Část třetí.

Počet differenciální pro funkce o několika proměnných.

VIII. Základní pojmy u funkcí s několika proměnnými.

175. Dvě neodvisle proměnné (dvojice proměnných). V předcházejícím jsme brali v úvahu z pravidla jednu — t. zv. neodvisle — proměnnou, již značili jsme nejčastěji x a jež hodnotou svojí prostřednictvím jisté funkce stanovila hodnotu druhé — odvisle — proměnné, označované obyčejně y; setkali jsme se tudíž již v předcházejících úvahách velmi často s dvojicí proměnných, z nichž však jedna toliko byla neodvisle proměnnou, druhá pak odvisle proměnnou.

Jest třeba však uvažovati také dvojice proměnných, jež obě jsou neodvisle proměnné. Nejjednodušší případ nám poskytuje rovinná geometrie. Tam k určení bodu roviny jest třeba dvou veličin (zvaných „souřadnice bodu"); mění li se pak bod roviny, mění se i souřadnice bodu, kteréž nám dávají tudíž příklad dvojice proměnných, a to neodvisle proměnných, může-li bod postupně zaujímati polohu bodů položených kdekoliv na celé rovině dané. Lze ku př. polohu bodu určovati, bereme-li za základ dvě pravoúhlé osy X, Y známým způsobem. Pak dvojice číselná, značme ji $[x, y]$, nám stanoví bod, jehož pravoúhlé souřadnice jsou x, y; dvojice číselná $[a, b]$ nám pak značí bod, jehožto prvá souřadnice (úsečka) jest a, druhá (pořadnice) pak jest b.

Berouce tento nejjednodušší případ dvojic proměnných za východisko, říkáme obecně *dvojici proměnných* $[x, y]$ **bod**, a to **bod neodvisle proměnný**, jsou-li obě čísla x, y (v jistém rozsahu) neodvisle proměnná. Symboly $[2, 3]$, $[a, b]$ nám značí rovněž *body*, a to *určité body*; v prvém případě nabývá proměnná x, resp. y hodnoty 2, resp. 3; v druhém nabývají proměnné x, y po řadě hodnot a, b.

Symbolická rovnice

$$[x, y] = [a, b] \text{ zastupuje dvě rovnice: } x = a,\ y = b.$$

Souhrn dvojic číselných, jimž může býti rovna dvojice proměnných $[x, y]$, sluje **oborem dvojice proměnných** $[x, y]$ anebo též oborem neodvisle proměnných x, y. Uvedu některé příklady oborů takových.

1. Může-li nabývati x každé reálné hodnoty a rovněž tak y nezávisle na x, může $[x, y]$ stávati se rovnou každé dvojici číselné; obor dvojice proměných jest **celým oborem** obou proměnných; obě proměnné jsou tu úplně nezávislé. Geometricky jest dán tento obor všemi body celé roviny XY.

2. Jestliže x může nabývati všech hodnot intervalu (a_0, a_1), y pak při každém takovém x všech hodnot intervalu (b_0, b_1), sluje příslušný obor **pravoúhelníkový obor**, *vyznačovati ho budeme krátce* $(a_0, a_1; b_0, b_1)$. Geometricky jest dán obor tento všemi body pravoúhelníku P omezeného přímkami o rovnicích $x = a_0$, $x = a_1$, $y = b_0$, $y = b_1$. Body tohoto oboru, při nichž buď x jest rovno jednomu z čísel a_0, a_1 aneb y jednomu z čísel b_0, b_1, tvoří t. zv. **hranici oboru**; v geometrickém znázornění jest dána tato hranice všemi body úseček ohraničujících pravoúhelník P. I v tomto příkladě jsou proměnné x, y úplně na sobě nezávisly.

3. Budiž $a_0 < a_1$, $b_0 < b_1$; jestliže proměnné x, y jsou omezeny pouze nerovninami $a_0 < x < a_1$, $b_0 < y < b_1$, t. j. může-li x nabývati všech hodnot intervalu $(a_0 + 0, a_1 - 0)$, y pak zároveň všech hodnot v $(b_0 + 0, b_1 - 0)$, dostáváme rovněž pravoúhelníkový obor jako v příkladě předcházejícím s touž hranicí; jediný rozdíl spočívá v tom, že v příkladě předcházejícím hranice patřila k oboru, *v tomto pak příkladě hranice oboru nepatří k oboru danému.* Označovati budeme tento obor pravoúhelníkový stejně jako v předcházejícím příkladě, okolnost pak, že hranice oboru nepatří k oboru, vytkneme jenom připojenou čárkou, takže celý znak toho oboru bude $(a_0, a_1; b_0, b_1)'$. Jinak bychom mohli poněkud obšírněji vyznačiti tento obor znakem $(a_0 + 0, a_1 - 0; b_0 + 0, b_1 - 0)$. Jaký význam mají znaky ku př. $(a_0 + 0, a_1; b_0, b_1 - 0)$ a podobně, jest na snadě.

4 Jestliže dvojice proměnných $[x, y]$ jest vázána nerovninou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqq 0,$$

jest obor její — užíváme-li znázornění geom. — dán všemi body položenými jednak uvnitř ellipsy o rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, jednak na této ellipse. Body vně ellipsy k oboru jejímu nepatří; ellipsa pak sama tvoří hranici oboru daného. Proměnná x jest vždy v intervalu $(-a, a)$ a můžeme si ji zvoliti libovolně v tom intervalu; provedli-li jsme tak volbu proměnné x, jest pak y libovolná hodnota v intervalu $\left(-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)$. V tomto příkladě jest interval pro y závislý na proměnné x, jinak však jest proměnná y nezávislá na x a mluvíme i tu o dvou neodvisle proměnných. Mohli bychom ovšem při tomto postupu zaměnit pořad proměnných a začíti s volbou y a t. d.

5. Proměnné $[x, y]$ jsou vázány nerovninami

$$x^2+y^2-r^2<0,\quad x^2+y^2-2ax<0.$$

V tomto případě jest obor vymezen dvěma oblouky kruhovými; hranice oboru nepatří k oboru.

Poznámka. V předcházejících příkladech nedospěli jsme k pojmu pro hranici oboru v úvahu právě braného v důsledku nějaké definice, pojem ten v jednoduchých příkladech probíraných vyplýval pouze z názoru geometrického. Analytickou definici hranice (t. j. definici bez pomůcky názoru geom.) podáme později.

176. Odchylka (vzdálenost) dvou bodů. Buďtež $[a, b]$, $[a', b']$ dva body roviny XY (dvě dvojice číselné celého oboru). Stanovíme výrazem závislým na číslech a, b; a', b', zvaných stejně jako v analytické geometrii roviny (viz předch. odst.) **souřadnicemi obou bodů**, *odchylku (vzdálenost) obou bodů*. V geometrii jest dána odchylka výrazem

$$d^{(I)}(a, b;\ a', b') = \sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}, \tag{I}$$

který má tyto hlavní vlastnosti:

1. Mění-li se čísla $a, b, \ldots$ spojitě, mění se i $d^{(I)}(a, b;\ a', b')$ spojitě. (Definici spojitých funkcí o několika proměnných viz v odst. 190.)

2. Výraz $d^{(I)}(a, b;\ a', b')$ jest rovný nulle tenkráte a jenom tenkráte, když $a = a'$, $b = b'$; jinak jest stále kladný.

3. Jest $d^{(I)}(a, b;\ a', b') = d^{(I)}(a', b';\ a, b)$.

4. Je-li $[a'', b'']$ další bod roviny XY, jest

$$d^{(I)}(a, b;\ a', b') \leqq d^{(I)}(a, b;\ a'', b'') + d^{(I)}(a'', b'';\ a', b').$$

Poslední vlastnost vyjadřuje známou větu planimetrickou o trojúhelníku; lze ji však také dokázati přímo na základě výrazu (I) pro $d^{(I)}(a, b;\ a', b')$. Důkaz ten podám později hned pro n proměnných.

Pro účele analysy jest však užitečno vedle výrazu (I) zavésti jiné definice pro odchylku dvou bodů. Užívá se ještě dvou různých stanovení. Buď se zavádí pro míru úchylky výraz

$$d^{(II)}(a, b;\ a', b') = |\,a-a'\,| + |\,b-b'\,| \tag{II}$$

anebo častěji

$$d(a,\ b;\ a',\ b') = \text{většímu z čísel } |a - a'|,\ |b - b'|. \qquad \text{(III)}$$

Čísla ve (II) *a* (III) *stanovená mají tytéž čtyři hlavní vlastnosti svrchu pro* $d^{(I)}(a, b; a', b')$ *vytčené,* jak bezprostředně jest patrno.

V následujícím budeme zpravidla užívati pro odchylku dvou bodů výrazu ve (III), to jest výrazu $d(a, b; a', b')$.

Poznámka 1. Definice odchylky zde podané jsou dosti libovolné a mohli bychom ještě nekonečné množství jiných výrazů za základ pro definici odchylky uvésti; při tom bychom jenom mohli požadovati, aby výrazy ty hověly čtyrem hlavním vlastnostem svrchu vyjmenovaným. Že jsme se omezili toliko na tři různé výrazy, jimiž odchylku dvou bodů chceme měřit, má svou příčinu v tom, že tyto tři výrazy jsou co nejjednodušší a při vyšetřováních svých s nimi plně vystačíme.

Při speciálních vyšetřováních, kde přistupují ještě jiná hlediska, není volba pro míru odchylky tak svobodná, jako právě. Tak ku př. v planimetrii, kde přirozeně se pro výraz dávající odchylku požaduje, aby byl invariantní vzhledem k translaci a rotaci, jest výraz (I) jedině možný.

Poznámka 2. Mezi odchylkami d, $d^{(I)}$, $d^{(II)}$ týchž dvou bodů $[a, b]$, $[a', b']$ jsou tyto vztahy

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d^{(I)} \leqq d \leqq d^{(I)}, \qquad \frac{1}{2} d^{(II)} \leqq d \leqq d^{(II)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d^{(II)} \leqq d^{(I)} \leqq d^{(II)}, \qquad d \leqq d^{(I)} \leqq d\sqrt{2},$$

$$d \leqq d^{(II)} \leqq 2d, \qquad d^{(I)} \leqq d^{(II)} \leqq \sqrt{2}\, d^{(I)},$$

jak čtenář snadno dokáže.

Poznámka 3. Jistou důležitost má odchylka bodu $[a, b]$ od bodu $[0, 0]$, t. j. číslo $d(a, b; 0, 0)$ (resp. čísla $d^{(I)}(a, b; 0, 0)$, $d^{(II)}(a, b; 0, 0)$). Čísla tato nahražují nám do jisté míry v oboru dvou proměnných pojem absolutní hodnoty při jedné proměnné.

177. Okolí bodu. Okolí bodu $[a, b]$ jest obor obsahující všecky body $[x, y]$ různé od $[a, b]$, jichž odchylka od $[a, b]$ jest menší než číslo kladné ε, jež dle okolností možno si voliti rozmanitým způsobem.

Definujeme-li odchylku na základě (I), jest okolí bodu $[a, b]$ dáno vnitřkem kruhu o středu $[a, b]$ a poloměru ε s vyjmutím bodu $[a, b]$. V tomto případě značiti budeme okolí bodu $O^{(I)}(a, b; \varepsilon)$. Obvod kruhu jest vnější hranicí okolí; celá hranice okolí skládá se z obvodu kruhu a jeho středu.

Podobně vycházíme-li od výrazu (II), resp. (III), dostaneme pro okolí obory, jež označíme $O^{(II)}(a, b; \varepsilon)$, resp. $O(a, b; \varepsilon)$. Tyto obory jsou dány čtverci o středu $[a, b]$; při oboru $O^{(II)}(a, b; \varepsilon)$ jsou uhlopříčky rovnoběžny s osami X, Y a mají délku 2ε, při oboru pak $O(a, b; \varepsilon)$ jsou strany rovnoběžny s osami a délka jich jest 2ε. Ohraničení však a střed těchto čtverců nepatří k okolí.

Často jeví se nutným uvažovati obor skládající se z okolí bodu $[a, b]$ a bodu $[a, b]$, aneb obor, který se skládá z okolí bodu $[a, b]$ a vnější hranice tohoto okolí, aneb konečně obor obsahující okolí bodu $[a, b]$, jakož i celou hranici okolí (včetně bodu $[a, b]$). Obory tyto budeme nazývati **okolím bodu** $[a, b]$ **doplněným** bodem $[a, b]$, resp. vnější hranicí aneb celou hranicí toho okolí; značiti pak budeme tato doplněná okolí v případě, že užíváme výrazu (III) pro stanovení odchylky, symboly

$$O(\overline{a, b}; \varepsilon), \quad O(a, b; \bar{\varepsilon}), \quad O(\overline{a, b; \varepsilon})$$

a obdobně v jiných případech.

Poznámka. Netřeba snad ani podotýkati, že pojem okolí (podobně jako pojem odchylky) bychom mnohem obecněji mohli definovati. Byla by to však pro naše účely obecnost zbytečná, spíše ztěžující než ulehčující výklad.

178. Hranice oboru. Pod hranicí oboru Ω proměnných x, y vyrozumíváme souhrn bodů $[a, b]$ takových, že v doplněném okolí toho bodu $O(\overline{a, b}; \varepsilon)$ nacházejí se i body (bod) patřící k oboru, i body (bod), které nepatří k oboru a to, *ať si kladné číslo ε zvolíme jakkoliv* (malé).

Bod, který patří ku hranici oboru, sluje **hraniční bod** toho oboru. Bod ten může, avšak nemusí patřiti k oboru.

Lze-li udati takové ε, že všechny body uvnitř $O(\overline{a, b}; \varepsilon)$ patří ku danému oboru Ω, sluje $[a, b]$ **vnitřní bod oboru** Ω; bod $[a, b]$ patří ovšem také k oboru Ω.

Lze-li udati takové ε, že žádný bod uvnitř $O(\overline{a, b}; \varepsilon)$ nepatří ku oboru Ω, sluje $[a, b]$ **vnějším bodem k oboru** Ω; bod $[a, b]$ ovšem nepatří k oboru Ω.

Každý bod celé roviny jest buď bodem vnitřním, buď vnějším, anebo konečně patří ku hranici oboru Ω.

Příklady. 1. V oboru Ω_0 obsahujícím všecky možné dvojice číselné (v t. zv. celém oboru viz odst. 175.) jest každý bod bodem vnitřním; obor nemá ani bodů hraničních ani vnějších.

2. Budiž dán obor Ω_1 sestávající ze všech takových dvojic číselných $[a, b]$, že i a i b jsou dány racionálnými čísly. Pak každý bod celé roviny jest bodem hraničním oboru Ω_1; body hraniční patří z části

k oboru Ω_1, z části k němu nepatří. Není bodů vnitřních oboru Ω_1, ani vnějších.

3. Budiž dán obor Ω_2 obsahující

α) všechny dvojice číselné $[a, b]$, jsou-li a i b dány racionálnými čísly, jichž absolutní hodnoty jsou menší než 1.

β) Zároveň s body $[a, b]$ právě vytčenými náleží k oboru Ω_2 okolí těchto bodů $O(a, b; \varepsilon)$; při tom ε jest stanoveno rovnicí

$$\varepsilon = \frac{1}{4r^2}, \quad \text{jestliže } a = \frac{p}{r}, \quad b = \frac{q}{r}, \tag{m}$$

kde celá čísla p, q, r nemají společné míry (r jest nejmenší společný jmenovatel čísel a, b). Pouze při bodu $[0, 0]$ nepřibíráme okolí jeho ku Ω_2.

V oboru Ω_2 jest každý bod $[a, b]$, kde a, b jsou rac. čísla, bodem vnitřním. Jsou jistě body vnější k oboru Ω_2; tak ku př. bod, jehož odchylka od $[0, 0]$ jest větší než 2 (měříme-li odchylku dle III. odst. 176.), jest jistě bodem vnějším. Body $[\alpha, \beta]$, kde aspoň jedno z čísel α, β jest číslem irracionálným a obě jsou menší než 1 v absolutní hodnotě, jsou tenkráte (a jenom tenkráte) body vnitřními oboru Ω_2, lze-li udati čísla celá p, q, r bez společné míry tak, aby

$$\left|\alpha - \frac{p}{r}\right| < \frac{1}{4r^2}, \quad \left|\beta - \frac{q}{r}\right| < \frac{1}{4r^2}; \quad \left|\frac{p}{r}\right| < 1, \left|\frac{q}{r}\right| < 1. \tag{n}$$

Nelze-li vyhověti těmto podmínkám, jsou body $[\alpha, \beta]$ body hraniční oboru Ω_2. Jest snadno nahlédnouti, že body takové, (které nehoví nerovninám (n)) vskutku jsou; jak známo totiž z nauky o zlomcích řetězových, jsou čísla irracionálná α taková, že nelze splniti čísly celými p, r hned první podmínku z (n). Tím spíše lze udati dvojice $[\alpha, \beta]$, pro které obě první podmínky z (n) jsou nesplnitelny. Avšak i bez pomůcky zlomků řetězových se nám tento závěr téměř vnucuje přímou úvahou. Neboť plošný obsah okolí $O(a, b; \varepsilon)$, kde a, b, ε jsou dány v (m), jest $\frac{1}{4r^4}$; všech bodů $[a, b]$, kde a, b mají největší společný jmenovatel r, jest méně než $4r^2$; součet plošných obsahů jich okolí jest tedy menší než $\frac{1}{r^2}$; tudíž jest součet plošných obsahů všech okolí $O(a, b; \varepsilon)$ menší než

$$\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \ldots\right) < \frac{2}{3},$$

což jest menší než 4, t. j. menší než obsah čtverce obsahujícího všecky body $[a, b]$, pro něž $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$. Při tom jest ještě uvážiti, že okolí $O(a, b; \varepsilon)$ z části vzájemně do sebe zasahují. Odnímáme-li tedy čtverci $O(0, 0; 1)$ všecka okolí $O(a, b; \varepsilon)$, kde a, b, ε jest dáno v (m) a při čemž r postupně nabývá hodnot 2, 3, 4, ..., zůstává z plochy čtverce stále část větší než $\frac{10}{3}$. t. j. větší než dvě třetiny plochy celého čtverce. Odtud můžeme usuzovati s velikou pravděpodobností, že jsou body $[\alpha, \beta]$ uvnitř čtverce $O(0, 0; 1)$, které nepatří k oboru Ω_2 a které jsou pak body hraničními toho oboru.

179. Nehledíme-li k oboru Ω_0 (viz příklad 1. předch. odst.) můžeme tvrditi: *V každém oboru Ω dvojic číselných $[x, y]$ jsou body hraniční.* Neboť v každém oboru takovém jest jistě bod $[a, b]$, který patří k oboru; jest také bod (aspoň jeden) $[c, d]$, který nepatří k oboru. Uvažujme pak body

$$[a + \lambda(c - a),\ b + \lambda(d - b)], \tag{α}$$

kde λ jest veličina proměnná, jež nabývati může všech reálných hodnot intervalu (0, 1). Dostaneme tak nekonečné množství bodů, z nichž některé (některý) patří jistě k oboru Ω (neboť pro $\lambda = 0$ dostáváme z (α) bod $[a, b]$ patřící ku Ω), ostatní pak nepatří ku Ω, a mezi nimi jest bod $[c, d]$, jenž vyplývá z (α) pro $\lambda = 1$. Všecka čísla intervalu (0, 1), která dosazena byvše do (α) za λ dávají body *nepatřící* ku Ω, tvoří množství číselné; množství to má jistou dolní hranici $\lambda_0 \geq 0$. Avšak potom bod $[a + \lambda_0(c - a),\ b + \lambda_0(d - b)]$ jest jistě hraničním bodem oboru Ω; neboť v intervalu $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ jsou jistě čísla (číslo) intervalu (0, 1), která patří ku množství vytčenému a čísla (číslo) intervalu (0, 1), jež nepatří k tomu množství, ať ε si zvolíme jakkoliv malé; z toho však následuje též, že v každém okolí bodu $[a + \lambda_0(c - a),\ b + \lambda_0(d - b)]$ jsou i body (bod) patřící ku Ω i body (bod) nepatřící ku Ω. Tím tvrzení učiněné, že v každém oboru Ω — nehledě ku oboru Ω_0 — jsou body hraniční, dokázáno.

Mohou však býti obory Ω, jež nemají bodů vnitřních, i obory, jež nemají bodů vnějších, a konečně obory, jež nemají oborů ani vnitřních ani vnějších. (Viz ku př. příklad 2. předch. odst.)

Poznámka. V odstavci tomto jako pomůcky jsme užívali oboru dvojic číselných daných v (α), kde λ jest proměnná nabývající *všech* hodnot intervalu (0, 1). Obor tento má důležitost i při jiných úvahách; nazývati pak budeme ten obor *oborem bodů úsečky spojující body* $[a, b]$, $[c, d]$, aneb krátce **úsečkou spojující body** $[a, b]$, $[c, d]$. Pojmenování toto má rovněž svůj původ v příslušném obrazu geometrickém.

180. Obory konečné *dvojic číselných* $[x, y]$ jsou takové obory, že probíhá-li dvojice $[x, y]$ všecky body oboru, jest stále

$$|x| < \mathfrak{A}, \quad |y| < \mathfrak{A},$$

kde $\mathfrak{A}$ jest určité číslo kladné. Mohli bychom též říci, že to jsou takové obory, v nichž odchylka každého bodu oboru od bodu [0, 0] (aneb i od jiného pevného bodu) jest menší než jisté číslo kladné.

Obory, které nejsou konečné, slují **nekonečné**.

18I. Body zhuštění *v oboru dvojic číselných*. Budiž dán obor Ω dvojic číselných $[x, y]$; jestliže v okolí $O(a, b; \varepsilon)$ jsou body oboru Ω, ať ε si zvolíme jakkoliv (malé) — a jest jich pak ovšem nekonečné množství – sluje bod $[a, b]$ bodem zhuštění oboru Ω. Vyskytují li se tedy body zhuštění oboru Ω, patří k oboru Ω jistě nekonečné množství dvojic číselných. Platí však také naopak věta: *Jestliže ke konečnému oboru Ω bodů $[x, y]$ patří nekonečné množství takových bodů, existují jistě body zhuštění oboru Ω.* K důkazu této věty budeme předpokládati větu o existenci bodů zhuštění ve množstvích číselných anebo jinak řečeno v oborech s jednou proměnnou (odst. 25.)

Nejprve jest totiž patrno, že je-li v Ω nekonečné množství bodů s touž první souřadnicí rovnou a, t. j. nekonečné množství bodů $[a, y]$, pak tyto dvojice, obsahující toliko jedinou proměnnou y, stanoví touto proměnnou jisté množství číselné (obor o jedné proměnné) shora i zdola ohraničené a obsahující nekonečné množství čísel; i má toto množství jistě aspoň jeden bod zhuštění, jejž označíme b. I jest tedy v intervalu $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ nekonečné množství hodnot pro y takových, že $[a, y]$ jest bodem oboru Ω, a jest tudíž v okolí $O(a, b; \varepsilon)$ nekonečné množství bodů oboru Ω, ať si ε zvolíme jakkoliv malé. Tím je dokázáno, že v případě předpokládaném jest jistě bod zhuštění.

Můžeme se tudíž omeziti jenom na takové obory, v nichž jest konečný počet bodů s touž první souřadnicí a obdobně konečný počet s touž druhou souřadnicí. Obsahuje-li pak obor Ω nekonečné množství bodů, musí první souřadnice x těch bodů v případě nyní předpokládaném probíhati nekonečné množství hodnot tvořících množství číselné ohraničené a majících tudíž aspoň jeden bod zhuštění, ku př. bod a. Podržme si z Ω pak jenom takové body v nekonečném množství, jichž prvá souřadnice probíhá hodnoty, mající jediný bod zhuštění a to právě v bodě a, ostatní body potlačme (viz odst. 28., pozn. 2.) Bude pak v oboru tak vzniklém Ω' (který jest částí oboru Ω) nekonečné množství bodů, jichž prvá souřadnice jest číslem intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, a jenom konečné množství, jichž prvá souřadnice jest vně toho intervalu. Souřadnice druhá y bodů z Ω' probíhá opět nekonečné množství hodnot tvořících množství číselné ohraničené a mající tudíž aspoň jeden bod zhuštění, ku př. bod b. Podržme si z Ω' pak jenom takové body v nekonečném množství, jichž druhá souřadnice probíhá hodnoty mající jediný bod zhuštění právě v tomto b, ostatní potlačme. Bude pak v oboru tak vzniklém Ω'' (který jest částí oboru Ω' a tudíž i částí Ω) nekonečné množství bodů, jichž druhá souřadnice jest číslem intervalu $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, a jenom konečné množství, jichž druhá souřadnice jest vně toho intervalu. I jest tudíž vně okolí $O(a, b; \varepsilon)$ konečné množství bodů oboru Ω'' a tudíž v okolí $O(a, b; \varepsilon)$ jest jich nekonečné množství (ať číslo kladné ε jest jakkoliv malé), t. j. bod $[a, b]$ jest bodem zhuštění oboru Ω'' a tedy i oboru Ω.

Tím jest důkaz věty úplně proveden.

Bod zhuštění oboru Ω může, avšak nemusí přináležeti k oboru Ω

182. Funkce dvou proměnných. Budiž dán obor Ω dvojic $[x, y]$ číselných; přiřadíme-li každé dvojici toho oboru určité číslo z, říkáme, že jsme definovali v oboru Ω funkci z dvou proměnných x, y. Obyčejně značíme tuto závislost z na proměnných x, y podobně jako při jedné proměnné rovnicí

$$z=f(x, y) \text{ aneb } z=F(x, y) \text{ aneb } z=\varphi(x, y), \quad z=g(x, y) \text{ atd.}$$

Příklad 1. Rovnicí

$$z=\frac{1}{x^2+y^2+1}$$

jest definována funkce z v celém oboru.

2. Jsou-li x, y stejného znaménka, obě od nully různa, pak rovnicí

$$z=\log\frac{x}{y}$$

jest stanoveno z jakožto funkce dvojice $[x, y]$. Obor Ω skládá se tu z prvého a třetího kvadrantu, s vyloučením os X, Y.

3. Značí-li $m(r, s)$ největší společnou míru čísel r, s, jest vztahem

$$z=m(x, y)$$

definována funkce z, když Ω obsahuje všecky dvojice čísel celých.

4. Funkce daná rovnicí $z=P(x, y)$, kde $P(x, y)$ jest polynom tvaru

$$P(x, y)=\sum_{i,k} a_{ik} x^i y^k, \quad i+k=0, 1, 2, \ldots n; \quad i\geqq 0, \; k\geqq 0,$$

i, k jsou při tom čísla celá, sluje **racionálná celistvá** funkce dvou proměnných x, y n-tého stupně. Obor vztahovati se může na celou rovinu X, Y. Je-li $Q(x, y)$ jiný takový polynom, stanoví rovnice

$$z=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

racionálnou funkci dvojic $[x, y]$, při čemž obor Ω obsahuje celou rovinu X, Y s vyloučením dvojic hovících rovnicí $Q(x, y)=0$.

183. Funkce konečná dvou proměnných v oboru Ω se definuje stejně jako konečná funkce jedné proměnné. Jestliže totiž jest dána v oboru Ω funkce $z = f(x, y)$, tvoří čísla z, probíhá-li $[x, y]$ všecky dvojice číselné oboru Ω, jisté množství číselné. Je-li to množství číselné shora i zdola ohraničeno (majíc za horní a dolní hranice čísla M a m), sluje funkce z funkcí konečnou v oboru Ω. Čísla M resp. m slují **horní** resp. **dolní hranicí** funkce $z = f(x, y)$ v oboru Ω. Rozdíl $M - m$ sluje **oscillací** funkce z v oboru Ω. I při funkcích dvou proměnných lze vysloviti věty obdobné větám odst. 67. týkajících se oscillace funkce, jakož i čísel M, m, což k vůli stručnosti opomíjím.

Rovněž pojem **funkce nekonečné** proměnných $[x, y]$ v oboru Ω jest bezprostředně na snadě, tak že stačí poukaz ku příslušné definici u funkcí jedné proměnné.

184. Pro funkce dvou proměnných platna jest tato věta: *Má-li funkce $z = f(x, y)$ v jistém konečném oboru Ω horní hranici M, pak existuje aspoň jeden bod $[\xi, \eta]$ takový, že v té části oboru Ω, jež obsažena jest v doplněném okolí $\overline{O(\xi, \eta; \varepsilon)}$, má funkce $z = f(x, y)$ za horní hranici rovněž číslo M, ať si kladné číslo ε zvolíme jakkoliv malé. Obdobná věta jest i pro dolní hranici.*

Jest totiž dvojí možnost. Buď funkce z nabývá v jednom bodě $[\xi, \eta]$ oboru Ω hodnoty M, anebo jí nenabývá v žádném bodě oboru Ω. V prvém případě jest věta, kterou máme dokázati, samozřejma; zbývá tedy ji dokázati za předpokladu, že funkce z nenabývá v žádném bodě oboru Ω hodnoty M, kterýž předpoklad v následujícím činíme.

Budiž δ libovolné číslo kladné; pak poněvadž M jest horní hranicí funkce $z = f(x, y)$ v oboru Ω, jest jistě v Ω bod $[x, y]$ (a jest takových bodů nekonečné množství), že

$$M - \delta < f(x, y) < M. \qquad (\alpha)$$

Sestrojme nekonečnou řadu čísel kladných $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_k, \ldots$ s rostoucím indexem klesajících a zároveň konvergujících k nulle. Vedle toho budou tato čísla hověti ještě dalším podmínkám. Číslo δ_1 zvolíme si libovolně, pak v důsledku (α) existuje bod $[x_1, y_1]$ oboru Ω takový, že $M - \delta_1 < f(x_1, y_1) < M$, číslo kladné δ_2 nechť hoví podmínce $f(x_1, y_1) < M - \delta_2$ a další bod $[x_2, y_2]$ oboru Ω volme zase v důsledku (α), aby $M - \delta_2 < f(x_2, y_2)$; pro δ_3 nechť jest $f(x_2, y_2) < M - \delta_3$; atd. Jest tedy řada čísel kladných $\delta_1, \delta_2, \ldots$ a řada bodů $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots$ hovících celkem podmínkám

$$\begin{aligned} M - \delta_1 < f(x_1, y_1) < M - \delta_2 < f(x_2, y_2) < \ldots \\ \ldots < M - \delta_k < f(x_k, y_k) < M - \delta_{k+1} < \ldots \end{aligned} \qquad (\beta)$$

a vedle toho podmínce

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0,$$

kterýmž všem současně lze vyhověti. (Podmínka poslední jest jistě splněna, jestliže při volbách svrchu činěných požadujeme ku př., aby zároveň byly splněny nerovniny $\delta_2 < \frac{1}{2}\delta_1$, $\delta_3 < \frac{1}{2}\delta_2, \ldots$, což patrně vždy jest možno).

Body $[x_1, y_1]$ $[x_2, y_2], \ldots$ tvoří část oboru Ω a jest jich nekonečné množství; jelikož však obor Ω (a tudíž i jeho část) jest obor konečný, má část oboru Ω obsahující body $[x_k, y_k]$ aspoň jeden bod zbuštění; označme ho $[\xi, \eta]$. V okolí $O(\xi, \eta; \varepsilon)$ toho bodu jest nekonečné množství bodů $[x_k, y_k]$ a tedy v důsledku (β) i body, pro něž, ať si zvolíme δ' jakoliv malé, jest

$$0 < M - f(x_k, y_k) < \delta',$$

čímž věta jest dokázána.

185. Limita řady bodové. Budiž dána řada bodů $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots [x_k, y_k], \ldots$ o nekonečném počtu členů. Říkáme, že daná řada má za limitu bod $[\xi, \eta]$ — anebo, že konverguje k bodu $[\xi, \eta]$ —, jestliže

$$\lim_{n=\infty} x_n = \xi, \quad \lim_{n=\infty} y_n = \eta, \tag{I}$$

což píšeme stručněji ve tvaru

$$\lim_{n=\infty} [x_n, y_n] = [\xi, \eta]. \tag{I'}$$

Jest patrno, že nutná a postačující podmínka ku splnění (I) jest, aby odchylka bodu $[x_k, y_k]$ od bodu $[\xi, \eta]$ s rostoucím indexem konvergovala k nulle, ať odchylku tu měříme kterýmkoliv z výrazů v odst. 176. uvedených. To jest, že nutná a postačující podmínka pro (I) jest dána možností udati ke každému číslu kladnému ε číslo N tak, že

$$d(x_n, y_n; \xi, \eta) < \varepsilon \quad \text{pro všecka } n > N. \tag{α}$$

Neboť ku splnění (I) jest nutno a postačitelno, aby ke každému ε bylo lze nalézti N tak, aby současně

$$|x_n - \xi| < \varepsilon, \quad |y_n - \eta| < \varepsilon \quad \text{pro všecka } n > N, \tag{β}$$

což jinak psáno jest právě podmínka v (α), čímž tvrzení dokázáno. Stejně by se to tvrzení dokázalo, kdybychom v (α) místo d užívali výrazů $d^{(I)}$, $d^{(II)}$; ostatně dle odst. 176, pozn. 2., jest přímo patrno, že z (α) následují obdobné podmínky pro $d^{(I)}$, $d^{(II)}$.

Podobnými úvahami dospíváme ku větě Bolzano-Cauchyově pro limity řad bodů při dvou neodvisle proměnných: Nutná a postačující podmínka, aby řada bodů $[x_k, y_k]$, $k=1, 2, 3, \ldots$ měla limitu, jest, aby ke každému číslu kladnému ε bylo lze udati číslo N tak, že jest

$$d(x_{n'}, y_{n'};\ x_{n''}, y_{n''}) < \varepsilon \quad \text{pro všecka } n', n'' > N.$$

Jest zbytečno uváděti ještě jiné tvary pro nutné a postačující podmínky k existenci limity, vznikající jednak tím, že bereme za podklad jiný tvar věty Bolzano-Cauchyovy aneb jinou míru pro odchylku dvou bodů.

186 Limita funkce o dvou proměnných. Budiž dána funkce $f(x, y)$ pro všecky body okolí bodu $[c_1, c_2]$, t. j. pro všecky body $O(c_1, c_2; E)$, kde E jest jisté číslo kladné. Podáme definici pojmu *limity funkce* $f(x, y)$, když $[x, y]$ konverguje ku $[c_1, c_2]$, kterýžto pojem — existuje-li v důsledku té definice — bude dán symbolem

$$\lim_{[x, y]=[c_1, c_2]} f(x, y). \tag{1}$$

Podáme hned dvě definice, o nichž lze dokázati, že se věcně shodují. Jelikož důkaz příslušný shoduje se úplně v myšlenkovém postupu s důkazem příslušné věty při jedné proměnné provedeném v odst. 70., odkazuji čtenáře k tomuto odstavci a uvádím toliko slovně obě definice.

1. Definice. Řada bodů $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots [x_k, y_k], \ldots$ mějž za limitu bod $[c_1, c_2]$. Pak existuje-li limita

$$\lim_{n=\infty} f(x_n, y_n) = C \tag{2}$$

a je-li limita tato vždy táž $(=C)$, ať $[x_1, y_1], \ldots [x_k, y_k], \ldots$ jest jakákoliv řada bodů položených v $O(c_1, c_2; E)$ mající za limitu bod $[c_1, c_2]$, říkáme, že existuje limita (1) a že jest rovna C.

2. Definice. Přísluší-li ke každému kladnému číslu ε číslo kladné $\delta < E$ tak, že jest

$$| f(x, y) - C | < \varepsilon \quad \text{pro všecky } [x, y] \text{ v okolí } O(c_1, c_2; \delta),$$

říkáme, že existuje limita (1) a že jest rovna C.

Jest na snadě činiti obdobné důsledky ze shody obou definic, jako učiněny byly při jedné proměnné. Tak, abych aspoň jeden příklad uvedl, jest věta:

$$\lim_{[x, y]=[c_1, c_2]} f(x, y) . g(x, y) = \lim_{[x, y]=[c_1, c_2]} f(x, y) . \lim_{[x, y]=[c_1, c_2]} g(x, y)$$

za předpokladu ovšem, že limity na pravých stranách existují.

Poznámka. Pojem limity funkce $f(x, y)$, když $\lim [x, y] = [c_1, c_2]$, dá se rozmanitým způsobem rozšířiti.

Tak ku př. lze nejprve uvažovati limity pro ten případ, že $[x, y]$ konverguje sice ku $[c_1\ c_2]$, avšak probíhá při tom body okolí $O(c_1, c_2; E)$ jen potud, pokud jsou obsaženy v jistém oboru Ω.

Na druhém místě lze stejně, jako při jedné proměnné, i tu zavésti pojmy horní a dolní limity funkce $f(x, y)$, když $\lim [x, y] = [c_1, c_2]$, t. j. zavésti pojmy, jež vyznačovati budeme symboly

$$\overline{\lim_{[x, y]=[c_1, c_2]}} f(x, y), \quad \underline{\lim_{[x, y]=[c_1, c_2]}} f(x, y).$$

Rozšíření táto jsou zcela snadna a není třeba o nich obšírněji pojednávati (viz ostatně odst. 73.—75.).

187. Několik proměnných, základní pojmenování. Veškeré pojmy, vykládané v předcházejících odstavcích pro dvě proměnné, dají se bez jakékoliv překážky rozšířiti pro více proměnných. Podám v té příčině stručný přehled pojmenování a označení příslušných.

Systém n proměnných označovati budeme obšírně $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, anebo krátce $[x]$; budeme říkati tomuto systému n proměnných také stručně **bod proměnný** o n **souřadnicích**; x_1 jest *první souřadnice* toho bodu, x_2 *druhá*, ... Přisoudíme-li každé ze souřadnic určitou hodnotu, říkáme, že jsme stanovili **bod** o n souřadnicích. Je-li ku př. $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$, máme bod $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, anebo krátce $[a]$, anebo konečně nejkratčeji bod A; podobně pod bodem B vyrozumíváme obšírněji bod $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ a tak podobně.

Píšeme (a říkáme), že $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, když $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$; v tomto případě říkáme též, že proměnný bod $[x]$ splývá s bodem $[a]$ (anebo jinak s bodem A.)

Souhrn bodů, jimž může býti rovný proměnný bod $[x]$, sluje **oborem** *proměnného bodu* $[x]$. Obor často se vyskytující jest dán nerovninami

$$a'_1 \leqq x_1 \leqq a''_1, \quad a'_2 \leqq x_2 \leqq a''_2, \ldots \quad a'_n \leqq x_n \leqq a''_n;$$

sluje **pravoúhelníkový obor** bodu $[x]$, značiti jej budeme krátce $(a'_1, a'_2, \ldots a'_n; a''_1, a''_1, \ldots a''_n)$. Obecně se vyskytují nejčastěji obory dané jistým počtem nerovnin mezi souřadnicemi proměnného bodu.

Pod **odchylkou dvou bodů** $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $B = [b_1, \ldots, b_n]$ vyrozumívati budeme jeden ze tří výrazů

$$d(A, B) = \text{největšímu z čísel } |a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \ldots |a_n - b_n|,$$
$$d^{(\mathrm{I})}(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2},$$
$$d^{(\mathrm{II})}(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|.$$

Odchylky tyto budeme též značiti obšírněji znakem $d(a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $d^{(\mathrm{I})}(a_1, \ldots)$, ... Že pro odchylky tyto platny jsou 4 základní vlastnosti obdobné těm, jež byly uvedeny při dvou proměnných, jest téměř bezprostředně jasno; toliko větu 4. pro odchylku $d^{(\mathrm{I})}$ jest třeba dokázati zvláště; t. j. jest třeba dokázati

$$d^{(\mathrm{I})}(A, C) \leqq d^{(\mathrm{I})}(A, B) + d^{(\mathrm{I})}(B, C). \qquad (A)$$

Abychom dokázali větu (A) o odchylce $d^{(I)}(A; B)$ v oboru n proměnných, dokážeme si napřed větu pomocnou: Jestliže

$$\sqrt{p} \leqq \sqrt{r} + \sqrt{s}, \quad p,\ r,\ s \text{ čísla kladná } (\geqq 0), \tag{α}$$

jest i

$$\sqrt{p + (\varrho + \sigma)^2} \leqq \sqrt{r + \varrho^2} + \sqrt{s + \sigma^2}. \tag{β}$$

Neboť kdyby poslední vztah nebyl správný, bylo by nutně

$$\sqrt{p + (\varrho + \sigma)^2} > \sqrt{r + \varrho^2} + \sqrt{s + \sigma^2};$$

tedy (umocníme-li na druhou po obou stranách)

$$p + (\varrho + \sigma)^2 > r + \varrho^2 + s + \sigma^2 + 2\sqrt{(r + \varrho^2)(s + \sigma^2)}$$

a odečteme-li předpokládaný vztah (α) (umocněný rovněž po obou stranách na druhou)

$$\sqrt{rs} + \varrho\sigma > \sqrt{(r + \varrho^2)(s + \sigma^2)}.$$

Odtud opětným umocněním a převedením všech členů na pravou stranu následuje ihned

$$0 > (\sigma\sqrt{r} - \varrho\sqrt{s})^2,$$

což jest nemožno. Nemůže tedy býti vztah (β) nesprávný a věta pomocná jest dokázána.

Na základě pomocné věty můžeme pak postupovati takto: Jelikož

$$\sqrt{(a_1 - c_1)^2} \leqq \sqrt{(a_1 - b_1)^2} + \sqrt{(b_1 - c_1)^2},$$

jest v jejím důsledku

$$\sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2} \leqq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} + \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2}$$

a na základě této nerovniny opětně používajíce pomocné věty

$$\sqrt{(a_1 - c_1)^2 + (a_2 - c_2)^2 + (a_3 - c_3)^2} \leqq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} +$$
$$+ \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 + (b_3 - c_3)^2}$$

a tedy po n-1 takovýchto krocích

$$d^{(I)}(A,\ C) \leqq d^{(I)}(A,\ B) + d^{(I)}(B,\ C).$$

Okolí bodu $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ definuje se úplně stejně jako při dvou proměnných; rovněž **doplněné okolí**; postačí napsati tu jenom příslušné symboly:

$$O(A;\ \varepsilon),\quad O^{(I)}(A;\ \varepsilon),\qquad O^{(II)}(A;\ \varepsilon),$$
$$O(\bar{A};\ \varepsilon),\quad O^{(I)}(\bar{A};\ \varepsilon), \ldots;\quad O\ \overline{(A;\ \varepsilon)};\ \ldots;\ O(A;\ \bar{\varepsilon}), \ldots$$

Rovněž pojmy **hranice oboru, bodu vnitřního, bodu vnějšího, oboru konečného, bodů zhuštění** mají definice shodné v případu n i dvou proměnných. Důkaz věty, že *v každém oboru* (nehledíme-li k oborům obsahujícím všecky možné body) *jsou hraniční body*, jakož i věty, *že existují v oboru Ω body* (bod) *zhuštění, jestliže obor tento jest konečný a obsahuje nekonečné množství bodů*, jsou v odst. 179., 181. podány tak, že bez potíže rozšiřují se na n proměnných.

188. Funkce n proměnných. Přiřadíme-li každému bodu $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jistého oboru Ω určité číslo u, říkáme, že jsme definovali funkci u o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a to v oboru Ω. Značíme pak tuto závislost čísla u od čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jako dříve ve specielních případech i nyní jedním ze vztahů

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad u = F(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ a t. podobně.}$$

Význam pojmu **funkce konečná** (resp. **nekonečná**) *proměnných* $[x_1, \ldots x_n]$ *v oboru* Ω jest na snadě (viz odst. 183.)

Konečně věta odst. 184. a její důkaz bez potíže se rozšiřuje pro funkce o n proměnných, rovněž tak pojem **limita řady bodové,** kteroužto řadu budeme psáti ve tvaru

$$[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}], \quad [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}], \ldots \quad [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}], \ldots\ldots,$$

a obě definice **limity funkce o n proměnných**; důkaz, že obě tyto definice věcně se shodují, jest opět totožný s důkazem podaným při jedné proměnné v odst. 70.

189. Obory pro neodvisle proměnnou nejčastěji používané. Jako jsme se při jedné proměnné omezili z pravidla na obory dané jedním intervalem (a, b), po případě intervalem $(a+0, b)$ atd., jest i při vyšetřování funkcí o několika proměnných užitečno zavésti obory pro neodvisle proměnné úžeji vymezené, jakož i objasniti příslušná pojmenování.

Oborům konečným, k nimž patří všecky jich body hraniční, říkati budeme **obory uzavřené**; nepatří-li všecky body hraniční k danému oboru, anebo je-li obor ten nekonečný, sluje obor příslušný **otevřený**; nepatří-li žádný bod hraniční k danému oboru, nazveme jej oborem **plně otevřeným.**

Ku př. okolí bodu A, jak jsme je definovali, jest oborem plně otevřeným; okolí to doplněné vnější hranicí okolí jest oborem otevřeným; okolí doplněné bodem A i vnější hranicí okolí jest oborem uzavřeným.

Jsou-li A, B dva libovolné body vnitřní oboru Ω a lze-li nalézti řadu bodů $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots, C^{(r)}$ tak, že úsečky $AC^{(1)}$, $C^{(1)}C^{(2)}$, $C^{(2)}C^{(3)}, \ldots, C^{(r)}B$ jsou cele obsaženy uvnitř oboru Ω, sluje obor Ω **oborem souvislým.** Při tom úsečka CD jest souhrn bodů $[c_1 + \lambda(d_1 - c_1), c_2 + \lambda(d_2 - c_2), \ldots, c_n + \lambda(d_n - c_n)]$, kde λ probíhá všecky hodnoty intervalu $(0, 1)$; viz odst. 179., pozn.

Bodem isolovaným daného oboru budeme nazývati ten bod A, patřící k danému oboru, v jehož okolí $O(A, \varepsilon)$, zvolíme-li ε dosti malé, nejsou body patřící k danému oboru. Obory souvislé, neobsahující bodů isolovaných a *mající nad to v každém okolí každého hraničního bodu body vnitřní*, nazveme **obory spojitými** n **rozměrnými** (ovšem při n neodvisle proměnných). Obory spojité n- rozměrné (*kontinua* n- rozměrná) mohou býti zavřené, otevřené aneb plně otevřené. Nejširší takový obor jest obor celý, t. j. obor obsahující všecky možné body $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, kde tedy proměnné x_k mohou nabývati na sobě nezávisle všech hodnot reálných. Obor tento jest oborem otevřeným a budeme jej označovati též jako **prostor** n- **rozměrný**.

Příklady. 1. Obor pravoúhelníkový (definovaný nerovnostmi $a_k \leqq x_k \leqq b_k$, $k=1, 2, \ldots, n$) jest oborem spojitým n- rozměrným, uzavřeným.

2. Obor kulový o středu $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a poloměru R, obsahující všecky body $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ hovící vztahu

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2<R^2, \quad R^2>0,$$

jest oborem spojitým n- rozměrným, plně otevřeným. Hraniční body oboru hoví rovnici $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2=R^2$. Doporučuji čtenáři, aby veškerá tvrzení tohoto příkladu zevrubně dokázal.

Poznámka. Pojmenování tu zavedená nejsou pojmenování všeobecně přijatá a vyskytují se v literatuře pod stejnými jmény pojmy často různé. Tak ku př. obor, který svrchu byl označen jako plně otevřený, sluje často prostě oborem otevřeným a obdobné úchylky vyskytují se i při ostatních pojmech.

Při výběru pojmů a pojmenování příslušných měl jsem na zřeteli v prvé řadě účel této knihy; ostatně v odst. 191. a) podám ještě další rozšíření a doplňky pojmů tu zavedených se týkající.

190. Funkce spojitá n proměnných. Jestliže funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest definována ve všech bodech okolí bodu $C=[c_1, c_2, \ldots, c_n]$ a v bodě C, pak pojem spojitosti u té funkce jest vymezen tímto výrokem: *Funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest spojitá v bodě C, jestliže*

$$\lim_{[x]=C} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(c_1, c_2, \ldots, c_n); \qquad \text{(I)}$$

aneb užíváme-li druhé definice pro limity funkce: *Funkce jest spojitá v bodě C, jestliže ke každému kladnému číslu δ lze udati číslo ε tak aby bylo*

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-f(c_1, c_2, \ldots, c_n)|<\delta \qquad \text{(II)}$$

pro všecky body v $O(C, \varepsilon)$.

Není-li funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definována sice ve všech bodech jistého okolí bodu C, avšak *je-li definována v bodě C a v nekonečně mnoha bodech toho okolí majících v C bod zhuštění*, pak můžeme rovněž definovati spojitost funkce v C a to týmiž vztahy (I) resp. (II); při tom ovšem v (I) jest čítati limitu tak, že $[x]$ konverguje ku C, probíhajíc kteroukoliv řadu bodů, v nichž f jest definována a jež mají v C bod zhuštění, rovnost (I) pak nastává neodvisle od toho, kterou z možných řad tu volíme; ve (II) uvedená nerovnost pak (má-li býti f v $[c]$ spojitou) musí býti splněna pro všecky body v $O(C, \varepsilon)$, pro které f jest definována.

Říkáme pak dále o *funkci $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definované v oboru Ω, že jest* **spojitá v oboru** *Ω, jestliže jest spojitá v každém bodě oboru Ω, pokud ovšem tento bod jest bodem zhuštění v oboru Ω.*

Poznámka. Z definice funkce spojité v bodě C (a to z prvé definice) následuje ihned věta: Jsou-li funkce $\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, funkce spojité v bodě $[c_1, c_2, \ldots, c_n]$ a funkce $F(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ spojitá v bodě $(d_1, d_2, \ldots, d_m)$, kde

$$d_k = \varphi_k(c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

pak jest funkce $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ — funkce to proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, jež za značkami funkčními φ_k k vůli zjednodušení vynechány — funkcí, spojitou v bodě C. (Věta o spojitosti funkce funkcí).

Věta tato rozšiřuje se snadno i pro spojitost v oboru Ω a má četné důsledky zvláštní, jako ku př.: Součin dvou funkcí spojitých v C jest spojitý v C a pod.

191. Základní vlastnosti funkcí spojitých. 1. *Je-li funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spojitá v bodě $C = [c_1, \ldots c_n]$ a zároveň v tomto bodě různa od nully, lze udati jisté číslo kladné ε takové, že v okolí $O(C, \varepsilon)$ jest funkce různa od nully a téhož znaménka jako $f(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.*

2. *Jestliže funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest spojitá ve spojitém a uzavřeném oboru Ω, pak lze ke každému kladnému číslu ε udati číslo η tak, že*

$$| f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) | < \varepsilon$$

pro všecka $[x']$, $[x]$ oboru Ω, pro něž $d(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; x_1, x_2, \ldots, x_n) < \eta$.

Z této věty vyplývají důsledky: *Je-li funkce $f(x_1, \ldots x_n)$ spojitou v uzavřeném a spojitém oboru Ω, lze rozděliti obor ten na konečný počet oborů menších tak, že oscillace funkce v těchto oborech jest menší než ε.* (Stačí totiž obory ty voliti tak, aby odchylky dvou bodů v těchto menších oborech byly menší než η)

Je-li funkce $f(x_1, x_2, .., x_n)$ spojitou ve spojitém a uzavřeném oboru Ω, jest v tom oboru konečnou.

3. *Má-li funkce $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, spojitá ve spojitém a uzavřeném oboru Ω, za horní hranici funkčních hodnot v tomto oboru číslo M, pak jest jistě aspoň jeden bod $[\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n]$ oboru Ω, pro který $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = M$.* Stejné tvrzení jest platno i pro dolní hranici m. Číslo M v tomto případě pak se nazývá (**absolutním**) **maximem** funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v oboru Ω; číslo m (absolutním) minimem.

Důkazy těchto vět lze dáti úplně týmž postupem, jako podány jsou důkazy těch vět při jedné neodvisle proměnné v odst. 77.—79., k nimž odkazuji. Výraz $|x' - x|$ tam se vyskytující jest třeba ovšem nahraditi výrazem $d(x'_1, \dots, x'_n; x_1, \dots, x_n)$, větu pak odst. 68. větou odst. 184.; jinak jest shoda úplná. Ostatně v odst. 191. *b*) bude podán nový důkaz věty 2., která jest fundamentální pro funkce spojité, a to pro obory ještě obecnější než jsou obory spojité a uzavřené.

4. *Je-li funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spojitá v oboru souvislém Ω a nabývá-li ve dvou bodech A, B vnitřních toho oboru hodnot různých $f(A)$, $f(B)$, pak nabývá $f(x)$ v oboru Ω každé hodnoty mezi $f(A)$ a $f(B)$.* Neboť dle definice oborů souvislých lze nalézti řadu bodů $C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(r)}$ tak, že úsečky $AC^{(1)}, C^{(1)}C^{(2)}, \dots, C^{(r)}B$ jsou uvnitř Ω. Uvažujme řadu $r + 2$ čísel $f(A), f(C^{(1)}), f(C^{(2)}), .., f(B)$. Pak je-li ku př. $f(A) < L < f(B)$ a je-li první číslo, které jest v právě napsané řadě větší než L, hodnota $f(C^{(k)})$, jest $f(C^{(k-1)}) \leqq L$ a jest tedy L mezi čísly $f(C^{(k-1)}), f(C^{(k)})$. Avšak dosazujeme-li do výrazu

$$F(\lambda) = f(c_1^{(k-1)} + \lambda(c_1^{(k)} - c_1^{(k-1)}), \dots, c_n^{(k-1)} + \lambda(c_n^{(k)} - c_n^{(k-1)}))$$

za λ hodnoty intervalu $(0, 1)$, dostáváme hodnoty funkce f na úsečce $C^{(k-1)}C^{(k)}$; výraz ten pro $\lambda = 0$ stává se rovným $f(C^{(k-1)}) \leqq L$, pro $\lambda = 1$ pak rovným $f(C^{(k)}) > L$; jelikož pak jest $F(\lambda)$ spojitá funkce jedné proměnné λ (odst. 190., pozn.), nabývá dle odst. 80. aspoň pro jedno λ intervalu $(0, 1)$ hodnoty L; t. j. funkce $f(x_1, x_2, .., x_n)$ nabývá na každé lomené čáře, body A, B spojující a uvnitř Ω probíhající, aspoň jedenkráte hodnoty L (čímž věta jest dokázána).

Poznámka 1. Lze-li při funkci $f(x_1, x_2, .., x_n)$ definované v oboru Ω ke každému kladnému ε udati kladné číslo η tak, že

$$| f(x'_1, x'_2, .., x'_n) - f(x_1, x_2, .., x_n) | < \varepsilon$$

pro všecka $[x']$, $[x]$ oboru Ω, pro něž $d(x'_1, .., x'_n, x_1, .., x_n) < \eta$, nazýváme funkci $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *funkcí spojitou proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$* **stejnoměrně** *v Ω.*

Na základě tohoto pojmu lze větu 2. tohoto odst. vysloviti též takto: Jestliže funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest spojitá ve spojitém a uzavřeném oboru Ω, pak jest v tom oboru funkcí stejnoměrně spojitou proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Poznámka 2. Ještě v jiném smyslu lze mluviti o stejnoměrné spojitosti funkce. Budiž dána funkce $f(x, y, z)$ tří proměnných v oboru Ω a nechť lze při pevném x_0 a při pevných y, z ke každému kladnému číslu ε nalézti kladné číslo η tak, že jest

$$|f(x, y, z)-f(x_0, y, z)|<\varepsilon \text{ pro všecka } x, \text{ pro něž } |x-x_0|<\eta, \quad (m)$$

jsou-li jen $[x, y, z]$, $[x_0, y, z]$ body v Ω. Pak jest $f(x, y, z)$ — při těch pevných y, z — spojitou funkcí jedné proměnné x a to v bodě x_0. Lze-li však číslo η stanoviti tak, aby (m) bylo splněno jednak pro všecka $|x-x_0|<\eta$, jednak pro všecka $[y, z]$ jistého oboru Ω_1, pak říkáme, *že funkce $f(x, y\ z)$* — funkce to tří proměnných definovaná v Ω — *jest spojitou funkcí proměnné x v bodě x_0 a to stejnoměrně vzhledem ku všem $[y, z]$ oboru Ω_1*. Při tom jsou body $[x, y, z]$, $[x_0, y, z]$, probíhá-li $[y, z]$ obor Ω_1, vesměs body oboru Ω. Je-li dále Ω_1 takový obor bodů $[y, z]$, že, probíhá-li $[y, z]$ obor Ω_1, probíhá bod $[x_0, y, z]$ *všecky* body oboru Ω, jichž prvá souřadnice jest x_0, a je-li nerovnina $|f(x, y, z)-f(x_0, y, z)|<\varepsilon$ splněna pro všecka $[x, y, z]$ oboru Ω, pro něž zároveň $|x-x_0|<\eta$ a $[y, z]$ jest v Ω_1, říkáme, že *funkce $f(x, y, z)$* — funkce to tří proměnných definovaná v Ω — *jest spojitou funkcí proměnné x v bodě x_0 a to stejnoměrně v oboru Ω.*

Lze-li konečně ke kladnému číslu ε nalézti kladné číslo η tak, že jest

$$|f(x', y, z)-f(x, y, z)|<\varepsilon \quad \text{pro všecka } x', x, \text{ pro něž } |x'-x|<\eta,$$

ať jsou body $[x', y, z]$, $[x, y, z]$ jakékoli body oboru Ω, jest funkce tří proměnných $f(x, y, z)$ definovaná v Ω *funkcí spojitou proměnné x a to stejnoměrně v oboru Ω.*

Snadná zevšeobecnění těchto pojmů (na libovolné počty proměnných) pomíjím, jakož i snadné důsledky, které definice základní funkcí spojitých a věta 2. nám dovolují činiti pomocí pojmů právě zavedených.

191. a. Rozšíření vět o funkcích spojitých. Věty o funkcích spojitých lze dokázati pro obory mnohem obecnější než pro obory spojité a uzavřené. Abychom ty obory co nejstručněji mohli vymeziti, zavedeme si nejprve některé pojmy vztahující se ku množstvím bodovým v prostoru n- rozměrném, aniž bychom na tato množství zatím pohlíželi jako na obory pro funkce o n neodvisle proměnných.

Budiž dáno tedy množství bodů $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Jestliže souřadnice $|x_k|$ všech těchto bodů hoví rovnicím $|x_k|<\mathfrak{A}$, $k=1, 2, \ldots, n$, kde $\mathfrak{A}$ jest dané číslo kladné, sluje množství dané množstvím ohraničeným. (Je-li toto množství oborem pro funkci o n neodvisle proměnných, nazývá se obor tento konečný, viz odst. 180.)

V množství ohraničeném, k němuž přísluší nekonečné množství bodů, jsou vždy body zhuštění (pojem bodů zhuštění a příslušný důkaz podán v odst. 181.)

Je-li dáno množství bodové E, mající body zhuštění, tvoří tyto body zhuštění nové množství E', jež nazývá se **množstvím derivovaným** *z množství* E.

Body množství E' mohou — avšak nemusí — přináležeti množství E *Každé množství* E, *jež obsahuje všecky body množství* E' *derivovaného z* E, *sluje* **uzavřeným množstvím.***)

Tu platí nejprve věta: *Každé množství* E', *derivované z libovolného množství* E, *jest množstvím uzavřeným.* Neboť, je-li A bodem zhuštění ve množství E', jest uvnitř každého okolí $O(A, \varepsilon)$ nekonečné množství bodů z E', jež jsou tedy body vnitřní tohoto okolí, a tudíž jest tam i nekonečné množství bodů z E (neboť v každém okolí bodu z E' jest nekonečné množství bodů z E); následkem toho jest A též bodem zhuštění bodů z E a patří ku E' (což se mělo dokázati).

Budiž dána nyní funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pro všecky body množství E. Hodnoty funkční pro jednotlivé body toho množství dávají jisté množství číselné, které může býti shora i zdola ohraničeno; mluvíme pak o funkci na E konečné a **oscillace funkce definované na E v E** stanoví se i tu způsobem nám již známým. Obdobně můžeme uvažovati oscillaci funkce konečné definované na E v části množství E, zavésti pojem funkce nekonečné atd. Uvažujme hodnoty funkční pro všecky body množství E spadající do okolí $O(\bar{A}, \varepsilon)$; předpokládáme-li, že $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jest konečná, jest oscillace funkce v té části množství E, jež spadá do $O(\bar{A}, \varepsilon)$, jisté číslo $O_{A,\varepsilon} \geqq 0$, spadají-li ovšem do $O(\bar{A}, \varepsilon)$ vůbec nějaké body daného množství E. Nespadají-li však do $O(\bar{A}, \varepsilon)$ vůbec žádné body množství E, budě pro nás $O_{A,\varepsilon} = 0$. Číslo $O_{A,\varepsilon}$ nazveme **oscillací funkce f na E v** $O(\bar{A}, \varepsilon)$. Blíží-li se kladné číslo ε k nulle, klesá, anebo aspoň neroste toto $O_{A,\varepsilon}$, jež jest stále $\geqq 0$, a má tudíž $O_{A,\varepsilon}$ limitu pro $\lim \varepsilon = 0$, *již označíme* O_A *a nazveme* **oscillací funkce** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **v** A *na* E.**) Jest tedy

$$O_A = \lim_{\varepsilon=0} O_{A,\varepsilon} \,. \tag{n}$$

---

*) Čtenář snadno dokáže, že obor, který jsme nazvali v odst. 189. uzavřeným oborem, jest množstvím bodovým rovněž uzavřeným, *avšak zároveň ohraničeným.*

**) Anebo též: oscillací funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na E v A. Obdobnou záměnu ve slovosledu lze učiniti i při oscillaci v $O(\bar{A}, \varepsilon)$.

Není-li bod A bodem zhuštění ve množství **E**, jest číslo $O_A = 0$, jak z učiněných ustanovení ihned plyne, a nás celkem nezajímá. Avšak i je-li A bodem zhuštění, může býti O_A rovno nulle; tu zavádíme pak tuto definici:

Funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, jejíž oscillace v A na **uzavřeném** *množství* **E** *jest rovna nulle, sluje spojitou funkcí v bodě A na* **E**. *Při tom jest A bodem zhuštění množství* **E** (a patří ku **E**). Definice tato shoduje se v podstatě s definicí odst. 190. Plyne z ní zejmena také, že, je-li $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ spojitá v bodě A na množství **E**, limita hodnoty funkční, když bod $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ konverguje ku A, probíhaje body množství **E**, jest hodnota funkce v A.

Je-li funkce spojitá na **E** ve všech bodech zhuštění množství **E**, říkáme, že *jest spojitá na* **E**.

Je-li číslo O_A v (n) definované různé od nully, sluje funkce daná nespojitá v bodě A.

191. b. Užívajíce pojmů zavedených, dokážeme si nyní větu: *Budiž* **E** *množství ohraničené a uzavřené, funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nechť jest dána v bodech tohoto množství. Nelze-li k danému kladnému číslu ε udati kladné číslo η tak, aby oscillace funkce f na* **E** *ve všech možných $O(\overline{B}, \eta)$ byla menší než ε, pak jest aspoň jeden bod A patřící ku* **E**, *v němž oscillace funkce f na* **E** *jest $\geqq \varepsilon$.* Při tom jest B libovolný bod prostoru n- rozměrného (a nemusí patřiti ku **E**; bod A ovšem jest bodem zhuštění množství **E**).

Dejme tomu, že předpoklad ve větě vyslovený jest splněn; t. j. dejme tomu, že jest číslo ε (>0) takové, že, ať si zvolíme kl. č. η jakkoliv malé, vždy jsou body (bod) B, v jichž okolí $O(\overline{B}, \eta)$ jest oscillace f na **E** větší $(\geqq)$ než ε. Zvolme si libovolně řadu čísel kladných v nekonečném počtu $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$, mající za limitu nullu Pak existují body $B_1, B_2, B_3, \ldots$ takové, že oscillace funkce f na **E** v okolích

$$O(\overline{B}_1, \eta_1),\ O(\overline{B}_2, \eta_2),\ O(\overline{B}_3, \eta_3), \ldots$$

jsou vesměs větší $(\geqq)$ než ε. Body $B_1, B_2, B_3, \ldots$ mají aspoň jeden bod limitní (odst. 185.), který jest bodem zhuštění množství bodového složeného z $B_1, B_2, B_3, \ldots$. nejsou-li ovšem body ty totožny s konečným počtem bodů, kterýžto případ však nejprve z úvahy své vyloučíme. Označme ten limitní bod (resp. jeden z takových limitních bodů) řady $B_1, B_2, \ldots$ značkou b. Pak v okolí $O(\overline{b}, \eta)$, ať si zvolíme η jakkoliv malé jest nekonečné množství bodů B_k i s příslušnými okolími $O(B_k, \eta_k)$ a jest tedy oscillace funkce f na **E** v $O(\overline{b}, \eta)$ větší $(\geqq)$ než ε pro všecka kladná η; a jest tudíž v bodě b — kterýž, jak zároveň patrno, jest bodem zhuštění množství E — oscillace funkce na E větší ($\geqq$) než ε. (Což se mělo dokázati.)

Jestliže však body B_k jsou totožny s konečným počtem bodů, označíme jeden z těch bodů, které se v řadě $B_1, B_2, \ldots$ vyskytují nekonečněkráte, opět znakem b a můžeme o něm stejná tvrzení učiniti jako v předcházejícím případě.

Z věty právě dokázané plyne jako snadný důsledek věta: *Jestliže jest funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dána na množství* E *ohraničeném a uzavřeném a jest funkcí na* E *spojitou, pak lze ke každému kladnému číslu ε udati kladné číslo η tak, že oscillace funkce f na* E *ve všech možných $O(\overline{B}, \eta)$ jest menší než ε_2.* Věta tato jest očividně zobecněním věty 2. odst. 191., čímž tato věta základní pro nauku o funkcích spojitých poznovu dokázána.

Poznámka. Jelikož množství E v obou posledních větách jest množství ohraničené, spadá toto množství do jistého oboru pravoúhelníkového n- rozměrného. Při bodu B můžeme se tudíž omeziti také jenom na ten obor pravoúhelníkový se zřetelem ku významu oscillace funkce f na E v $O(\overline{B}, \varepsilon)$.

IX. Derivace a differenciály funkcí o několika proměnných.

192. Derivace parcielní funkcí o dvou proměnných. Budiž dána funkce $u = f(x, y)$ jakožto spojitá funkce proměnných x, y v jistém oboru. Přisuďme proměnné y pevnou hodnotu y_0, takže x zůstane jedinou proměnnou. Tím stane se u funkcí spojitou jedné proměnné x, $u = f(x, y_0)$; má li pak ta funkce jedné proměnné x derivaci dle x, v bodě $x = x_0$, sluje tato derivace **částečná (parcielní) derivace** *funkce $u = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ dle proměnné x* a značí se tato derivace značkou $f_x'(x_0, y_0)$. Jest tedy

$$f_x'(x_0, y_0) = \lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{I}$$

Obdobně jest částečná derivace funkce u v bodě $[x_0, y_0]$ dle proměnné y dána vztahem (za předpokladu, že příslušná limita existuje)

$$f_y'(x_0, y_0) = \lim_{k=0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}. \tag{I'}$$

V těchto výrazech mlčky se předpokládá, že $[x_0, y_0]$, $[x_0 + h, y_0]$ resp. $[x_0, y_0 + k]$ jsou body daného oboru.

Existují-li limity v (I) a v (I'), když $[x_0, y_0]$ jest v určitém oboru, představují nám v tom oboru obě parcielní derivace jisté funkce bodu