsymbol{U}_3$, $\boldsymbol{U}_4$ dohromady dávají v $\boldsymbol{U}$ obsažený dutý úhel $\boldsymbol{U}_5$ s rameny VA_0, VC_0, jehož velikost podle definice součtu je rovna $\alpha' + \beta'$. Ježto úhel $\boldsymbol{U}_5$ velikosti $\alpha' + \beta'$ je částí úhlu $\boldsymbol{U}$ velikosti $\alpha + \beta$, platí nerovnost (64.4), při čemž znamení rovnosti platí pouze v případě, že $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U}_5$ splynou a to vyžaduje, aby splynuly polopřímky VA, VA_0 a zároveň i polopřímky VB, VB_0, t. j., aby v (64.3) platilo na obou místech znamení rovnosti.

VĚTA 64.4. *Budiž dán kladně orientovaný jednoduchý úhel α s počátečním ramenem VA a koncovým ramenem VB. Existuje rotace roviny se středem V, která převádí polopřímku VA v polopřímku VB. Komplexní míra této rotace* (ve smyslu článku 42) *je rovna komplexní míře úhlu α.*

DŮKAZ. Můžeme předpokládati, že $\overline{VA} = \overline{VB} = 1$. Existuje kladná kartézská soustava souřadnic $\langle V; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ s počátkem V tak, že

(64.5) $$A = V + u_1.$$

Položme
$$B = V + x_1 u_1 + x_2 u_2.$$

Ježto $\overline{VB} = 1$, jest $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Ježto $\overline{VA} = \overline{VB} = 1$, jest $\cos\alpha = (A - V)(B - V) = x_1$ a tedy $\sin\alpha = \pm x_2$. Podle věty 60.2 je však $x_2 > 0$, je-li úhel α dutý; $x_2 < 0$, je-li úhel α vypuklý a pro přímý úhel α je ovšem $x_2 = 0$. Tedy ve všech případech $\sin\alpha = x_2$. Položíme-li

$$c = \cos\alpha,\quad s = \sin\alpha,$$

takže $c + is$ je komplexní míra úhlu α, je tudíž

(64.6) $$B = V + cu_1 + su_2.$$

Při uvažované rotaci f je zřejmě $f(V) = V$, $f(A) = B$, takže podle (64.5) a (64.6) snadno odvodíme z věty 42.2, že f převádí bod $[x_1, x_2]$ v bod $[x_1', x_2']$, kde

$$x_1' = cx_1 - sx_2,\quad x_2' = sx_1 + cx_2.$$

Z toho však plyne podle článku 42, že rotace f má komplexní míru $c + is$.

Z věty 64.2 plyne snadno:

VĚTA 64.5. *Buďtež α, β dvě velikosti jednoduchých úhlů a buďtež*

$$c_1 + is_1,\quad c_2 + is_2$$

příslušné komplexní míry. Součet $\alpha + \beta$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže nastane jeden z těchto tří případů:

(a) $s_1 \geqq 0$, $s_2 \geqq 0$, *ne však současně* $s_1 = s_2 = 0$;

(b) $s_1 > 0$, $s_2 < 0$, $c_2 < c_1$;

(c) $s_1 < 0$, $s_2 > 0$, $c_1 < c_2$.

VĚTA 64.6. *Buďtež α, β dvě velikosti jednoduchých úhlů. Existuje-li součet $\alpha + \beta$, je jeho komplexní míra rovna součinu komplexních měr úhlů α, β.*

DŮKAZ. Podle definice součtu existuje jednoduchý úhel s velikostí $\alpha + \beta$ a s rameny VA, VC a uvnitř něho polopřímka VB, která jej rozkládá na úhel s velikostí α a s rameny VA, VB a na úhel s velikostí β a s rameny VB, VC. Můžeme předpokládati, že u prvého úhlu je kladná ta orientace, při které je VA počátečním ramenem. Podle věty 60.3 je potom u druhého úhlu kladná ta orientace, při které je VA počátečním ramenem, u třetího pak ta, při které je VB počátečním ramenem. Podle věty 64.4 je komplexní míra úhlu α rovna komplexní míře rotace f_1 převádějící polopřímku VA v polopřímku VB, komplexní míra úhlu β je rovna komplexní míře rotace f_2 převádějící polopřímku VB v polopřímku VC a komplexní míra úhlu $\alpha + \beta$ je rovna komplexní míře rotace $f_1 \circ f_2$. Naše věta plyne nyní z věty 42.5.

Poznamenejme, že věta 64.6 je vyjádřena komplexní formulí

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) + \mathrm{i} \sin(\alpha + \beta) &= \\ = (\cos\alpha + \mathrm{i} \sin\alpha) \,.\, (\cos\beta + \mathrm{i} \sin\beta) \end{aligned} \tag{64.7}$$

ekvivalentní se dvěma reálnými formulemi

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \tag{64.8}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta. \tag{64.9}$$

65. NÁSOBENÍ A DĚLENÍ ÚHLŮ. Dosud jsme mluvili pouze o součtu *dvou* jednoduchých úhlů. Součet více než dvou jednoduchých úhlů definujeme rekurentní formulí

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{k+1} = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k) + \alpha_{k+1}, \tag{65.1}$$

kterou jest chápati tak, že levá strana má význam tehdy a jenom tehdy, má-li význam strana pravá. Připomeneme-li si definici součtu se dvěma sčítanci, vidíme snadno, že platí:

VĚTA 65.1. *Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dané velikosti jednoduchých úhlů, potom součet $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže existuje orientovaný jednoduchý úhel φ s počátečním ramenem VA_0 a s koncovým ramenem VA_k a uvnitř něho polopřímky $VA_1, \ldots, VA_{k-1}$ tak, že předně v přirozeném uspořádání úhlu φ příslušném dané jeho orientaci jdou za sebou polopřímky*

$$VA_0, VA_1, \ldots, VA_{k-1}, VA_k$$

a že za druhé pro $1 \leqq r \leqq k$ ve φ obsažený jednoduchý úhel s rameny VA_{r-1}, VA_r má velikost α_r. Je-li tomu tak, je velikost úhlu φ rovna součtu $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$.

Z věty 65.1 je patrné, že existuje-li součet $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$, potom pro $1 \leqq r < s \leqq k$ existuje také součet $\alpha_r + \ldots + \alpha_s$. Dále je patrné, že *platí obecný asociativní zákon*, který praví, že existuje-li součet $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ a rozdělíme-li sčítance na skupiny

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}; \alpha_{n_1+1} + 1, \ldots, \alpha_{n_2}; \alpha_{n_2+1}, \ldots, \alpha_{n_3}; \ldots,$$

při čemž některá skupina může obsahovati jen jednoho sčítance, potom existují součty

$$\beta_1 = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n_1},$$
$$\beta_2 = \alpha_{n_1+1} + \ldots + \alpha_{n_2}; \ldots,$$

při čemž $\beta_1 = \alpha_1$ pro $n_1 = 1$, $\beta_2 = \alpha_{n_2}$ pro $n_1 + 1 = n_2$ atd., mimo to existuje součet $\beta_1 + \beta_2 + \ldots$, který je roven součtu $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$

Indukcí se dá dokázati, že platí *obecný komutativní zákon*, který praví, že existence a hodnota součtu $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ jsou nezávislé na pořadí sčítanců. Posléze lze dokázati, že existuje-li součet $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ a je-li

(65.2) $$\alpha_1' \leqq \alpha_1, \ldots, \alpha_k' \leqq \alpha_k,$$

existuje také součet $\alpha_1' + \ldots + \alpha_k'$ a jest

(65.3) $$\alpha_1' + \ldots + \alpha_k' \leqq \alpha_1 + \ldots + \alpha_k,$$

při čemž znamení rovnosti v (65.3) platí tehdy a jenom tehdy, platí-li ve všech k vztazích (65.2) současně.

Z věty 64.6 plyne, že existuje-li součet $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ a jsou-li $j_1, \ldots, j_k$ komplexní míry sčítanců, potom komplexní míra součtu $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ je rovna součinu $j_1 \ldots j_k$. Z věty 64.5 lze odvodit podmínky pro $j_1, \ldots, j_k$ vyjadřující existenci součtu $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k$.

Je-li α daná velikost dutého úhlu, potom pro $k = 2, 3, \ldots$ symbol $k\alpha$ znamená součet k sčítanců vesměs rovných α, pokud tento součet má význam; mimo to $1 \, . \, \alpha = \alpha$. Je patrné, že jestliže při určitém k má význam $k\alpha$, potom pro $1 \leqq h < k$ má též význam $h\alpha$ a jest $h\alpha < k\alpha$.

Jestliže při daných α, k existuje $k\alpha$, potom pro každé $\beta < \alpha$ existuje $k\beta$ a jest $k\beta < k\alpha$. Z toho plyne, že při daném $k = 2, 3, \ldots$, je-li α daná velikost jednoduchého úhlu, existuje *nejvýš jedna* velikost φ jednoduchého úhlu tak, že $k\varphi = \alpha$. Existuje-li φ, položíme

$$(65.4) \qquad \varphi = \frac{1}{k}\,\alpha.$$

Teprve ve druhém svazku dokážeme, že pro každé α a pro každé $k \geqq 2$ existuje (65.4). Důležitý případ $k = 2$ probereme však již nyní.

Budiž φ daná velikost jednoduchého úhlu. Dokážeme, že 2φ existuje tehdy a jenom tehdy, je-li φ úhel dutý. Za tím účelem položme

$$c = \cos\varphi,\ s = \sin\varphi,$$

takže

$$j = c + is$$

je komplexní míra úhlu φ. Podle věty 64.5 existuje 2φ tehdy a jenom tehdy, je-li $s > 0$, t. j. je-li φ úhel dutý. Je-li tomu tak, potom podle věty 64.6 komplexní míra úhlu 2φ je rovna

$$j^2 = (c + is)^2 = (c^2 - s^2) + 2ics$$

neboli: *Pro každý dutý úhel φ jest:*

$$(65.5) \qquad \cos2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,\ \sin2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Je-li nyní α libovolná velikost jednoduchého úhlu, jest $-1 \leqq \cos\alpha < < 1$ podle (63.1), takže existují reálná čísla

$$(65.6) \qquad a = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}, \qquad b = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

Jest $a \geqq 0$; $b > 0$, $a^2 + b^2 = 1$. Definujme znamení $\varepsilon = \pm 1$ takto: je-li α úhel dutý, jest $\varepsilon = 1$, je-li α úhel vypuklý, jest $\varepsilon = -1$, je-li α úhel přímý, nezáleží na znamení ε. V každém případě je potom $\sin\alpha = = \varepsilon\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$. Ježto $b > 0$, $a^2 + b^2 = 1$, existuje dutý úhel φ, pro který $\cos\varphi = \varepsilon a$, $\sin\varphi = b$. Podle (65.5) a (65.6) je však $\cos2\varphi = \cos\alpha$, $\sin2\varphi = \varepsilon\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sin\alpha$ neboli $2\varphi = \alpha$, t. j. $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$. Tedy pro každý jednoduchý úhel α existuje dutý úhel $\frac{1}{2}\alpha$ a jest

$$(65.7) \qquad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}},\ \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}},$$

při čemž v prvém vzorci (65.7) platí znamení plus, je-li α úhel dutý, znamení minus, je-li α úhel vypuklý; je-li α úhel přímý, je $\cos\frac{1}{2}\alpha = 0$ a na znamení nezáleží.

66. ÚHLY V KRUŽNICI. Předpokládejme, že rovina $\mathbf{E}_2$ jest *orientována* a zaveďme v ní *kladnou* kartézskou soustavu souřadnic. Je-li $X = [x_1, x_2]$ libovolný bod, položíme $z = x_1 + ix_2$ a píšeme $X = [z]$, t. j. místo dvou reálných souřadnic x_1, x_2 bodu X budeme užívat jediné *komplexní souřadnice* $x_1 + ix_2$. Je-li $z = x_1 + ix_2$ libovolné komplexní číslo, označíme z^* *komplexně sdružené číslo* $z^* = x_1 - ix_2$.

Budiž dána kružnice se středem S a poloměrem r. Budiž $S = [s]$, kde s je tedy komplexní číslo. Daná kružnice se skládá ze všech těch bodů $[z]$, pro něž $|z - s| = r$ neboli

$$(z - s)(z^* - s^*) = r^2. \tag{66.1}$$

Rovnici (66.1) můžeme napsati ve tvaru

$$zz^* + az + a^*z^* + b = 0, \tag{66.2}$$

kde $a = -s^*$ je komplexní číslo, $a^* = -s$ je číslo komplexně sdružené s a a $b = ss^* - r^2$ je reálné číslo. Obráceně budiž dána rovnice tvaru (66.2), ve které a je komplexní číslo, a^* je číslo komplexně sdružené, b je reálné číslo. Označíme-li s komplexní číslo

$$s = -a^*, \tag{66.3}$$

lze rovnici (66.2) uvésti na tvar

$$(z - s)(z^* - s^*) = D \tag{66.4}$$

neboli

$$|z - s|^2 = D, \tag{66.4'}$$

kde reálné číslo

$$D = ss^* - b = aa^* - b = |a|^2 - b \tag{66.5}$$

je t. zv. *diskriminant* rovnice (66.2). Je-li $D < 0$, je zřejmé ze tvaru (66.4′), že rovnici (66.2) nevyhovuje *žádný* bod $[z]$; je-li $D = 0$, potom rovnici (66.2) vyhovuje *jediný* bod $[z] = [s] = [-a^*]$. Je-li však $D > 0$, potom porovnání (66.1) a (66.4) ukazuje, že bod $[z]$ vyhovuje rovnici (66.2) tehdy a jenom tehdy, leží-li na kružnici, jejíž střed je v bodě $[s] = [-a^*]$ a jejíž poloměr je $\sqrt{D}$; pravíme stručně, že (66.2) je *rovnice kružnice*. Tedy *rovnice tvaru* (66.2) *je rovnicí kružnice tehdy a jenom tehdy, má-li kladný diskriminant*. Z předcházející diskuse je patrné, že jestliže známe dvě různá komplexní čísla z_1, z_2, která obě splňují rovnici (66.2), jest jistě $D > 0$, t. j. (66.2) v tomto případě je jistě rovnice kružnice.

VĚTA 66.1. *Dvě různé kružnice k_1, k_2 nemohou míti více než dva společné body.* To je zřejmé, mají-li k_1, k_2 obě týž střed. Jsou-li však středy S_1, S_2 kružnice k_1, k_2 různé, buďtež

$$(66.7) \qquad \begin{aligned} zz^* + a_1 z + a_1^* z^* + b_1 &= 0, \\ zz^* + a_2 z + a_2^* z^* + b_2 &= 0 \end{aligned}$$

rovnice obou kružnic, takže a_1, a_2 jsou komplexní čísla, b_1, b_2 jsou reálná čísla. Bod $[z]$, který je společný oběma kružnicím k_1, k_2, splňuje obě rovnice (66.7) a tudíž splňuje také rovnici

$$(66.8) \qquad (a_1 - a_2)\, z + (a_1^* - a_2^*)\, z^* + b_1 - b_2 = 0.$$

Obráceně je patrné, že každý bod kružnice k_1, který splňuje rovnici (66.8), leží také na kružnici k_2. Položíme-li však

$$a_1 = x_1 + y_1 \mathrm{i}, \; a_2 = x_2 + y_2 \mathrm{i}, \; z = x + y\mathrm{i},$$

nabude rovnice (66.8) tvaru

$$(66.8') \qquad 2(x_1 - x_2)\, x - 2(y_1 - y_2)\, y + b_1 - b_2 = 0.$$

Podle (66.3) a (66.7) jest $S_1 = [- x_1 + y_1 \mathrm{i}]$, $S_2 = [- x_2 + y_2 \mathrm{i}]$. Ježto $S_1 \neq S_2$, je tedy (66.8') rovnice přímky p a průsečíky kružnic k_1, k_2 tudíž splynou s průsečíky přímky p s kružnicí k_1, jsou tedy nejvýš dva.

V následujícím označíme $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ dutý úhel $\sphericalangle PZQ$ orientovaný tak, že polopřímka ZP je počátečním ramenem. Je-li $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ *kladně orientován*, nazveme *jeho komplexní měrou* komplexní míru neorientovaného dutého úhlu $\sphericalangle PZQ$. Je-li však $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ záporně orientován, nazveme jeho komplexní měrou komplexní míru neorientovaného vypuklého úhlu spřízněného s dutým úhlem $\sphericalangle PZQ$ neboli číslo komplexně sdružené s komplexní měrou neorientovaného $\sphericalangle PZQ$. Potom platí:

VĚTA 66.2. *Je-li $Z = [z]$, $P = [z_1]$, $Q = [z_2]$ a není-li číslo*

$$s = (z_1{}^* - z^*)(z_2 - z)$$

reálné, potom body Z, P, Q neleží na přímce a komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je rovna $s : |s|$.

Důkaz. Z věty 64.4 plyne snadno, že komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je rovna komplexní míře rotace f roviny o středu Z, která převádí polopřímku ZP v polopřímku ZQ. Je-li ε tato komplexní míra, potom se snadno dokáže [viz (42.16')], že f převádí bod $[\zeta]$ v bod $[\zeta']$, kde

$$\zeta' - z = \varepsilon(\zeta - z).$$

Ježto f převádí bod P v některý bod polopřímky ZQ, odvodí se snadno, že existuje číslo $k > 0$ tak, že transformace φ, která převede bod $[\zeta]$ v bod $[\zeta'']$, kde

$$\zeta'' - z = k\varepsilon(\zeta - z),$$

převede bod $P = [z_1]$ v bod $Q = [z_2]$. Je tedy $z_2 - z = k\varepsilon(z_1 - z)$ a tudíž

$$s = k\varepsilon(z_1 - z)(z_1^* - z^*) = k\varepsilon|z_1 - z|^2;$$

ježto $k > 0$, $|\varepsilon| = 1$, je $s : |s| = \varepsilon$.

Věta 66.3. *Buďtež P, Q dva různé body v rovině $\mathbf{E}_2$. Budiž ε komplexní jednotka; $\varepsilon \neq 1$, $\varepsilon \neq -1$. Potom existuje kružnice k, která se skládá z obou bodů P, Q, dále ze všech bodů Z, pro které $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ má komplexní míru rovnou ε nebo $-\varepsilon$.*

Důkaz. Budiž $P = [z_1]$, $Q = [z_2]$. Vyjděme od rovnice

$$\varepsilon(z_1 - z)(z_1^* - z^*) = \varepsilon^*(z_1^* - z^*)(z_2 - z). \tag{66.9}$$

Ježto $|\varepsilon| = 1$, $\varepsilon \neq 1$, $\varepsilon \neq -1$, číslo ε není reálné, takže $\varepsilon \neq \varepsilon^*$ a rovnici (66.9) lze uvésti na tvar (66.2). Ježto rovnici (66.9) je vyhověno i pro $z = z_1$ i pro $z = z_2$ a ježto $z_1 \neq z_2$, jest (66.9) rovnice kružnice k, která obsahuje oba body P, Q. Bod $Z = [z]$ různý od P i od Q leží na kružnici k tehdy a jenom tehdy, jestliže komplexní číslo

$$\varepsilon^*(z_1^* - z^*)(z_2 - z) \tag{66.10}$$

je rovné číslu komplexně sdruženému, t. j., jestliže číslo (66.10) je rovné reálnému číslu a; ježto $z \neq z_1$, $z \neq z_2$, jest ovšem $a \neq 0$. Ježto ε je komplexní jednotka, jest $\varepsilon\varepsilon^* = 1$ a podmínka

$$\varepsilon^*(z_1^* - z^*)(z_2 - z) = a$$

se dá psáti ve tvaru

(66.11) $$(z_1^* - z^*)(z_2 - z) = a\varepsilon.$$

Ježto číslo $a \neq 0$ je reálné a ježto $|\varepsilon| = 1$, plyne z (66.11) podle věty 66.2, že komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je rovna ε pro $a > 0$, rovna $-\varepsilon$ pro $a < 0$. Tím je vše dokázáno.

VĚTA 66.4. *Třemi různými body P, Q, R, které neleží na přímce, prochází právě jedna kružnice.*

DŮKAZ. Podmínka, aby body P, Q, R neležely na přímce, byla nutná, ježto přímka a kružnice mají nejvýš dva společné body. Podle věty 66.1 stačí dokázati, že existuje *aspoň jedna* kružnice obsahující body P, Q, R. To však plyne z věty 66.3, je-li ε komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PRQ}$.

VĚTA 66.5. *Budiž c oblouk kružnice k s krajními body P, Q. Potom velikost orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je táž pro všechny vnitřní body Z oblouku c a obráceně každý bod $Z \neq P$, $Z \neq Q$, pro který $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ má tuto velikost, je vnitřním bodem oblouku c.*

DŮKAZ. Budiž Z_0 libovolně zvolený bod vnitřní bod oblouku c a budiž ε komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZ_0Q}$. Podle věty 66.4 existuje právě jedna kružnice k obsahující všechny tři body P, Q, Z_0 a oblouk c skládající se z těch bodů kružnice k, které leží v té polorovině vyťaté přímkou PQ, která obsahuje bod Z_0. Je-li Z libovolný bod roviny $\mathbf{E}_2$, který neleží na přímce PQ, potom podle věty 66.3 komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZQ}$ je rovna $\pm\,\varepsilon$ tehdy a jenom tehdy, jestliže bod Z leží na kružnici k. Je-li $Z = [z]$, $P = [z_1]$, $Q = [z_2]$ a je-li η komplexní míra orientovaného úhlu $\sphericalangle \overrightarrow{PZO}$, potom podle věty 66.2 existuje kladné číslo a tak, že

$$(z_1^* - z^*)(z_2 - z) = a\eta;$$

při tom podle věty 66.3 je $\eta = \pm\,\varepsilon$ tehdy a jenom tehdy, jestliže bod Z leží na kružnici k. Avšak snadno se odvodí, že ve vztahu $\eta = \pm\,\varepsilon$ platí znamení plus tehdy a jenom tehdy, jestliže $[P - Z, Q - Z]$ má totéž znamení jako $[P - Z_0, Q - Z_0]$; ježto však $Q - Z = (Q - P) + (P - Z)$, jest $[P - Z, Q - Z] = [P - Z, Q - P]$, takže $\eta =$

$= + \varepsilon$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $[P - Z, Q - P]$ má totéž znamení jako $[P - Z_0, Q - P]$ neboli jestliže oba body $[z]$, $[z_0]$ jsou v téže polorovině vyťaté přímkou P, Q, t. j., jestliže Z patří do oblouku c.

67. DYADICKÉ ÚHLY. K početnímu vyjádření velikosti α dutého úhlu jsme v článku 61 užili čísla $\cos\alpha$, podrobeného podmínce $-1 < < \cos\alpha < 1$. Algebraicky se jeví $\cos\alpha$ jako nejjednodušší možné početní vyjádření velikostí dutého úhlu, ježto platí jednoduchý vzorec

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|}.$$

Také porovnání velikostí dutých úhlů pomocí kosinu je snadné; víme z článku 62, že pro dvě velikosti α, β dutých úhlů platí $\alpha < \beta$ tehdy a jenom tehdy, jestliže $\cos\alpha > \cos\beta$. Všimněme si sčítání velikosti dutých úhlů pomocí kosinu. V článku 64 jsme pro libovolné dva duté úhly α, β definovali součet $\alpha + \beta$, který je jednoduchým úhlem; nyní se však omezíme pouze na duté úhly a součet $\alpha + \beta$ budeme považovat za definovaný pouze pro ten případ, že $\alpha + \beta$ je dutý úhel. Znamená-li však α' úhel výplňkový k dutému úhlu α, plyne z definice, že $\alpha + \alpha'$ je přímý úhel. Z věty 64.3 tedy plyne, že v *oboru dutých úhlů součet $\alpha + \beta$ existuje tehdy a jenom tehdy, je-li $\beta < \alpha'$, kde α' je úhel výplňkový k úhlu α*. Ježto $\cos\alpha' = -\cos\alpha$, můžeme podmínku pro existenci součtu $\alpha + \beta$ pomocí kosinu vyjádřit v jednoduchém tvaru

$$\cos\alpha + \cos\beta > 0.$$

Avšak číslo $\cos(\alpha + \beta)$ je dáno poměrně složitým vzorcem (viz 64.8)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \,.\, \sqrt{1 - \cos^2\beta}.$$

Při sčítání velikostí více než dvou úhlů bylo by vyjadřování pomocí kosinu velmi nepohodlné.

Mnohem jednodušší je v otázkách sčítání velikostí úhlů užívati komplexní míry definované vzorcem

$$\varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

kde $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} > 0$. Jsou-li α, β dvě velikosti dutých úhlů a jsou-li ε_1, ε_2 příslušné komplexní míry, plyne z věty 64.6, že v oboru dutých úhlů součet $\alpha + \beta$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže jest Im. $(\varepsilon_1\varepsilon_2) > 0$ a že je-li tato podmínka splněna, potom komplexní míra součtu $\alpha + \beta$ je rovna součinu $\varepsilon_1\varepsilon_2$ komplexních měr sčítanců. Užíváme-li komplexní míry, nabudou podmínky pro existenci součtu a výraz pro komplexní míru součtu jednoduchého tvaru. Jsou-li $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ komplexní míry sčítanců, existuje v oboru dutých úhlů součet tehdy a jenom tehdy, jestliže všecky komplexní jednotky

$$\varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k$$

mají imaginární část kladnou a je-li tato podmínka splněna, potom komplexní míra součtu je součin $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k$. Zejména: je-li α velikost dutého úhlu a je-li ε příslušná komplexní míra, potom pro $k = 2, 3, \ldots$ existuje $k \,.\, \alpha$ tehdy a jenom tehdy, jestliže všecky mocniny

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^k$$

mají kladnou imaginární část a je-li tato podmínka splněna, potom $k\alpha$ má komplexní míru ε^k.

Komplexní míra má tu vlastnost, že sčítání velikostí dutého úhlu odpovídá násobení komplexní míry. V elementární geometrii se místo komplexní míry užívá pro vyjádření velikosti úhlu reálného čísla, které nazveme *aditivní měrou*, protože sčítání velikosti dutého úhlu odpovídá sčítání aditivní míry. K přesnému vybudování pojmu aditivní míry je třeba hlubších vlastností pojmu reálného čísla než v jiné zde probírané látce; proto jsme odložili aditivní míru až na konec svazku.

Položme

(67.1) $$\varepsilon_1 = i$$

a pro $n \geqq 1$

(67.2) $$\varepsilon_{n+1} = \frac{1 + \varepsilon_n}{|1 + \varepsilon_n|}.$$

Pro $n = 1$ jest Im. $\varepsilon_1 = 1$, tedy Im. $\varepsilon_n > 0$. Je-li Im. $\varepsilon_n > 0$ při určitém n, jest $1 + \varepsilon_n \neq 0$, takže číslo ε_{n+1} je jednoznačně definováno a jest Im. $\varepsilon_{n+1} > 0$. Z toho plyne, že čísla ε_n jsou jednoznačně definována pro všecka $n \geqq 1$ tak, že

(67.3) $$\text{Im. } \varepsilon_n > 0.$$

Ze (66.2) plyne snadno, že

(67.4) $$\varepsilon_{n+1}^2 = \varepsilon_n,$$

takže podle (67.1) všecka čísla ε_n jsou komplexní jednotky. Podle (67.3) je každé ε_n komplexní měrou určité velikosti dutého úhlu, kterou označíme R_n. Podle (67.1) R_1 znamená úhel pravý; podle (67.4) je

(67.5) $$R_{n+1} = \tfrac{1}{2}R_n.$$

Z (67.1) plyne, že pro $n = 1$ jest

(67.6) $$\varepsilon_n^{2^n} = -1;$$

platí-li však (67.6) při určitém n, plyne ze (67.4), že obdobný vzorec platí také pro $n + 1$; tedy (67.6) platí pro každé $n \geqq 1$.

Všimněme si nyní při určitém $n \geqq 1$ komplexních jednotek

(67.7) $$1 = \varepsilon_n^0, \varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \ldots, \varepsilon_n^{2^n} = -1.$$

První a poslední z komplexních jednotek (67.7) mají imaginární část rovnu nule; o ostatních dokážeme, že mají imaginární část kladnou. Pro $n = 1$ je správnost učiněného tvrzení podle (67.1) zřejmá. Předpokládejme tedy, že při určitém n už víme, že

(67.8) $$\text{Im. } \varepsilon_n^r > 0 \text{ pro } 1 \leqq r \leqq 2^n - 1.$$

Máme dokázati, že

(67.9) $$\text{Im. } \varepsilon_{n+1}^s > 0 \text{ pro } 1 \leqq s \leqq 2^{n+1} - 1,$$

ale pro $s = 1$ je nám to známo, takže můžeme předpokládati, že $s \geqq 2$. Je-li nejprve číslo s sudé, jest $s = 2r$, kde $1 \leqq r \leqq 2^n - 1$, takže (67.9) plyne ze (67.4) a (67.8). Je-li za druhé číslo s liché, jest $s = 2r + 1$, kde $1 \leqq r \leqq 2^n - 1$, takže platí (67.8). Podle (67.4) jest

$$\varepsilon_{n+1}^s = \varepsilon_n^r \cdot \varepsilon_{n+1};$$

avšak podle (67.2) existuje reálné kladné číslo a tak, že $\varepsilon_{n+1} = a(1 + \varepsilon_n)$, tedy

$$\varepsilon_{n+1}^s = a(\varepsilon_n^r + \varepsilon_n^{r+1});$$

při tom je

$$\text{Im. } \varepsilon_n^r > 0, \ \text{Im. } \varepsilon_n^{r+1} \geqq 0,$$

takže opět platí (67.9).

Z právě dokázaného výsledku plyne, že dutý úhel $k \,.\, R_n$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže $1 \leqq k \leqq 2^n - 1$. Dutý úhel α tvaru

$$\alpha = k \,.\, R_n, \ 1 \leqq k \leqq 2^n - 1,$$

nazveme *dyadickým úhlem řádu n*. Tento pojem se tedy týká pouze velikostí dutého úhlu, t. j. nezávislý na poloze. Z (67.5) plyne, že každý dyadický úhel řádu n je zároveň dyadickým úhlem řádu $n+1$. Tedy pro $n_1 < n_2$ každý dyadický úhel řádu n_1 je zároveň dyadickým úhlem řádu n_2. Pravíme prostě, že α je *dyadický úhel*, existuje-li takové $n \geqq 1$, že α je dyadický úhel řádu n. Je patrné, že jsou-li α, β dva dyadické úhly, existuje takové $n \geqq 1$, že α, β jsou oba dyadickými úhly řádu n, z čehož plyne dále, že jsou-li α, β dva dyadické úhly a existuje-li dutý úhel $\alpha + \beta$, je také $\alpha + \beta$ dyadický úhel.

Pro $n \geqq 1$ nazveme *dyadickým zlomkem řádu n* každé racionální číslo tvaru

$$\frac{k}{2^n}, \ k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1.$$

Je-li $n_1 < n_2$, je každý dyadický zlomek řádu n_1 zároveň dyadickým zlomkem řádu n_2. Racionální číslo c nazveme prostě *dyadickým zlomkem*, existuje-li takové $n \geqq 1$, že c je dyadický zlomek řádu n. Pro každý dyadický zlomek c platí $0 < c < 1$. Jsou-li c', c'' dva dyadické zlomky, existuje takové $n \geqq 1$, že c', c'' jsou oba dyadickými zlomky řádu n; je-li tomu tak, a je-li $c' + c'' < 1$, je také $c' + c''$ dyadický zlomek řádu n.

Je-li nyní

(67.10) $$\alpha = k \,.\, R_n, \ 1 \leqq k \leqq 2^n - 1$$

dyadický úhel, nazveme jeho aditívní měrou číslo

(67.11) $$\frac{k}{2^n}.$$

Platí-li (67.10), potom podle (67.5) je zároveň $\alpha = 2k \,.\, R_{n+1}$; ježto však

$$\frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n},$$

je patrné, že additívní míra dyadického úhlu jest jednoznačně určena. Aditívní míra každého dyadického úhlu je dyadický zlomek; obráceně, je-li c libovolný dyadický zlomek, existuje a je co do velikosti jednoznačně určen dyadický úhel α, jehož aditivní míra je rovna c.

Jsou-li α, β dva dyadické úhly a jsou-li c', c'' jejich aditivní míry, je z předcházejícího patrné, že dutý úhel $\alpha + \beta$ existuje tehdy a jenom tehdy, jestliže $c' + c'' < 1$; je-li tomu tak, je také $\alpha + \beta$ dyadický úhel a jeho aditivní míra je rovna $c' + c''$, t. j. je rovna součtu aditivních měr dyadických úhlů α, β. Také je patrné, že jsou-li α, β dva dyadické úhly, jest $\alpha < \beta$ tehdy a jenom tehdy, je-li $c' < c''$, t. j. je-li aditivní míra úhlu α menší než aditivní míra úhlu β.

68. ADITIVNÍ MÍRA DUTÝCH ÚHLŮ. V tomto článku podržíme všecky předpoklady a označení z předcházejícího článku. Ježto R_1 je úhel pravý, je $R_2 = \frac{1}{2}R_1$ úhel ostrý, takže $\cos R_2 > 0$. Položme

$$a = 1 + \cos R_2, \text{ takže } a > 1.$$

Podle (67.5) je $R_{n+1} \leqq R_2$ pro $n \geqq 1$, tedy $\cos R_{n+1} \geqq \cos R_2$, takže

$$|1 + \varepsilon_{n+1}| \geqq \text{Re.}\,(1 + \varepsilon_{n+1}) = 1 + \cos R_{n+1} \geqq a > 1.$$

Podle (67.4) jest

$$1 - \varepsilon_{n+1}^2 = (1 - \varepsilon_{n+1})(1 + \varepsilon_{n+1}) = 1 - \varepsilon_n \quad ,$$

neboli

$$1 - \varepsilon_{n+1} = \frac{1 - \varepsilon_n}{1 + \varepsilon_{n+1}},$$

takže

$$(68.1) \qquad |1 - \varepsilon_{n+1}| \leqq \frac{|1 - \varepsilon_n|}{a}.$$

Ježto $\varepsilon_1 = \mathrm{i}$, jest $|1 - \varepsilon_1| = \sqrt{2}$, takže z (68.1) plyne, že pro $n \leqq 1$ jest

$$|1 - \varepsilon_n| \leqq \frac{a\sqrt{2}}{a^n}.$$

Ježto $a > 1$, jest

$$(68.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1,$$

takže $\lim\limits_{n\to\infty} \text{Re.}\, \varepsilon_n = 1$ neboli

$$(68.3) \qquad \lim_{n\to\infty} \cos R_n = 1.$$

Ježto ε_n je komplexní jednotka, je $|\varepsilon_n|^2 = \varepsilon_n \cdot \varepsilon_n^* = 1$, takže podle (67.6) je $\varepsilon_n^* = - \varepsilon_n^{2^n-1}$, tedy

(68.4) $$\cos(2^n - 1) R_n = - \cos R_n,$$

t. j. R_n a $(2^n - 1) R_n$ jsou výplňkové úhly.

Budiž nyní α libovolný dutý úhel. Jest $- 1 < \cos\alpha < 1$, takže podle (68.3) a (68.4) existuje index $\nu(\alpha)$ tak, že pro všecka $n \geqq \nu(\alpha)$ jest

$$\cos R_n > \cos\alpha > \cos(2^n - 1) R_n$$

neboli

$$R_n < \alpha < (2^n - 1) R_n.$$

Z toho plyne, že pro všecka $n \geqq \nu(\alpha)$ existuje a je jednoznačně určeno celé číslo $k_n(\alpha)$ tak, že

(68.5) $$1 \leqq k_n(\alpha) < 2^n - 1,$$

(68.6) $$\alpha = k_n(\alpha) \cdot R_n + \alpha_n,$$

kde

(68.7) $$0 \leqq \alpha_n < R_n.$$

Je-li $\alpha_n = 0$, potom (68.6) znamená, že $\alpha = k_n(\alpha) \cdot R_n$; je-li $\alpha_n > 0$, je α_n dutý úhel splňující (68.7). Vedle (68.6) a (68.7) máme ovšem také

(68.6') $$\alpha = k_{n+1}(\alpha) \cdot R_{n+1} + \alpha_{n+1},$$

(68.7') $$0 \leqq \alpha_{n+1} < R_{n+1}.$$

Podle (68.6), (68.7) a (67.5) je však

(68.8) $$\alpha = 2k_n(\alpha) \cdot R_{n+1} + \alpha_n,$$

(68.9) $$0 \leqq \alpha_n < 2R_{n+1}.$$

Podle (68.9) jsou dvě možnosti. Předně může býti

$$0 \leqq \alpha_n < R_{n+1}$$

v tomto případě budiž $\delta_n(\alpha) = 0$, $\alpha_n' = \alpha_n$ a je tedy

(68.8') $$\alpha = [2k_n(\alpha) + \delta_n(\alpha)] \cdot R_{n+1} + \alpha_n',$$

(68.9') $$0 \leqq \alpha_n' < R_{n+1};$$

za druhé může býti

$$R_{n+1} \leqq \alpha_n < 2R_{n+1},$$

takže lze položiti

$$\alpha_n = \alpha_n' + R_{n+1},$$

kde opět platí (68.9′); je-li $\delta_n(\alpha) = 1$, platí také (68.8′). Jestliže (68.8′) a (68.9′) porovnáme s (68.6′) a (68.7′), dostaneme

(68.10) $$k_{n+1}(\alpha) = 2k_n(\alpha) + \delta_n(\alpha),$$

při čemž

(68.10′) $$\text{buďto } \delta_n(\alpha) = 0 \text{ nebo } \delta_n(\alpha) = 1.$$

Podle (68.10) a (68.10′) je pro všecka $n \geqq \nu(\alpha)$

$$0 \leqq \frac{k_{n+1}(\alpha)}{2^{n+1}} - \frac{k_n(\alpha)}{2^n} \leqq \frac{1}{2^{n+1}};$$

tedy pro každé $n \geqq \nu(\alpha)$ a pro všecka $p = 1, 2, 3, \ldots$ jest

$$0 \leqq \frac{k_{n+p}(\alpha)}{2^{n+p}} - \frac{k_n(\alpha)}{2^n} \leqq \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^n},$$

z čehož plyne, že existuje limita

(68.11) $$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(\alpha)}{2^n} = c(\alpha),$$

při čemž

(68.11′) $$\frac{k_n(\alpha)}{2^n} \leqq c(\alpha) \leqq \frac{k_n(\alpha) + 1}{2^n},$$

takže podle (68.5) jest

(68.12) $$0 < c(\alpha) < 1.$$

Všimněme si toho zvláštního případu, že α je dyadický úhel. V tomto případě existuje index μ tak, že α je dyadický úhel řádu μ; potom je

$$\alpha = kR_\mu, \quad 1 \leqq k \leqq 2^n - 1$$

a pro $n > \mu$ je

$$\alpha = 2^{n-\mu}k \,.\, R_n.$$

takže pro $n \geqq \mu$ je

$$\frac{k_n(\alpha)}{2^n} = \frac{k}{2^\mu},$$

tedy podle (68.11) $c(\alpha) = \frac{k}{2^\mu}$, t. j. je-li α dyadický úhel, je $c(\alpha)$ aditivní míra úhlu α ve smyslu článku 67. Můžeme tedy definovat pro každý dutý úhel α jako jeho *aditivní míru* reálné číslo $c(\alpha)$, definované vztahem (68.11), které vyhovuje nerovnosti (68.12).

Obráceně budiž dáno reálné číslo c splňující nerovnosti

$$0 < c < 1. \tag{68.13}$$

Dokážeme, že existuje dutý úhel α, jehož aditivní míra je rovna c. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ existuje a je jednoznačně určeno celé číslo k_n, pro něž

$$k_n \leqq 2^n \,.\, c < k_n + 1. \tag{68.14}$$

Podle (68.13) existuje index ν tak, že

$$\frac{1}{2^\nu} \leqq c < \frac{2^\nu - 1}{2^\nu};$$

pro $n \geqq \nu$ je tím spíše

$$\frac{1}{2^n} \leqq c < \frac{2^n - 1}{2^n},$$

tedy podle (68.14) je pro $n \geqq \nu$:

$$1 \leqq k_n < 2^n - 1, \tag{68.15}$$

takže pro $n \geqq \nu$ existují duté úhly $k_n R_n$, $(k_n + 1) R_n$. Pro $n \geqq \nu$ a pro $p = 1, 2, 3, \ldots$ je podle (68.14)

$$2^p k_n \leqq 2^{n+p} \,.\, c < 2^p (k_n + 1),$$

$$k_{n+p} \leqq 2^{n+p} \,.\, c < k_{n+p} + 1,$$

z čehož plyne

$$2^p k_n \leqq k_{n+p} < 2^p (k_n + 1). \tag{68.16}$$

Podle (67.5) je však $2^p \,.\, R_{n+p} = R_n$, takže ze (68.16) plyne

$$k_n R_n \leqq k_{n+p} R_{n+p} < (k_n + 1) R_n$$

a tudíž

$$\cos k_n R_n \geqq \cos k_{n+p} R_{n+p} > \cos (k_n + 1) R_n.$$

Posloupnost $\{\cos k_n R_n\}$ je nerostoucí omezená posloupnost reálných čísel, takže existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \cos k_n R_n = 0$$

a jest pro $n \geqq \nu$

$$\cos k_\nu R_\nu \geqq \lambda \geqq \cos(k_\nu + 1)\, R_\nu,$$

tedy $-1 < \lambda < 1$, takže existuje dutý úhel α, pro který je $\lambda = \cos\alpha$. Pro $n \geqq \nu$ je tedy

$$\cos k_n R_n \geqq \cos\alpha \geqq \cos(k_n + 1)\, R_n,$$

tudíž

$$k_n R_n \leqq \alpha \leqq (k_n + 1) R_n. \tag{68.17}$$

Porovnáme-li (68.17) se (68.6) a (68.7), vidíme, že pro $n \geqq \nu$ je

$$\text{buďto } k_n(\alpha) = k_n \text{ nebo } k_n(\alpha) = k_n + 1.$$

Podle (68.14) je tedy pro $n \geqq \nu$

$$|k_n(\alpha) - 2^n c| \leqq 1 \quad \text{neboli} \quad \left|\frac{k_n(\alpha)}{2^n} - c\right| \leqq \frac{1}{2^n},$$

takže podle (68.11) je $c = c(\alpha)$, t. j. aditivní míra dutého úhlu α je skutečně rovna c.

Buďtež nyní α, β dva takové duté úhly, že existuje dutý úhel $\alpha + \beta$. Dokážeme, že

$$c(\alpha) + c(\beta) = c(\alpha + \beta), \tag{68.18}$$

t. j. že součet aditivních měr dutých úhlů α, β je roven aditivní míře dutého úhlu $\alpha + \beta$. Za tím účelem uvažme, že pro všecka dosti velká n jest

$$k_n(\alpha) \,.\, R_n \leqq \alpha < [k_n(\alpha) + 1]\, R_n, \tag{68.19}$$

$$k_n(\beta) \,.\, R_n \leqq \beta < [k_n(\beta) + 1]\, R_n. \tag{68.20}$$

Ježto $k_n(\alpha) \,.\, R_n \leqq \alpha$, $k_n(\beta) \,.\, R_n \leqq \beta$ a ježto existuje součet $\alpha + \beta$, existuje také součet $k_n(\alpha) \,.\, R_n + k_n(\beta) \,.\, R_n = [k_n(\alpha) + k_n(\beta)]\, R_n$ a tento součet je $\leqq \alpha + \beta$. Podle definice čísla $k_n(\alpha + \beta)$ je tudíž

$$k_n(\alpha) + k_n(\beta) \leqq k_n(\alpha + \beta). \tag{68.21}$$

Předpokládejme, že

$$k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2 \leqq k_n(\alpha + \beta). \tag{*}$$

Ježto $k_n(\alpha + \beta) < 2^n$, je $k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2 < 2^n$, takže existuje dutý úhel $[k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2]\, R_n$, který je součtem dutých úhlů $[k_n(\alpha) + 1]\, R_n$, $[k_n(\beta) + 1]\, R_n$. Ježto $\alpha < [k_n(\alpha) + 1]\, R_n$, $\beta < [k_n(\beta) + 1]\, R_n$, je potom $\alpha + \beta < [k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2]\, R_n \leqq k_n(\alpha + \beta)\, R_n$, což je nemožné. Tedy vztah (*) je nesprávný a máme

$$k_n(\alpha + \beta) < k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2. \tag{68.22}$$

Z (68.21) a (68.22) plyne

$$\frac{k_n(\alpha)}{2^n} + \frac{k_n(\beta)}{2^n} \leqq \frac{k_n(\alpha + \beta)}{2^n} < \frac{k_n(\alpha)}{2^n} + \frac{k_n(\beta)}{2^n} + \frac{2}{2^n},$$

z čehož podle (68.11) plyne (68.18).

Jsou-li α, γ duté úhly a je-li $\alpha < \gamma$, je také $c(\alpha) < c(\gamma)$. [Z toho plyne zejména, že dva duté úhly různé velikosti nemohou míti touž aditivní míru.] Neboť ježto $\alpha < \gamma$, existuje dutý úhel β tak, že $\gamma = \alpha + \beta$, takže podle (68.18) $c(\gamma) = c(\alpha) + c(\beta)$. Avšak $0 < c(\beta) < 1$, takže $c(\alpha) < c(\gamma)$.

Z (68.18) plyne, že jsou-li α, β dva duté úhly takové, že existuje dutý úhel $\alpha + \beta$, musí býti

$$c(\alpha) + c(\beta) < 1. \tag{68.23}$$

Obráceně předpokládejme, že pro dva duté úhly α, β platí nerovnost (68.23); máme dokázati, že existuje dutý úhel $\alpha + \beta$. Ze (68.23) plyne, že pro dosti velká n je

$$c(\alpha) + c(\beta) + \frac{2}{2^n} < 1.$$

Podle (68.11′) je tedy pro dosti velká n

$$k_n(\alpha) + k_n(\beta) + 2 < 2^n,$$

takže existuje součet $[k_n(\alpha) + 1]\, R_n + [k_n(\beta) + 1]\, R_n$ a podle (68.19) existuje také součet $\alpha + \beta$.