

Funkce komplexní proměnné

Aplikace na teorii rovinného pole

In: B. A. Fuks (author); B. V. Šabat (author); Oldřich Koníček (translator): Funkce komplexní proměnné. (Czech). Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1953. pp. 111–157.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402741>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fysiků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

APLIKACE NA THEORII ROVINNÉHO POLE.

§ 34. Rovinné vektorové pole. Vektorovým polem rozumíme část prostoru, v jehož každém bodě je definován jistý vektor. Budeme se zvláště zajímat o tyto tři případy vektorových polí:

a) *Rychlostní pole proudění kapaliny.* V každém bodě jisté oblasti D , kterou proudí nějaká kapalina, je v každém okamžiku definován vektor rychlosti pohybující se kapaliny. Souhrn všech těchto bodů oblasti D spolu se všemi vektory V v nich definovanými zobrazuje naše pole.

b) *Elektrostatické pole.* V prostoru obklopujícím náboj existují jisté elektrické síly, o jejichž existenci se přesvědčíme vnesením t. zv. „zkušebních“ nábojů do tohoto pole. Síla působící na jednotkový náboj přenesený do jistého bodu pole se nazývá *intensita pole* v tomto bodě. Souhrn všech bodů prostoru obklopujících daný náboj spolu s vektory intenzity E tvoří naše pole.

c) *Pole tepelného proudění.* V prostoru obklopujícím zahřáté těleso s body o různé teplotě $v(M)$ proudí teplo z míst o vyšší teplotě na místa s nižší teplotou. Vektorem *tepelného toku* nazýváme vektor

$$Q = -k \operatorname{grad} v(M), \quad (1)$$

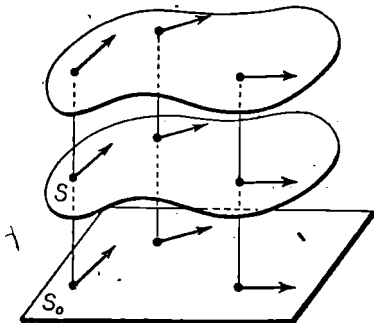
kde k je koeficient vnitřní tepelné vodivosti. Vektor má směr normály k ekvitermálním plochám a míří na místa s menším tepelným obsahem (t. j. v tu stranu, kam se šíří teplo). Souhrn vektorů Q zobrazí naše pole.

Naše další úvahy se budou týkat vektorových polí vektorů libovolné fyzikální povahy, nicméně pro konkrétnost našich úvah budeme mít vždycky především před očima uvedená tři pole.*)

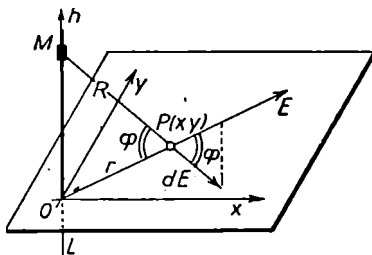
*) Mnoho číselných příkladů z teorie pružnosti nalezneme čtenář v knihách: G. V. Kolosov: *Priměněníje kompleksnoj pereměnnoj k teoriji uprugosti*, ONTI 1935 a N. I. Muschelišvili: *Někotoryje zadači teoriji uprugosti*, izd. AN SSSR, 1935.

V obecném případě budeme zkoumat vektorová pole měnící se s časem. Analyticky jsou taková pole dána třemi skalárními funkcemi (komponenty vektorů pole) čtyř proměnných (tři souřadnice x, y, z bodů pole a čas t).

Omezíme se zde jen na zkoumání stacionárních polí, t. j. polí časově neproměnných, jejichž vektory se s průběhem času nemění a závisí jen na poloze bodů daného pole. Vzhledem k tomuto omezení je pole určeno třemi skalárními funkcemi tří proměnných.



Obr. 55.



Obr. 56.

Omezíme se dále pouze na pole *pseudorovinná*, t. j. taková pole, jejichž všechny vektory jsou rovnoběžné s jistou rovinou a vektory všech bodů ležících na některé kolmici k této rovině jsou stejné co do velikosti i co do směru. Takové pole je úplně určeno rovinným vektorovým polem ležícím v některé z rovin π , rovnoběžných s naší rovinou π_0 .

Pseudorovinná pole jsou tedy určena dvěma skalárními funkcemi (komponenty vektorů rovinného pole) dvou proměnných (souřadnice bodů roviny rovinného pole). Komponenty vektoru \mathbf{A} vzhledem k osám x a y budeme značit A_x , resp. A_y , takže platí

$$\mathbf{A} = A_x + iA_y.$$

§ 35. Příklady rovinných polí.

Příklad 1. Zkoumejme elektrické pole *homogenně nabitě přímky*. Je zřejmé pseudorovinné a za rovinu π_0 můžeme volit kteroukoliv

z rovin kolmých k přímce l . Budiž q lineární hustota náboje na l (t. j. množství náboje na jednotku délky) a hledejme vektor intensity \mathbf{E} našeho pole v libovolném bodě P roviny π_0 . Pro výpočet si zvolíme kartézskou souřadnou soustavu (x, y, h) , jak ukazuje obr. 56. Podle principu superposice známého z fyziky můžeme vektor \mathbf{E} považovat za vektorový součet intenzit elementárních nábojů $d\mathbf{E}$ soustředěných na elementu dh přímky l . Podle Coulombova zákona je element intenzity $d\mathbf{E}$ pole bodového náboje $q dh$ umístěného ve vzdálenosti h na přímce l roven

$$|d\mathbf{E}| = \frac{q dh}{MP^2} = \frac{q dh}{r^2 + h^2},$$

kde $r^2 = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ je vzdálenost bodu P od počátku souřadnic. Protože vektor \mathbf{E} leží v rovině π_0 , je jeho modul roven součtu projekcí vektorů elementárních intenzit $d\mathbf{E}$ na rovinu π_0 :

$$|\mathbf{E}| = \int \cos\psi |d\mathbf{E}| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q \cos\psi}{r^2 + h^2} dh,$$

kde ψ je úhel, který svírá vektor $d\mathbf{E}$ a rovina π_0 . Z pravoúhlého trojúhelníka MOP máme $h = r \operatorname{tg} \psi$ a

$$\frac{1}{r^2 + h^2} = \frac{\cos^2\psi}{r^2},$$

tedy

$$|\mathbf{E}| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{q \cos\psi}{r} d\psi = \frac{2q}{r}. \quad (2)$$

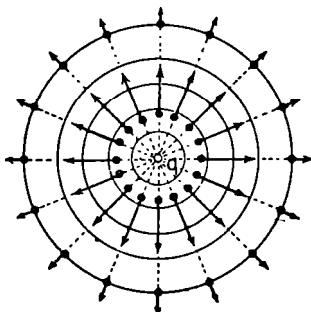
Vektor \mathbf{E} má směr vektoru $\overline{OP} = z$ a jednotkový vektor v tomto směru bude zřejmě $\frac{z}{|z|}$, a tedy

$$\mathbf{E} = \frac{2q}{r} \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{2qz}{|z|^2} = \frac{2qx}{x^2 + y^2} + i \frac{2qy}{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

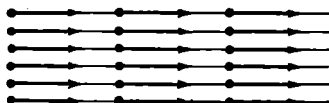
Zkoumané pole je úplně určeno rozprostřením vektorů \mathbf{E} v rovině π_0 . Budeme tedy dále pod *rovinným polem bodového náboje* vždy rozumět pole homogenně nabitě přímky l . Veličina q udává lineární

hustotu náboje, t. j. velikost náboje úsečky délky 1. Silové čáry takového pole (t. j. čáry, které mají v každém svém bodě za tečnu vektor pole) jsou tvořeny svazkem přímek s vrcholem v počátku (obr. 57). Pro kladný náboj směřují vektory \mathbf{E} od počátku, pro záporný náboj — k počátku.

Vzorec (2) ukazuje, že modul intenzity rovinného pole bodového náboje je nepřímo úměrný vzdálenosti bodu od náboje a ne čtverci vzdálenosti, jak je tomu v prostoru. Vlastnosti rovinného pole odlišné od prostorového pole poznáme dále ještě hlouběji.



Obr. 57.



Obr. 58.

Příklad 2. Pro pole *soustavy bodových nábojů* q_1, q_2, \dots, q_n , v bodech z_1, z_2, \dots, z_n , je vektor intenzity \mathbf{E} roven

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^n \frac{2q_k(z - z_k)}{|z - z_k|^2} = \sum_{k=1}^n \frac{2q_k(x - x_k)}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2} + i \sum_{k=1}^n \frac{2q_k(y - y_k)}{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}. \quad (4)$$

Neboť zřejmě bude-li bodový náboj q_k v bodě $z = z_k$ a ne v počátku, přejde (3) na tvar

$$\mathbf{E}_k = \frac{2q_k(z - z_k)}{|z - z_k|^2}.$$

Podle principu superposice je intenzita pole systému nábojů rovna součtu intenzit \mathbf{E}_k jednotlivých nábojů. Sečtením dostáváme vzorec (4).

Příklad 3. Vektor rychlosti \mathbf{V} *postupně proudící kapaliny* je konstantní co do velikosti i směru. Vybereme si za rovinu π_0 libovolnou

rovinu rovnoběžnou s rovinou vektorů V . Pak je pohyb popsán rovinným polem konstantního vektoru

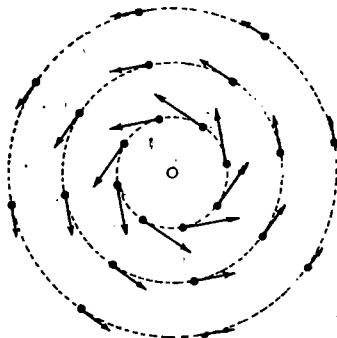
$$\mathbf{V} = V_x + iV_y \quad (5)$$

($V_x = \text{const}$, $V_y = \text{const}$). Proudové čáry — proudnice — (silové čáry vektoru pole V) tvoří svazek rovnoběžných přímek (obr. 58).

Příklad 4. Zkoumejme proudění kapaliny charakterisované vektorem rychlosti

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{2\pi} \frac{z}{|z|^2}, \quad (6)$$

kde Q je reálná konstanta, jejíž fyzikální význam se teprve ukáže. Proudnice tvoří svazek přímek s vrcholem v počátku (obr. 57). Pro $Q > 0$ mají vektory V směr od počátku, pro $Q < 0$ — k počátku. V obou dvou případech ubývá modul rychlosti s reciprokou hodnotou vzdálenosti od počátku. Pole se nazývá *rovinné pole bodového zdroje* (zřídla). V případě $Q < 0$ *rovinné pole bodového noru*. Rovinné pole bodového zřídla můžeme pokládat za pseudorovinné pole přímky, z níž vytéká kapalina do okolního prostoru.



Obr. 59.

Příklad 5. Zkoumejme proudění kapaliny charakterisované vektorem rychlosti

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma i}{2\pi} \cdot \frac{z}{|z|^2} = -\frac{\Gamma y}{2\pi(x^2 + y^2)} + i \frac{\Gamma x}{2\pi(x^2 + y^2)}, \quad (7)$$

kde Γ je reálná konstanta, jejíž fyzikální smysl se objeví teprve později. V každém bodě z je vektor rychlosti vzhledem k vektoru z otočen o pravý úhel, a to proti pohybu ručiček hodinových pro $\Gamma < 0$ a souhlasně s ručičkami hodinovými pro $\Gamma > 0$. Z toho: proudnice tvoří kružnice se středem v počátku. Modulu rychlosti ubývá s reciprokou hodnotou $|z|$ (obr. 59). Takové pole se nazývá *rovinným vířím*.

vým polem. Pro $\Gamma > 0$ kapalina víří proti pohybu hodinových ručiček, pro $\Gamma < 0$ souhlasně s jejich pohybem.

Příklad 6. Tepelný tok bodového zdroje

$$\mathbf{Q} = \frac{q}{2\pi} \frac{z}{|z|^2}, \quad (8)$$

kde q je reálná konstanta. Pole (8) je úplně shodné s rovinným polem bodového zdroje kapaliny (6).

§ 36. Vlastnosti rovinných vektorových polí. Zkoumejme nejprve rovinné elektrostatické pole tvořené libovolným systémem nábojů (bodových, přímkových i plošných). Podle Gaussovy věty, jejíž znalost předpokládáme, tok*) N vektoru intenzity pole libovolnou uzavřenou křivkou C je roven 4π -násobku celkového náboje uzavřeného křivkou:

$$N = \oint_C (\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) ds = 4\pi q \quad (9)$$

(kde \mathbf{n}^0 je jednotkový vektor vnější normály ke křivce C). Gaussova věta objasňuje fyzikální smysl toku vektoru intenzity elektrostatického pole. Povrchovou hustotu náboje v libovolném bodě pole charakterizuje *divergence vektoru intenzity* pole, která je, jak známo, definována takto:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) ds = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}, \quad (10)$$

kde $\Delta\sigma$ je ploška ohraničená libovolnou uzavřenou křivkou C , která ve svém vnitřku uzavírá zkoumaný bod. Limitní pochod provádíme pak zřejmě tak, aby křivka C přešla v limitě v náš zkoumaný bod. Podle vzorce (9) tok $\oint_C (\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) ds$ křivkou C je roven 4π -násobku celkového náboje Δq uvnitř křivky C a tedy

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\sigma} = 4\pi \rho, \quad (11)$$

*) D. Ilkovič: Vektorový počet, II. vyd., Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950 nebo M. Lagally: Vorlesungen über Vektorrechnung, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1928. [Pozn. překl.]

kde ρ je plošná hustota náboje v bodě z . Z toho ihned plyne, že v bodě, v němž není žádný náboj, je

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (12)$$

Pole, jehož divergence je rovna nule identicky ve všech jeho bodech, se nazývá *solenoidální*. Z (10) a (12) plyne, že podmínku solenoidálnosti pole lze vyjádřit analyticky takto:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

Cirkulace vektoru intensity \mathbf{E} podél uzavřené křivky C je

$$A = \oint_C (\mathbf{E}, \mathbf{s}^0) ds, \quad (14)$$

kde \mathbf{s}^0 je jednotkový vektor tečny ke křivce C . Jeho fyzikální význam: je to práce potřebná pro přenesení jednotkového náboje po křivce C .*) V důsledku konservativnosti elektrického pole je tato práce rovna nule. V opačném případě bychom po proběhnutí určité uzavřené dráhy kolem dokola určitým směrem získali práci konečnou a $\neq 0$. Opakováním tohoto procesu bychom dostali perpetuum mobile, což není možné.

Je tedy v každém bodě pole

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_n = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\mathbf{E}, \mathbf{s}^0) ds = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

kde $(\operatorname{rot} \mathbf{E})_n$ značí projekci rotace na normálu k plošce $\Delta\sigma$ ohraničené křivkou C (jediná nenulová komponenta rotace rovinného pole), kde při limitním pochodu se křivka C , obklopující zkoumaný bod, v tento bod stahuje. Pole, jehož rotace je v celém poli identicky rovna nule, se nazývá *potenciální* (nerotační, irrotacionální, nevírové). Vzorec (15) pak ukazuje, že *elektrostatické pole je všude potenciální*.

Zkoumejme jiné druhy polí. Pro rovinné proudění kapaliny je tok vektoru rychlosti \mathbf{V} uzavřenou křivkou C roven

$$Q = \oint_C (\mathbf{V}, \mathbf{n}^0) ds \quad (16)$$

*) Skalární součin $(\mathbf{E}, \mathbf{s}^0) ds = E_s ds$ vyjadřuje element práce. Integrováním podél C dostaneme úhrnnou práci podél křivky C .

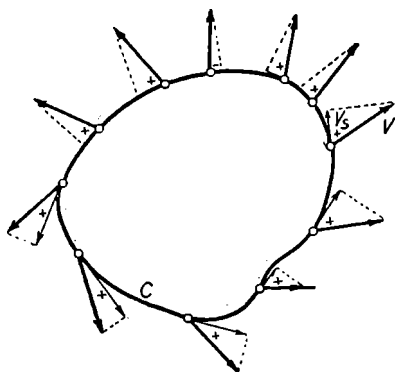
Fyzikálně značí množství kapaliny protékající za jednotku časovou uzavřenou křivkou C ven.*) Na př. pro rovinné pole bodového zdroje (§ 34 př. 4) a kružnici $|z| = r$ máme $(\mathbf{V}, \mathbf{n}^0) = \pm |\mathbf{V}| = \frac{Q}{2\pi r}$ a

$$\oint_C (\mathbf{V}, \mathbf{n}^0) ds = \oint_C \frac{Q}{2\pi r} ds = \frac{Q}{2\pi r} 2\pi r = Q. \quad |$$

Tím je vyjasněn i fyzikální smysl konstanty Q ve vzorci (6). Jestliže je pro nějakou uzavřenou křivku tok kapaliny nenulový a kladný, pak v důsledku *nestlačitelnosti* kapaliny, kterou předpokládáme, musí ležet uvnitř křivky nějaká zřídla. V případě záporného toku leží uvnitř křivky nějaké nory.

Divergence rychlosti

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\mathbf{V}, \mathbf{n}^0) ds = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \quad (17)$$



Obr. 60.

charakterisuje intenzitu (vydatnost) zdroje (nory). Fakt, že v jisté oblasti *neexistuje ani zřídlo ani nor při proudění nestlačitelné (incompressibilní) kapaliny vyjádříme analyticky* tedy takto

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (18)$$

Cirkulace rychlosti podél uzavřené křivky C je

$$\Gamma = \oint_C (\mathbf{V}, \mathbf{s}^0) ds \quad (19)$$

a rovná se tedy integrálu z projekce vektoru \mathbf{V} na tečnu ke křivce C . Jestliže je pro nějakou křivku cirkulace různá od nuly, převládají v integrálu (19) projekce jednoho znaménka nad projekcemi druhého

*) D. Ilkovič: Vektorový počet, II. vyd., Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950. [Pozn. překl.]

znaménka (viz obr. 60, kde převládají projekce kladného znaménka). Na př. pro rovinné vířivé pole (§ 35 př. 5) a pro křivku $|z| = r$ máme $(\mathbf{V}, \mathbf{s}^0) = \pm |\mathbf{V}| = \frac{\Gamma}{2\pi r}$ a

$$\oint_C (\mathbf{V}, \mathbf{s}^0) ds = \oint_C \frac{\Gamma}{2\pi r} ds = \frac{\Gamma}{2\pi r} 2\pi r = \Gamma.$$

Tím je objasněn i fyzikální smysl konstanty Γ ve vzorci (7).

Rotace rychlosti v jistém bodě pole je dána vztahem

$$(\text{rot}\mathbf{V})_n = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\mathbf{V}, \mathbf{s}^0) ds = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

a charakterisuje vířivost pole v okolí tohoto bodu. Body s nenulovou rotací se nazývají *víry*.

Analytické vyjádření stacionárního nevířivého rovinného proudění má tvar

$$(\text{rot}\mathbf{V})_n = \frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \quad (20)$$

Zkoumejme ještě stacionární rovinné tepelné proudění. V theorii tepelné vodivosti se dokazuje, že množství tepla protékajícího za jednotku času elementem délky je úměrné elementu délky a derivaci teploty ve směru normály $\frac{\partial v}{\partial n}$, t. j.

$$-k \frac{\partial v}{\partial n} ds = (-k \text{ grad } v, \mathbf{n}^0) ds = (\mathbf{Q}, \mathbf{n}^0) ds,$$

kde k je koeficient vnitřní tepelné vodivosti. Znaménko minus bereme proto, že teplo teče s míst o vysokém tepelném obsahu na místa s nižším tepelným obsahem (t. j. proti směru grad v).

Tok vektoru uzavřenou křivkou C tedy udává množství tepla protékajícího za jednotku času z kontury ven a divergence \mathbf{Q} v jistém bodě

$$\text{div}\mathbf{Q} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma} \oint_C (\mathbf{Q}, \mathbf{n}^0) ds = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}$$

charakterisuje vydatnost tepelného zdroje umístěného v tomto bodě.

Fakt, že neexistují zdroje tepla při stacionárním rovinném tepelném proudění je analyticky vyjádřen takto:

$$\operatorname{div} \mathbf{Q} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0. \quad (21)$$

Pokládáme-li k za konstantu, je

$$\operatorname{rot} \mathbf{Q} = -k \operatorname{rot} \operatorname{grad} v = 0$$

a pole je potenciální

$$\frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} = 0. \quad (22)$$

§ 37. Potenciál a silová funkce. Protože každé elektrostatické pole je potenciální, platí v něm všude

$$(\operatorname{rot} \mathbf{E})_n = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

a existuje funkce $V = V(x, y)$, jejíž totální diferenciál má tvar

$$dV = -E_x dx - E_y dy$$

nebo, což jest totéž,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \quad (23)$$

Důkaz je snadný. Jak známo, je výraz $P dx + Q dy$ tehdy a jen tehdy totálním diferenciálem jisté funkce, je-li $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*) Pro výraz $-E_x dx - E_y dy$ je tato podmínka splněna podle rovnice (15) $\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$. Funkce $V(x, y)$ je pak definována svým diferenciálem a integrací dostaneme

$$V(x, y) = - \int_L^z E_x dx + E_y dy + C, \quad (24)$$

*) Viz Vojtěch: Základy vyšší matematiky II, str. 252, vyd. VI., 1946, JČMF Praha nebo K. Petr: Počet integrální str. 458, vyd. II., 1931 JČMF Praha [Pozn. překl.]

kde integrujeme podél libovolné cesty spojující daný bod z_0 našeho pole s libovolným bodem $z = x + iy$. C je libovolná konstanta.

Rovnice (23) je možno psát kratčeji ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y} = -\text{grad } V. \quad (25)$$

Funkce $V(x, y)$ se nazývá *potenciální funkce (potenciál) pole*, křivky $V(x, y) = \text{const}$ se nazývají *ekvipotenciální křivky*. Z rovnice (25) je ihned vidět, že v každém bodě pole vektor intensity \mathbf{E} má směr normální k ekvipotenciální křivce.

Snadno se vyjádří pomocí potenciálu práce, kterou musíme vykonat při přenesení náboje $q = +1$ z bodu $z_1 = x_1 + iy$, do bodu $z_2 = x_2 + iy_2$ (podle rovnice (15) je nezávislá na zvolené cestě). Je $\mathbf{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} - i \frac{\partial V}{\partial y}$ a $\mathbf{s}^0 ds = dx + i dy = dz$ je vektor délky ds ve směru tečny k C , dále $(\mathbf{E}, \mathbf{s}^0) ds = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy = dV(x, y)$ a konečně hledaná práce

$$A = - \int_C (\mathbf{E}, \mathbf{s}^0) ds = - \int_C dV(x, y) = V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1) \quad (26)$$

je rovna rozdílu potenciálů v koncových bodech.

Příklad 1. Pro *rovinné pole bodového náboje* q složky vektoru intensity jsou

$$E_x = \frac{2qx}{x^2 + y^2}, \quad E_y = \frac{2qy}{x^2 + y^2}$$

a podle (24) je potenciál tohoto pole

$$V = -2q \int_L^{z_0} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = -q \ln(x^2 + y^2) + C = 2q \ln \frac{1}{|z|} + C,$$

kde L je libovolná cesta s koncovými body z_0 a z neprocházející bodem $z = 0$, a C libovolná konstanta. Pro $z = \infty$ potenciál zřejmě vzrůstá nade všechny meze. Ekvipotenciální čáry jsou soustředné kružnice

se středem v počátku (obr. 57). Je-li náboj q v bodě ζ , pak potenciál pole, jak je ihned vidět,

$$V = 2q \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + C. \quad (27)$$

Příklad 2. *Potenciál pole homogenně nabitě křivky je**)

$$V = \int_L 2\eta(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} ds, \quad (28)$$

kde ζ je proměnný bod čáry L , reálná funkce $\eta(\zeta)$ je lineární hustota náboje v bodě ζ a ds element oblouku. Abychom dokázali vzorec (28) rozdělíme křivku L na n dílků délky Δs_k ($k = 1, 2, \dots, n$) a zaměníme přibližně náboj na L systémem bodových nábojů velikosti $\eta(\zeta_k) \Delta s_k$ v bodech ζ_k (ζ_k leží na obloučku Δs_k). Pro hledaný potenciál pak dostaneme přibližnou hodnotu

$$V \approx \sum_{k=1}^n 2\eta(\zeta_k) \ln \frac{1}{|z - \zeta_k|} \Delta s_k$$

a přejdeme-li k limitě pro $n \rightarrow \infty$ a $\Delta s_k \rightarrow 0$, dostaneme přesné vyjádření pomocí integrálu (28).

Příklad 3. *Potenciál pole homogenní nabitě oblasti**) se vypočte podle vzorce

$$V = \int_D 2\varrho(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} d\sigma, \quad (29)$$

kde ζ je proměnný bod oblasti D , $\varrho(\zeta)$ plošná hustota náboje v bodě ζ a $d\sigma$ element plochy. Odvození vzorce (29) je zcela obdobné odvození vzorce (28).

Zkoumejme velikost potenciálu rovinného pole v nekonečně vzdáleném bodě. Vezměme konkrétní případ pole křivky L , která se celá rozprostírá v konečnu a je nabitá s délkovou hustotou $\eta(\zeta)$. Necht

*) V prostoru tomu odpovídá pole cylindrické plochy s vytvářejícími přímkami kolnými k rovině z a křivkou L jako řídící. Plocha je nabitá homogenně s plošnou hustotou $\eta(\zeta)$.

*) V prostoru tomu odpovídá pole cylindrického tělesa homogenně nabitého s prostorovou hustotou $\varrho(\zeta)$.

mimo ni leží bodový náboj v bodě ζ_0 velikosti $q = \int_L 2\eta(\zeta) ds$. Bod ζ_0 leží v konečnu. Provedeme superposici obou polí a máme pro rozdíl potenciálů

$$\begin{aligned} V - V_0 &= \int_L 2\eta(\zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} ds - 2 \ln \frac{1}{|z - \zeta_0|} \int_L 2\eta(\zeta) ds = \\ &= \int_L 2\eta(\zeta) \ln \left| \frac{z - \zeta_0}{z - \zeta} \right| ds = \alpha \end{aligned}$$

Protože oba body ζ a ζ_0 leží v konečnu, bude pro $z \rightarrow \infty \left| \frac{z - \zeta_0}{z - \zeta} \right| \rightarrow 1$ stejnoměrně (podle ζ), a podobně i $\ln \left| \frac{z - \zeta_0}{z - \zeta} \right| \rightarrow 0$ stejnoměrně, z čehož konečně plyne $\alpha \rightarrow 0$. Tedy

$$V = V_0 + \alpha = 2q \ln \frac{1}{|\zeta_0 - z|} + \alpha,$$

kde q je úhrnný náboj křivky L , ζ_0 libovolný bod mimo ni a $\alpha \rightarrow 0$ pro $z \rightarrow \infty$.

Stejně tak bychom se přesvědčili o správnosti vztahu (30) i pro rovinné pole nabitě oblasti a nebo obecně pro jakýkoliv systém bodových, křivkových či plošných nábojů ležících v konečnu. Při tom bude q patrně vždy značit úhrnný náboj.

Z (30) bezprostředně plyne, že pro $q \neq 0$ potenciál pole neomezeně vzrůstá pro $z \rightarrow \infty$ a potenciál takového rovinného pole nelze definovat jako práci vykonanou přenesením jednotkového pozitivního náboje do bodu $z = \infty$ [srov. s (26)]. Je-li úhrnný náboj $q = 0$, pak zřejmě pro $z \rightarrow \infty$ potenciál konverguje k nule.

Přejdeme k určení silové funkce. Budiž dána oblast D taková, že v ní neleží žádné zdroje ani nory (pole je uvnitř této oblasti solenoidální). Pak v této oblasti platí rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0. \quad (13)$$

Z toho ihned plyne, že výraz $-E_y dx + E_x dy$ je totálním diferenciálem jisté funkce U v oblasti D , a v D platí

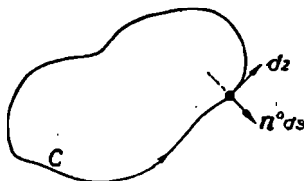
$$E_x = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial x}. \quad (31)$$

Funkce $U(x, y)$ je pak v oblasti D určena integrálem

$$U(x, y) = \int_{z_0}^z -E_y dx + E_x dy + C, \quad (32)$$

kde integrujeme po libovolné křivce L , která leží celá uvnitř D a jejíž koncové body jsou daný bod z_0 a proměnný bod z ; C je libovolná konstanta.

Z (31) je vidět, že ve všech bodech křivky $U(x, y) = \text{const}$ je směrnice tečny



Obr. 61.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{E_y}{E_x}$$

shodná se směrnici vektoru pole \mathbf{E} . Tedy křivky $u(x, y) = \text{const}$ jsou silové křivky pole a budeme ve shodě s tím nazývat funkci $U(x, y)$ *silovou funkcí pole*.

Pomocí silové funkce pole můžeme snadno vyjádřit úhrnný náboj pole ležící uvnitř jisté uzavřené křivky C . Z (31) plyne $\mathbf{E} = \frac{\partial U}{\partial y} -$

$-i \frac{\partial U}{\partial x}$ a jednotkový vektor vnější normály \mathbf{n}^0 ke křivce C dostaneme z vektoru tečny otočením o pravý úhel (viz obr. 61) ve směru hodinových ručiček a máme postupně $\mathbf{n}^0 ds = -i dz = dy - i dx$, t. j. $(\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) ds = \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial x} dx = dU(x, y)$. Pak aplikujeme větu

Gaussovu a *úhrnný náboj pole uvnitř uzavřené křivky L* je roven

$$q = \frac{1}{4\pi} \oint_C (\mathbf{E}, \mathbf{n}^0) ds = \frac{1}{4\pi} \oint_C dU(x, y). \quad (33)$$

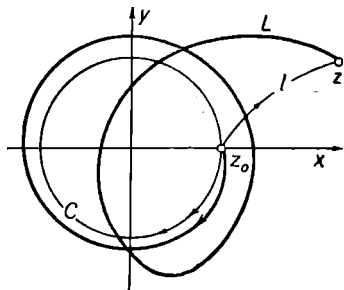
Příklad. Pro rovinné pole bodového náboje jsou komponenty vektoru intenzity pole

$$E_x = \frac{2qx}{x^2 + y^2}, \quad E_y = \frac{2qy}{x^2 + y^2},$$

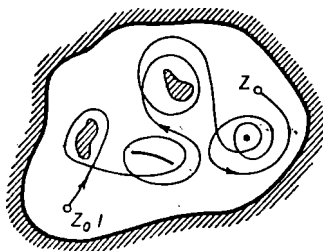
z toho podle (32)

$$U(x, y) = 2q \int_{z_0, L}^z \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = 2q \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} + C = 2q \operatorname{Arg} z + C, \quad (34)$$

kde L je libovolná cesta mající konečné body z_0 a z , neprocházející bodem $z = 0$. Ve vzorci (34) položíme $z_0 = 1$ a za $\operatorname{Arg} z$ vezmeme tu hodnotu argumentu, kterou dostaneme z hlavní větve $\arg z_0 = 0$ při spojitém pokračování podél křivky L . Tato hodnota se zřejmě nezmění, zaměníme-li cestu L libovolnou jinou cestou L' , mající koncové body z_0 a z , takovou, že mezi L a L' neleží bod $z = 0$. Cestu L můžeme



Obr. 62.



Obr. 63.

zřejmě nahradit cestou l , spojující $z_0 = 1$ s z a ležící cele buď v horní nebo dolní polorovině a kružnici C , která prochází jistým bodem n -krát (obr. 62, $n = 2$).

Integrál podél l nám dá hlavní hodnotu $\arg z$ a podél C hodnotu $\pm 2n\pi$, kde znaménko závisí na směru oběhu*) a tedy

$$U(x, y) = 2q \arg z \pm 2n\pi q + C.$$

Vidíme, že v našem případě je funkce $U(x, y)$ mnohoznačná.

Poznámka. Dodejme, že funkce definovaná svým totálním diferenciálem v jednoduše souvislé oblasti je jednoznačná. Mnohoznačnost

* Znaménko $+$ odpovídá kladnému a znaménko $-$ zápornému smyslu oběhu.

funkce (34) v předcházejícím případě je způsobena vícenásobnou souvislostí zkoumané oblasti (otevřená rovina s vyňatým bodem $z = 0$).

Při konstrukci silových a potenciálních funkcí elektrostatických polí máme velmi často co činit s mnohonásobně souvislými oblastmi. To je způsobeno tím, že funkce E_x a E_y jsou nespojitě v jistých bodech (na jistých křivkách, v jistých oblastech), v nichž jsou rozloženy náboje pole, a takové body, křivky nebo oblasti pak musíme vyloučit z uvažované oblasti D , která je pak jistým způsobem „proděravěna“.

Tak jako právě v uvažovaném případě zůstane obecně hodnota funkce $U(x, y)$ definované svým totálním diferenciálem beze změny při libovolné deformaci cesty L uvnitř oblasti tak, aby oblast mezi křivkou L a její deformací zůstala jednoduše souvislá! Ale při oběhu oblasti „díry“ se hodnota funkce $U(x, y)$ změní podle toho, je-li integrál

$$c_k = \oint_{C_k} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad (35)$$

podél uzavřené křivky, obsahující ve svém vnitřku oblast „díry“, roven nule nebo od nuly různý. Jako v našem speciálním případě je možno dokázat, že hodnoty (obecně mnohoznačné) funkce $U(x, y)$ v daném bodě dostaneme podle vzorce

$$U(x, y) = U_0(x, y) + n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_m c_m, \quad (36)$$

kde $U_0(x, y)$ je daná hodnota funkce a c_1, c_2, \dots, c_m integrály (35) integrované po všech křivkách obsahujících všechny „díry“ oblasti D a čísla n_1, n_2, \dots, n_m jsou celá (kladná, záporná nebo rovna nule) čísla udávající počet a smysl oběhů kolem děr po křivkách, které je obchvacují.

Integrály (35) se nazývají *cyklické konstanty* funkce $U(x, y)$ v oblasti D a ze vzorce (35) plyne, že funkce $U(x, y)$ je tehdy a jen tehdy jednoznačná, jsou-li všechny její konstanty v dané oblasti rovny nule.

Tentó poslední případ nastává pro potenciál, neboť, jak víme z § 36, je práce podél libovolné uzavřené křivky rovna nule a jsou tedy nule rovny i všechny cyklické konstanty a můžeme vyslovit větu: *Potenciál rovinného elektrostatického pole je funkce všude jednoznačná.*

Naproti tomu, jak ukazuje vzorec (33), cyklická konstanta silové

funkce při oběhu díry s úhrnným nábojem q je rovna $4\pi q$. Silová funkce rovinného elektrostatického pole je mnohoznačná.

§ 38. Komplexní potenciál v elektrostatice. Porovnáním rovnic (23) a (31) vidíme, že v oblasti D , která neobsahuje žádné náboje, jsou potenciál a silová funkce vázány vztahy

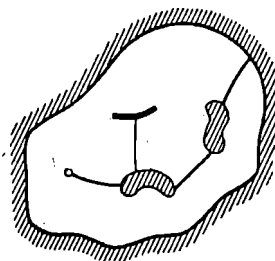
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (37)$$

Je-li oblast D jednoduše souvislá, budou v ní, jak bylo ukázáno v předešlém paragrafu, obě funkce jednoznačné. Pak můžeme rovnice (37), které mají zřejmě tvar rovnic Cauchy-Riemannových z § 14, považovat za podmínku regularity funkce komplexní proměnné

$$w = F(z) = U(x, y) + iV(x, y). \quad (38)$$

Tuto funkci nazýváme *komplexním potenciálem* elektrostatického pole. Podobně jako funkce $U(x, y)$ a $V(x, y)$ je i komplexní potenciál jednoznačně určen až na jistou adiční konstantu.

Ve vícenásobně souvislé oblasti je obecně komplexní potenciál víceznačnou funkcí následkem mnohoznačnosti své reálné části. Jak vyplývá z úvah předcházejícího paragrafu, v libovolné jednoduše souvislé oblasti, kterou obdržíme z mnohonásobně souvislé oblasti vhodnými výřezy (obr. 64) nebo v obecně jednoduše souvislé oblasti, je možno konstruovat regulární větve komplexního potenciálu. Komplexní potenciál je v dalším případě analytické mnohoznačné funkce (její obecnou definici, viz § 63).



Obr. 64.

V důsledku jednoznačnosti derivací (37) mají všechny větve komplexního potenciálu jednu a tutéž derivaci v daném bodě. Tuto jednoznačnou funkci nazýváme derivací komplexního potenciálu.

Pomocí komplexního potenciálu je možno vyjádřit všechny základní veličiny spojené s pojmem pole. Tak na př. podle (37) a (23) máme

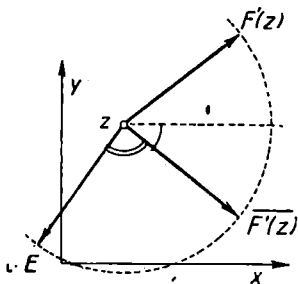
$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial x} = -E_y - iE_x = -i(E_x - iE_y),$$

odtud $E_x = iE_y = iF'(z)$. Pomocí komplexně sdružených veličin snadno vyjádříme vektor intenzity pole

$$\mathbf{E} = E_x + iE_y = -\overline{iF'(z)}. \quad (39)$$

Vzorec (39) ukazuje, že ke konstrukci vektoru intenzity z vektoru derivace $F'(z)$ stačí poslední převrátit podle reálné osy a pak pootočit o pravý úhel ve směru pohybu ručiček hodinových (obr. 65). Z téhož vzorce plyne ještě, že *modul vektoru intenzity pole je*

$$E = |\mathbf{E}| = |F'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2}. \quad (40)$$



Obr. 65.

Komplexní potenciál zprostředkuje zobrazení pole roviny (z) na rovinu (w), jež je konformní ve všech bodech oblasti D , v nichž je intenzita pole od nuly různá. Podle definice odpovídají tedy silovým a ekvipotenciálním čarám rovnoběžky s osami U a V . Známe-li tedy komplexní potenciál pole, můžeme (princiálně, ne vždy prakticky) sestavit jeho silové a ekvipotenciální čáry, čili jak říkáme, můžeme „pole zmapovat“.

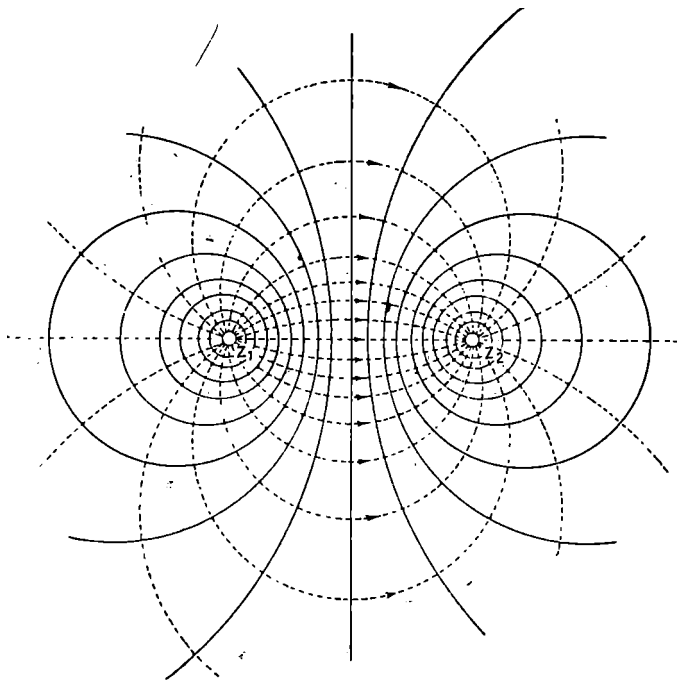
Jak jsme řekli již výše, je komplexní potenciál určen až na adiční konstantu jednoznačně. Protože velikost této adiční konstanty nemá vliv ani na mapu pole ani na intenzitu pole, budeme ji v dalších úvahách prostě vypouštět.

Dokázali jsme si tedy, že libovolnému elektrostatickému poli bez nábojů v jisté jednoduše souvislé oblasti je přiřazena regulární funkce — jeho komplexní potenciál. Tvrzení platí však i naopak: *Je-li dána v libovolné jednoduše souvislé oblasti D jistá regulární funkce $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, pak jí odpovídá pole, jehož náboje leží vně oblasti D a jehož komplexní potenciál je právě funkce $F(z)$.*

Důkaz: Uvažujme pole vektorů $\mathbf{E} = -\overline{iF'(z)}$. Z Cauchy-Riemannových rovnic plyne, že toto pole je v oblasti regularity funkce $F(z)$

potenciální a solenoidální, a je to tedy jisté elektrostatické pole. Existuje tedy v jistém, námi podrobně vyloženém smyslu, úplné přiřazení navzájem mezi elektrostatickými poli a regulárními funkcemi.

Příklad 1. Pole bodového náboje velikosti q , který je umístěn v počátku. Potenciál i silovou funkci našeho pole jsme si odvodili již



Obr. 66.

dříve (vzorce (27) a (34) předešlého §) a pro komplexní potenciál máme ihned

$$\begin{aligned} w = F(z) &= 2q \operatorname{Arg} z + 2qi \ln \frac{1}{|z|} = 2qi \left\{ \ln \frac{1}{|z|} + i \operatorname{Arg} \frac{1}{z} \right\} = \\ &= 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

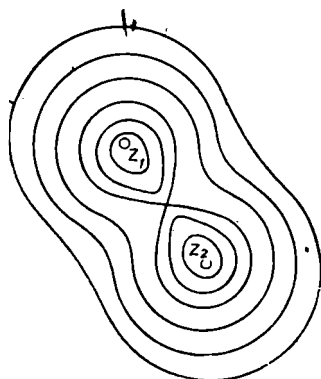
Mapa tohoto pole je zobrazena na obr. 57. Komplexní potenciál zobrazí dvojnásobně souvislou oblast (otevřenou rovinu s vyňatým

počátkem) na jednoduše souvislou oblast (otevřenou rovinu). To není ovšem nijak ve sporu s tvrzením § 23, neboť zobrazení je mnohoznačné. Je-li náboj v bodě $z = z_0$ a ne v počátku, pak je potenciál roven

$$w = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_0}. \quad (41)$$

Příklad 2. Pro systém dvou bodových nábojů velikosti $+q$ a $-q$ v bodech z_1 a z_2 je komplexní potenciál

$$w = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_1} - 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_2} = 2qi \operatorname{Ln} \frac{z - z_2}{z - z_1}. \quad (42)$$



Obr. 67.

Ekvipotenciální čáry pole jsou křivky

$$\operatorname{Im} w = 2q \ln \left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| = \operatorname{const},$$

což jest totéž jako

$$\left| \frac{z - z_2}{z - z_1} \right| = \operatorname{const},$$

což jsou Apolloniovy kružnice, podle nichž jsou oba body z_1 a z_2 sdruženy (viz § 20). Silové čáry

$$\operatorname{Re} w = 2q \operatorname{Arg} \frac{z - z_2}{z - z_1} = \operatorname{const}$$

jsou kružnice procházející body z_1 a z_2 (viz § 20). Na obr. 66 jsou ekvipotenciální čáry vtaženy plně a silové čáry čárkovaně.

Příklad 3. Pro systém souhlasných bodových nábojů velikosti q máme pro potenciál místo (42) vztah

$$w = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_1} + 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{z - z_2} = 2qi \operatorname{Ln} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)}. \quad (43)$$

Ekvipotenciální čáry

$$|z - z_1| |z - z_2| = \operatorname{const}$$

jsou Cassiniho ovály. Jsou to geometrická místa bodů, jejichž součin vzdáleností od dvou daných pevných bodů z_1 a z_2 je konstantní (viz

př. 12 úvod). Pro $\text{const} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}$ je to Bernouilliho lemniskata, pro $\text{const} = 0$ se rozpadnou v dvojici bodů z_1, z_2 , pro $0 < \text{const} < \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}$ se rozpadnou ve dvojici křivek oválovitého tvaru a konečně pro $\frac{|z_1 - z_2|^2}{4} < \text{const}$ jsou tvořeny jedinou čarou, která má tvar promáčknutého oválu (viz obr. 67).

Příklad 4. Pro systém bodových nábojů q_1, q_2, \dots, q_n v bodech z_1, z_2, \dots, z_n má komplexní potenciál tvar

$$w = 2i \sum_{k=1}^n q_k \text{Ln} \frac{1}{z - z_k}. \quad (41)$$

Příklad 5. *Elektrostatické pole dipolu*. Dvojice nesouhlasných bodových nábojů $\pm q$ v bodech $z_1 = 0$ a $z_2 = -h$ má podle vzorce (37) komplexní potenciál

$$w = 2qi \text{Ln} \frac{z+h}{z} = 2qi \text{Ln} \left(1 + \frac{h}{z} \right) = 2pi \text{Ln} \left(1 + \frac{h}{z} \right)^{\frac{1}{h}},$$

kde $p = qh$. Budeme nyní náboje přibližovat k sobě a současně zvětšovat velikost náboje tak, aby součin $p = qh$ zůstal konstantní. Limitní případ, který tak dostaneme, budeme nazývat *bodový dipol s momentem p*.

Komplexní potenciál dipolu ležícího v počátku bude

$$w = 2pi \lim_{h \rightarrow 0} \text{Ln} \left(1 + \frac{h}{z} \right)^{\frac{1}{h}} = 2pi \text{Ln} e^{\frac{1}{z}} = \frac{2pi}{z}. \quad (45)$$

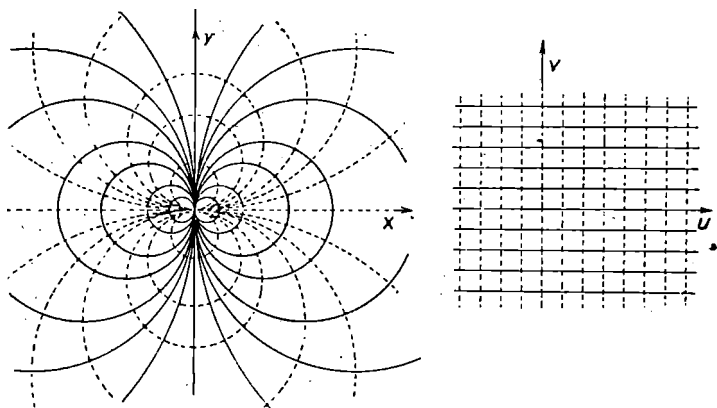
Je to lineární lomená funkce (při výpočtu jsme použili vzorců (24) a (32) kap. III.)*) Mapa pole je konformně ekvivalentní síť k síti kartézských souřadnic v rovině (w) při zobrazení

$$w = \frac{2pi}{z}.$$

Ekvipotenciální čáry $V = c$ tvoří na kouli (w) svazek kružnic dotýka-

* Při použití vzorce (24) stačí dosadit $h = \frac{1}{n}$. Ve vzorci (32) jsme vypustili adiční konstantu $2k\pi i$.

jících se v bodě $w = \infty$. Podle věty (4) kap. II odpovídá tomuto svazku svazek kružnic dotýkajících se v bodě $z = 0$. Reálné ose $V = 0$ odpovídá imaginární osa $x = 0$ (při dosazení reálných z do (36) dostáváme ryze imaginární w). Ekvipotenciální čáry v rovině z tvoří tedy svazek kružnic dotýkajících se osy y (na obr. 68 zakresleny plně). Zcela analogicky odvodíme, že silové čáry tvoří svazek kružnic dotýkajících se osy x (na obr. 68 vytaženy čárkovaně).



Obr. 68.

Vektor intensity pole odvodíme podle (39) a dostaneme

$$E = + i \left(\frac{2pi}{z^2} \right) = \frac{2p}{z^2} = \frac{2p}{r^2} e^{2i\varphi}$$

kde $z = re^{i\varphi}$. Jeho modul je nepřímo úměrný čtverci vzdálenosti bodu od dipolu, jeho složky jsou

$$E_x = \frac{2p \cos 2\varphi}{r^2}, \quad E_y = \frac{2p \sin 2\varphi}{r^2}$$

§ 39. Komplexní potenciál v hydromechanice a theorii vedení tepla. Pro oblast D , ve které nejsou ani zřídla ani víry při stacionárním proudění nestlačitelné kapaliny, plyne z analytického vyjádření

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0,$$

že v oblasti D jsou výrazy $-V_y dx + V_x dy$ a $V_x dx + V_y dy$ totálními diferenciály jistých funkcí:

$$-V_y dx + V_x dy = d\varphi(x, y); \quad V_x dx + V_y dy = d\psi(x, y). \quad (46)$$

Druhou z nich nazýváme potenciální a platí

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad V = \text{grad } \varphi(x, y); \quad (47)$$

$$\varphi(x, y) = \int_L^z V_x dx + V_y dy + C.$$

Pomocí funkce φ můžeme vyjádřit cirkulaci vektoru rychlosti podél uzavřené křivky C . Je (viz str. 121)

$$(\mathbf{V}, \mathbf{s}^0) ds = (\mathbf{V}, d\mathbf{z}) = (V_x + iV_y, dx + i dy) = V_x dx + V_y dy,$$

a podle poslední rovnice (46) je poslední výraz roven $d\varphi(x, y)$ a *cirkulace vektoru rychlosti*

$$\Gamma = \oint_C (\mathbf{V}, \mathbf{s}^0) ds = \oint_C d\varphi(x, y). \quad (48)$$

Ekvidistantní čáry $\psi(x, y) = c$ prvé funkce souhlasí s trajektoriemi pohybujících se částic kapaliny, t. j. s proudovými čarami kapaliny. Proto nazýváme druhou funkci *proudovou funkcí* a je

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y};$$

$$\psi(x, y) = \int_{L_1}^z -V_y dx + V_x dy + C. \quad (49)$$

Ve vzorcích (49) a (47) mají křivky L a L_1 tentýž smysl jako v (24) a (32).

Pomocí proudové funkce ψ můžeme vyjádřit *tok kapaliny* křivkou ležící cele v oblasti D . Je (viz str. 124)

$$(\mathbf{V}, \mathbf{n}^0) ds = (\mathbf{V}, -i d\mathbf{z}) = (V_x + iV_y, dy - i dx) = V_x dy - V_y dx.$$

Podle rovnice (46) je poslední výraz roven $d\psi$ a tok

$$Q = \int_C (\mathbf{V}, \mathbf{n}^0) ds = \int_C d\psi = \psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1), \quad (50)$$

kde $z_1 = x_1 + iy_1$ a $z_2 = x_2 + iy_2$ jsou koncové body křivky C .

Funkce.

$$w = \Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (51)$$

se nazývá *komplexním potenciálem proudění*. Rovnice (47) a (49) ukazují, že *komplexní potenciál proudění je jednoznačná funkce* v jednoduše souvislé oblasti D , která neobsahuje ani zřidel ani vírů.

Podle vzorce (48) je v případě vícenásobně souvislé oblasti cyklická konstanta funkce $\varphi(x, y)$ při oběhu jisté „díry“ jen tehdy nenulová, je-li při tom nenulová cirkulace Γ (t. j. je-li nenulová celková vydatnost vírů v této oblasti). Z (50) pak vidíme, že cyklická konstanta funkce $\psi(x, y)$ je nenulová při oběhu jisté díry jen tehdy, je-li $Q \neq 0$ (t. j. je-li nenulová vydatnost všech zřidel v této díře). Zřejmě tedy ve vícenásobně souvislé oblasti se může jak reálná tak i imaginární část funkce $\Phi(z)$ stát mnohoznačnou. V tom spočívá rozdíl v zavedení potenciálu v hydromechanice a v elektrostatice.

Poznamenejme, že i zde jsou spojitě větve funkce $\Phi(z)$ všude regulární a $\Phi(z)$ je dalším příkladem analytické funkce. Tak jako v předešlém paragrafu je derivace $\Phi'(z)$, všude jednoznačná.

Pomocí komplexního potenciálu můžeme vyjádřit všechny základní veličiny svázané s rovinným prouděním. Tak na př. z (47) a (49) máme

$$\Phi'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = V_x - i V_y,$$

a pro vektor rychlosti proudění

$$\mathbf{V} = V_x + iV_y = \overline{\Phi'(z)} \quad (52)$$

a pro jeho modul

$$V = |\Phi'(z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}. \quad (53)$$

V rovině komplexního potenciálu odpovídají proudnicím přímky $\text{Im } w = \text{const}$ a ekvipotenciálními liniím přímky $\text{Re } w = \text{const}$.

Příklad 1. Pro *postupně proudění* (př. 3 § 35) potenciální funkce i funkce proudová jsou lineární

$$\psi = V_x x + V_y y + C_1, \quad \varphi = -V_y x + V_x y + C_2.$$

Komplexní potenciál je

$$w = \Phi(z) = \varphi + i\psi = x(V_x - iV_y) + iy(V_x - iV_y) = \bar{V}z, \quad (54)$$

kde $\bar{V} = V_x - iV_y$ je komplexní číslo — t. zv. komplexně sdružená rychlost. Potenciál je zřejmě lineární funkce.

Příklad 2. Pro bodové zřídlo (př. 4 § 35) jsou komponenty rychlosti

$$V_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad V_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

a potenciální a proudová funkce se stanoví podle (47) a (49):

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln|z|, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \text{Arg } z$$

a komplexní potenciál:

$$w = \Phi(z) = \frac{Q}{2\pi} \text{Ln}z. \quad (55)$$

Příklad 3. Pro bodový vířivý pohyb (př. 5 § 35) se najde analogicky

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \text{Arg } z, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln|z|$$

a komplexní potenciál

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln}z \quad (56)$$

se liší od (55) jen faktorem $\frac{1}{i}$. Z toho plyne, že ekvipotenciální linie

a proudnice si v př. 2 a 3 vymění místa.

Příklad 4. Bodový dipol je v hydromechanice zcela analogický dipolu v elektrostati (př. 5 § 38). Pro komplexní potenciál místo (45) dostaneme

$$w = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad (57)$$

kde $M = Qh$ je moment dipolu. Proudnic (57) souhlasí s ekvipotenciálními čarami (45) a ekvipotenciální čáry (57) se silovými čarami (45).

Komplexní potenciál v nauce o vedení tepla se definuje zcela ana-

logicky. Pro stacionární rovinné tepelné proudění v oblasti D , v které nejsou tepelné zdroje, platí podle (21) a (22)

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} = 0. \quad (58)$$

Roli potenciálu φ hraje teplota v :

$$Q = -k \operatorname{grad} v; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{k} Q_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y.$$

Z prvního z výrazů (58) plyne, že výraz $-\frac{1}{k}(Q_y dx - Q_x dy)$ je totálním diferenciálem jisté funkce $u = u(x, y)$, která se nazývá funkcí proudění (proudovou) a je s teplotou spojena vztahy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{k} Q_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k} Q_x,$$

což jsou zřejmě Cauchy-Riemannovy rovnice. Funkce $u(x, y)$ je konstantní podél čar zvaných opět analogicky proudnice. Funkce komplexní proměnné

$$w = \Psi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

se nazývá *komplexním potenciálem tepelného proudění*. Je regulární v celé jednoduše souvislé oblasti D , v níž proudění vyhovuje rovnicím (58). *Vektor tepelného proudění* je

$$Q = -k \operatorname{grad} v = -k \left[\frac{\partial v}{\partial x} - ik \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -ki \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -ki \Psi'(z). \quad (59)$$

§ 40. Methoda konformního zobrazení. Uvedeme zde čtyři typy charakteristických úloh, pro jejichž řešení je velmi výhodné použít metody konformního zobrazení. Budeme je formulovat pro elektrostatické pole a pak uvedeme příslušné změny, které je třeba učinit v jejich formulaci pro jiné fyzikální případy.

Jsou to tyto úlohy:

I. *Stanovení elektrostatického pole v zakřiveném „pásmu“ mezi dvěma vodiči C_1 a C_2 , které mají obecně společné jen svoje konce ležící v bodě $z = \infty$. Potenciální spád mezi C_1 a C_2 je dán.*

II. Stanovení uzavřeného pole v zakřiveném „mezikruží“ (prstenci) mezi dvěma uzavřenými navzájem nesouvisícími vodiči, rozprostírajícími se cele v konečnu. Potenciální spád mezi oběma vodiči je dán.

III. Stanovení pole nekonečného vodiče C . Je dán modul vektoru intenzity pole v bodě $z = \infty$ a předpokládáme, že v bodě $z = \infty$ nemá nekonečný vodič násobné body.

IV. Stanovení pole vně uzavřeného vodiče, rozprostírajícího se zcela v konečnu. Je dán vektor intenzity pole v bodě $z = \infty$ co do směru i velikosti.

Vodičem ve všech těchto případech rozumíme křivku C , v jejíchž všech bodech má potenciální funkce pole konstantní hodnotu (je to průsečnice vodivého válce s osou kolmou k rovině pole s rovinou pole). Pole je určeno až na adiční konstantu svým komplexním potenciálem.

V hydromechanice tyto úlohy jsou *úlohami obtékání*. Jako cíl si klademe popsání proudění kapaliny obtékající dané křivky C . Kapalinu pokládáme za ideální, bez vírů a bez zřidel. Křivky C v tomto případě jsou proudnicemi příslušného proudění. Úlohu potenciálního spádu zde má spád, tak jak mu rozumíme v běžném životě, t. j. množství kapaliny protékající za jednotku časovou libovolným průřezem oblasti D (viz vzorce (50) a (39)). V úl. III a IV je dán modul, resp. i směr vektoru rychlosti v nekonečnu.

Tytéž otázky mohou být též dány v theorii tepelného proudění. Úlohu vodičů převezmou tepelné vodiče konstantní teploty, potenciální spád je dán teplotním spádem a konečně vektor intenzity pole je totožný s gradientem teploty.

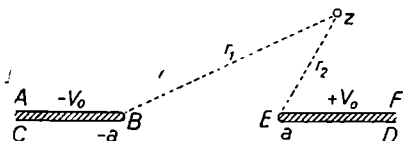
V dalším budeme zkoumat z každé kategorie různé konkrétní příklady z rozličných fyzikálních oborů.

Ve všech těchto případech získáme jedno z možných řešení. V § 70 dokážeme, že podmínky v případě IV lze doplnit tak, že existuje jedno jediné řešení našeho příkladu. Totéž je možno provést i v ostatních případech, ale důkazy zde nebudeme provádět. V našich příkladech je jednoznačnost řešení ihned vidět z fyzikální podstaty, takže nalezené obecné řešení bude i jednoznačným řešením našeho problému.

§ 41. Pole v pásu. Začneme s příklady typu I. Předpokládáme, že pás D neobsahuje žádné náboje, které vytvářejí pole. Pak podle

tvrzení § 38 existuje v pásu D komplexní potenciál, který je regulární funkcí komplexní proměnné (protože D je jednoduše souvislá oblast, je i potenciál jednoznačná funkce). Potenciální funkce $V(x, y)$ má na křivkách C_1 a C_2 konstantní hodnotu a rozdíl těchto hodnot $V_2 - V_1$ je dán (V_2 a V_1 jsou zřejmě hodnoty potenciální funkce na křivkách C_2 a C_1).

Z toho plyne, že funkce $w = F(z)$ zobrazí jednoznačně oblast D na vodorovný pás roviny (w) šíře $V_2 - V_1 = V_0$. Dále dvojici totožných bodů (budeme je označovat symboly $+\infty$ a $-\infty$) na koncích okrajů přímého pásu v rovině (w) odpovídají body hranice oblasti D ležící v nekonečnu (které budeme souhlasně označovat $\pm \infty$). To plyne okamžitě z toho, že body $w = \pm \infty$ prochází nekonečně mnoho ekvipotenciálních čar $V = \text{const}$ a podobně se musí dít i pro body, které jim odpovídají. Z fyzikálních podmínek je jasné, že to nemohou být hraniční body v konečnu.



Obr. 69.

Všem uvedeným podmínkám vyhovuje jedno-jednoznačné konformní zobrazení oblasti D na pás $0 < \text{Im } w < V_0$ s okrajovými podmínkami pro nekonečně vzdálené body $F(\pm \infty) = \pm \infty$. Z věty § 23 plyne, že takové zobrazení vždy existuje a je určeno až na adiční konstantu jednoznačně, t. j. řešení úlohy I je vždy možné.

Příklad 1. Kondensátor skládající se ze dvou nekonečně velkých desek, z nichž druhá leží v úrovni první ve vzdálenosti $2a$. Potenciální spád činí $2V_0$.

Na obr. 69 je řez kondensátoru rovinou kolmou k rovině desek. Úloha přejde v určení pole dvou polopřímek $-\infty < x < -a$ a $a < x < \infty$ s daným potenciálním spádem. Je to speciální případ případu 1: čára C_1 představuje výřez ABC podél záporné reálné poloosy a čára C_2 výřez DEF podél kladné reálné poloosy. Zobrazení oblasti D na vodorovný pás šířky $2V_0$ zprostředkuje funkce (60) § 33 s příslušným normováním. Vypustíme-li pro naše úvahy nepodstatnou adiční konstantu, dostaneme komplexní potenciál

$$\omega = \frac{2V_0}{\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}). \quad (60)$$

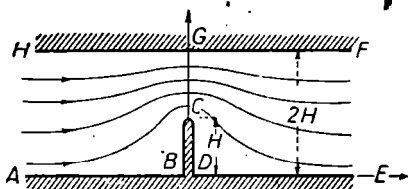
Modul vektoru intenzity pole podle (40) je

$$E = \left| \frac{d\omega}{dz} \right| = \frac{2V_0}{\pi} \frac{1}{|\sqrt{z^2 - a^2}|} = \frac{2V_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}},$$

kde $r_1 = |z + a|$ a $r_2 = |z - a|$ jsou vzdálenosti bodu z od konců obou polopřímek. V počátku souřadnic je $E = \frac{2V_0}{\pi a}$, t. j. E se jen málo liší od intenzity pole obyčejného deskového kondensátoru $\frac{V}{a}$.

Při přibližování ke koncovým bodům polopřímek intenzita vzrůstá (defekt na hraně), při vzdalování bodu z do nekonečna intenzita konverguje k nule.

Příklad 2. Proudění ideální kapalin v přímé trubici šířky $2H$, v níž je kolmo na její stěny umístěna přepážka vysoká polovinu její celkové výšky. Potenciální spád Q je dán. Úloha spočívá v podstatě



Obr. 70.

v tom, zobrazit oblast D (obr. 70) na vodorovný pás. Funkcí tvaru

$\zeta = \frac{\pi}{2H} z$ převedeme oblast D na oblast př. 4 § 33, kde je $h = \frac{\pi}{2}$.

Vzorec (59) předcházejícího paragrafu nám dává možnost zobrazit oblast D na horní polorovinu $\text{Im } \omega > 0$:

$$\omega = \sqrt{\text{tgh}^2 \frac{1}{2} \zeta + \text{tg}^2 \frac{1}{4} \pi} = \sqrt{\text{tgh}^2 \frac{\pi z}{4H} + 1}.$$

Přitom okraji $ABCDE$ trubice odpovídá úsečka $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ a okraji FGH polopřímky $(\sqrt{2}, \infty)$ a $(-\infty, -\sqrt{2})$. Zobrazíme ještě polorovinu ω na sebe samu tak, aby body A, H a E, F přešly v body 0 a ∞ :

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2} + \omega}{\sqrt{2} - \omega} = \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{\text{tgh}^2 \frac{\pi z}{4H} + 1}\right)^2}{1 - \text{tgh}^2 \frac{\pi z}{4H}} = \left(\sqrt{2} \cosh \frac{\pi z}{4H} + \right.$$

$$+ \sqrt{\cosh^2 \frac{\pi z}{4H} + \sinh^2 \frac{\pi z}{4H}} = \left(\sqrt{2} \cosh \frac{\pi z}{4H} + \sqrt{\cosh \frac{\pi z}{2H}} \right)^2$$

(pro výpočet zobrazení viz vzorec (45) a př. 3 kap. III.). Protože bod $C = Hi$ přejde postupně v bod $\omega = 0$ a pak v $\omega_1 = 1$, odpovídá okraji $ABCDE$ kladná a okraji FGH záporná reálná poloosa. Nakonec zobrazíme ještě polorovinu na pás šířky Q , což zprostředkuje logaritmická funkce:

$$w = \frac{Q}{\pi} \ln \omega_1 = \frac{2Q}{\pi} \ln \left(\sqrt{2} \cosh \frac{\pi z}{4H} + \sqrt{\cosh \frac{\pi z}{2H}} \right). \quad (61)$$

§ 42. Prstencové pole. Příklad II se liší od případu I tím, že okraje oblasti D nemají společné body a oblast jimi uzavřená je dvojnásobně souvislá. Methoda použitá v předešlém paragrafu zde nevede k cíli, protože není možné zobrazit jedno-jednoznačně a konformně oblast D na pás (viz § 23). Úloha se snadno vyřeší, budeme-li znát jedno-jednoznačné a konformní zobrazení oblasti D na mezikruží*) $r < |\omega| \leq R$. Pro mezikruží je zřejmě komplexním potenciálem logaritmická funkce

$$w = ki \operatorname{Ln} \omega, \quad (62)$$

kde k je reálná konstanta (imaginární část funkce (62) nabývá na okrajích mezikruží, t. j. na kružnicích $|\omega| = r$ a $|\omega| = R$, konstantních hodnot). Velikost konstanty určíme z daného potenciálního spádu V_0 . Stačí potom jen dosadit $f(z)$ za ω do (62) a dostáváme komplexní potenciál v dané oblasti řešící naši úlohu:

$$w = ki \operatorname{Ln} f(z).$$

Potenciál, který jsme zkonstruovali, je zřejmě funkcí mnohoznačnou v důsledku mnohoznačnosti své reálné části $U = -k \operatorname{Arg} f(z)$. Fyzikálně je tento fakt zcela přípustný, neboť derivace potenciálu, která charakterizuje pole, je jednoznačná.

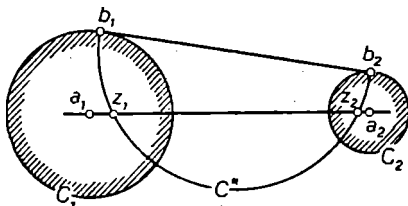
Příklad 1. Pole dvou souhlasně nabitých kruhových válců s rovnoběžnými osami.

*) V podrobnějších učebnicích theorie funkcí komplexní proměnné se dokazuje, že se libovolná dvojnásobně souvislá oblast dá zobrazit konformně na mezikruží.

Úloha vlastně přechází v úlohu sestrojiti pole vně dvou kružnic C_1 a C_2 . Buďtež a_1 a a_2 středy těchto kružnic. Sestrojíme nad jejich společnou vnější tečnou b_1b_2 jako nad průměrem půlkružnice C^* (obr. 71). Průsečíky kružnice C^* se střednou a_1a_2 , které označíme z_1 resp. z_2 , jsou současně sdruženy v kruhové inverzi podle obou kružnic. To plyne z toho, že kružnice C^* a přímka a_1a_2 jsou orthogonální k oběma kružnicím C_1 a C_2 (viz § 20).

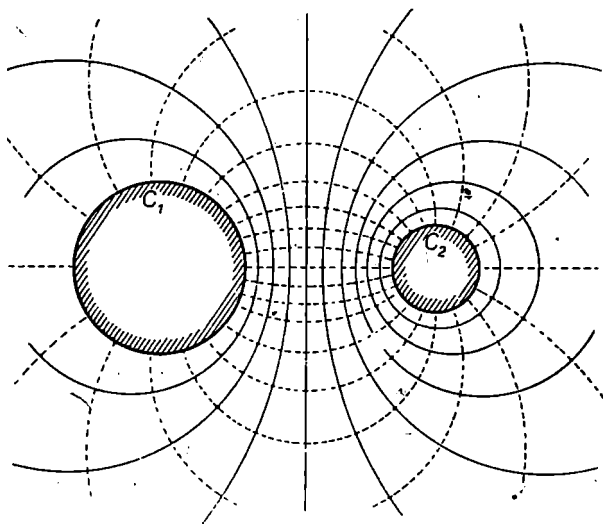
Pomocí lineární lomené funkce

$$\omega = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$



Obr. 71.

zobrazíme nyní rovinu (z) na pomocnou rovinu (ω) tak, že body z_1 a z_2 přejdou v body 0 a ∞ , a dále necht' kružnicím C_1 a C_2 odpovídají



Obr. 72.

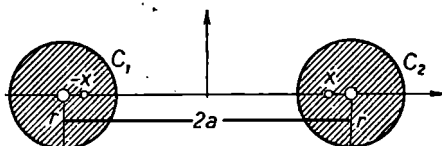
kružnice C'_1 a C'_2 v rovině (ω). Body 0 a ∞ jsou pak sdruženy v inverzi podle kružnic C'_1 a C'_2 (§ 20). To však znamená, že C'_1 a C'_2 jsou kon-

centrické se středem v $\omega \neq 0$. Komplexní potenciál pomocného pole je podle (50) $w = ki \operatorname{Ln} \omega$ a pro dané pole

$$w = ki \operatorname{Ln} \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (62)$$

Žádaného potenciálního spádu dosáhneme vhodnou volbou konstanty k .

Komplexní potenciál našeho pole souhlasí s komplexním potenciálem (42) pole dvou souhlasně nabitých bodových nábojů (př. 2, § 38), jestliže položíme $k = 2q$.*) Mapa pole vně kruhů C_1 a C_2 tedy zcela



Obr. 73.

souhlasí s mapou pole na obr. 65. Ekvipotenciální čáry jsou Apolloniovy kružnice a silokřivky jsou kružnice procházející body z_1 a z_2 (obr. 72). Křivky C_1, C_2 patří do svazku ekvipotenciálních křivek.

Z našeho příkladu vidíme, že se mapa pole nezmění, nahradíme-li kteroukoliv ekvipotenciální čáru vodičem (aspoň v jisté části pole). V hydromechanice tomu fyzikálně odpovídá umístění tvrdých stěn podél některé z proudnic.

Příklad 2. Pole dvojžilného vedení je speciálním případem právě uvažované úlohy (obr. 73). x -ové souřadnice bodů z_1 a z_2 , současně sdružených v inverzi podle obou kružnic, určíme z rovnice $(a + x)(a - x) = r^2$, odkud

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Vzorec (62) nabývá tvaru

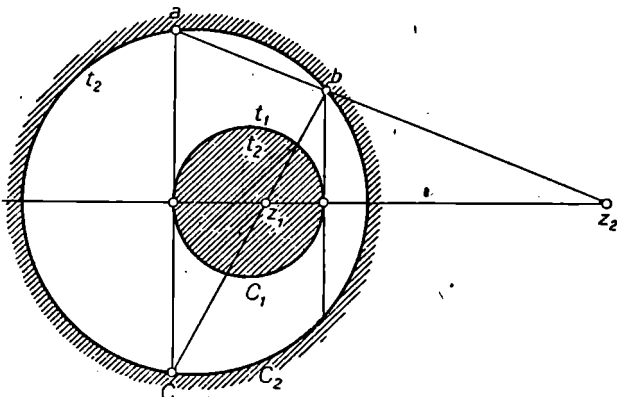
$$w = ki \operatorname{Ln} \frac{z + \sqrt{a^2 - r^2}}{z - \sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (63)$$

Vyjádríme si ještě podmínku toho, že potenciální spád mezi C_1 a C_2

*) Snadno se dokáže, že i v našem případě $q' = \frac{1}{2}k$ udává velikost úhrnného náboje na jednotlivých kružnicích. Důkaz: Podle Gaussovy věty § 36 je vektorový tok intensity pole libovolnou uzavřenou křivkou C , uvnitř které leží některá z kružnic, na př. C_2 , roven $4\pi q$, kde q je úhrnný náboj na C_2 . Protože (62) je shodná s (42), je tento tok v soulase s výše uvedeným výkladem roven $2\pi k$.

je V_0 . Vyčíslíme si rozdíl imaginárních částí funkce (58) v bodech $a - r$ a $-a + r$:

$$\begin{aligned} V_0 &= k \ln \left| \frac{a - r + \sqrt{a^2 - r^2}}{a - r - \sqrt{a^2 - r^2}} \right| - k \ln \left| \frac{-a + r + \sqrt{a^2 - r^2}}{-a + r - \sqrt{a^2 - r^2}} \right| = \\ &= 2k \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}. \end{aligned}$$



Obr. 74.

Z toho vypočteme k pomocí V_0 :

$$k = \frac{V_0}{2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r}} \approx \frac{V_0}{2 \ln \frac{2a}{r}},$$

kde r je veličina nekonečně malá oproti a .

Příklad 3. Rozdělení teploty mezi dvěma cylindrickými excentrickými troubami vyhřátými na teplotu t_1 resp. t_2 (obr. 74).

Naší úlohou je konstruovat tepelný tok v prstenci mezi kružnicemi C_1 a C_2 . Sestrojíme nejprve dva body současně sdružené v inverzi podle obou kružnic C_1 a C_2 . Konstrukce je provedena na obr. 74. (V koncových bodech středné na kružnici C_1 vztýčíme kolmice, až protnou v bodech a, b a c kružnici C_2 . Průsečíky spojnice ab resp. bc se střednou

jsou hledané body z_2 resp. z_1). Důkaz přenecháváme čtenáři. Pomocí pomocného zobrazení

$$\omega = \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

převedeme úlohu na konstrukci pole v mezikruží C'_1 a C'_2 . Řešení dává imaginární část komplexního potenciálu

$$v = \text{Im } \Psi(\omega) = k \ln|\omega| + l,$$

kde konstanty k a l určíme z daných hodnot teploty na kružnicích C_1 a C_2 . Po dosazení $\frac{z - z_1}{z - z_2}$ za ω do naší logaritmické funkce dostáváme hledaný průběh teploty v rovině (z).

§ 43. Úloha o obtékání nekonečné křivky. Při rozboru úlohy III budeme používat hydrodynamické terminologie. Oblast D bude v našich úvahách jednoduše souvislá; komplexní potenciál $w = \Phi(z)$ bude tedy jednoznačná funkce. Proudnice budou vyjádřeny křivkami $\text{Im } \Phi(z) = \text{const}$ a kromě toho můžeme jako v § 41 dokázat, že bodu $z = \infty$ odpovídá nekonečně vzdálený bod křivky C . Funkce $w = \Phi(z)$ zobrazí jedno-jednoznačně a konformně oblast D na horní polorovinu s okrajovou podmínkou $\Phi(\infty) = \infty$. Není-li bod $z = \infty$ násobným bodem křivky C , můžeme ještě stanovit velikost rychlosti v bodě $z = \infty$, t. j. $|\Phi'(\infty)| = v_\infty$.* Je možno dokázat, že takové zobrazení je jednoznačně určeno až na adiční konstantu. V případě, že bod $z = \infty$ je dvojným bodem křivky C , je hodnota $|\Phi'(z)|$ rovna buď 0, nebo ∞ , podle toho, je-li úhel tečen ostrý nebo tupý (viz § 23); rychlost musíme definovat v jiném, regulárním bodě křivky C .

Příklad 1. Obtékání desky výšky H nekonečně širokým proudem kapaliny danou rychlostí v_∞ (obr. 75). Známe již z dřívějších úvah funkci zobrazující oblast D na polorovinu:

$$w = \sqrt{z^2 + H^2}.$$

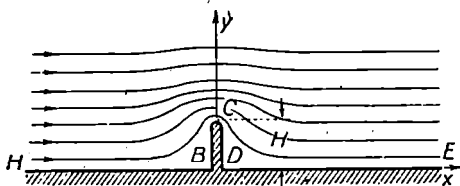
*) Hodnotou derivace $\Phi'(z)$ v bodě $z = \infty$, t. j. $\Phi'(\infty)$, budeme rozumět limitu $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi'(z)$, pokud tato limita existuje. Viz § 69.

(§ 27, př. 1). Derivace této funkce je

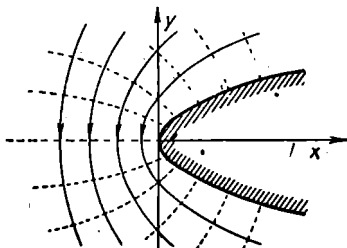
$$\frac{dw}{dz} = \frac{z}{\sqrt{z^2 + H^2}}$$

odkud $\left| \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{z}{\sqrt{z^2 + H^2}} \right| = 1$; hledaný komplexní potenciál tedy bude

$$w = v_{\infty} \sqrt{z^2 + H^2}. \quad (64)$$



Obr. 75.



Obr. 76.

Rychlost proudění (64) nekonečně vzrůstá v bodě desky C , pro nějž $z = iH$ (defekt na hraně), a klesá k nule v bodech B a D , kde $z = 0$. Výsledek je fyzikálně zcela samozřejmý.

Příklad 2. Obtékání paraboly $y^2 = 2px$. Rychlost proudění v bodě $z = 0$ je v_0 (obr. 76). Hledejme zobrazení oblasti D na horní polořovinu. Vzpomeneme si, že funkce $w = \sqrt{z}$ zobrazí na polořovinu vnějšek parabol s ohniskem v bodě $z = 0$ (§ 25). Ohnisko naší paraboly je v bodě $z = \frac{1}{2}p$; použijeme tedy funkce

$$w = \sqrt{z - \frac{1}{2}p}. \quad (65)$$

Položíme $w = u + iv$ a $z = x + iy$ a najdeme

$$u^2 - v^2 = x - \frac{1}{2}p, \quad 2uv = y.$$

Dosadíme $u = \frac{y}{2v}$ z druhé rovnice do první a máme

$$\frac{y^2}{4v^2} - v^2 = x - \frac{1}{2}p.$$

Z poslední rovnice je ihned vidět, že parabole odpovídá přímka $v = \sqrt{\frac{1}{2}p}$. Funkce (65) zobrazí oblast D na polorovinu $\text{Im } w > \sqrt{\frac{1}{2}p}$ a modul derivace v bodě $z = 0$ je

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{2\sqrt{z - \frac{1}{2}p}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2p}};$$

komplexní potenciál řešící danou úlohu bude

$$w = v_0 \sqrt{2pz - p^2}. \quad (66)$$

Rychlost proudění v obecném bodě $z = x + iy$ dané paraboly bude

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{pv_0}{\sqrt{(2px - p^2)^2 + 4p^2y^2}} = \frac{v_0 \sqrt{p}}{\sqrt{2x + p}}.$$

Rychlost proudění se bude zmenšovat k nule s postupným vzdalováním bodu po parabole do nekonečna. Bude maximální ve vrcholu paraboly. Proudnice jsou paraboly konfokální s danou parabolou (obr. 76).

Příklad 3. Obtékání těžé paraboly. Proudění je symetrické podle reálné osy a blíží se parabole zleva (viz obr. 77).

Z daných podmínek je vidět, že záporná reálná poloosa je proudnicí, a podle principu vyloženého v § 42 můžeme místo dané úlohy zkoumat obtékání kontury ABC (obr. 77). Funkce (65) zobrazí oblast D ohraničenou konturou ABC v kvadrant roviny. Přitom se oblouk BC zobrazí na přímku $v = \sqrt{\frac{1}{2}p}$ a přímka AB na přímku $u = 0$. Funkce

$$w = \left(\sqrt{z - \frac{1}{2}p} - i \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 = z - p - i \sqrt{2pz - p^2}$$

zobrazuje tedy oblast D na horní polorovinu. Snadno se přesvědčíme, že rychlost v nekonečně vzdáleném bodě definovaná naší funkcí jako komplexním potenciálem je rovna jedné, a tedy proudění s rychlostí v_∞ má komplexní potenciál

$$w = v_\infty(z - p - i \sqrt{2pz - p^2}). \quad (67)$$

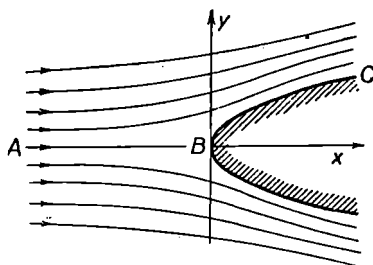
Poznamenejme ještě, že rychlost proudění ve vrcholu paraboly je

$$\frac{dw}{dz} \Big|_{z=0} = v_\infty \left(1 - i \frac{p}{\sqrt{2p - p^2}} \right) \Big|_{z=0} = 0.$$

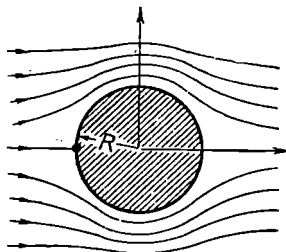
Rychlost konstruovaného proudění v bodě $z = 0$ je tedy rovna nule (takové body se nazývají kritické). Tento výsledek je fyzikálně ihned zřejmý.

§ 44. Úloha o úplném obtékání. Podmínky Čaplyginovy.

Příklad 1. Rozbor úlohy IV začneme speciálním případem, kdy křivkou C bude kružnice $|z| = R$. Diskusi provedeme opět v hydro-mechanické terminologii. Řešme nejprve tuto úlohu: Najít proudění ideální kapaliny kolem kružnice $|z| = R$ rychlostí $V_\infty = 1$, kde směr proudění je dán směrem kladné reálné poloosy (obr. 78).



Obr. 77.



Obr. 78.

Doplňme předpoklady ještě tím, že proudění je symetrické podle reálné osy, to znamená, že polopřímky $(-\infty, -R)$ a (R, ∞) jsou proudnicemi našeho proudění. Podle principu vyloženo v § 42 budeme tedy řešit proudění obtékající tyto polopřímky a horní půlkružnici $|z| = R$, což je v podstatě úloha III. Podle § 43 bude komplexním potenciálem funkce $w = \Phi(z)$, zobrazující konformně naši oblast na horní polorovinu s okrajovými podmínkami $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) = 1$. Touto funkcí je zřejmě funkce

$$w = \Phi(z) = z + \frac{R^2}{z},$$

která zobrazí půlkružnici $|z| = R$ na úsečku $-2R < u < 2R$ a polopřímky $-\infty < x < -R$ a $R < x < \infty$ na polopřímky $-\infty < u < -2R$ a $2R < u < \infty$ (viz § 26, kde $R = 1$, důkaz pro obecné R přenecháváme čtenáři). Vedle sestrojeného symetrického proudění

dostáváme vířivé proudění s vírem v bodě $z = 0$, jehož komplexní potenciál je

$$w = \Phi_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z,$$

kde Γ je libovolná reálná konstanta (§ 39). Protože rychlost vířivého proudění v nekonečnu je nula, má proudění s komplexním potenciálem

$$w = \Phi(z) + \Phi_1(z) = z + \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z, \quad (68)$$

které obtéká $|z| = R$ rychlostí v nekonečnu rovnou jedné. V § 70 dokážeme, že (68) řeší tuto úlohu pro všechny možné případy, nabývá-li jen konstanta Γ všech možných hodnot.

Rychlost proudění (68) je

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| 1 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z} \right|;$$

kritické body proudění jsou tedy body vyhovující rovnici

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - R^2 = 0,$$

odkud

$$z_{kr} = \frac{\Gamma i}{4\pi} \pm \frac{1}{4\pi} \sqrt{16\pi^2 R^2 - \Gamma^2}.$$

Je-li $|\Gamma| \leq 4\pi R$, pak $|z_{kr}| = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\Gamma^2 + 16\pi^2 R^2 - \Gamma^2} = R$, pro $|\Gamma| >$

$> 4\pi R$ je $|z_{kr}| = \frac{1}{4\pi} |\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2 R^2}|$. Odtud je ihned vidět, že

v prvním případě leží kritické body na kružnici $|z| = R$ a v druhém případě nikoli, při čemž jeden z nich leží vně kružnice a druhý uvnitř (jak ihned plyne z vlastnosti kořenů kvadratické rovnice $z'_{kr} z''_{kr} = -R^2$). Dále se omezíme na zkoumání prvního případu. Položíme pro body kružnice $z = Re^{i\varphi}$ a dostaneme

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| 1 - e^{-2i\varphi} - \frac{\Gamma i}{2\pi R} e^{-i\varphi} \right| = \left| 2 \sin \varphi - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right|;$$

pro argumenty kritických bodů platí:

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R}, \quad (69)$$

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin \frac{\Gamma}{4\pi R}.$$

V bodě $Re^{i\varphi}$ se proudnice rozdělí ve dvě části; jedna z nich obtéká po svrchní části, druhá po spodní části oblouku kružnice. V bodě $Re^{i\varphi}$ se obě opět spojují (obr. 79a). Prvý z obou bodů se nazývá *bod rozvětvení*, druhý *bod sjednocení*.

Pro symetrické proudění ($\Gamma = 0$) jsou kritické body v bodech $\pm R$. Vířivé proudění se snaží sblížit oba body; se vzrůstáním konstanty Γ se oba body k sobě přibližují, až pro $\Gamma = 4\pi R$ splynou (obr. 79b). Při dalším zvětšování vznikají při proudění uzavřené křivky.

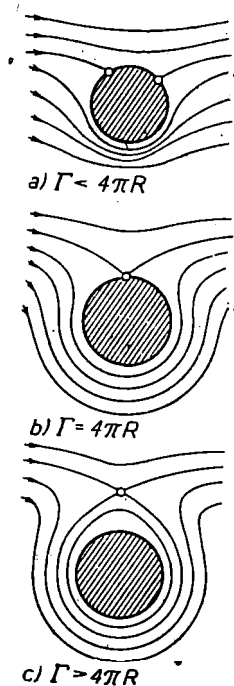
Konstrukce proudění obtékajícího s danou rychlostí V_∞ a s danou cirkulací Γ jistou uzavřenou konturou, nazývá se *úloha o úplném obtékání*. Vzorec (68) řeší úlohu o úplném obtékání pro případ kružnice $|z| = R$ a $V_\infty = 1$. Při dostatečně malých hodnotách Γ je možno k řešení použít místo hodnoty Γ souřadnic bodu sjednocení, které jsou s hodnotou Γ svázány rovnicí (69).

Budiž nyní dána libovolná uzavřená kontura C ležící cele v konečnu, na ní bod z_0 (bod sjednocení) a komplexní číslo V_∞ (rychlost v nekonečnu). Abychom vyřešili úlohu o úplném obtékání, najdeme konformní zobrazení

$$\zeta = f(z)$$

vnějšku kontury na vnějšek kruhu $|\zeta| > R$ s okrajovými podmínkami*)

*) V našem příkladě sice normujeme velikost derivace $f'(\infty)$, ale zato necháváme libovolnou velikost poloměru R , která se určí z okrajových podmínek (viz př. 2).



Obr. 79.

$$f(\infty) = \infty, \quad f'(\infty) = \bar{V}_\infty \quad (70)$$

(kde jsme označili pruhem komplexně sdruženou hodnotu). Přitom přejde bod z_0 v bod $\zeta_0 = Re^{i\varphi_0}$. Pro zobrazení potřebujeme, aby $|\varphi_0| \leq \frac{1}{2}\pi$. Pak sestrojíme podle vzorce (68) proudění s rychlostí 1 v nekonečnu a s bodem sjednocení ζ_0 :

$$w = \Phi_1(\zeta) = \zeta + \frac{R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \zeta \quad (71)$$

(cirkulaci Γ ve vzorci (71) určíme podle (69) ze vztahu $\Gamma = 4\pi R \sin\varphi_0$).

Superposice $w = \Phi_1[f(z)]$ dává komplexní potenciál proudění obtékajícího konturu C s bodem sjednocení z_0 a s rychlostí v nekonečnu:

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = \overline{\Phi_1'(\infty)} \cdot \overline{f'(\infty)} = V_\infty.$$

Je tedy (71) zřejmě řešením naší úlohy.

Příklad 2. Úplné obtékání kružnice $|z| = R$ s danou rychlostí V_∞ v bodě $z = \infty$.

Funkce (70) má v našem případě tvar $\zeta = \bar{V}_\infty z$; poloměr R ve vzorci (71) je zřejmě $|V_\infty|R$ a posledně jmenovaný vzorec nabude tvaru

$$\begin{aligned} w &= \bar{V}_\infty z + \frac{R^2 |V_\infty|^2}{\bar{V}_\infty z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z = \\ &= \bar{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z \end{aligned} \quad (72)$$

(kde jsme zanedbali adiční konstantu $\frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} \bar{V}_\infty$).

Čtenář si sám dokáže, že vztah (69) mezi cirkulací a souřadnicemi kritických bodů má v našem případě tvar

$$\Gamma = 4\pi v_\infty R \sin(\varphi_0 - \Theta), \quad (73)$$

kde $v_\infty = |V_\infty|$, $\Theta = \arg V_\infty$ a φ_0 je argument bodu sjednocení.

Poznámka. Místo (70) je možno zkoumat konformní zobrazení $\zeta = g(z)$ vnějšku kontury C na vnějšek kruhu $|\zeta| > R$ s okrajovými podmínkami $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) = 1$, a potom sestrojiti proudění

s rychlostí V_∞ podle vzorce (72). Toto řešení úlohy o úplném obtékání bude dáno funkcí

$$w = \bar{V}_\infty g(z) + \frac{V_\infty R^2}{g(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Lng}(z). \quad (74)$$

Příklad 3. Úplné obtékání profilu Žukovského (viz § 28).

Funkce (21) předcházející kapitoly,

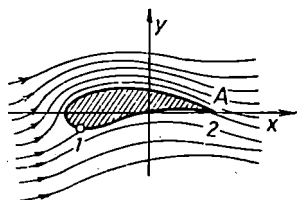
$$\omega = \omega(z) = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 4}), \quad (75)$$

zprostředkuje konformní zobrazení vnějšku kontury C na vnějšek jistého kruhu C^* (§ 28). Sestrojíme ještě lineární lomenou funkci s okrajovými podmínkami

$$\zeta = l(\omega), \quad l(\infty) = \infty, \quad l'(\infty) = 1,$$

která zobrazí vnějšek C^* na vnějšek jistého kruhu $|\zeta| > R$. Pak superposice funkcí $l(\omega)$ a (75) $\zeta = l[\omega(z)] = g(z)$ zobrazí vnějšek kontury C na vnějšek kruhu $|\zeta| > R$ s okrajovými podmínkami $g(\infty) = \infty$, $g'(\infty) = l'(\infty) \cdot \omega'(\infty) = 1$.

Hledaný komplexní potenciál má proto tvar (74).



Obr. 80.

Na ostré hraně křídla A ($z = 2$) má derivace funkce (75) hodnotu

$$\left. \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4}} \right) \Big|_{z=2} = \infty \text{ (defekt hrany), protože derivace } \frac{d\zeta}{d\omega} = l'(\omega) \text{ je konečná všude na } C^*, \text{ je}$$

$$\left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=2} = l'(\omega) \left. \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=2} = \infty.$$

Čili, jak dokázal známý ruský vědec S. A. Čaplygin (1869—1942), při obtékání profilu s ostrou hranou A je na ní vlivem vazkosti a vířivosti bod sjednocení proudění. Podle této Čaplyginovy věty v tom bodě

kružnice $|\zeta| = R$, který odpovídá hraně A , je derivace $\frac{dw}{d\zeta}$ nulová a výsledná velikost $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}$ rychlosti je konečná.

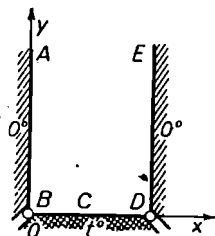
Výše uvedená věta se nazývá větou Čaplyginovou. Podle věty Čaplyginovy je při obtékání profilu s ostrou hranou jednoznačně

určena poloha bodu sjednocení a tedy podle rovnice (73) i velikost cirkulace Γ ve vzorci (74). Rychlost V_∞ zůstává komplexním parametrem (tak na př. změna směru vektoru V_∞ znamená změnu směru proudění).

§ 45. Jiné metody. Uvedeme ještě několik typických příkladů, které budeme řešit jinými metodami než těmi, které byly vyloženy v předcházejících paragrafech.

Příklad 1. *Rozprostření teploty v prostoru ohraničeném dvěma nekonečnými vertikálními stěnami s teplotami 0° a dnem vyhřátém na teploturu t° (mezi vertikálními stěnami a dnem je tepelná izolace).*

Úlohou je konstrukce komplexního potenciálu v pásu D zobrazeném na obr. 81, kde pro jednoduchost předpokládáme šířku pásu π .



Obr. 81.

Úloha patří vlastně do skupiny III, ale přítomnost izolujících bodů v dolním okraji poněkud mění úlohu. Budeme předpokládat, že řešení úlohy je z fyzikálních důvodů zřejmě jednoznačné. Tak jako v případě III zobrazíme nejprve oblast D na horní polorovinu. Toto zobrazení nám zprostředkuje funkce

$$\omega = \sin(z - \frac{1}{2}\pi) = -\cos z$$

(viz př. 2 § 33). Isolující body 0 a π přejdou přitom v body -1 , 1 . Budeme se nyní snažit najít funkci regulární v horní polorovině $w = g(\omega)$ takovou, že její imaginární část nabývá na úsečce reálné osy $(-1, 1)$, která odpovídá dnu AD , hodnoty t a na polopřímkách $(-\infty, -1)$ a $(1, \infty)$, odpovídajících stěnám AB a DE , hodnoty 0 . Pak stačí pouze provést superposici $w = g(-\cos z)$, abychom obdrželi hledaný komplexní potenciál.

Imaginární část funkce $g(\omega)$ získáme zřejmě jako lineární kombinaci funkcí $\arg(\omega + 1)$ a $\arg(\omega - 1)$.*

*) Funkce reálné proměnné.

$$\arg x = \begin{cases} 0 & \text{pro } x > 0 \\ \pi & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

má nespojitost v bodě $x = 0$, takže funkce $\arg(\omega + 1)$ a $\arg(\omega - 1)$ mají nespojitosti v uvedených bodech reálné osy.

$$\operatorname{Im} g(\omega) = C_1 \arg(\omega + 1) + C_2 \arg(\omega - 1) + C_3.$$

Pro výpočet tří konstant C_1, C_2, C_3 máme tyto určující rovnice:

$$\text{pro } -\infty < x < -1 \quad \operatorname{Im} g(\omega) = C_1\pi + C_2\pi + C_3 = 0,$$

$$\text{pro } -1 < x < +1 \quad \operatorname{Im} g(\omega) = C_2\pi + C_3 = f,$$

$$\text{pro } 1 < x < \infty \quad \operatorname{Im} g(\omega) = C_3 = 0.$$

$$\text{Odtud } C_3 = 0, C_2 = \frac{1}{\pi} t, C_1 = -\frac{1}{\pi} t \text{ a}$$

$$\operatorname{Im} g(\omega) = \frac{1}{\pi} t [\arg(\omega - 1) - \arg(\omega + 1)] = \frac{t}{\pi} \arg \frac{\omega - 1}{\omega + 1}.$$

Regulární funkce, která má výše uvedenou imaginární část, je funkce

$$w = \frac{t}{\pi} \ln \frac{\omega - 1}{\omega + 1}.$$

Dosadíme-li ještě $\omega = -\cos z$, dostaneme hledaný komplexní potenciál

$$w = \Psi(z) = \frac{t}{\pi} \ln \frac{\cos z + 1}{\cos z - 1} = \frac{2t}{\pi} \ln(i \cotg \frac{1}{2} z).$$

Máme

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{2t}{\pi} \ln \left(-\frac{e^{+iz} + e^{-iz}}{e^{+iz} - e^{-iz}} \right) = \frac{2t}{\pi} \ln \frac{\cos \frac{1}{2} x \cosh \frac{1}{2} y - i \sin \frac{1}{2} x \sinh \frac{1}{2} y}{\cos \frac{1}{2} x \sinh \frac{1}{2} y - i \sin \frac{1}{2} x \cosh \frac{1}{2} y} = \\ &= \frac{2t}{\pi} \ln \frac{\sinh \frac{1}{2} y \cosh \frac{1}{2} y + i \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x}{\cos^2 \frac{1}{2} x \sinh^2 \frac{1}{2} y + \sin^2 \frac{1}{2} x \cosh^2 \frac{1}{2} y} \end{aligned}$$

a konečně

$$\Psi(z) = \frac{2t}{\pi} \ln \frac{\sinh y + i \sin x}{\cosh y - \cos x}. \quad (76)$$

Odtud vypočteme výraz pro teplotu

$$v(x, y) = \operatorname{Im} \Psi(z) = \frac{2t}{\pi} \arg \frac{\sinh y + i \sin x}{\cosh y - \cos x} = \frac{2t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{\sinh y} \quad (77)$$

a pro proudovou funkci tepla

$$\begin{aligned} \mu(x, y) &= \operatorname{Re} \Psi(z) = \frac{2t}{\pi} \ln \left| \frac{\sinh y + i \sin x}{\cosh y - \cos x} \right| = \frac{t}{\pi} \ln \frac{\sinh^2 y + \sin^2 x}{(\cosh y - \cos x)^2} = \\ &= \frac{t}{\pi} \ln \frac{\cosh y + \cos x}{\cosh y - \cos x}. \end{aligned} \quad (78)$$

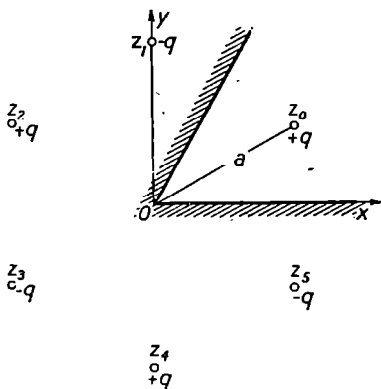
Z rovnic (77) a (78) snadno najdeme rovnice isothermických čar a proudnic:

$$\frac{\sin x}{\sinh y} = \text{const}, \quad \frac{\cos x}{\cosh y} = \text{const.} \quad (79)$$

Popsané metody lze použít i pro řešení př. 1 a 2 § 41: Je-li známo zobrazení oblasti D na polorovinu, pak místo dalšího hledání zobrazení poloroviny na pás, odpovídající podmínkám příkladu, je možno

najít regulární funkci v této polorovině s hledanými vlastnostmi (jak jsme to dělali výše).

Této metody používáme též pro konstrukci pole v libovolné jednoduše souvislé oblasti, na jejíž kontuře má imaginární část komplexního potenciálu po úsecích dané hodnoty (srov. dále § 57). Tato metoda je zvláště výhodná pro řešení elektrostatických úloh, v kterých je na hranici jednoduše souvislé oblasti dáno několik izolujících bodů, rozdělujících hranici C na několik úseků s různými potenciály.



Obr. 82.

Příklad 2. *Elektrostatické pole uvnitř úhlové výseče $0 < \arg z < \frac{1}{3}\pi$ vytvářené bodovým nábojem q v bodě $z_0 = ae^{i\frac{1}{3}\pi}$ (obr. 82).* V prostoru tomuto poli odpovídá pole mezi dvěma nekonečnými rovinami svírajícími daný úhel, vytvářený homogenně nabitou přímkou rovnoběžnou s průsečnicí obou rovin. Zobrazíme výseč D na horní polorovinu pomocí funkce

$$\zeta = z^3.$$

Náboj q přejde při tom do bodu $\zeta_1 = a^3i$.

Úloha se tím změnila na konstrukci komplexního potenciálu bodového náboje v polorovině. K řešení úlohy použijeme toho, že vliv vodiče tvořeného přímkou $\text{Im } \zeta = 0$ může být nahrazen účinkem náboje $-q$ v bodě $\zeta_2 = -a^3i$. Důkaz: Pro pole daných dvou nábojů je zřejmě osa $\text{Im } \zeta = 0$ jednou z ekvipotenciálních čar; v horní polorovině je

tedy pole dvou bodových nábojů shodné s polem jednoho bodového náboje a nábojů jím indukovaných na přímce $\text{Im } \zeta = 0$. Komplexní potenciál pomocného pole bude podle (42) § 38

$$w = 2qi \text{Ln} \frac{\zeta + a^3i}{\zeta - a^3i}$$

a hledaný komplexní potenciál dostaneme substitucí $\zeta = z^3$:

$$w = 2qi \text{Ln} \frac{z^3 + a^3i}{z^3 - a^3i}. \quad (80)$$

Ekvipotenciální čáry pole jsou dány rovnicí

$$\left| \frac{z^3 + a^3i}{z^3 - a^3i} \right| = \text{const.}$$

Pomocí polárních souřadnic $z = re^{i\varphi}$ přejde tato rovnice na tvar

$$r^6 + 2a^3r^3 \sin 3\varphi + a^6 = c^2(r^6 - 2a^3r^3 \sin 3\varphi + a^6),$$

odkud

$$\frac{c^2 - 1}{c^2 + 1} (r^6 + a^6) = 4a^3r^3 \sin 3\varphi$$

a konečně

$$\sin 3\varphi = C \left(r^3 + \frac{a^6}{r^3} \right),$$

kdě C je libovolná konstanta. Speciálně v případě $C = 0$ tvoří ekvipotenciální čáru polopaprsky $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, tvořící hranici pole.

Metoda použitá k řešení poslední úlohy (záměna přímého vodiče bodovým nábojem symetrickým s daným nábojem podle daného přímého vodiče) se nazývá *metoda zrcadlení*. Místo tohoto pomocného konformního zobrazení, jsme mohli též použít právě odvozené metody a nahradit hranice úhlové výšece systémem nábojů $q_1 = -q$, $q_2 = +q$, $q_3 = -q$, $q_4 = +q$, $q_5 = -q$ v bodech $z_1 = ai$, $z_2 = -ae^{-i\frac{1}{3}\pi}$, $z_3 = -ae^{i\frac{1}{3}\pi}$, $z_4 = -ai$, $z_5 = ae^{-i\frac{1}{3}\pi}$ (obr. 82). Čtenář se sám snadno přesvědčí, že toto pole a pole s komplexním potenciálem (80) navzájem souhlasí.

Metody zrcadlení se může s úspěchem použít i při řešení dalších příkladů jak z elektrostatiky, tak z hydromechaniky. V hydromechanice při této metodě v poli bodového víru s cirkulací Γ nahrazujeme

stěnu ohraničující polorovinu bodovým vírem cirkulace — Γ v bodě symetricky sdruženém s prvním bodem podle vyňaté stěny. Při řešení analogického případu pole bodového zřídla vydatnosti Q je možno stěnu nahradit symetricky položeným zřídlem téže vydatnosti Q (a ne vydatnosti — Q jako v případě víru resp. bodového náboje). Přenecháváme čtenáři podrobnější rozbor tohoto případu.

ÚLOHY.

1. Najděte ekvipotenciální čáry, silokřivky a vektor intenzity pole komplexního potenciálu

$$w = \frac{1}{z^2}.$$

2. Potenciální funkce pole má rovnici $V = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \pi y}{\operatorname{tg} \pi x}$. Najděte silokřivky a komplexní potenciál pole.
3. Ekvipotenciální křivky pole jsou kružnice $x^2 + y^2 = 2ax$. Stanovte velikost intenzity pole v bodech $(2a, 0)$ a (a, a) .
4. Proudění kapaliny má v počátku vír s cirkulací Γ a zřídlo vydatnosti Q („vířivé zřídlo“). Dokažte, že proudnice jsou logaritmické spirály.
5. Stanovte ekvipotenciální čáry v př. 1 § 41 a proudnice v př. 1 § 43.
6. Jakými náboji je určeno pole s komplexním potenciálem

$$w = 2qi \operatorname{Ln} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right)?$$

7. V bodech $z_1 = a$, $z_2 = \frac{1}{a}$ jsou zřídla vydatnosti Q a v bodě $z = 0$ nor téže vydatnosti. Dokažte, že kružnice $|z| = 1$ je proudnicí tohoto proudění. (Srv. s methodou zrcadlení v § 45).
8. Na polopřímce $x = 0$, $y > 1$ je potenciál roven V_0 a na reálné ose je roven nule. Stanovte hustotu rozdělení nábojů na reálné ose (v elektrostatice se učí, že hustota náboje na vodiči je rovna $\sigma = \frac{1}{4\pi} E$).
9. Na kružnici $|z - 2i| = 1$ je hustota náboje $\sigma = 1$. Jak se rozprostře náboj, uzemníme-li reálnou osu?
10. Najděte elektrostatické pole v prostoru mezi dvěma válci, jejichž průsečnice s rovinou kolmou k jejich osám jsou kružnice $|z| = 1$ a $|z - 1| = \frac{1}{2}$. (Válce jsou zřejmě kruhové a mají rovnoběžné osy.) Potenciální spád mezi válci je roven jedné. Jaká je nejmenší a největší hustota náboje na válcích?

11. Na elipse s poloosami 2 a $\sqrt{3}$ je teplota rovna nule a na úsečce mezi ohnisky je teplota 100° . Stanovte rozložení teploty.
12. Najděte rozložení teploty v kruhové výšce $0 < y < \alpha$, je-li teplota na ramenech úhlu rovna 0° a na kružnici 1° .
13. Najít komplexní potenciál rovinného proudění kapaliny, proudící z levé poloviny do pravé poloviny otvorem na imaginární ose mezi body $-i$ a $+i$. Spád Q je dán.
14. Najděte komplexní potenciál a proudnice pro proudění kapaliny v prvním kvadrantě, je-li v bodě $z = 1 + i$ zřídlo vydatnosti Q a v bodě $z = 0$ také vydatnosti.
15. Najděte elektrostatické pole v půlkruhu $|z| < 1, \text{Im } z > 0$, je-li na obloucích $0 < \arg z < \frac{1}{2}\pi$ resp. $\frac{1}{2}\pi < \arg z < \pi$ potenciál $-V_0$ resp. $+V_0$ a na průměru je potenciál roven nule. Body i a $-i$ jsou body izolující.
16. Stanovte proudění kapaliny ve výšce $0 < \arg z < \frac{1}{2}\pi$ se zřídlem vydatnosti Q v bodě $z_0 = ae^{\frac{1}{2}i\pi}$ (srv. s př. 2, § 45).