# I. CELÁ ČÍSLA

## § 1. Pojem celého čísla

Je pochopitelné, že v této knize se bude často vyskytovat slovo *číslo*. Toto slovo má však řadu různých významů, které rozlišujeme rozmanitými přívlastky dávanými před slovo číslo. Základem, od kterého se zpravidla vychází a od kterého také my vyjdeme, je pojem *přirozeného čísla*. Název přirozené číslo dáváme číslům

$$1, 2, 3, 4, 5 \text{ atd.}, \tag{1,1}$$

se kterými se seznamujeme v dětství na škole ponenáhlu průběhem několika let. Proces poznávání přirozených čísel probíhá postupně: dítě se seznamuje nejprve s čísly od jedné do deseti, potom do dvaceti, do sta, do tisíce, ...

Vyučovací proces vychází nejprve z velké řady konkretních příkladů (t. zv. *pojmenovaná* čísla), ale brzy se přechází k abstraktnějšímu stanovisku. To je pochopitelné, neboť názorně na příkladech se dají probírat jen velmi malá čísla, kdežto při počítání do sta jsou už jednotlivá větší čísla málo dostupná přímému názoru. Potíže, které tím vznikají, jsou ovšem proti době, kdy se užívalo nemotorného psaní čísel římskými číslicemi, značně ulehčeny běžným dnes psaním čísel v desítkové soustavě, která značně zjednodušuje jak srovnávání čísel co do velikosti, tak i provádění početních výkonů.

Přirozená čísla slouží především k t. zv. *čítání* souboru předmětů, t. j. ke zjištění *počtu* předmětů, ze kterých se soubor skládá. Při tom se ve škole začíná vyšetřováním souborů složených z malého počtu konkretních předmětů; čítání tu záleží v přímém odpočítávání jednoho předmětu po druhém. To je ovšem možné pouze u malých souborů; u větších souborů tvoříme napřed skupiny po deseti předmětech, z deseti takových skupin tvoříme větší skupiny po stu předmětech atd., a tím docházíme k připomenutému už pojmu desítkové soustavy. Spojování několika souborů ve větší celky a rozkládání souboru na části vede k zavedení *základních početních výkonů*. Přejdeme-li pak od souborů složených z konkretních předmětů k souborům složeným z abstraktnějších věcí, tu už určení počtu se zpravidla vůbec nedá jinak provést než za pomoci početních výkonů a s využitím vlastností početních výkonů. Objasněme si to příkladem. Máme-li zjistit přímým výčtem všech možných případů, že 4 osoby mohou 24 různými způsoby obsadit 4 volná místa ve vlaku, je to už značně obtížnější, než odpočítat 24 knih nebo 24 stromů, ale není to nemožné. Naproti tomu pokus zjistit výčtem všech případů, kolika způsoby může 20 osob obsadit 20 volných míst ve vlaku, byl by zcela beznadějný, neboť tento počet je daleko větší než počet vteřin, které uplynuly od objevení prvního člověka na této planetě.

Poznámka 1,1. Místo slova *soubor* se v matematice užívá obyčejně uměle utvořeného slova *množina*; jednotlivé věci, ze kterých se množina skládá, nazývají se *prvky* množiny. Množina se může skládat z prvků zcela libovolného druhu; v matematice často vyšetřujeme množiny prvků velmi abstraktní povahy. Slova soubor budeme v této knize užívat jen pro množiny s *konečným počtem prvků*; proto budeme zásadně mluvit na př. o množině (ne o souboru) přirozených čísel, kterých je nekonečně mnoho. Slova množina budeme však příležitostně užívat i v případě konečného počtu prvků.

Poznámka 1,2. Jsou-li prvky souboru věci abstraktní povahy, je třeba si přesně uvědomit jejich strukturu. Jestliže na př. jsme řekli, že 4 osoby mohou 24 různými způsoby obsadit 4 místa, měli jsme na mysli pouze konečný stav (kdo na kterém místě sedí), ne tedy, kdo které místo obsadil dřív a kdo později. Považujeme-li za podstatné také pořadí, ve kterém se prázdná místa postupně obsazují, stoupne počet možných způsobů na 576. Připustíme-li ještě možnost, že některé dvě osoby, které provisorně obsadily určitá místa, mohou si je vyměnit (při tom však připouštíme i to, že snad k výměnám nedojde), a omezíme-li tuto možnost podmínkami, že k výměně může dojít teprve po obsazení všech míst a že každá osoba si vymění místo nejvýš jednou, potom počet možných způsobů (s přihlédnutím k pořadí) bude 7488.

Dosud jsme mluvili o souborech (nebo množinách) stále za toho předpokladu, že každý soubor, o kterém je řeč, jistě obsahuje nejméně jeden prvek. Takový předpoklad je na první pohled přirozený, ukazuje se však, že pro matematiku je nesmírně nepohodlný. Rozšíříme proto hned na tomto místě pojem souboru (nebo množiny) tak, že vedle těch souborů, z nichž každý obsahuje aspoň jeden prvek, zavedeme ještě jeden nový „soubor", totiž *prázdný soubor* (neboli *prázdnou množinu*), který neobsahuje vůbec nic.

*Příklad 1,1.* Budiž $Z$ soubor všech zaměstnanců určitého závodu. Je-li $n$ přirozené číslo, budiž $A_n$ soubor těch osob ze souboru $Z$, kterým je $n$ let. Kdybychom nezavedli prázdný soubor, potom by soubory $A_n$ existovaly pouze pro některá přirozená čísla $n$; pro nás naopak soubor $A_n$ existuje pro *každé* přirozené číslo $n$; je ovšem pro „většinu" čísel $n$ prázdný.

Poznámka 1,3. Použijme příležitosti k tomu, abychom si na jednoduchém příkladě uvědomili, že v běžné řeči je plno drobných nejasností. V předcházejícím příkladě jsme mlčky předpokládali, že výrok, že určité osobě je $n$ let, má jednoznačně definovaný smysl. Ve skutečnosti však je možné smysl tohoto výroku chápat všelijak. Můžeme za $n$-letou osobu považovat tu, která už měla $n$-té narozeniny, ale ještě neměla $(n + 1)$-ní, při čemž je třeba ještě povědět, zda osoba, která má dnes $n$-té narozeniny, je $n$-letá už dnes či bude $n$-letá až zítra. Můžeme také za $n$-letou osobu považovat tu, jejíž $n$-té narozeniny spadají do běžného roku, nebo tu, jejíž $n$-té narozeniny spadají do běžného měsíce atd.

Poznámka 1,4. V předcházejícím textu jsme k označení libovolného přirozeného čísla užili písmena $n$ (počátečního písmena latinského slova numerus, které znamená číslo). To je velmi obvyklé, ale není to ovšem nutné. Jestliže se v téže úvaze mluví o několika přirozených číslech, je jasné, že musíme každé označit jiným písmenem, takže s jediným písmenem $n$ vystačit nelze. Přirozená čísla budeme často značit písmeny $n$, $m$, $k$, $h$, $r$, $s$. Budeme však pro přirozená čísla užívat také jiných písmen, na př. $a$, $b$, $c$, $d$, zejména tehdy, jestliže půjde o takové výsledky, které sice odvodíme zprvu jenom pro přirozená čísla, které však později rozšíříme i na jiné druhy čísel.

Poznámka 1,5. V příkladě 1,1 se nám vyskytl soubor závislý na libovolném přirozeném čísle $n$. Označili jsme jej $A_n$, t. j. přirozené číslo $n$ jsme vyznačili jako t. zv. *index* (psaný drobným tiskem vpravo dole). Místo indexu můžeme také užít závorky, t. j. psát $A(n)$ místo $A_n$.

„Počet prvků" prázdného souboru se nazývá *nula* a značí se 0. Nulu nepočítáme mezi přirozená čísla. První rozšíření pojmu čísla záleží v tom, že k přirozeným číslům připojíme jako nové číslo nulu, ale prozatím ještě žádné jiné číslo, že tedy od množiny (1,1) přejdeme k množině

$$0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ atd.} \qquad (1,2)$$

Číslo 0 se zavádí na škole velmi záhy, protože je ho třeba při psaní čísel v desítkové soustavě. Podstatně později se zavádějí další čísla

$$-1, -2, -3, -4, -5 \text{ atd.} \qquad (1,3)$$

Všem číslům, která se dosud vyskytla, dáváme souhrnný název *čísla celá*. Název *kladná celá čísla* má týž smysl jako název přirozená čísla; čísla (1,3) se jmenují *záporná celá čísla*. Mimo to užíváme pro čísla (1,2) názvu *nezáporná celá čísla*. Smysl obou názvů „kladná celá čísla" a „nezáporná celá čísla" se liší tím, že číslo 0 nespadá pod prvý název, nýbrž jen pod druhý. Mohli bychom zavést také název „nekladná celá čísla", který by vedle záporných celých čísel zahrnoval ještě číslo 0, ale tohoto názvu se prakticky nepoužívá.

Poznámka 1,6. Studium matematické literatury ukazuje, že se jeví kolísání v rozsahu názvu „přirozené číslo"; vedle autorů, kteří jako my nepočítají nulu mezi přirozená čísla, jsou také autoři, pro které naopak i nula je přirozeným číslem. Vzhledem k této neurčitosti (která ostatně celkem v *české* literatuře není) se ve vědeckých matematických pracích dává obyčejně přednost názvu celé kladné číslo, o jehož rozsahu nemůže vzniknout pochybnost. V této knize, ve které jsme jasně vytkli, že nulu mezi přirozená čísla nepočítáme, není ovšem důvodu vyhýbat se názvu přirozené číslo. Zato je nutné čtenáři začátečníku připomenout, že matematikové nikdy nepočítají nulu mezi kladná čísla (ani mezi záporná); výrok, že celé číslo je buďto kladné, nebo záporné, je tedy nesprávný.

Poznámka 1,7. Pojem záporného čísla se na škole zavádí až po skončení početního výcviku při probírání základů algebry. Do té doby, tedy po řadu let, se užívá na škole názvu „celé číslo" ve smyslu nejprve vylučujícím nulu, později ve smyslu zahrnujícím i nulu, ale nezahrnujícím celá záporná čísla. Tím se vyvíjí návyk dávat názvu celé číslo užší rozsah, než mu dává současná věda, a proti tomuto návyku je potom třeba bojovat ještě i při vysokoškolském vyučování matematice. Prosíme proto čtenáře, aby měl stále na paměti, že pod názvem celá čísla zahrnujeme i čísla záporná, takže na př. součet dvou celých čísel může být menší než některý sčítanec.

Důvod, proč trvalo velmi dlouho, než pojem záporného čísla pronikl do matematiky, je v tom, že staří matematikové vyšetřovali pouze *pevně dané* objekty a teprve vyšší matematika si postavila úkol soustavně vyšetřovat změny čísel při změnách objektů. Počet prvků, ze kterých se skládá určitý soubor, nikdy není vyjádřen záporným číslem. Množina všech celých čísel, včetně záporných, je potřebná teprve při číselném vyjádření *změny počtu* prvků při změně souboru; tato změna může být trojí: [1] soubor můžeme *zvětšit* přidáním nových prvků, [2] soubor můžeme *zmenšit* ubráním některých prvků, [3] soubor můžeme ponechat tak, jak byl.

Poznámka 1,8. Mluvit o „změně" souboru, i když připouštíme možnost [3], zdá se násilné, ale v matematice taková mluva je obvyklá.

V matematice se ukazuje účelné nazvat číselnou hodnotu každé takové změny počtu prvků společným jménem, jímž je slovo *přírůstek*. Je-li tedy $n$ kladné číslo, potom přírůstek $n$ prvků znamená zvětšení souboru přidáním $n$ nových prvků, přírůstek $-n$ prvků znamená zmenšení souboru ubráním $n$ prvků; konečně přírůstek 0 prvků znamená, že soubor zůstal beze změny.

Poznámka 1,9. Matematický smysl výrazu přírůstek $n$ prvků odpovídá hovorovému významu slova přírůstek pouze pro kladné $n$. Jednotný výraz zahrnující jak zvětšení, tak zmenšení, jakož i neexistenci změny, je však pro matematiku velmi účelný nejen při čítání, které máme na zřeteli nyní, nýbrž i při měření, o kterém budeme mluvit později (viz II §1).

Poznámka 1,10. V § 2 až § 6 se budeme zabývat pouze *nezápornými* celými čísly; k obecnému pojmu celého čísla se vrátíme až v § 7.

## § 2. Součet a součin dvou nezáporných čísel

Říká se, že jsou čtyři základní početní výkony: sčítání, odčítání, násobení a dělení. Opravdu *základními* jsou ve skutečnosti jenom dva z nich, kterým se na škole říká přímé, tedy *sčítání* a *násobení* neboli výpočet *součtu* a *součinu*. Jsou to výkony prakticky tak nesmírně důležité, že v oboru nevelkých přirozených čísel je nutné s nimi dokonale (ve smyslu důkladného procvičení konkretních výpočtů) seznámit mládež už ve věku, ve kterém jakákoli obecná definice je ještě naprosto mimo dosah chápání. Je proto účelné, jestliže v této knize, která má na mysli čtenáře už odrostlého povinné škole, vyložíme, jak lze součet $a + b$ a součin $ab$ dvou přirozených čísel definovat pomocí čítání prvků souboru.

Než přistoupíme ke sčítání, zavedeme dva názvy. Jsou-li $A$, $B$ jakékoliv dvě množiny, nazveme jejich *sjednocením* takovou množinu, do které náleží každý prvek množiny $A$, do které rovněž náleží každý prvek množiny $B$, ale která už mimo takto popsané prvky nemá žádné prvky další. Při tom se může stát, že některý prvek množiny $A$ je zároveň prvkem množiny $B$. (Může se i stát, že množiny $A$, $B$ splynou; potom s nimi splyne i jejich sjednocení.) Jestliže však množiny $A$, $B$ nemají žádný společný prvek, neboli jestliže žádná věc nenáleží zároveň i do množiny $A$ i do množiny $B$, potom pravíme, že množiny $A$, $B$ jsou *disjunktní*.

*Příklad 2,1.* Budiž $P$ soubor všech zaměstnanců prodejny, $A$ soubor mužů zaměstnaných v prodejně, $B$ soubor žen zaměstnaných v prodejně. Soubory $A$, $B$ jsou vždy disjunktní, ale některý z nich může být prázdný. Sjednocením obou souborů $A$, $B$ je vždy soubor $P$. Je-li $C$ soubor zaměstnanců starších než 25 let, $D$ soubor zaměstnanců mladších než 30 let, je opět $P$ sjednocením souborů $C$, $D$, které mohou, ale nemusí být disjunktní.

Poznámka 2,1. Podle naší definice jsou množiny $A$, $B$ jistě disjunktní v tom případě, že aspoň jedna z nich je prázdná.

Jsou-li nyní $a$, $b$ dvě přirozená čísla, definujeme jejich součet $a + b$ takto. Zvolíme soubor $A$ libovolných prvků, jejichž počet je roven $a$, dále soubor $B$ prvků rovněž libovolných, jejichž počet je roven $b$; při tom předpokládáme, že soubory $A$, $B$ jsou disjunktní. Za tohoto předpokladu je $a + b$ počet prvků toho souboru, který je sjednocením obou souborů $A$, $B$. Je patrné, že tato definice je prostě abstraktním vyjádřením způsobu, jímž se pojem sčítání přirozených čísel na konkretních příkladech vykládá dětem.

Poznámka 2,2. V matematice se stává, že nějakou úvahou dospějeme k výsledku, který je užitečný nejen pro právě probíranou látku, nýbrž ukáže se potřebným i pro jiné úvahy provedené třeba mnohem později. Takové výsledky je třeba zaznamenat a přehledně očíslovat. Říkáme jim *věty*. Matematický smysl slova věta se liší od gramatického smyslu téhož slova: ne každá gramatická věta matematického textu je matematickou větou, na př. matematické *definice* nepočítáme mezi matematické věty; také se matematická věta může skládat z *několika* gramatických vět nebo může být zapsána ve tvaru vzorce neobsahujícího vůbec žádnou gramatickou větu. Na škole, kde je matematika pouze jedním z řady různých „předmětů", označuje se často matematická věta pro odlišení od gramatické věty výrazem *poučka*. Ale ve vědecké matematické literatuře se slova poučka vůbec nepoužívá, neboť obava z nedorozumění je v matematickém textu zbytečná. V této knize užíváme slova věta v matematickém smyslu.

Poznámka 2,3. Podle předcházející poznámky je matematická věta konečným výsledkem úvahy. Zároveň však bylo naznačeno, že matematická věta je užitečná nejen na tom místě textu, na kterém se odůvodňuje její správnost, nýbrž i později; leckdy se téže matematické věty užívá v pozdějším textu mnohokrát. Proto se v matematickém textu ujal zvyk, kterým se budeme v této knize často řídit. Matematická věta se zpravidla vysloví hned na počátku úvahy a teprve potom se odůvodňuje její správnost; odůvodnění správnosti matematické věty se nazývá *důkazem* věty.

Je zajímavé poznamenat, že Eukleides v proslulé knize *Základy* (asi 300 let před naším letopočtem) postupuje tak, že napřed vysloví větu, potom ji dokáže a nakonec celé znění věty vysloví znovu.

Poznámka 2,4. Při definici součtu $a + b$ jsme řekli, že $a$, $b$ jsou přirozená čísla; ale táž definice platí, i když snad $a = 0$ nebo $b = 0$ (nebo oboje); je-li $a = 0$, je soubor $A$ prázdný, je-li $b = 0$, je soubor $B$ prázdný, jinak se nezmění v definici nic.

Poznámka 2,5. V předcházející poznámce jsme za výrok „$a = 0$ nebo $b = 0$" pro jasnost připojili v závorce ještě „nebo oboje". Je však účelné už zde důrazně připomenout, že matematikové zásadně, jsou-li $V$, $W$ dva výroky, dávají výroku „$V$ nebo $W$" ten smysl, že se nevylučuje možnost současné platnosti obou výroků $V$, $W$. V běžné mluvě je to obyčejně jinak: řeknu-li na př.: „V neděli půjdu do divadla nebo do kina", bude se mi jistě rozumět tak, že nehodlám jít v neděli odpoledne do kina a večer ještě do divadla. Ostatně se i v běžné mluvě spojky „nebo" užívá někdy v „matematickém" smyslu; usoudím-li o někom na př., že „buďto studoval matematiku na universitě, nebo má pro matematiku nadání", sotva tím vylučuji možnost, že je splněno oboje.

Následující tři věty jsou v oboru nezáporných celých čísel přímými důsledky definice, takže už není třeba udávat jejich důkazy; místo nich uvedeme jenom prostinké příklady. To neznamená, že by si čtenář začátečník neměl důkazy samostatně promyslit; právě naopak!

**Věta 2,1.** *Součet dvou čísel je nezávislý na pořadí sčítanců*, nebo stručně vzorcem: $a + b = b + a$. Tato věta se nazývá *komutativní zákon sčítání* (česky snad: *zákon záměnnosti sčítanců*).

*Příklad 2,2.* Má-li dítě v levé kapse 5 kuliček a v pravé kapse 3, pak ať už přemístí kuličky z levé kapsy do pravé či z pravé do levé, bude mít v obou případech v jedné kapse týž počet kuliček, t. j. 8.

**Věta 2,2.** *Jestliže k součtu dvou čísel přičteme číslo třetí, dostaneme týž výsledek, jako když k prvnímu číslu přičteme součet druhého s třetím*, nebo mnohem stručněji vzorcem: $(a + b) + c = a + (b + c)$. Tato věta se nazývá *asociativní zákon sčítání* (česky snad: *zákon sdružování sčítanců*).

*Příklad 2,3.* Na určitém úkolu pracuje v jedné dílně 6 mužů, ve druhé 3 muži a 4 ženy. Celkem pracuje na tomto úkolu $6 + 3 = 9$ mužů a 4 ženy, dohromady $9 + 4 = 13$ lidí. V první dílně pracuje 6 lidí, ve druhé $3 + 4 = 7$ lidí, dohromady $6 + 7 = 13$ lidí, t. j. týž počet.

**Věta 2,3.** *Jestliže v součtu dvou čísel je jeden sčítanec roven nule, je součet roven druhému sčítanci*, nebo vzorcem: $a + 0 = a$, $0 + a = a$. Tuto větu nazveme *zákonem neutrálnosti nuly při sčítání.*

*Příklad 2,4.* V prodejně jsou zaměstnány jen ženy; je jich pět. Je tam tedy 5 žen, 0 mužů, celkem $5 + 0 = 5$ zaměstnanců.

Poznámka 2,6. Písmena $a$, $b$, $c$ zde znamenají prozatím nezáporná celá čísla. Neuvedli jsme to ve znění vět 2,1, 2,2 a 2,3 proto, že později dokážeme tytéž věty i pro obecnější druhy čísel. Obdobná poznámka se vztahuje i na řadu pozdějších vět.

O součtu více než dvou čísel si promluvíme později. Na škole je třeba mluvit o takových obecnějších součtech dřív, než se začne mluvit o násobení, protože pojem násobení dvou přirozených čísel se na škole převádí na pojem sčítání libovolného počtu čísel (viz str. 23). My však zde vyslovíme takovou definici součinu $ab$ dvou nezáporných celých čísel $a$, $b$, která je na pojmu sčítání nezávislá.

Za tím účelem zavedeme nejprve pojem *dvojice* $[x, y]$, složené z *prvního členu* $x$ a *druhého členu* $y$. Dvě dvojice považujeme za stejné pouze tehdy, jestliže se shodují jak ve členu prvém, tak i ve členu druhém. Tedy pro $x \neq y$ je $[x, y] \neq [y, x]$.

Poznámka 2,7. Značka $\neq$ znamená popření rovnosti. Čteme ji obyčejně slovy „je různé od“ nebo „není rovno“.

Jsou-li nyní dána dvě nezáporná celá čísla $a$, $b$, zvolíme opět soubor $A$, který má $a$ prvků, a soubor $B$, který má $b$ prvků; při tom tentokrát nezáleží na tom, zda soubory $A$, $B$ jsou či nejsou disjunktní. Utvoříme potom soubor všech takových dvojic $[x, y]$, jejichž prvý člen $x$ náleží do souboru $A$, druhý člen $y$ do souboru $B$. Součin $ab$ je pak počet prvků souboru našich dvojic, který označíme $(A, B)$.

*Příklad 2,5.* Budiž $a = 5$, $b = 4$. Za $A$ zvolíme soubor pěti křestních jmen:

František, Jan, Josef, Filip, Gabriel;

za $B$ zvolíme soubor čtyř příjmení:

Novotný, Procházka, Filip, Gabriel.

Soubor $(A, B)$ se skládá z 20 dvojic: František Novotný, František Procházka, František Filip, František Gabriel, Jan Novotný, Jan Procházka, Jan Filip, Jan Gabriel, Josef Novotný, Josef Procházka, Josef Filip, Josef Gabriel, Filip Novotný, Filip Procházka, Filip Filip, Filip Gabriel, Gabriel Novotný, Gabriel Procházka, Gabriel Filip, Gabriel Gabriel. Při tom dvojice Filip Gabriel a Gabriel Filip jsou navzájem různé; neshodují se ani v prvém, ani ve druhém členu.

Následujících pět vět v oboru nezáporných celých čísel vyplývá přímo z definice, takže zase místo důkazů uvádíme jen jednoduché příklady.

**Věta 2,4.** *Součin dvou čísel je nezávislý na pořadí činitelů*, nebo stručně vzorcem: $ab = ba$. Tato věta se nazývá *komutativní zákon násobení* (česky snad: *zákon záměnnosti činitelů*).

*Příklad 2,6.* Z 5 dam a 4 pánů lze vybrat taneční dvojici týmž počtem způsobů (20 způsoby) jako ze 4 dam a 5 pánů.

**Věta 2,5.** *Jestliže součin dvou čísel znásobíme číslem třetím, dostaneme týž výsledek, jako když první číslo znásobíme součinem druhého s třetím*, nebo stručně vzorcem: $(ab)\,c = a(bc)$. Tato věta se nazývá *asociativní zákon násobení* (česky snad: *zákon sdružování činitelů*).

*Příklad 2,7.* Opíše-li korespondentka 5 stran za hodinu, kolik stran opíší 3 korespondentky za osmihodinový pracovní den? Za hodinu opíší tyto korespondentky $3 \,.\, 5 = 15$ stran, tedy za celý den $15 \,.\, 8 = 120$ stran. Každá korespondentka opíše za den $5 \,.\, 8 = 40$ stran, tedy všechny korespondentky $3 \,.\, 40 = 120$ stran, t. j. týž počet.

**Věta 2,6.** *Jestliže v součinu dvou čísel je jeden činitel roven jedné, je součin roven druhému činiteli*, nebo vzorcem: $a \,.\, 1 = a$, $1 \,.\, a = a$. Tuto větu nazveme *zákonem neutrálnosti jedničky při násobení.*

**Věta 2,7.** *Jestliže v součinu dvou čísel je některý* (aspoň jeden) *z činitelů roven nule, je také součin roven nule* nezávisle na hodnotě druhého činitele, nebo vzorcem: $a \,.\, 0 = 0$, $0 \,.\, a = 0$. Tuto větu nazveme *zákonem agresivnosti nuly při násobení.*

**Věta 2,8.** *Jestliže je součin dvou čísel roven nule, musí aspoň jeden činitel být roven nule.* Můžeme touž větu vyslovit také takto: *Součin dvou čísel různých od nuly je sám také různý od nuly.*

*Příklad 2,8.* Je-li v domě mezi sousedními patry po 20 schodech, je k vystoupení z přízemí do $n$-tého patra třeba ujít $n \,.\, 20$ schodů. Kdo jde do prvního patra, ujde $1 \,.\, 20 = 20$ schodů, kdo zůstane v přízemí, ujde $0 \,.\, 20 = 0$ schodů.

Přímým důsledkem definic je také následující věta, ve které na rozdíl od předcházejících je řeč jak o sčítání, tak i o násobení.

**Věta 2,9.** *Součet dvou čísel můžeme znásobit číslem třetím tak, že nejprve znásobíme první číslo třetím, potom druhé číslo třetím a oba tyto částečné součiny sečteme*, nebo mnohem stručněji vzorcem: $(a + b)\,c = ac + bc$. Tato věta se nazývá *distributivní zákon násobení* (česky snad: *zákon o násobení součtu*).

*Příklad 2,9.* Je-li 26 pracovních dnů v lednu a 24 v únoru, kolik hodin odpracuji za oba měsíce při osmihodinové pracovní době? Počet dní je $26 + 24 = 50$, tedy počet hodin je $50 \,.\, 8 = 400$; v lednu pracuji $26 \,.\, 8 = 208$ hodin, v únoru $24 \,.\, 8 = 192$ hodin, dohromady $208 + 192 = 400$ hodin, t. j. týž počet.

Je řada jiných vět, které stejně jako věty 2,1 až 2,9 jsou zřejmým důsledkem naší definice sčítání a násobení nezáporných celých čísel, ale tyto další věty se už dají odvodit také jiným způsobem, totiž usuzováním, které není založeno na našich definicích, nýbrž pouze na větách 2,1 až 2,9. Uvedeme v tomto paragrafu dvě takové věty, kterých užijeme v § 4.

**Věta 2,10.** $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$.

*Důkaz* založený na naší definici sčítání přenecháme čtenáři a vyložíme důkaz založený na komutativním a asociativním zákonu sčítání neboli na větách 2,1 a 2,2. Nejprve je podle věty 2,1: $b + c = c + b$, takže je též

$$[a + (b + c)] + d = [a + (c + b)] + d \,. \tag{2,1}$$

Dále máme podle věty 2,2 za prvé

$$(a + b) + c = a + (b + c) \,, \tag{2,2}$$

za druhé

$$a + (c + b) = (a + c) + b \,, \tag{2,3}$$

za třetí

$$(a + b) + (c + d) = [(a + b) + c] + d \tag{2,4}$$

a za čtvrté

$$[(a + c) + b] + d = (a + c) + (b + d) \,. \tag{2,5}$$

Ze (2,2) a (2,3) plyne ještě

$$[(a + b) + c] + d = [a + (b + c)] + d \,, \tag{2,6}$$

$$[a + (c + b)] + d = [(a + c) + b] + d \,. \tag{2,7}$$

Užijeme-li postupně (2,4), (2,6), (2,1), (2,7) a (2,5), dostaneme žádaný výsledek.

**Věta 2,11.** $(ab) \,.\, (cd) = (ac) \,.\, (bd)$.

Důkaz založený na naší definici násobení přenecháme čtenáři, který také snadno provede i důkaz založený na komutativním a asociativním zákonu násobení neboli na větách 2,4 a 2,5, velmi podobný důkazu předcházející věty (je jen třeba nahradit všude sčítání násobením).

## § 3. Součet a součin libovolného počtu nezáporných celých čísel

Přistoupíme nyní ke sčítání a násobení libovolného počtu $n$ ($n$ je přirozené číslo) nezáporných celých čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \,. \tag{3,1}$$

Na škole se předpokládá, že počet $n$ sčítanců nebo činitelů (3,1) je větší než 1; je však účelné nevylučovat případ $n = 1$. Následující definice musíme chápat v tom smyslu, že z nich plynou tyto dvě věty:

**Věta 3,1.** *Součtem o jediném sčítanci a je číslo a samo.*

**Věta 3,2.** *Součinem o jediném činiteli a je číslo a samo.*

Součet a součin $n$ přirozených čísel se dá definovat zobecněním definic, které jsme vyslovili v § 2 pro $n = 2$. Nejprve zobecníme výrazy „sjednocení", „disjunktní", „dvojice", zavedené v § 2. Jsou-li

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \tag{3,2}$$

libovolné množiny, nazveme jejich *sjednocením* množinu, do které náleží každý prvek, který náleží do některé z množin (3,2), ale mimo tyto prvky už žádný jiný. Množiny (3,2) nazveme *disjunktní*, jestliže žádný prvek nenáleží zároveň do více než jedné z nich (což pro $n = 1$ je samozřejmě vždy splněno). Zobecněním dvojice je *$n$-tice*:

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{3,3}$$

s *prvním členem* $x_1$, *druhým členem* $x_2$ atd. Dvě $n$-tice považujeme za stejné, souhlasí-li ve všech členech; při tom se přihlíží i k pořadí členů. Abychom definovali součet

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{3,4}$$

a součin

$$a_1 a_2 \ldots a_n \tag{3,5}$$

čísel (3,1), zvolíme soubory (3,2) tak, aby první obsahoval $a_1$ prvků, druhý $a_2$ prvků atd. V případě sčítání musíme předpokládat, že soubory (3,2) jsou disjunktní; v případě násobení je lhostejné, zda tento předpoklad je či není splněn. Součet (3,4) je počet prvků sjednocení souborů (3,2); součin (3,5) je počet všech takových $n$-tic (3,3), jejichž první člen $x_1$ náleží do $A_1$, druhý člen $x_2$ do $A_2$ atd.

Následující věty 3,3 až 3,11, které zobecňují věty 2,1 až 2,9, jsou (v oboru nezáporných celých čísel) zřejmým důsledkem našich definic, takže jejich důkazy můžeme přenechat čtenáři. Poznámky 3,1 až 3,4, umístěné za větou 3,11, vysvětlují blíže smysl vět 3,4; 3,5; 3,7; 3,8 a 3,11.

**Věta 3,3.** *Součet* (3,4) *je nezávislý na pořadí sčítanců.* Tato věta se nazývá *obecný komutativní zákon sčítání* (česky snad: *obecný zákon záměnnosti sčítanců*).

**Věta 3,4.** *Rozdělme čísla* $1, 2, \ldots, n$ *na určitý počet* $s$ *skupin tak, že do první skupiny přijde prvních* $h_1$ *z nich, do druhé skupiny dalších* $h_2$ *atd.* (Jsou tedy $s$; $h_1, h_2, \ldots, h_s$ přirozená čísla a podle naší definice sčítání je $h_1 + h_2 + \ldots + h_s = n$.) *Pro každou skupinu utvořme částečný součet těch z čísel* (3,1), *jejichž indexy náleží do příslušné skupiny. Potom součet všech* $s$ *částečných součtů je roven součtu* (3,4). Tato věta se nazývá *obecný asociativní zákon sčítání* (česky snad: *obecný zákon sdružování sčítanců*). (Viz poznámky 3,1; 3,2).

**Věta 3,5.** *Součet* (3,4) *zůstane beze změny, vynecháme-li sčítance rovné nule* (některé nebo všecky); *je-li snad každý sčítanec roven nule, je i součet roven nule.* (Viz poznámku 3,3.) Tuto větu nazveme *obecným zákonem neutrálnosti nuly při sčítání.*

**Věta 3,6.** *Součin* (3,5) *je nezávislý na pořadí činitelů.* Tato věta se nazývá *obecný komutativní zákon násobení* (česky snad: *obecný zákon záměnnosti činitelů*).

**Věta 3,7.** *Rozdělme čísla* $1, 2, \ldots, n$ *na určitý počet* $s$ *skupin tak, že do první skupiny přijde prvních* $h_1$ *z nich, do druhé skupiny dalších* $h_2$ *atd.* (Tedy $s$; $h_1, h_2, \ldots, h_s$ jsou přirozená čísla; $h_1 + h_2 + \ldots + h_s = n$.) *Pro každou skupinu utvořme částečný součin těch z čísel* (3,1), *jejichž indexy náleží do příslušné skupiny. Potom součin všech* $s$ *částečných součinů je roven součinu* (3,5). Tato věta se nazývá *obecný asociativní zákon násobení* (česky snad: *obecný zákon sdružování činitelů*). (Viz opět poznámky 3,1; 3,2.)

**Věta 3,8.** *Součin* (3,5) *zůstane beze změny, vynecháme-li činitele rovné jedné* (některé nebo všecky); *je-li snad každý činitel roven jedné, je i součin roven jedné.* (Viz opět poznámku 3,3.) Tuto větu nazveme *obecným zákonem neutrálnosti jedničky při násobení.*

**Věta 3,9.** *Jestliže je některý* (aspoň jeden) *činitel součinu* (3,5) *roven nule, je i součin roven nule* nezávisle na hodnotách ostatních činitelů. Tuto větu nazveme *obecným zákonem agresivnosti nuly při násobení.*

**Věta 3,10.** *Jestliže je součin* (3,5) *roven nule, musí být aspoň jeden činitel roven nule.* Touž větu můžeme vyslovit také takto: *Jsou-li všecka čísla* (3,1) *různá od nuly, je také součin* (3,5) *různý od nuly.*

**Věta 3,11.** *Součet* (3,4) *libovolného počtu* $n$ *čísel* (3,1) *můžeme znásobit součtem*

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m \tag{3,6}$$

*libovolného počtu* $m$ *čísel*

$$b_1, b_2, \ldots, b_m \tag{3,7}$$

*tak, že každé z čísel* (3,1) *znásobíme každým z čísel* (3,7) *a všecky tyto částečné součiny* (jejichž počet je roven *nm*) *sečteme*. (Viz poznámku 3,4.) Tuto větu nazveme *zobecněným distributivním zákonem*.

Poznámka 3,1. Některé z $s$ čísel $h_1, h_2, \ldots, h_s$, o kterých je řeč v naší formulaci vět 3,4 a 3,7, může být rovné jedné (a může se to stát i pro více než jedno z nich). Kdybychom byli nedefinovali součet o jediném sčítanci a součin o jediném činiteli, musili bychom formulovat obecné asociativní zákony složitějším způsobem.

Poznámka 3,2. Jestliže *všecka* čísla $h_1, h_2, \ldots, h_s$, o kterých se mluví ve větách 3,4 a 3,7, jsou rovna jedné, je $s = n$ a částečné součty nebo součiny, o kterých tu je řeč, jsou prostě rovny jednotlivým číslům (3,1). Obecné asociativní zákony jsou i v tomto případě správné, neříkají však nic, nežli že součet (3,4) nebo součin (3,5) je roven sám sobě. Rovněž tak je správný, ale nezajímavý i případ $s = 1$. Zde tvoří všecka čísla $1, 2, \ldots, n$ jedinou skupinu, máme tedy jediný částečný součet nebo součin rovný (3,4) nebo (3,5) a tvrzení obecného asociativního zákona je samozřejmým důsledkem vět 3,1 a 3,2.

Poznámka 3,3. Součet (3,4) zůstane také beze změny, jestliže nevynecháme, nýbrž naopak připojíme sčítance rovné nule (jednoho nebo více); to však v podstatě není nová věta, neboť jestliže přechod od prvního součtu ke druhému záleží ve *vynechání* sčítanců rovných nule, potom přechod od druhého součtu k prvnímu záleží v *připojení* sčítanců rovných nule a tvrzení, že první součet je roven druhému, zachová svůj smysl při výměně obou součtů. Obdobná poznámka platí i pro činitele rovné jedné v součinu (3,5).

Poznámka 3,4 V naší formulaci věty 3,11 (zobecněného distributivního zákona) je řeč o sečtení *nm* částečných součinů, aniž je blíže popsáno *pořadí* těchto částečných součinů. Že to nevadí, plyne z věty 3,3 (obecného komutativního zákona sčítání).

Poznámka 3,5. V našich názvech předchozích vět jsme užili přídavného jména „obecný“ u vět 3,3; 3,4; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9, kdežto u věty 3,11 přídavného jména „zobecněný“. Důvodem této různosti v označení je to, že věty 3,3 až 3,9 nebudeme už dále zobecňovat, kdežto věta 3,11 je zvláštním případem věty 4,6, kterou nazveme „nejobecnějším“ distributivním zákonem.

Je účelné formulovat některé zvláštní případy předchozích vět znovu jako samostatné věty.

**Věta 3,12.** *Jestliže všecka čísla* (3,1), *až snad na jedno z nich, které je rovné a, jsou rovna nule, je součet* (3,4) *roven a.*

To je zvláštní případ věty 3,5. (Viz větu 3,1.)

**Věta 3,13.** *Jestliže všecka čísla* (3,1), *až snad na jedno z nich, které je rovné a, jsou rovna jedné, je součin* (3,5) *roven a.*

To je zvláštní případ věty 3,8. (Viz větu 3,2.)

**Věta 3,14.** *Součet o libovolném počtu sčítanců znásobíme číslem, jestliže jím znásobíme každého sčítance a všecky tyto částečné součiny sečteme*, nebo stručněji vzorcem: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, b = a_1 b + a_2 b + \ldots + a_n b$.

To je zvláštní případ $m = 1$ věty 3,11.

Čísla vyskytující se ve větách 3,1 až 3,11 jsou prozatím nezáporná celá čísla, což nebylo zaznamenáno ve znění těchto vět proto (viz poznámku 2,6), že později dokážeme platnost těchto vět i pro obecnější druhy čísel. Potom bude užitečná následující věta 3,15, která by se jinak mohla zdát čtenáři zbytečná.

**Věta 3,15.** *Zobecněný distributivní zákon je důsledkem obecného komutativního a asociativního zákona sčítání, komutativního zákona násobení a věty* 3,14.

Důkaz. Buďtež dána čísla (3,1), (3,7). Nechť index $r$ probíhá čísla 1, 2, ..., $n$; nechť index $s$ probíhá čísla 1, 2, ..., $m$. Položme

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\,; \quad b = b_1 + b_2 + \ldots + b_m$$

a označme $p$ součet všech $nm$ součinů $a_r b_s$. Máme dokázat, že

$$p = ab\,. \tag{3,8}$$

Pořadí sčítanců součtu $p$ si můžeme podle obecného komutativního zákona sčítání myslit tak, že napřed přijdou ti sčítanci $a_r b_s$, pro které je $s = 1$ (ti budou tvořit první skupinu), potom ti sčítanci $a_r b_s$, pro které je $s = 2$ (ti budou tvořit druhou skupinu) atd. Celkem budeme mít $m$ skupin a částečné součty součtu $p$ příslušné jednotlivým skupinám budou podle věty 3,14

$$a_1 b_1 + a_2 b_1 + \ldots + a_n b_1 = ab_1\,,$$
$$a_1 b_2 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_2 = ab_2 \qquad \text{atd.}$$

Celkový součet $p$ je podle obecného asociativního zákona sčítání roven součtu všech $m$ částečných součtů, tedy

$$p = ab_1 + ab_2 + \ldots + ab_m\,. \tag{3,9}$$

Podle komutativního zákona násobení je však $ab_1 = b_1 a$, $ab_2 = b_2 a, \ldots, ab_m = b_m a$, tedy

$$ab_1 + ab_2 + \ldots + ab_m = b_1 a + b_2 a + \ldots + b_m a\,, \tag{3,10}$$

a podle věty 3,14 je

$$b_1 a + b_2 a + \ldots + b_m a = (b_1 + b_2 + \ldots + b_m)\, a$$

neboli

$$b_1a + b_2a + \ldots + b_ma = ba\,. \tag{3,11}$$

Konečně je podle komutativního zákona násobení

$$ba = ab\,. \tag{3,12}$$

Užijeme-li postupně (3,9), (3,10), (3,11) a (3,12), vyjde (3,8).

Jestliže všechna čísla (3,1) jsou rovna jedné, obsahuje každý ze souborů (3,2) jediný prvek, a jsou-li soubory (3,2) disjunktní, skládá se jejich sjednocení z $n$ prvků. Tedy podle naší definice je

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ sčítanců}} = n\,. \tag{3,13}$$

Ve větě 3,14 je tedy na levé straně první činitel rovný $n$ a na pravé straně je podle věty 2,6 každý součin roven $b$, takže dostáváme vzorec

$$nb = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{n \text{ sčítanců}}\,, \tag{3,14}$$

který na škole slouží jako definice součinu dvou přirozených čísel.

Jsou-li $m$, $n$ přirozená čísla, nazýváme *maticí typu* $(m, n)$ soustavu $nm$ věcí (které nemusí být navzájem různé a které se nazývají *prvky* matice) umístěných do obdélníkového schematu o $m$ řádcích a $n$ sloupcích, takže na př. matice typu (2,3) má tvar

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Matice typu $(1, n)$ je totéž jako $n$-tice [viz (3,3)] s tím formálním rozdílem, že u $n$-tic jsme užili lomené závorky, kdežto u matic je zvykem užívat závorky okrouhlé. (Místo názvu prvek jsme u $n$-tic užili názvu člen.) Při obecných úvahách o maticích označujeme všechny prvky matice týmž písmenem (na př. $a$) opatřeným dvěma indexy, z nichž prvý udává řádek, druhý sloupec, ve kterém leží uvažovaný prvek, takže obecné vyjádření matice typu $(m, n)$ bude

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3,15}$$

Poznámka 3,6. Místo $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{2n}$ a pod. bychom vlastně měli psát určitěji $a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{2,n}$ a pod., protože každé naše $a$ má dva indexy a nikoli snad jediný index rovný jedenácti, dvanácti, dvaceti jedné, součinu $2n$ a pod. Avšak takové hromadění čárek by bylo nepohodlné a upozornění jistě stačí, aby si čtenář i bez čárek jasně uvědomoval, že zde máme všude dvojice indexů.

Nás budou zajímat *číselné matice*, t. j. takové matice, jejichž všecky prvky jsou čísla (prozatím to budou nezáporná celá čísla). Nechť (3,15) je číselná matice typu $(m, n)$; nechť index $r$ probíhá čísla $1, 2, \ldots, m$; nechť index $s$ probíhá čísla $1, 2, \ldots, n$. V $r$-tém řádku matice (3,15) máme $n$-tici $[a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}]$; součtem všech členů této $n$-tice je číslo

$$S_r = a_{r1} + a_{r2} + \ldots + a_{rn} \quad (r = 1, 2, \ldots, m) \tag{3,16}$$

a součinem všech členů této $n$-tice je číslo

$$P_r = a_{r1}a_{r2} \ldots a_{rn} \quad (r = 1, 2, \ldots, m)\,. \tag{3,17}$$

Z $s$-tého sloupce matice (3,15) utvoříme $m$-tici $[a_{1s}, a_{2s}, \ldots, a_{ms}]$; součtem všech členů této $m$-tice je číslo

$$S'_s = a_{1s} + a_{2s} + \ldots + a_{ms} \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{3,16'}$$

a součinem všech členů této $m$-tice je číslo

$$P'_s = a_{1s}a_{2s} \ldots a_{ms} \quad (s = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3,17'}$$

Čísla (3,16) nazveme *řádkovými součty* matice (3,15), čísla (3,17) *řádkovými součiny*, čísla (3,16') *sloupcovými součty*, čísla (3,17') *sloupcovými součiny*.

**Věta 3,16.** *Pro každou číselnou matici libovolného typu* $(m,n)$ *je*

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_m = S'_1 + S'_2 + \ldots + S'_n\,,$$

neboli *součet všech $m$ řádkových součtů je roven součtu všech $n$ sloupcových součtů.*

Důkaz. Podle obecného komutativního a asociativního zákona sčítání jsou oba součty rovny součtu všech $nm$ čísel, ze kterých se matice skládá.

**Věta 3,17.** *Pro každou číselnou matici libovolného typu* $(m, n)$ *je*

$$P_1P_2 \ldots P_m = P'_1P'_2 \ldots P'_n\,,$$

neboli *součin všech $m$ řádkových součinů je roven součinu všech $n$ sloupcových součinů.*

Důkaz. Podle obecného komutativního a asociativního zákona násobení jsou oba součiny rovny součinu všech $nm$ čísel, ze kterých se matice skládá.

## § 4. Rekurentní definice. Důkazy indukcí

V § 1 jsme mluvili o tom, že přirozených čísel se užívá k čítání souborů, t. j. k určení počtu prvků souboru. Při čítání souboru bereme prvky souboru jeden po druhém v určitém pořadí: první prvek, druhý, třetí atd. To znamená, že s jednotlivými prvky souboru sdružujeme přirozená čísla počínajíc číslem 1 a končíc číslem $n$, které udává počet prvků souboru. Můžeme říci, že při čítání vzniká soubor z prázdného souboru postupným přidáváním jednotlivých prvků. Přidáním jednoho prvku k souboru o $k$ prvcích však vznikne soubor o $k + 1$ prvcích. Všecka celá nezáporná čísla dostaneme, vyjdeme-li od čísla 0 a znovu a znovu provádíme přechod od čísla $k$ k číslu $k + 1$. K přirozenému číslu $n$ dospějeme od čísla 0 po $n$ takových přechodech.

Tato úvaha nás vede k pojmům *rekurentní definice* a *důkazu indukcí*, které mají v matematice dalekosáhlý význam.

Budiž obecně naším úkolem pro každé nezáporné celé $n$ definovat určitý výraz $A_n$. Místo abychom definovali $A_n$ přímo pro jakékoli $n$, můžeme postupovat tak, že přímo definujeme pouze výraz $A_0$ a mimo to pro každé nezáporné celé $n$ udáme pravidlo $P_n$, které definuje výraz $A_{n+1}$ za předpokladu, že výraz $A_n$ je už definován. Je patrné, že výraz $A_n$ je potom jednoznačně definován pro každé nezáporné celé $n$. Neboť protože výraz $A_0$ máme definován, definuje pravidlo $P_0$ výraz $A_1$, a tedy pravidlo $P_1$ definuje výraz $A_2$; potom pravidlo $P_2$ definuje výraz $A_3$ atd. Taková definice se jmenuje *rekurentní definice* a pravidlo $P_n$ se jmenuje *rekurentní pravidlo*. Rekurentní definice se skládá ze dvou částí; v první části definujeme výraz $A_0$, ve druhé vyslovíme rekurentní pravidlo $P_n$ pro všechna nezáporná celá čísla $n$.

Poznámka 4,1. Velmi často jde o to, definovat $A_n$ pouze pro přirozená čísla $n$ (t. j. $A_0$ se pak nedefinuje). V tomto případě první část je definicí výrazu $A_1$ a ve druhé části se vysloví rekurentní pravidlo $P_n$ pro každé přirozené číslo $n$.

Podobně jako s definicemi je tomu s matematickými větami. Budiž úkolem pro každé nezáporné celé $n$ dokázat určitou větu $V_n$. Místo abychom přímo provedli důkaz věty $V_n$ pro jakékoli $n$, můžeme postupovat takto. Přímo dokážeme pouze větu $V_0$ a mimo to pro každé nezáporné celé $n$ provedeme důkaz věty $V_{n+1}$ *za předpokladu, že věta $V_n$* (pro vyšetřované $n$) *je správná.* Takový důkaz se jmenuje *důkaz indukcí* a kursivou vytištěný předpoklad se jmenuje *induktivní předpoklad*. Tedy důkaz indukcí se skládá ze dvou částí. V první části (která bývá leckdy velmi snadná, často je i samozřejmá) se dokáže věta $V_0$; ve druhé části pak se pomocí induktivního předpokladu přejde od věty $V_n$ k větě $V_{n+1}$.

Poznámka 4,2. Máme-li dokázat větu $V_n$ pro všecka přirozená $n$, potom ovšem v první části se dokáže věta $V_1$ a přechod od $V_n$ k $V_{n+1}$ ve druhé části se opět děje pro přirozená čísla $n$.

Poznámka 4,3. V předcházejícím výkladu jsme libovolné nezáporné nebo kladné celé číslo označili $n$. Chceme-li to zdůraznit, mluvíme určitěji o rekurentní definici *vzhledem k n* nebo o důkazu indukcí *vzhledem k n*. Místo písmena $n$ je ovšem možné použít kteréhokoli jiného písmena; užijeme-li třeba písmena $r$, mluvíme o rekurentní definici nebo o důkazu indukcí vzhledem k $r$.

Poznámka 4,4. Předcházející poznámka je přes svou samozřejmost užitečná zejména tehdy, jestliže výraz, který máme definovat, nebo věta, kterou máme dokázat, závisí na *několika* nezáporných nebo kladných celých číslech. Jestliže na př. větu $V(m, n)$ závislou na dvou přirozených číslech $m, n$ dokazujeme indukcí vzhledem k $n$, skládá se důkaz ze dvou částí. V první části se dokáže, že věta $V(m, 1)$ je správná pro každé přirozené číslo $m$. Ve druhé části předpokládáme, že přirozené číslo $n$ je určitým způsobem zvoleno a že pro toto $n$ je správná věta $V(m, n)$ při všech hodnotách přirozeného čísla $m$; z toho se musí odvodit, že pro vyšetřované $n$ také věta $V(m, n + 1)$ je správná při všech hodnotách přirozeného čísla $m$.

Uvedeme si nyní jednoduché příklady rekurentní definice. V § 1 jsme definovali součet (3,4) a součin (3,5) nezáporných celých čísel (3,1) přímo pro jakékoli přirozené číslo $n$. Místo toho můžeme také definovat součet

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{4,1}$$

a součin

$$p_n = a_1 a_2 \ldots a_n \tag{4,2}$$

rekurentně vzhledem k $n$. Rekurentní definice součtu zní

$$s_1 = a_1\,, \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1}\,; \tag{4,3}$$

rekurentní definice součinu (4,2) zní

$$p_1 = a_1\,, \quad p_{n+1} = p_n \cdot a_{n+1}\,. \tag{4,4}$$

Poznámka 4,5. Rekurentní definice (4,3) součtu (4,1) předpokládá, že součet *dvou* přirozených čísel je už definován. Přesto rekurentní pravidlo $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ pro $n = 1$ definuje součet $s_2 = a_1 + a_2$ znovu, ale tak, že nová definice je v souladu s definicí původní. Podobně tomu je i s rekurentní definicí (4,4) součinu (4,2).

Poznámka 4,6. Součet (4,1) jsme nejprve definovali přímo pro jakékoli přirozené číslo $n$ a potom jsme pro týž pojem zavedli novou rekurentní definici (4,3). Je třeba se přesvědčit, že nová definice je v souladu se starou. Tu je nejprve jasné, že $s_1 = a_1$ podle původní definice. Ale také rekurentní pravidlo $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ neboli

$$a_1 + \ldots + a_{n+1} = (a_1 + \ldots + a_n) + a_{n+1} \qquad (4,5)$$

je správné ve smyslu původní definice, neboť je dostaneme, jestliže na součet na levé straně ve (4,5) užijeme věty 3,4 (obecného asociativního zákona sčítání) tím způsobem, že čísla $1, 2, \ldots, n + 1$ rozdělíme na *dvě skupiny* tak, že do první skupiny přijde $n$ čísel $1, 2, \ldots, n$ a do druhé jediné číslo $n + 1$. Stejně tomu je i s rekurentní definicí (4,4) součinu (4,2).

Jestliže součet (4,1) a součin (4,2) nedefinujeme přímo, nýbrž rekurentně, nejsou už věty 3,3 až 3,11 přímými důsledky nových definic, nýbrž je třeba je dokázat na základě vět 2,1 až 2,9 a rekurentních definic (4,3) a (4,4). To nyní provedeme, a tím dokážeme následující větu.

**Věta 4,1.** *Věty* 3,3 *až* 3,11 *jsou důsledky vět* 2,1 *až* 2,9 *a rekurentních definic* (4,3) *a* (4,4).

Poznámka 4,7. Věta 4,1 má ten význam, že jestliže při vyšetřování obecnějších druhů čísel zavedeme definice součtu $a + b$ a součinu $ab$ tak, že pro nová čísla budeme moci dokázat věty 2,1 až 2,9, pak pro nová čísla budeme moci zavést rekurentní definice (4,3) a (4,4) obecného součtu (4,1) a obecného součinu (4,2). Podle věty 4,1 budeme pak moci bez nového důkazu soudit na platnost vět 3,3 až 3,11 i pro nová čísla, aniž bude třeba tyto věty znovu dokazovat. V tom je *metodický* význam věty 4,1. My však v této knize budeme postupovat tak, že i pro obecnější druhy čísel budeme obecné součty (4,1) a obecné součiny (4,2) definovat přímo na základě toho, že smysl součtu (4,1) a součinu (4,2) v oboru nezáporných celých čísel je znám; potom pojem obecného součtu (4,1) a obecného součinu (4,2) rozšíříme přímo (pro jakékoli přirozené číslo $n$) na taková obecnější čísla a poté na ně opět přímo rozšíříme i důkazy platnosti vět 3,3 až 3,11. Při takovém postupu nebudeme potřebovat větu 4,1, proto její důkaz jenom naznačíme a provedení přenecháme čtenáři.

Naším prvním cílem je věta 3,16. Pro matice typu $(m, 1)$ nebo $(1, n)$ je věta 3,16 zřejmá. Pro matice typu (2,2) je to věta 2,10, kterou jsme odvodili z vět 2,1 a 2,2. Indukcí vzhledem k $m$ přejdeme k maticím typu $(m, 2)$; konečně přechod k obecnému typu $(m, n)$ se provede indukcí vzhledem k $n$.

Dále se dokáže věta 3,12 indukcí vzhledem k $n$.

Věta 3,3 praví, že jestliže změnou pořadí z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vzniknou čísla $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n .$$

Dokáže se tak, že se užije věty 3,16 na matici typu $(n, n)$, která pro $r = 1, 2, \ldots, n$ má v $r$-tém řádku všechny prvky rovné nule až snad na jeden prvek $a_{rs} = a'_s$, kde $s = 1, 2, \ldots, n$ je ten index, pro který je $a_r = a'_s$.

Věta 3,4 se dokáže tak, že se užije věty 3,16 na matici typu $(n, s)$, která pro $r = 1, 2, \ldots, n$ má v $r$-tém řádku všechny prvky rovné nule až snad na jeden prvek rovný $a_r$, který se umístí v tolikátém sloupci, do kolikáté skupiny patří $a_r$.

Celý dosavadní postup se nyní opakuje s tím rozdílem, že místo sčítání všude přijde násobení, místo čísla 0 číslo 1. Nejprve se dokáže věta 3,17, potom věta 3,13 a na jejich základě věty 3,6 a 3,7.

Indukcí vzhledem k $n$ se dokáže věta 3,14 a věta 3,15 dá větu 3,11.

Indukcí vzhledem k $n$ se dokáže ten zvláštní případ věty 3,5, ve kterém se vynechává jediný sčítanec; potom obecný případ vynechání $k$ sčítanců se dokáže indukcí vzhledem ke $k$. Podobně se dojde k důkazu věty 3,8.

Věty 3,9 a 3,10 se dokáží indukcí vzhledem k $n$.

Další příklad nám dá pojem *sudého* a *lichého* čísla, který zavedeme rekurentní definicí takto. Číslo 0 je sudé; jestliže celé nezáporné $n$ je sudé, je $n + 1$ liché; jestliže $n$ je liché, je $n + 1$ sudé. Číslo $1 = 0 + 1$ je tedy liché, číslo $2 = 1 + 1$ je sudé.

**Věta 4,2.** *Jsou-li $m$, $n$ nezáporná celá čísla, je součet $m + n$ sudý, jsou-li buď oba sčítanci čísla sudá, nebo oba čísla lichá; součet $m + n$ je lichý, je-li jeden ze sčítanců sudý a druhý lichý.*

Důkaz provedeme indukcí vzhledem k $n$. Protože 0 je číslo sudé, je případ součtu $m + 0$ důsledkem věty 2,3. Nechť nyní při určitém $n$ je věta správná (pro všecka $m$); máme dokázat, že potom věta platí i pro součet $m + (n + 1)$. To plyne z toho, že jednak je podle věty 2,2

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

a jednak podle definice je jedno z čísel $n, n + 1$ sudé a druhé liché a totéž platí o číslech $m + n$, $(m + n) + 1$.

**Věta 4,3.** *Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nezáporná celá čísla, je součet*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{4,6}$$

*sudý, je-li počet lichých sčítanců sudý; součet* (4,6) *je lichý, je-li počet lichých sčítanců lichý.*

Důkaz indukcí vzhledem k $n$. Pro $n = 1$ plyne věta z toho, že 0 je číslo sudé, 1 číslo liché. Platí-li věta pro součet (4,6), plyne její správnost pro součet

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + a_{n+1}$$

z věty 4,2.

**Věta 4,4.** *Jsou-li $m$, $n$ nezáporná celá čísla, je součin $mn$ číslo sudé, je-li aspoň jeden činitel sudý; součin $mn$ je číslo liché, jsou-li oba činitelé čísla lichá.*

Důkaz. Je-li $m = 0$, plyne naše věta z věty 2,7, neboť nula je číslo sudé. Je-li $m$ kladné, je podle (3,14)

$$mn = \underbrace{n + n + \ldots + n}_{m \text{ sčítanců}},$$

kde počet lichých sčítanců je při sudém $n$ roven nule, při lichém $n$ roven $m$, takže věta 4,3 dá žádaný výsledek.

**Věta 4,5.** *Součin $a_1a_2 \dots a_n$ s nezápornými celými činiteli je sudý, je-li aspoň jeden činitel číslo sudé, a je lichý, jsou-li všichni činitelé čísla lichá.*

Důkaz indukcí vzhledem k $n$. Pro $n = 1$ je věta zřejmá. Předpokládejme její správnost při určitém $n$ a uvažujme součin

$$a_1a_2 \dots a_{n+1} = (a_1a_2 \dots a_n) \,.\, a_{n+1} \,. \tag{4,7}$$

Podle věty 4,4 je číslo (4,7) liché právě tehdy, je-li číslo $a_{n+1}$ liché a je-li zároveň i součin $a_1a_2 \dots a_n$ liché číslo; podle předpokladu je však součin $a_1a_2 \dots a_n$ lichý právě tehdy, jsou-li všecka čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ lichá. Tudíž součin $a_1a_2 \dots a_{n+1}$ je lichý právě tehdy, jsou-li všecka čísla $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ lichá, čímž je důkaz indukcí ukončen.

Ukončíme tento paragraf větou, kterou nazveme *nejobecnějším distributivním zákonem* a o které jsme se zmínili už v poznámce 3,5.

**Věta 4,6.** *Budiž dána číselná matice* (3,15) *libovolného typu* $(m, n)$. *Součin všech $m$ řádkových součtů matice* (3,15) *je roven součtu všech takových součinů $m$ čísel, jejichž činitelé jsou prvky matice* (3,15), *a to: prvním činitelem je libovolný prvek prvého řádku, druhým činitelem libovolný prvek druhého řádku atd.*

Důkaz provedeme indukcí vzhledem k $m$. Pro $m = 1$ je naše věta zřejmým důsledkem vět 3,1 a 3,2. Předpokládejme, že věta je dokázána pro matici (3,15) typu $(m, n)$ a dokazujme ji pro matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots a_{mn} \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \dots a_{m+1,n} \end{pmatrix} \tag{4,8}$$

typu $(m + 1, n)$, která vznikne z matice (3,15) připojením jednoho dalšího řádku. Je-li $P$ součin všech $m$ řádkových součtů matice (3,15) a je-li $Q$ součin všech $m + 1$ řádkových součtů matice (4,8), je

$$Q = P \,.\, (a_{m+1,1} + a_{m+1,2} + \dots + a_{m+1,n}) \,. \tag{4,9}$$

Podle předpokladu je

$$P = c_1 + c_2 + c_3 + \dots ;$$

na pravé straně rovnosti jsou všechny možné součiny

$$c_1, c_2, c_3, \dots , \tag{4,10}$$

kde každé z čísel (4,10) je součin $m$ činitelů, při čemž pro $r = 1, 2, \ldots, m$ je $r$-tý činitel prvkem $r$-tého řádku matice (3,15). Podle (4,9) plyne ze zobecněného distributivního zákona, že číslo $Q$ je rovno součtu všech součinů dvou činitelů, z nichž první je libovolným z čísel (4,10) a druhý je libovolným z čísel

$$a_{m+1,1}, a_{m+1,2}, \ldots, a_{m+1,n} .$$

To však znamená, že $Q$ je součtem všech takových součinů $m + 1$ činitelů, u kterých pro $r = 1, 2, \ldots, m + 1$ je $r$-tý činitel prvkem $r$-tého řádku matice (4,8).

Poznámka 4,8. Z důkazu je patrné, že věta 4,6 je důsledkem obecného asociativního zákona násobení a zobecněného distributivního zákona. Jestliže tedy platnost těchto dvou zákonů později rozšíříme na obecnější druhy čísel, bude tím rozšířena také platnost nejobecnějšího distributivního zákona.

## § 5. Nerovnosti. Zákony monotonie

Na počátku § 4 jsme se zmínili o tom, že nezáporná celá čísla vznikají postupně, vyjdeme-li od čísla 0 a znovu a znovu provádíme přechod od čísla $k$ k číslu $k + 1$. Nezáporná celá čísla se takto jeví v určitém uspořádání, které nazveme *přirozeným uspořádáním* množiny všech nezáporných celých čísel. Jsou-li $a, b$ dvě různá nezáporná celá čísla, potom to z nich, které v přirozeném uspořádání přijde na řadu dříve než druhé, se jmenuje *menší* než druhé; druhé je naopak *větší* než první. Je-li na př. $a$ menší než $b$ neboli $b$ větší než $a$, píšeme

$$a < b \quad \text{neboli} \quad b > a \; ; \tag{5,1}$$

„hrot" značky je tedy vždy u menšího z obou čísel. Zápis

$$a \leqq b \quad \text{neboli} \quad b \geqq a \tag{5,2}$$

znamená, že buďto platí (5,1), nebo je $a = b$.

Vztahy tvaru (5,1) nebo (5,2) se jmenují *nerovnosti*. Ve vyšší matematice mají nerovnosti velký význam a v této knize jim věnujeme značnou pozornost.

Následující dvě věty platí nejen pro přirozené uspořádání množiny nezáporných celých čísel, nýbrž pro jakékoli uspořádání jakékoli množiny (viz kap. II, § 8).

**Věta 5,1.** *Jsou-li $a$, $b$ dvě čísla, platí vždy právě jeden ze tří vztahů*

$$a = b \, , \quad a < b \, , \quad b < a \, . \tag{5,3}$$

Tato věta se nazývá *zákon trichotomie* (česky asi *zákon tří možných případů*).

Poznámka 5,1. Že platí *právě jeden* z napsaných tří vztahů, je shrnutím dvou tvrzení. Předně, že jistě některý z nich platí; za druhé, že není možné, aby platily dva z nich zároveň. V podobném smyslu budeme slov „právě jeden" často užívat. Kdybychom chtěli vyslovit jenom první tvrzení, že jistě některý z našich vztahů platí, řekli bychom, že platí *aspoň jeden*. Kdybychom chtěli vyslovit pouze druhé tvrzení, že nemohou platit některé dva vztahy zároveň, řekli bychom, že platí *nejvýš jeden*.

Poznámka 5,2. Místo (5,3) můžeme ovšem také napsat

$$a = b\,, \quad b > a\,, \quad a > b \tag{5,3'}$$

nebo

$$a = b\,, \quad a < b\,, \quad a > b\,. \tag{5,3''}$$

**Věta 5,2.** *Jsou-li a, b, c taková čísla, že je*

$$a < b < c \quad \text{neboli} \quad c > b > a\,, \tag{5,4}$$

*potom je také* $a < c$ neboli $c > a$. Tato věta se nazývá *transitivní zákon*.

Poznámka 5,3. Vztah (5,4) znamená, že platí současně obě nerovnosti $a < b$, $b < c$ neboli $b > a$, $c > b$. Podobně třeba $p < q < < r < s$ znamená, že platí současně tři nerovnosti $p < q$, $q < r$, $r < s$;

$$a \leqq b \leqq c \quad \text{neboli} \quad c \geqq b \geqq a \tag{5,5}$$

znamená, že platí současně $a \leqq b$, $b \leqq c$ neboli $b \geqq a$, $c \geqq b$ atd.

Poznámka 5,4. Platí-li (5,5), je také $a \leqq c$ neboli $c \geqq a$, při čemž rovnost $a = c$ nastane pouze tehdy, nastane-li *současně na obou místech* v (5,5), t. j. je-li $a = b = c$.

Poznámka 5,5. Mohli bychom také psát na př.

$$a < b > c\,, \tag{*}$$

abychom zkráceně zapsali, že platí zároveň obě nerovnosti $a < b$, $b > c$. Avšak z takových nerovností neplyne žádný vztah mezi čísly $a$, $c$, neboť je na př. $2 < 4 > 2$, $2 = 2$; $2 < 4 > 3$, $2 < 3$; $3 < 4 > 2$; $3 > 2$. Proto se zkráceného psaní (*) zřídka kdy užívá.

Poznámka 5,6. Z definice je patrné, že pro všecka přirozená čísla $n$ je $0 < n$ neboli $n > 0$ a že pro všecka přirozená čísla $n \neq 1$ je $1 < n$ neboli $n > 1$.

**Věta 5,3.** *Jsou-li $m$, $n$ celá čísla, potom nerovnost $m > n$ znamená totéž jako nerovnost $m \geqq n + 1$.*

Důkaz. Jestliže tvoříme čísla vycházejíce od nuly a postupně přecházejíce od $k$ ke $k + 1$, potom při daném $n$ jsou čísla $m > n$ ta, která přijdou později než $n$; z nich přijde nejdříve $n + 1$ a ostatní následují za $n + 1$.

Pravíme, že množina $A$ je *částí* množiny $B$, jestliže z předpokladu, že nějaká věc je prvkem množiny $A$, následuje, že táž věc je také prvkem množiny $B$. Podle naší definice *je* tedy *každá množina částí sebe samé.* Jestliže množina $A$ *nevyčerpá* celou množinu $B$ (pouze v takových případech se slova část užívá v běžné mluvě), potom řekneme, že množina $A$ je *pravou částí* množiny $B$. Podle této definice je prázdná množina částí *libovolné* množiny $B$, a jestliže $B$ není prázdná, je prázdná množina její *pravou* částí.

*Příklad 5,1.* Budiž $A$ soubor všech žen zaměstnaných v prodejně, $B$ soubor všech zaměstnanců této prodejny. Podle naší definice je ve všech případech soubor $A$ částí souboru $B$, i když snad není v prodejně zaměstnán žádný muž (soubory $A$, $B$ splynou) nebo žádná žena (soubor $A$ je prázdný). Je-li v prodejně zaměstnán aspoň jeden muž, je soubor $A$ pravou částí souboru $B$ (nevyjímajíc případ, že *všichni* zaměstnanci jsou muži).

Je patrné, že vztah $a < b$ mezi nezápornými celými čísly znamená, že lze udat soubor $A$ složený z $a$ prvků a soubor $B$ složený z $b$ prvků tak, že soubor $A$ je pravou částí souboru $B$.

Poznámka 5,7. Je-li $a < b$ a je-li $A$ libovolný soubor složený z $a$ prvků, $B$ libovolný soubor složený z $b$ prvků, nemusí nikterak být $A$ částí $B$; je-li na př. $a = 3$, $b = 5$, může se $A$ skládat ze tří jablek, $B$ ze čtyř slonů a jednoho zajíce. Nicméně je pravda tolik, že je-li $a < b$ a zvolíme-li zcela libovolně soubor $B$ složený z $b$ prvků, vždycky má $B$ takovou pravou část $A$, která se skládá z $a$ prvků.

**Věta 5,4.** *Platí-li* (5,1), *je také*

$$a + c < b + c \quad \text{neboli} \quad b + c > a + c\,. \tag{5,6}$$

Důkaz. Vyjdeme od disjunktních souborů $B$, $C$, z nichž prvý má $b$ prvků a druhý $c$. Z (5,1) plyne, že soubor $B$ obsahuje pravou část $A$ složenou z $a$ prvků; je jasné, že soubory $A$, $C$ jsou disjunktní. Sjednocení souborů $B$, $C$ obsahuje $b + c$ prvků, sjednocení souborů $A$, $C$ jich obsahuje $a + c$. Avšak druhé sjednocení je zřejmě pravou částí prvého, takže platí (5,6).

*Příklad 5,2.* Je-li v jednom závodě méně zaměstnanců než ve druhém, bude tomu tak i tehdy, přijmou-li oba závody týž počet dalších zaměstnanců.

Poznámka 5,8. Vzhledem ke komutativnímu zákonu sčítání můžeme (5,6) psát také ve tvaru

$$c + a < c + b \quad \text{neboli} \quad c + b > c + a\,. \tag{5,6'}$$

Poznámka 5,9. Platí-li (5,2), je také

$$a + c \leqq b + c \quad \text{neboli} \quad b + c \geqq a + c\,, \tag{5,7}$$

při čemž rovnost nastane pouze pro $a = b$.

Poznámka 5,10. Dokázaná věta se jmenuje *zákon monotonie sčítání*. Dá se vyslovit takto: *V nerovnosti je dovoleno na obou stranách přičíst totéž číslo.*

**Věta 5,5.** *Platí-li obě nerovnosti*

$$a < b\,, \quad c < d \quad \text{neboli} \quad b > a\,, \quad d > c\,, \tag{5,8}$$

platí také nerovnost

$$a + c < b + d \quad \text{neboli} \quad b + d > a + c\,; \tag{5,9}$$

stručně: *nerovnosti je dovoleno sčítat.*

*Příklad 5,3.* Je-li v jedné třídě méně chlapců než ve druhé a méně dívek než ve druhé, je počet žactva první třídy menší než počet žactva druhé třídy.

Důkaz. Jestliže za prvé na obou stranách nerovnosti $a < b$ přičteme číslo $c$ a jestliže za druhé na obou stranách nerovnosti $c < d$ přičteme číslo $b$, dostaneme dvě nerovnosti

$$a + c < b + c\,, \quad b + c < b + d\,,$$

ze kterých podle transitivního zákona vyplývá (5,9).

Poznámka 5,11. Jestliže místo (5,8) předpokládáme pouze buďto

$$a < b\,, \quad c \leqq d \quad \text{neboli} \quad b > a\,, \quad d \geqq c\,, \tag{5,8'}$$

nebo

$$a \leqq b\,, \quad c < d \quad \text{neboli} \quad b \geqq a\,, \quad d > c\,, \tag{5,8''}$$

můžeme opět soudit na správnost nerovnosti (5,9). Jestliže však místo (5,8) předpokládáme

$$a \leqq b\,, \quad c \leqq d \quad \text{neboli} \quad b \geqq a\,, \quad d \geqq c\,, \tag{5,8'''}$$

potom můžeme místo (5,9) tvrdit pouze

$$a + c \leqq b + d .$$

**Věta 5,6.** *Platí-li* (5,1) *a je-li* $c > 0$, *je také*

$$ac < bc \quad \text{neboli} \quad bc > ac . \tag{5,10}$$

Důkaz. Vyjděme od souborů $B$, $C$, z nichž prvý obsahuje $b$ prvků a druhý $c$. Soubor $B$ má pravou část $A$ složenou z $a$ prvků. Označme $(B, C)$ soubor všech dvojic $[x, y]$ s prvým členem $x$ vzatým z $B$ a druhým $y$ vzatým z $C$; ty z našich dvojic, jejichž prvý člen náleží do $A$, tvoří pravou část $(A, C)$ souboru $(B, C)$. Protože prvý ze souborů $(A, C)$, $(B, C)$ obsahuje $ac$ prvků a druhý $bc$, platí (5,10).

*Příklad 5,4.* Ujde-li každý ze dvou chodců 5 km za hodinu a jde-li prvý 3 hodiny, druhý 5 (tedy více), ujde prvý méně kilometrů než druhý.

Poznámka 5,12. Vzhledem ke komutativnímu zákonu násobení můžeme (5,10) psát také ve tvaru

$$ca < cb \quad \text{neboli} \quad cb > ca . \tag{5,10'}$$

Poznámka 5,13. Z vět 2,7 a 5,6 plyne: Platí-li (5,2) a je-li $c \geqq 0$, je také

$$ac \leqq bc \quad \text{neboli} \quad bc \geqq ac , \tag{5,11}$$

při čemž rovnost nastane ve dvou případech, předně pro $a = b$ a za druhé pro $c = 0$.

Poznámka 5,14. Dokázaná věta se jmenuje *zákon monotonie násobení.* Dá se vyslovit takto: *Nerovnost je dovoleno znásobit na obou stranách týmž kladným číslem.*

**Věta 5,7.** *Platí-li*

$$0 < a < b , \quad 0 < c < d \quad \text{neboli} \quad b > a > 0 , \quad d > c > 0, \tag{5,12}$$

*platí také nerovnost*

$$0 < ac < bd \quad \text{neboli} \quad bd > ac > 0 ; \tag{5,13}$$

stručně: *nerovnosti mezi kladnými čísly je dovoleno mezi sebou znásobit.*

Důkaz. Jestliže *předně* obě strany nerovnosti $a < b$ znásobíme číslem $c > 0$ a jestliže *za druhé* obě strany nerovnosti $c < d$ znásobíme číslem $b > 0$, dostaneme dvě nerovnosti

$$ac < bc , \quad bc < bd ,$$

ze kterých podle transitivního zákona vyplývá $ac < bd$; nerovnost $ac > 0$ plyne z věty 2,8.

*Příklad 5,5.* Napíše-li prvá korespondentka za hodinu méně stran než druhá a pracuje-li prvá méně hodin než druhá, napíše prvá celkem méně stran než druhá.

Poznámka 5,15. Jestliže místo (5,12) předpokládáme pouze buďto

$$0 < a < b\,,\quad 0 < c \leqq d \quad \text{neboli} \quad b > a > 0\,,\quad d \geqq c > 0, \tag{5,12'}$$

nebo

$$0 < a \leqq b\,,\quad 0 < c < d \quad \text{neboli} \quad b \geqq a > 0\,,\quad d > c > 0, \tag{5,12''}$$

můžeme opět soudit na správnost nerovnosti (5,13). Jestliže však místo (5,12) předpokládáme pouze

$$0 < a \leqq b,\ 0 < c \leqq d \quad \text{neboli} \quad b \geqq a > 0,\ d \geqq c > 0, \tag{5,12'''}$$

potom můžeme místo (5,13) tvrdit pouze

$$0 < ac \leqq bd \quad \text{neboli} \quad bd \geqq ac > 0\,.$$

**Věta 5,8.** *Jestliže čísla*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{5,14}$$

*a*

$$b_1, b_2, \ldots, b_n \tag{5,15}$$

*splňují nerovnosti*

$$a_1 \leqq b_1\,,\quad a_2 \leqq b_2\,, \ldots, a_n \leqq b_n\,, \tag{5,16}$$

*potom platí také nerovnost*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq b_1 + b_2 + \ldots + b_n\,. \tag{5,17}$$

*Při tom v* (5,17) *platí znaménko rovnosti právě tehdy, jestliže platí na všech n místech v* (5,16).

Poznámka 5,16. Slova *právě tehdy* mají tento význam. Předně tvrdíme, že jestliže v (5,17) *platí* znaménko rovnosti, potom platí i na všech $n$ místech v (5,16). Za druhé však mimo to tvrdíme, že jestliže v (5,17) *neplatí* znaménko rovnosti, potom *nemůže platit* zároveň na všech místech v (5,16). V podobném smyslu budeme slov „právě tehdy" často užívat; srov. to, co jsme řekli o slovech „právě jeden" v poznámce 5,1. Obecně buďtež $V$, $W$ dva matematické výroky, z nichž každý může být někdy správný a někdy nesprávný. Věta

$$V \text{ platí právě tehdy, jestliže platí } W, \tag{5,18}$$

je shrnutím dvou vět, z nichž jedna zní

$$\text{jestliže platí } W\text{, potom platí } V\,, \tag{5,19}$$

a druhá zní

$$\text{jestliže neplatí } W\text{, potom neplatí } V\,. \tag{5,20}$$

Snadno uvážíme, že ve větě tvaru (5,18) je vždy dovoleno vyměnit výroky $V$ a $W$, t. j. že věta (5,18) má týž smysl jako věta

$$W \text{ platí právě tehdy, jestliže platí } V\,. \tag{5,18'}$$

Poznámka 5,17. Buďtež $V$, $W$ dva matematické výroky, z nichž každý může být někdy správný a někdy nesprávný. Snadná úvaha ukazuje, že věta tvaru (5,20) má týž smysl jako věta

$$\text{jestliže platí } V\text{, potom platí } W\,. \tag{5,21}$$

V poznámce 5,16 jsme řekli, že věta (5,18) je shrnutím vět (5,19) a (5,20). Nyní můžeme také říci, že věta (5,18) je shrnutím vět (5,19) a (5,21), které se navzájem liší pouze výměnou obou výroků $V$, $W$. Je potom samozřejmé, proč věta (5,18) má týž smysl jako věta (5,18').

*Příklad 5,6.* Nechť $x$ znamená libovolné přirozené číslo. Výrok (5,21), a tedy také výrok (5,20), je správný na př. tehdy, jestliže $V$ znamená výrok, že $x > 5$, $W$ znamená výrok $x > 4$. Výrok (5,18), a tedy také výrok (5,18'), je správný na př. tehdy, jestliže $V$ má týž význam jako dříve, ale $W$ znamená výrok $x \geqq 6$.

Důkaz věty 5,8. Zvolme disjunktní soubory

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \tag{5,22}$$

tak, že prvý se skládá z $b_1$ prvků, druhý z $b_2$ prvků atd. Z nerovností (5,16) plyne, že lze zvolit soubory

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \tag{5,23}$$

tak, že *předně*: soubor $A_1$ je částí souboru $B_1$ (s nímž splyne právě tehdy, jestliže $a_1 = b_1$), soubor $A_2$ je částí souboru $B_2$ (s nímž splyne právě tehdy, jestliže $a_2 = b_2$) atd. a že *za druhé* soubor $A_1$ se skládá z $a_1$ prvků, soubor $A_2$ z $a_2$ prvků atd. Potom také soubory (5,23) jsou disjunktní a sjednocení souborů (5,23) je částí sjednocení souborů (5,22). Jsou nyní možné dva případy. V prvním případě platí v (5,16) zároveň na všech $n$ místech znaménka rovnosti, takže každý soubor (5,23) splyne s příslušným souborem (5,22), sjednocení souborů (5,23) splyne se sjednocením souborů (5,22) a v (5,17) platí znaménko rovnosti. Ve druhém případě v (5,16) aspoň na jednom místě platí znaménko „menší", aspoň jeden ze souborů (5,23) je pravou částí příslušného souboru (5,22), sjednocení souborů (5,23) je pravou částí sjednocení souborů (5,22) a v (5,17) platí znaménko „menší".

*Příklad 5,7.* Ve městě stojí vedle sebe dva stejně vysoké domy. V každém patře prvého domu žije nejvýš tolik dětí jako v témž patře druhého domu. Pak také v prvém domě žije nejvýš tolik dětí jako ve druhém a je-li počet dětí z jednoho domu týž jako počet dětí z druhého, žije v každém patře prvého domu týž počet dětí jako v témž patře domu druhého.

Poznámka 5,18. Dokázanou větu nazveme *obecným zákonem monotonie sčítání.* Zahrnuje v sobě nejen větu 5,4 i s poznámkami 5,8 a 5,9, nýbrž také větu 5,5 i s poznámkou 5,11.

**Věta 5,9.** *Jestliže kladná čísla* (5,14) *a* (5,15) *splňují nerovnosti* (5,16), *potom platí také nerovnost*

$$a_1a_2 \dots a_n \leqq b_1b_2 \dots b_n \,. \tag{5,24}$$

*Při tom v* (5,24) *platí znaménko rovnosti právě tehdy, jestliže platí na všech $n$ místech v* (5,16).

Důkaz. Zvolme opět soubory (5,22) tak, že prvý se skládá z $b_1$ prvků, druhý z $b_2$ prvků atd., při čemž tentokrát je lhostejné, zda soubory (5,22) jsou disjunktní. Podle nerovnosti (5,16) zase lze udat takové soubory (5,23), že předně $A_1$ je částí $B_1$, $A_2$ je částí $B_2$ atd. a že ze druhé se $A_1$ skládá z $a_1$ prvků, $A_2$ z $a_2$ prvků atd. Potom součin nalevo v (5,24) je počet takových $n$-tic

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] \,, \tag{5,25}$$

jejichž prvý člen $x_1$ je vzat z $A_1$, druhý člen $x_2$ je vzat z $A_2$ atd.; soubor všech takových $n$-tic budiž $S(a)$.

Podobně součin napravo v (5,24) je počet $n$-tic (5,25) s prvým členem $x_1$ vzatým z $B_1$, druhým vzatým z $B_2$ atd.; soubor všech takových $n$-tic budiž $S(b)$. Jistě je soubor $S(a)$ částí souboru $S(b)$ a z toho plyne nerovnost (5,24). Jsou nyní možné dva případy. V prvém případě platí v (5,16) na všech $n$ místech znaménko rovnosti, každý soubor (5,23) splyne s příslušným souborem (5,22), soubor $S(a)$ splyne se souborem $S(b)$ a v (5,24) platí znaménko rovnosti. Ve druhém případě v (5,16) aspoň na jednom místě platí znaménko „menší", takže aspoň jeden ze souborů (5,23) je pravou částí příslušného souboru (5,22), soubor $S(a)$ je pravou částí souboru $S(b)$ a v (5,24) platí znaménko „menší".

*Příklad 5,8.* Dvě školy o témž počtu tříd se chtějí poradit o společné akci, a proto uspořádají přípravnou schůzi, na kterou každá třída každé školy zvolí jednoho delegáta. Jestliže v každé třídě první školy je nejvýš tolik žáků jako v příslušné třídě druhé školy, je počet možných sestav delegace první školy nejvýš roven počtu možných sestav delegace druhé školy a oba počty si jsou rovny jenom tehdy, jestliže počet žáků v každé třídě první školy je týž jako počet žáků v příslušné třídě druhé školy.

Poznámka 5,19. Dokázanou větu nazveme *obecným zákonem monotonie násobení.* Zahrnuje v sobě nejen větu 5,6 i s poznámkou 5,13 (omezenou na případ $c > 0$), nýbrž také větu 5,7 i s poznámkou 5,15.

Při důkazech vět 5,8 a 5,9 jsme vycházeli od *přímých* definic součtu (3,4) a součinu (3,5) platných pro libovolné přirozené číslo $n$. Jestliže se rozhodneme pro rekurentní definice (4,3) a (4,4), je třeba nových důkazů, které se provedou indukcí vzhledem k $n$.

Důkaz věty 5,8 *indukcí vzhledem k n.* Pro $n = 1$ je správnost věty 5,8 zřejmá. Předpokládejme, že při určitém $n$ je věta 5,8 správná. Buďtež nyní vedle nezáporných čísel (5,14) a (5,15) dána dvě další nezáporná celá čísla $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ tak, že jsou splněny všecky nerovnosti (5,16) a mimo to ještě nerovnost

$$a_{n+1} \leqq b_{n+1} \, . \tag{5,26}$$

Položme

$$s_n(a) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \, , \quad s_n(b) = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \, ,$$
$$s_{n+1}(a) = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}, \quad s_{n+1}(b) = b_1 + b_2 + \ldots + b_{n+1} \, ,$$

takže podle rekurentní definice sčítání je

$$s_{n+1}(a) = s_n(a) + a_{n+1} \, , \quad s_{n+1}(b) = s_n(b) + b_{n+1} \, . \tag{5,27}$$

Máme dokázat, že je

$$s_{n+1}(a) \leqq s_{n+1}(b) \tag{5,28}$$

a mimo to máme rozhodnout, kdy v (5,28) platí znaménko rovnosti. Protože při daném $n$ je věta 5,8 správná, plyne z (5,16), že

$$s_n(a) \leqq s_n(b) \, ; \tag{5,29}$$

při tom platí znaménko rovnosti právě tehdy, jestliže platí na všech $n$ místech v (5,16). Nyní z (5,26), (5,27) a (5,29) soudíme podle věty 5,5 a podle poznámky 5,11 jednak, že nerovnost (5,28) je jistě správná a jednak ještě, že v (5,28) platí znaménko rovnosti právě tehdy, jestliže platí zároveň v (5,26) i v (5,29), t. j. právě tehdy, jestliže platí zároveň na všech $n$ místech v (5,16) a vedle toho také ještě v (5,26).

Důkaz věty 5,9 *indukcí vzhledem k n* je týž jako důkaz věty 5,8 indukcí vzhledem k $n$ s tím rozdílem, že všecky součty nahradíme součiny, a v důsledku toho větu 5,5 a poznámku 5,11 nahradíme větou 5,7 a poznámkou 5,15.

## § 6. Mocniny s nezáporným celým exponentem

Podle (3,14) vede sčítání $n$ sobě rovných čísel k pojmu součinu s jedním činitelem rovným $n$. Násobení $n$ sobě rovných čísel vede k novému pojmu *mocniny*. Je-li $n$ přirozené číslo, definujeme výraz $a^n$ (prozatím za předpokladu, že $a$ je nezáporné celé číslo) rovností

$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \ldots a}_{n \text{ činitelů}} \,. \tag{6,1}$$

Výraz $a^n$ se jmenuje *mocnina*; číslo $a$ je její *základ*, číslo $n$ je její *exponent* neboli *mocnitel*. Je účelné připojit hned na tomto místě ještě definici

$$a^0 = 1 \tag{6,2}$$

(prozatím opět pro nezáporné celé $a$). Exponentem mocniny $a^n$ je tedy (prozatím) nezáporné celé číslo $n$.

**Věta 6,1.** $a^1 = a$.

Důkaz. Naše věta plyne z definice (6,1) podle věty 3,2.

**Věta 6,2.** *Pro každé nezáporné celé n je* $1^n = 1$.

Důkaz. Pro $n = 0$ to plyne ze (6,2), pro $n > 0$ ze (6,1) a z věty 3,8.

**Věta 6,3.** *Pro každé přirozené číslo n je* $0^n = 0$; *naproti tomu je* $0^0 = 1$.

Důkaz. Vzorec $0^0 = 1$ je zvláštním případem vzorce (6,2). Pro $n > 0$ plyne naše věta ze (6,1) a z věty 3,9.

Poznámka 6,1. Je zajímavé, že definice $0^0 = 1$ se objevuje, pokud je autorovi známo, po prvé až r. 1921 (v knize O. Perron: Irrationalzahlen), ačkoli před tím po staletí matematikové klidně používali vzorce (6,2), nestarajíce se o to, zda snad není $a = 0$.

**Věta 6,4.** *Jsou-li m, n nezáporná celá čísla, je*

$$a^{m+n} = a^m \,.\, a^n \,. \tag{6,3}$$

Důkaz. Je-li $m = 0$ nebo $n = 0$, je vzorec (6,3) důsledkem vzorce (6,2) a vět 2,3; 2,6. Nechť tedy $m > 0$, $n > 0$, takže podle věty 5,5 také $m + n > 0$ (neboť $0 + 0 = 0$ podle věty 2,3). Potom je podle definice (6,1)

$$a^{m+n} = \underbrace{a \,.\, a \ldots a}_{(m + n) \text{ činitelů}} \,. \tag{6,4}$$

V součinu na pravé straně rozdělíme činitele na dvě skupiny tak, že do první skupiny přijde prvních $m$ činitelů, do druhé ostatních $n$. Vzniknou dva částečné součiny, z nichž podle definice (6,1) je první roven $a^m$, druhý $a^n$; součin obou je podle věty 3,6 roven původnímu součinu (6,4), což dává vzorec (6,3).

**Věta 6,5.** *Jsou-li $m$, $n$ nezáporná celá čísla, je*

$$(a^m)^n = a^{mn} \,. \tag{6,5}$$

Důkaz. Je-li $m = 0$ nebo $n = 0$, je vzorec (6,5) důsledkem vzorce (6,2) a vět 2,7 a 6,1. Budiž tedy $m > 0$ a $n > 0$, takže podle věty 5,7 je také $mn > 0$ (neboť $0 \,.\, 0 = 0$ podle věty 2,7). Potom je podle definice (6,1)

$$a^{mn} = \underbrace{a \,.\, a \ldots a}_{mn \text{ činitelů}} \,. \tag{6,6}$$

Všimneme-li si, že podle (3,14) (a podle věty 2,4) je

$$mn = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ sčítanců}} \,,$$

vidíme, že činitele napravo v (6,6) můžeme rozdělit na $n$ skupin po $m$ činitelích. Vznikne $n$ částečných součinů rovných

$$\underbrace{a \,.\, a \ldots a}_{m \text{ činitelů}} = a^m \,;$$

původní součin (6,6) je tedy podle věty 3,7 roven součinu všech $n$ částečných součinů, t. j. je roven číslu

$$\underbrace{a^m \,.\, a^m \ldots a^m}_{n \text{ činitelů}} = (a^m)^n \,.$$

**Věta 6,6.** *Je-li $n$ nezáporné celé číslo, je*

$$a^n \,.\, b^n = (ab)^n \,. \tag{6,7}$$

Důkaz. Je-li $n = 0$, plyne (6,7) z definice (6,2) a z věty 2,6. Budiž tedy $n > 0$. Vyjdeme od součinu

$$a \,.\, b \,.\, a \,.\, b \ldots \tag{6,8}$$

($n$ činitelů rovných $a$, $n$ činitelů rovných $b$).

Činitele můžeme rozdělit na $n$ skupin tak, že každá skupina obsahuje jednoho činitele $a$ a jednoho činitele $b$; podle věty 3,7 je tedy součin (6,8) roven číslu

$$\underbrace{(ab) \,.\, (ab) \ldots (ab)}_{n \text{ činitelů}} = (ab)^n \,.$$

Na druhé straně můžeme podle věty 3,6 uvést součin (6,8) na tvar

$$\underbrace{a \,.\, a \ldots a}_{n \text{ činitelů}} \,.\, \underbrace{b \,.\, b \ldots b}_{n \text{ činitelů}} \,. \tag{6,9}$$

Činitele v (6,9) můžeme rozdělit na dvě skupiny po $n$ činitelích. Podle věty 3,7 je součin (6,9), a tedy i součin (6,8), roven $a^n \,.\, b^n$. Porovnání obou výsledků dává vzorec (6,7).

Mocninu $a^n$ můžeme také definovat rekurentně, vycházejíce od vzorce (6,2) a od rekurentního pravidla

$$a^{n+1} = a^n \,.\, a \,. \tag{6,10}$$

Rekurentní definice je v souladu s původní definicí mocniny, neboť jestliže napravo v (6,10) podle věty 6,1 místo $a$ dáme $a^1$, je (6,10) zvláštním případem vzorce (6,3).

Jestliže se rozhodneme pro rekurentní definici mocniny, vyžadují věty 6,1 až 6,6 nových důkazů, které provedeme indukcí vzhledem k $n$.

Rekurentní pravidlo (6,10) zní pro $n = 0$ podle (6,2): $a^1 = 1 \,.\, a$, z čehož plyne věta 6,1 podle věty 2,6.

Podle (6,2) je $1^0 = 1$ a rekurentní pravidlo (6,10) dává podle věty 2,6: $1^{n+1} = 1^n$, takže indukcí dostaneme větu 6,2.

Podle (6,2) je $0^{n+1} = 0^n \,.\, 0$, takže věta 6,3 je důsledkem definice $0^0 = 1$ a věty 2,7.

Vzorec (6,3) zní pro $n = 0$ podle vzorce (6,2) $a^m = a^m \,.\, 1$, což je správné podle věty 2,6. Platí-li (6,3) při určitém $n$ (pro všechna $m$), je podle (6,3) a (6,10) také

$$a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} = a^{m+n} \,.\, a = (a^m \,.\, a^n) \,.\, a = a^m \,.\, (a^n \,.\, a) = a^m \,.\, a^{n+1};$$

tím je obecná platnost věty 6,4 dokázána.

Vzorec (6,5) je pro $n = 0$ správný podle (6,2) a podle věty 2,7. Platí-li (6,5) pro určité $n$ (pro všecka $m$), je podle (6,10) a podle věty 6,4

$$(a^m)^{n+1} = (a^m)^n \,.\, a^m = a^{mn} \,.\, a^m = a^{mn+m} \,;$$

avšak podle vět 2,6 a 2,9 je $mn + m = m \,.\, n + m \,.\, 1 = m(n + 1)$, takže dostáváme

$$(a^m)^{n+1} = a^{m(n+1)} \,;$$

tím je obecná platnost věty 6,5 dokázána.

Protože $1 . 1 = 1$, platí podle (6,2) vzorec (6,7) pro $n = 0$. Platí-li (6,7) při určitém $n$, je podle (6,10) a podle vět 2,4 a 2,5.

$$a^{n+1} . b^{n+1} = (a^n . a) . (b^n . b) = (a^n . b^n) . (ab) ,$$

takže podle (6,7) a (6,10) dostáváme

$$a^{n+1} . b^{n+1} = (ab)^{n+1} ;$$

tím je obecná platnost věty 6,6 dokázána.

**Věta 6,7.** *Je-li $n$ nezáporné celé číslo a je-li $a > 0$, je také $a^n > 0$.*

Důkaz. Pro $n = 0$ to plyne ze (6,2), pro $n > 0$ ze (6,1) a z věty 3,10. Můžeme také dokazovat indukcí podle (6,10) a podle věty 2,8.

**Věta 6,8.** *Je-li $n$ přirozené číslo a je-li $0 < a < b$, je také*

$$0 < a^n < b^n .$$

Důkaz. Podle věty 6,7 je $0 < a^n$ a zbývá dokázat nerovnost $a^n < b^n$. Ta plyne z definice (6,1) podle věty 5,9. Můžeme ji také dokazovat indukcí: pro $n = 1$ plyne z věty 6,1, a platí-li pro určité $n$, plyne z vět 5,7 a 6,7, že platí i pro $n + 1$.

**Věta 6,9.** *Budiž $n$ přirozené číslo. Je-li $a > 1$, je také $a^n > 1$.*

Důkaz. Naše věta je důsledkem vět 6,2 a 6,8.

## § 7. Odčítání. Sčítání libovolných celých čísel

Jsou-li $a$, $b$ daná nezáporná celá čísla, můžeme se ptát, zdali existuje takové nezáporné celé číslo $x$, že

$$a + x = b \quad \text{neboli} \quad x + a = b . \tag{7,1}$$

Poznámka 7,1. Taková rovnost, ve které se vyskytuje písmeno (v našem případě $x$), které znamená *neznámé číslo*, jmenuje se *rovnice*, a číslo $x$, které rovnost splňuje, se jmenuje *kořen* nebo *řešení* rovnice. (Slovem řešení se však často míní nalezení kořene nebo kořenů). Neznámé číslo v rovnici matematikové obyčejně nazývají slovem *neznámá*; přídavné jméno neznámá (v ženském rodě) má tedy v matematice význam podstatného jména. Ženský rod vznikl ze rčení neznámá veličina.

**Věta 7,1.** *Jsou-li $a$, $b$ nezáporná celá čísla, nemá rovnice* (7,1) *v případě $a > b$ žádný nezáporný celý kořen a v případě $a \leq b$ má právě jeden nezáporný celý kořen.*

Důkaz. Jsou-li $x$, $y$ dvě různá nezáporná celá čísla, je jedno z nich menší než druhé. Je-li však $x < y$, plyne ze zákona monotonie sčítání (z věty 5,4 a poznámky 5,8), že je $a + x < a + y$. Tedy rovnice (7,1) jistě nemá více než jeden nezáporný celý kořen. Ježto $0 \leqq x$, je $a + 0 \leqq a + x$ neboli $a \leqq a + x$, takže v případě $a > b$ rovnice (7,1) nemá nezáporný celý kořen. Zbývá dokázat, že v případě $a \leqq b$ takový kořen existuje. Zvolme soubor $B$ o $b$ prvcích; protože $a \leqq b$, má $B$ část $A$ složenou z $a$ prvků. Označíme-li $X$ soubor (prázdný v případě $a = b$) složený z těch prvků souboru $B$, které nenáleží do souboru $A$, jsou soubory $A$, $X$ disjunktní a jejich sjednocením je soubor $B$, takže vztah (7,1) platí, znamená-li $x$ počet prvků souboru $X$.

Ve větě 7,1 je obsažen pojem *odčítání* nezáporných čísel. Číslo $x$, pro které platí (7,1), značíme $b - a$; přitom číslo $b$ se jmenuje *menšenec*, číslo $a$ *menšitel*, číslo $b - a$ *rozdíl*. Odčítat tedy znamená určit neznámého sčítance $x$ ze známého součtu $b$ a známého sčítance $a$; zdali známý sčítanec je prvý či druhý, na tom podle komutativního zákona sčítání nezáleží.

Poznámka 7,2. Pokud nezavedeme čísla záporná, má výraz „rozdíl dvou čísel $a$, $b$" zcela určitý smysl, protože menšenec nemůže být menší než menšitel. Ale po zavedení záporných čísel dostanou číselný význam *oba rozdíly* $b - a$ i $a - b$ a výraz v uvozovkách přestává mít určitý smysl; proto ho nebudeme užívat.

**Věta 7,2.** $a - a = 0$; $a - 0 = a$.

To plyne z definice odčítání podle věty 2,3.

O obecném pojmu celého čísla jsme učinili stručnou zmínku už v § 1, ale potom jsme se dosud stále omezovali na *nezáporná* celá čísla. Nyní je na čase si všimnout i záporných celých čísel.

Ke každému kladnému celému číslu $a$ patří záporné celé číslo $- a$, které nazveme *opačným* k číslu $a$. Jestliže záporné celé číslo $b$ je opačným ke kladnému celému číslu $a$, takže $b = - a$, pravíme také, že číslo $a$ je *opačné* k číslu $b$ a píšeme také $a = - b$. Mimo to pravíme, že k číslu 0 *opačným* je číslo 0 a položíme $- 0 = 0$. Tedy ke každému celému číslu $c$ máme určité opačné celé číslo $- c$, k němuž opačným je původní číslo $c$, neboli vzorcem: $- (- c) = c$. Pouze pro $c = 0$ máme $- c = c$; jinak je $- c \neq c$ a z čísel $c$, $- c$ je jedno kladné a druhé záporné.

Poznámka 7,3. Vedle symbolu $- c$, který znamená číslo opačné k číslu $c$, užívá se příležitostně také symbolu $+ c$, který znamená totéž jako $c$, takže je vlastně zbytečný, někdy však je pohodlný. Mnohdy se píše $\pm c$ ve významu: buďto $c$, nebo $- c$. Značku $+$ čteme *plus*, značku $-$ čteme *minus*.

Každému celému číslu $c$ přiřazujeme určité nezáporné celé číslo, které nazveme *absolutní velikostí* čísla $c$ a které značíme $|c|$. Absolutní velikostí nezáporného celého čísla $c$ je číslo $c$ samo; absolutní velikostí záporného celého čísla $c$ je kladné celé číslo k němu opačné. Tedy

$$|0| = 0 ; \quad \text{pro } c \neq 0 \text{ je } |c| > 0 ; \tag{7,2}$$

$$|c| = c \quad \text{pro nezáporné } c ; \tag{7,3}$$

$$|c| = -c \quad \text{pro záporné } c . \tag{7,4}$$

Poznámka 7,4. Obvyklý je u nás výraz absolutní *hodnota*. Protože však slovo hodnota má v matematice a v příbuzných vědách řadu jiných významů, říkám v této knize (jako už dříve při různých příležitostech) raději absolutní *velikost*.

Nyní můžeme rozšířit pojem rozdílu $b - a$ tak, že bude mít určitý číselný smysl, jsou-li $a$, $b$ libovolná *nezáporná* celá čísla. Jsou tři možnosti. Jestliže *za prvé* $a = b$, potom podle věty 7,2 je $b - a = 0$. Jestliže *za druhé* $a < b$, je rozdíl $b - a$ definován a je-li $b - a = x$, je $a + x = b$, tedy $a + x \neq a$, takže podle věty 2,3 je $x \neq 0$, t. j. v případě $a < b$ je $b - a$ kladné celé číslo. Jestliže *za třetí* $a > b$, není rozdíl $b - a$ dosud definován, zato je definován rozdíl $a - b$, který je kladným celým číslem. Za hodnotu rozdílu $b - a$ v tomto případě prohlásíme záporné celé číslo $-(a - b)$ opačné k číslu $b - a$.

Poznámka 7,5. Náš pojem rozdílu $b - a$ ($a$, $b$ nezáporná celá čísla) úzce souvisí s pojmem přírůstku počtu prvků souboru, o kterém jsme mluvili už v § 1 (str. 13). Čtenář totiž snadno sám uváží, že platí toto: Jestliže soubor $A$, který měl $a$ prvků, změníme na soubor $B$ o $b$ prvcích tak, že jeden z obou souborů je částí druhého, při čemž není vyloučen ani případ, že soubory $A$, $B$ prostě splynou, potom ve všech případech přechod od souboru $A$ k souboru $B$ znamená přírůstek $b - a$ prvků.

Poznámka 7,6. Z naší definice rozdílu plyne, že $0 - a = -a$ pro každé nezáporné celé $a$.

Poznámka 7,7. Z naší definice rozdílu plyne pro libovolná nezáporná celá čísla $a$, $b$, že čísla $b - a$, $a - b$ jsou navzájem opačná.

**Věta 7,3.** *Jsou-li $a$, $b$, $k$ nezáporná celá čísla, je*

$$(b + k) - (a + k) = b - a .$$

Důkaz. Podle poznámky 7,7 se můžeme omezit na případ $a \leq b$; potom podle zákona monotonie sčítání je také $a + k \leq b + k$. Je-li nyní $b - a = x$, je $a + x = b$, takže podle komutativního a asociativního zákona sčítání je $(a + k) + x = (a + x) + k = b + k$, tedy $x = (b + k) - (a + k)$ .

Součet $c_1 + c_2$ s libovolnými dvěma celými sčítanci definujeme nyní takto: Nejprve budiž

$$c_1 + 0 = c_1, \quad 0 + c_2 = c_2 .$$

Je-li $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, jsou možné čtyři případy; ve všech čtyřech případech jsou $|c_1|$, $|c_2|$ kladná celá čísla. Jsou-li obě čísla $c_1$, $c_2$ kladná, je součet $c_1 + c_2$ už definován. Jsou-li obě čísla $c_1$, $c_2$ záporná, položíme

$$c_1 + c_2 = -(|c_1| + |c_2|) .$$

Je-li $c_1$ kladné, $c_2$ záporné, položíme

$$c_1 + c_2 = c_1 - |c_2| .$$

Je-li $c_1$ záporné, $c_2$ kladné, položíme

$$c_1 + c_2 = c_2 - |c_1| .$$

Poznámka 7,8. Předcházející definice je čtenáři známá ze školy. Její praktický smysl se dá popsat takto. Buďtež $C_0$, $C_1$, $C_2$ takové tři soubory, že z obou souborů $C_0$, $C_1$ jeden je částí druhého a že totéž platí o obou souborech $C_1$, $C_2$ i o obou souborech $C_0$, $C_2$. Potom jestliže přechod od $C_0$ k $C_1$ znamená přírůstek $c_1$ prvků a jestliže přechod od $C_1$ k $C_2$ znamená přírůstek $c_2$ prvků, znamená přechod od $C_0$ k $C_2$ přírůstek $c_1 + c_2$ prvků. Čtenář snadno sám zjistí rozborem všech možných případů, že je to vždy správné.

**Věta 7,4.** *Součet dvou opačných čísel je roven nule.*

Tato věta je v oboru celých čísel přímým důsledkem definice součtu $c_1 + c_2$.

Obecněji pro každé přirozené číslo $n$ definujeme součet

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n \tag{7,5}$$

s libovolnými celými sčítanci takto: Budiž $p$ součet všech *kladných* sčítanců: není-li kladných sčítanců, budiž $p = 0$. Budiž $q$ součet absolutních velikostí všech *záporných* sčítanců; není-li záporných sčítanců, budiž $q = 0$. Potom součet (7,5) je roven rozdílu $p - q$.

Poznámka 7,9. V případě, že všichni sčítanci jsou *nezáporná* celá čísla, splývá hodnota součtu (7,5) podle nové definice s hodnotou téhož součtu podle původní definice. Hodnota součtu podle původní definice je totiž v našem případě rovna $p$ podle věty 3,5; mimo to je $q = 0$, tedy $p - q = p - 0 = p$ podle věty 7,2.

Poznámka 7,10. Snadno se zjistí, že obecná definice součtu (7,5) je v souladu s definicí součtu $c_1 + c_2$ podanou na začátku této stránky. (Viz větu 7,2 a poznámku 7,6.)

**Věta 7,5.** *Jest*

$$-c_1 - c_2 - \ldots - c_n = -(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\,,$$

*kde levá strana znamená součet n čísel* $-c_1, -c_2, \ldots, -c_n$.

Důkaz. Mají-li $p$, $q$ týž význam jako v naší definici součtu (7,5), potom přechod k opačným sčítancům znamená výměnu čísel $p$, $q$ a věta plyne z poznámky 7,7.

**Věta 7,6.** *Jsou-li a, b, c nezáporná celá čísla, je*

$$c = b - a \tag{7,6}$$

*právě tehdy, je-li* $b = a + c$. *Jsou-li a, b nezáporná celá čísla a je-li c záporné celé číslo, platí* (7,6) *právě tehdy, je-li* $a = b + |c|$.

Důkaz. Případ nezáporného $c$ je jasný podle definice rozdílu. Případ záporného $c$ se převede na případ kladného $c$ podle poznámky 7,7.

**Věta 7,7.** *Jestliže*

$$c_r = b_r - a_r \quad \textit{pro} \quad r = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{7,7}$$

*při čemž* $a_r$, $b_r$ *jsou nezáporná celá čísla, pak součet* (7,5) *je roven rozdílu*

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,. \tag{7,8}$$

Důkaz. Nechť index $r$ probíhá čísla $1, 2, \ldots, n$.

Je-li $c_r \geqq 0$, položme $a'_r = 0$, $b'_r = c_r$, $k_r = a_r$, takže $a'_r$, $b'_r$, $k_r$ jsou nezáporná celá čísla a podle vět 2,3 a 7,6 je

$$a_r = a'_r + k_r\,, \quad b_r = b'_r + k_r\,. \tag{7,9}$$

Je-li $c_r < 0$, položme $a'_r = |c_r|$, $b'_r = 0$, $k_r = b_r$, takže opět $a'_r$, $b'_r$, $k_r$ jsou nezáporná celá čísla a podle vět 2,3 a 7,6 zase platí (7,9). Mají-li písmena $p$, $q$ ten význam, který jsme jim dali v definici součtu (7,5), je podle věty 3,5

$$\begin{aligned} a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n &= q\,, \\ b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_n &= p\,. \end{aligned} \tag{7,10}$$

Podle vět 3,3 a 3,4 plyne ze (7,9), že

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n) + (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\,,$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = (b'_1 + b'_2 + \ldots + b'_n) + (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\,,$$

takže ze (7,10) plyne podle věty 7,3, že rozdíl (7,8) je roven rozdílu $p - q$ neboli součtu (7,5).

**Věta 7,8.** *Věty* 2,1; 2,2; 2,3; 3,1; 3,3; 3,4; 3,5; 3,12 *a* 3,16 *jsou správné pro libovolná čísla celá.*

Důkaz. Ze správnosti vět 3,1; 3,3; 3,4 a 3,5 pro nezáporná celá čísla plyne jejich správnost pro libovolná celá čísla podle věty 7,7. Věty 2,1; 2,2; 2,3 a 3,12 jsou zvláštní případy vět 3,3; 3,4 a 3,5. Věta 3,16 je důsledkem vět 3,3 a 3,4.

Poznámka 7,11. Z dokázaného je jasné, že i v oboru celých čísel je možné postupovat tak, že se přímo definuje pouze součet dvou sčítanců a potom se obecný součet (4,1) definuje rekurentně pomocí (4,3).

**Věta 7,9.** *Jsou-li $a$, $b$ celá čísla, má rovnice*

$$a + x = b \tag{7,11}$$

*právě jeden celý kořen, a to* $x = -a + b$.

Důkaz. Podle vět 2,2; 2,3 a 7,4 je

$$a + (-a + b) = [a + (-a)] + b = 0 + b = b\,.$$

Obráceně plyne ze (7,11) podle týchž vět

$$x = 0 + x = (-a + a) + x = -a + (a + x) = -a + b\,.$$

V důsledku věty 7,9 můžeme nyní definici rozdílu $b - a$ rozšířit na případ dvou libovolných celých čísel $a$, $b$, rozumějíce stále pod rozdílem $b - a$ kořen $x$ rovnice (7,1). Jestliže čísla $a$, $b$ jsou nezáporná, je souhlas nové definice rozdílu s původní definicí přímo patrný v tom případě, že $a \leqq b$; že tomu tak je i v případě $a > b$, kdy podle původní definice rozdíl $b - a$ je opačným číslem k rozdílu $a - b$, plyne z vět 2,1 a 7,5, neboť podle těchto vět k součtu $-a + b$ opačným číslem je součet $-b + a$.

Poznámka 7,12. Podle věty 7,9 v oboru všech celých čísel odčítání ve smyslu určení neznámého sčítance ze známého součtu a známého sčítance je výkon vždy proveditelný, není to však už *základní* výkon, protože je převeden na určení opačného čísla a na sčítání.

Poznámka 7,13. Výraz $b - a$ chápeme nyní jako součet se sčítanci $b$, $-a$. Podobného označení užíváme i u součtu s několika sčítanci; na př.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5$$

znamená součet se sčítanci $a_1$, $-a_2$, $a_3$, $-a_4$, $-a_5$. Takového označení jsme ostatně už použili ve větě 7,5.

Poznámka 7,14. Z vět 2,1 a 7,5 plyne, že

$$a - b = -(b - a) .$$

(V poznámce 7,7 jsme měli týž výsledek pouze pro *nezáporná* $a$, $b$.)

## § 8. Násobení libovolných celých čísel

Přejděme k násobení libovolných celých čísel a přistupme hned k obecnému případu $n$ činitelů ($n$ libovolné přirozené číslo). Jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$ celá čísla, rozumíme jejich součinem číslo

$$a_1 a_2 \ldots a_n = \pm (|a_1| \,.\, |a_2| \ldots |a_n|) \tag{8,1}$$

se znaménkem plus v případě, že počet $r$ záporných činitelů nalevo je sudý, a se znaménkem minus v případě, že počet $r$ je lichý. Protože nula je číslo sudé, je patrné, že v případě nezáporných činitelů nová definice je v souladu se starou.

**Věta 8,1.** $|a_1 a_2 \ldots a_n| = |a_1| \,.\, |a_2| \ldots |a_n|$.
Je to zřejmé z definice.

**Věta 8,2.** *Součin dvou čísel je roven nule, je-li aspoň jeden činitel roven nule; je kladný, jsou-li oba činitelé kladní nebo oba záporní; je záporný, je-li jeden činitel kladný a druhý záporný.*

Důkaz. Protože $-0 = 0$, je první část důsledek věty 2,7; ostatek je důsledek věty 2,8, neboť 0 a 2 jsou čísla sudá, 1 je číslo liché.

**Věta 8,3.** *Věty* 2,4; 2,5; 2,6; 2,7; 2,8; 3,2; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9; 3,10; 3,13 *a* 3,17 *jsou správné pro libovolná čísla celá.*

Důkaz. Že v oboru všech celých čísel zůstanou v platnosti věty 3,2; 3,6; 3,8; 3,9 a 3,10, je přímo patrné z definice (8,1). Věty 2,4; 2,6; 2,7; 2,8 a 3,13 jsou zvláštními případy vět 3,6; 3,8; 3,9 a 3,10. Že zůstane správná věta 3,7, plyne z věty 3,9, jestliže aspoň jeden činitel je roven nule; je-li každý činitel různý od nuly, dojdeme k témuž výsledku na základě věty 4,3. Zůstane tudíž v platnosti i věta 2,5, která je zvláštním případem věty 3,7, jakož i věta 3,17, která je důsledkem vět 3,6 a 3,7.

Poznámka 8,1. Nyní je jasné, že i v oboru celých čísel je možné postupovat tak, že se přímo definuje pouze součin dvou činitelů a potom se obecný součin (4,2) definuje rekurentně pomocí (4,4).

Poznámka 8,2. Rovněž je jasné, že vzorec (3,14) platí pro každé celé $b$ ($n$ je stále přirozené číslo).

**Věta 8,4.** *Jestliže v součinu n celých čísel nahradíme jednoho činitele číslem k němu opačným, je nový součin opačným číslem k původnímu součinu.*

Důkaz. Je-li některý činitel roven nule, je věta správná podle věty 3,9, neboť $-0=0$. Jsou-li však všichni činitelé různí od nuly a jsou-li $r$, $r'$ počty záporných činitelů původního a nového součinu, je buďto $r' = r + 1$, nebo $r = r' + 1$, takže z čísel $r$, $r'$ je jedno sudé a druhé liché, z čehož plyne správnost věty.

Poznámka 8,3. Protože číslo 1 je neutrální při násobení (viz větu 2,6), plyne z věty 8,4, že

$$a \,.\, (-1) = -a\,, \quad (-1) \,.\, a = -a\,.$$

**Věta 8,5.** *Jsou-li $a$, $b$, $f$ nezáporná celá čísla, je*

$$(b-a)\,f = bf - af\,. \tag{8,2}$$

Důkaz. Nahradíme-li $f$ číslem k němu opačným, plyne z vět 7,5 a 8,4, že se levá i pravá strana změní v čísla opačná. Stačí tedy dokázat (8,2) za předpokladu, že $f$ je nezáporné. Vyměníme-li $a$, $b$, změní se opět levá i pravá strana v (8,2) v čísla opačná. Můžeme tedy předpokládat, že $a \leq b$, takže $b - a = x$ je nezáporné celé číslo. Podle poznámky 5,13 je také $af \leq bf$. Nyní $a + x = b$, tedy též $(a + x)\,f = bf$, takže podle věty 2,9 je $af + xf = bf$; tedy $(b - a)\,f = xf = bf - af$, a to je právě vzorec (8,2).

Buďtež nyní $c_1, c_2, \ldots, c_n$, $f$ libovolná celá čísla; dokážeme, že je

$$(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\,f = c_1 f + c_2 f + \ldots + c_n f\,. \tag{8,3}$$

Z vět 7,5 a 8,4 je patrné, že stačí dokázat (8,2) za předpokladu, že číslo $f$ je nezáporné. Nechť index $r$ probíhá čísla $1, 2, \ldots, n$. Pro každé $r$ zvolme nezáporná celá čísla $a_r$, $b_r$ tak, že platí (7,7). Potom je podle věty 8,5 také

$$c_r f = b_r f - a_r f\,,$$

při čemž $a_r f$, $b_r f$ jsou nezáporná celá čísla. Z věty 7,7 nyní plyne jednak

$$\begin{aligned} &c_1 f + c_2 f + \ldots + c_n f = \\ &= (b_1 f + b_2 f + \ldots + b_n f) - (a_1 f + a_2 f + \ldots + a_n f)\,, \end{aligned} \tag{8,4}$$

jednak

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,,$$

tedy podle věty 8,5 také

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\, f &= \\ = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\, f &- (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, f\,. \end{aligned} \tag{8,5}$$

Protože pro nezáporná celá čísla platí věta 3,14, je

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\, f &= a_1 f + a_2 f + \ldots + a_n f\,, \\ (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\, f &= b_1 f + b_2 f + \ldots + b_n f\,. \end{aligned} \tag{8,6}$$

Z (8,4), (8,5) a (8,6) plyne (8,3).

**Věta 8,6.** *Věty* 2,9, 3,11 *a* 3,14 *jsou správné pro libovolná celá čísla.*

Důkaz. Správnost věty 3,14 v oboru všech čísel celých jsme právě dokázali. Na správnost věty 3,11 soudíme nyní z vět 3,15 a 8,3. Věta 2,9 je zvláštním případem věty 3,11.

Všimněme si pojmu mocniny $a^n$; budeme předpokládat jako dosud, že exponent $n$ je nezáporné celé číslo. Naproti tomu základ $a$ může nyní být libovolným celým číslem. Pro $n = 0$ nechť platí definice (6,2) i v případě záporného celého $a$: pro $n > 0$ platí definice (6,1).

**Věta 8,7.** *Věty* 6,1, 6,4 *a* 6,5 *jsou správné pro libovolné celé* $a$. *Věta* 6,6 *je správná pro libovolná celá* $a$, $b$.

Důkaz. Stačí opakovat dřívější důkazy, neboť věty, o které se tyto důkazy opírají, jsou podle vět 7,8 a 8,3 správné pro libovolná čísla celá.

**Věta 8,8.** *Je-li* $n$ *nezáporné celé číslo, je* $(-1)^n = 1$ *pro sudé* $n$, $(-1)^n = -1$ *pro liché* $n$.

To plyne z definice mocniny a z věty 6,2.

**Věta 8,9.** *Je-li* $n$ *nezáporné celé číslo, je*

$$a_1 a_2 \ldots a_n = (-1)^k \cdot |a_1 a_2 \ldots a_n|\,;$$

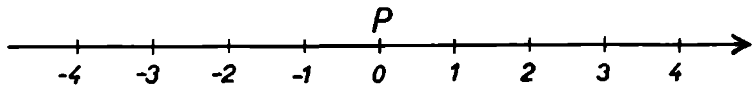
*při tom* $k$ *je počet těch čísel* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *která jsou záporná.*

To plyne z definice (8,1) podle vět 8,1 a 8,8.

Poznámka 8,4. Při sčítání libovolných celých čísel jsme se v poznámce 7,8 snažili o praktickou motivaci zvolené definice. Naproti tomu jsme se při násobení libovolných celých čísel omezili na abstraktní definici (8,1), protože obvyklé „praktické“ její motivace jsou vyumělkované. Nejuspokojivější motivací definice (8,1) je to, že po jejím zavedení početní zákony platné v oboru nezáporných celých čísel podrží svou platnost i v oboru libovolných celých čísel. Dalo by se dokázat, že tomu tak je *jedině* při definici (8,1), ale nebudeme to provádět.

## § 9. Číselná osa. Nerovnosti v oboru celých čísel

Ve vyšší matematice má velký význam geometrické *znázornění čísel* na číselné ose. Název *číselná osa* dáváme libovolně zvolené vodorovné přímce, na níž se zvolí určitý bod $P$, kterému se říká *počátek*. Mimo to je třeba zvolit určitou jednotku délky. V obr. 1




*Obr. 1.*

jednotkou délky je 1 cm. Každé kladné celé číslo $n$ znázorníme bodem, který leží na číselné ose *napravo* od počátku $P$ ve vzdálenosti $n$ jednotek délky od $P$; záporné celé číslo $-n$ znázorníme bodem, který leží v téže vzdálenosti *nalevo* od $P$; konečně číslo nula znázorníme počátkem $P$ samým. Bod, který znázorňuje číslo $n$ na číselné ose neboli *obraz čísla $n$ na číselné ose*, nazýváme obyčejně stručně „bodem $n$", t. j. značíme jej prostě tím číslem, které znázorňuje. Tuto jednoduchou dohodu můžeme učinit proto, že změníme-li číslo $n$, změní se jeho obraz na číselné ose, takže bod, který je obrazem čísla $n$, není zároveň obrazem žádného jiného čísla. Obrazy celých čísel nevyplní ovšem celou číselnou osu; postupným rozšiřováním pojmu čísla dojdeme však k tomu, že nakonec každý bod číselné osy se stane obrazem určitého čísla.

V § 5 jsme zavedli pojem přirozeného uspořádání množiny nezáporných celých čísel, který nyní rozšíříme na pojem *přirozeného uspořádání množiny všech celých čísel.* Vodítkem nám při tom bude zobrazení na číselné ose; přirozeným uspořádáním množiny všech celých čísel nazveme takové uspořádání, které odpovídá uspořádání bodů na číselné ose od levé strany k pravé, což pro *nezáporná* celá čísla je v souladu s dřívější definicí přirozeného uspořádání. Bez pomoci číselné osy můžeme říci, že v oboru libovolných celých čísel vztah $a < b$ znamená, že nastane jeden z těchto tří případů: [1] obě čísla $a$, $b$ jsou nezáporná a vztah $a < b$ platí v dřívějším smyslu; [2] číslo $a$ je záporné, číslo $b$ nezáporné a jinak čísla $a$, $b$ jsou libovolná; [3] obě čísla $a$, $b$ jsou záporná a pro jejich absolutní velikosti platí nerovnost $|a| > |b|$. Všimněme si toho, že nerovnost $a > 0$ (neboli $0 < a$) znamená, že číslo $a$ je kladné, nerovnost $a < 0$ (neboli $0 > a$) znamená, že číslo $a$ je záporné. Poznamenejme, že

$$\left.\begin{array}{lll} -a < a & \text{pro} & a > 0\,, \\ -a > a & \text{pro} & a < 0\,, \\ -a = a & \text{pro} & a = 0\,; \end{array}\right\} \tag{9,1}$$

dále poznamenejme, že

$$|-a| = |a| \tag{9,2}$$

a že

$$\left.\begin{array}{lll} a = |a| & \text{pro} & a \geqq 0\,, \\ a < |a| & \text{pro} & a < 0\,. \end{array}\right\} \tag{9,3}$$

Konečně poznamenejme, že v oboru celých čísel platí tyto dvě věty:

**Věta 9,1.** *Je-li* $a < b$, *je naopak* $-a > -b$; *je-li* $a \leqq b$, *je naopak* $-a \geqq -b$.

**Věta 9,2.** *Ke každému číslu* $a$ *lze udat přirozené číslo* $n$ *tak, že* $-n < a < n$.

Podle věty 9,2 není v množině všech celých čísel (na rozdíl od množiny nezáporných celých čísel i od množiny kladných celých čísel) žádné číslo nejmenší (a také žádné největší).

Poznámka 9,1. Jestliže ze souboru $A$ vznikne kterýkoliv z obou souborů $B$, $C$ přidáním nebo ubráním prvků (může také $B$ nebo $C$ splynout s $A$), potom podle naší definice nerovnosti přírůstek při přechodu od $A$ k $B$ je menší než přírůstek při přechodu od $A$ k $C$ právě tehdy, jestliže počet prvků souboru $B$ je menší než počet prvků souboru $C$.

Z naší definice vztahu $a < b$ přímo vyplývá, že v oboru celých čísel platí zákon trichotomie (věta 5,1). Že platí také transitivní zákon (věta 5,2), je jasné ze znázornění na číselné ose. Při důkaze věty 5,2 bez pomoci číselné osy je třeba rozeznávat několik případů. Budiž $a < b < c$; máme dokázat, že $a < c$. Je-li *za prvé* $a$ nezáporné, platí totéž o $b$, tedy o $c$, a věc je nám známá. Je-li *za druhé* $a$ záporné, $c$ nezáporné, je $a < c$ podle definice. Jestliže *za třetí* nejen $a$, nýbrž i $c$ je záporné, je zřejmě také $b$ záporné, takže podle věty 9,1 je $|a| > |b| > |c|$, tudíž $|a| > |c|$, a protože čísla $a$, $c$ jsou záporná, je $a < c$.

**Věta 9,3.** *Jest* $-b < a < b$ *právě tehdy, jestliže* $|a| < b$.

Důkaz. Je-li předně $|a| < b$, je $a < b$ podle (9,3), takže podle (9,2) je též $-a < b$; z toho podle věty 9,1 plyne $-b < a$; vcelku je tedy $-b < a < b$. Obráceně, je-li $-b < a < b$, je podle věty 9,1 také $-b < -a < b$, a protože číslo $|a|$ je rovné jednomu z čísel $a$, $-a$, je $|a| < b$.

**Věta 9,4.** *Vztah*

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ a = b \\ a > b \end{array}\right\} \textit{platí právě tehdy, jestliže číslo } b - a \textit{ je } \left\{\begin{array}{l} \textit{kladné,} \\ \textit{rovné nule,} \\ \textit{záporné}\,. \end{array}\right. \qquad (9,4)$$

Důkaz. Jsou-li čísla $a$, $b$ dána, nastane právě jedna ze tří možností nalevo v (9,4) a také právě jedna ze tří možností napravo v (9,4). Z toho plyne snadno, že místo (9,4) stačí dokázat pouze:

$$\text{jestliže} \left\{\begin{array}{l} a < b \\ a = b \\ a > b \end{array}\right\}, \quad \text{je číslo } b - a \left\{\begin{array}{l} \text{kladné,} \\ \text{rovné nule,} \\ \text{záporné.} \end{array}\right. \qquad (9,5)$$

V případě $a = b$ plyne (9,5) z věty 7,2. Dále máme dokázat:

$$\text{jestliže } a < b, \text{ je číslo } b - a \text{ kladné}\,. \qquad (9,6)$$

Dokážeme-li to, budeme hotovi. Neboť potom v případě $a > b$ plyne z (9,6) po záměně písmen $a$, $b$, že $a - b > 0$, takže $b - a < 0$ podle poznámky 7,14. Budiž tedy $a < b$. Je pět možností. Jestliže *za prvé* $a = 0$, je $b$ kladné, $b - a = b$, tedy $b - a$ je kladné. Jestliže *za druhé* $b = 0$, je $a$ záporné, takže $b - a = 0 - a = -a$ je kladné. Jestliže *za třetí* obě čísla $a$, $b$ jsou kladná, tu protože $a < b$, je $b - a > 0$. Jestliže *za čtvrté* obě čísla $a = -p$, $b = -q$ jsou záporná, tu protože $a < b$, je $p > q$, a tedy $p - q > 0$; avšak $b - a = -q + p = p - q$, tedy $b - a > 0$. Jestliže *za páté* jedno z čísel $a$, $b$ je kladné a druhé záporné, tu protože $a < b$, je $a = -p < 0$, $b > 0$, a ježto $p > 0$, $b > 0$, je $b + p > 0$ neboli $b - a > 0$.

**Věta 9,5.** *Věta* 5,4 *(i s poznámkou* 5,9*), věta* 5,5 *(i s poznámkou* 5,11*) a věta* 5,8 *platí pro libovolná celá čísla.*

Důkaz. Budiž

$$a_1 \leqq b_1\,, \quad a_2 \leqq b_2\,, \ldots, a_n \leqq b_n\,. \qquad (9,7)$$

Nechť index $r$ probíhá čísla $1, 2, \ldots, n$. Položme $b_r - a_r = x_r$, takže $b_r = a_r + x_r$, a tedy též

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

neboli

$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n\,.$$

Podle věty 9,4 je však $x_r \geqq 0$, při čemž rovnost nastane právě tehdy, jestliže $a_r = b_r$. Podle věty 5,8, jejíž správnost v oboru *nezáporných* celých čísel je nám známa, je $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqq 0$ neboli podle věty 9,4

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq b_1 + b_2 + \ldots + b_n;$$

při tom rovnost nastane právě tehdy, nastane-li na všech $n$ místech v (9,7). Tím je dokázána věta 5,8, tudíž i její zvláštní případy: věta 5,4 i s poznámkou 5,9 a věta 5,5 i s poznámkou 5,11.

Poznámka 9,2. Jsou-li $a$, $b$, $c$ libovolná čísla, pak nerovnost $a < b$ znamená totéž jako nerovnost $a + c < b + c$. Neboť z první nerovnosti vznikne druhá, jestliže na obou stranách přičteme $c$; z druhé nerovnosti vznikne první, jestliže na obou stranách přičteme $-c$. Podobně nerovnost $a \leqq b$ znamená totéž jako nerovnost $a + c \leqq b + c$. Zvláštním případem poznámky 9,2 je věta 9,6.

**Věta 9,6.** *Jest*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|. \tag{9,8}$$

*Při tom znaménko rovnosti platí právě tehdy, jestliže žádné z čísel* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *není záporné.*

Důkaz. Naše věta plyne z (9,3) podle věty 5,8.

**Věta 9,7.** $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$. *Při tom znaménko rovnosti platí právě tehdy, jestliže buďto žádné z čísel* $a_1$, $a_2, \ldots, a_n$ *není záporné, nebo žádné z nich není kladné.*

Důkaz. Vedle nerovnosti (9,8) platí podle (9,2) a podle věty 7,5 také nerovnost

$$-(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leqq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \tag{9,9}$$

při čemž v (9,9) platí znaménko rovnosti právě tehdy, jestliže žádné z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ není kladné. Nyní stačí si všimnout, že $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n|$ se rovná buďto levé straně v (9,8), nebo levé straně v (9,9).

**Věta 9,8.** *Jsou-li* $m$, $n$ *celá čísla, pak:* [1] *nerovnost* $m > n$ *znamená totéž jako nerovnost* $m \geqq n + 1$; [2] *nerovnost* $m < n$ *znamená totéž jako nerovnost* $m \leqq n - 1$.

Důkaz. Část [1] je totožná s větou 5,3, prozatím ovšem dokázanou pouze pro *nezáporná* celá $m$, $n$. Obecný důkaz obou částí probíhá takto. V oboru celých čísel nerovnost $m - n > 0$ znamená totéž jako $m - n \geqq 1$. Avšak podle poznámky 9,2 předně nerovnost $m - n > 0$ znamená totéž jako $(m - n) + n > 0 + n$ neboli $m > n$, za druhé pak nerovnost $m - n \geqq 1$ znamená jednak totéž jako $m \geqq n + 1$, jednak totéž jako $m - 1 \geqq (n + 1) - 1$ neboli

$m - 1 \geqq n$. Tím jsou obě části dokázány, neboť nezáleží na tom, že jsme část [2] dostali s vyměněnými písmeny $m$, $n$.

**Věta 9,9.** *Věta* 5,6 *je správná pro libovolná čísla celá.*

Důkaz. Je-li $a < b$, je $b - a > 0$ podle věty 9,4, a ježto též $c > 0$, je podle věty 8,2 také $(b - a)\,c > 0$ neboli $bc - ac > 0$, t. j. $ac < bc$ .