Cyklografické koule

In: Ladislav Seifert (author): Cyklografie. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků v Praze, 1949. pp. 46–63.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402834

IV. CYKLOGRAFICKÉ KOULE

Koule v *euklidovském* prostoru je plocha druhého stupně, jež prochází absolutní kuželosečkou v rovině nevlastní danou v pravoúhlých homogenních souřadnicích rovnicemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0.$$

Podobně nazývejme *cyklografickou koulí* plochu druhého stupně, jež jde základní kuželosečkou C danou rovnicemi

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad t = 0.$$

Rovnice plochy má tedy tvar

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - (z - c)^2 = \pm r^2$$

nebo

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2ax - 2by + 2cz + d = 0, \qquad (d = a^2 + b^2 - c^2 \mp r^2).$$

Jest to rotační hyperboloid s osou kolmou k průmětně π, jednodílný neb dvoudílný. Střed je $S(a, b, c)$, poloměr hrdlové kružnice v rovině $z = c$ jest r neb ri. Nazýváme jej *poloměrem* cyklografické koule.

4,1. Cyklografické koule se středem v průmětně π. Prostudujme nejprve případ, kdy střed koule je v průmětně. Volme jej za počátek O soustavy souřadnic. Plocha má pak rovnici

$$(H) \qquad x^2 + y^2 - z^2 = r^2 \text{ (neb } - r^2).$$

Buď $P(\xi, \eta, \zeta)$ bod této plochy. Jemu odpovídá $v\ \pi$ kružnice

$$[P] \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \zeta^2, \quad (\zeta^2 = \xi^2 + \eta^2 - r^2);$$

mocnost středu O k tomuto kruhu jest konstantní a rovna $r^2 (= \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2)$. Sekou tedy kružnice $[P]$ kolmo stopu cyklografické koule.

Cyklografický obraz rovnoosého hyperboloidu se středem v π a osou kolmou k π (cyklografické koule) je trs kružnic (1, 8), *které sekou kolmo jeho hrdlovou kružnici.*

Je-li hyperboloid dvoudílný, stopní kružnice imaginární o poloměru ri, pak soustředná kružnice k' o poloměru r, jíž používáme ke konstrukcím, jest reálnou kružnicí trsu protata ve dvou diametrálně ležících bodech, čili jest jí půlena (1, 7).

Vrcholy uvažovaného hyperboloidu rozumíme jeho průsečíky s osou plochy. Je-li stopa reálná kružnice o poloměru r, jsou vrcholy na ose ve vzdálenosti $\pm ri$ od středu. Je-li stopa imaginárná, jsou vrcholy reálné ve vzdálenosti $\pm r$.

Velmi snadno jsou patrny věty:

Trs kružnic obsahuje nekonečně mnoho (∞^2) *svazků.* Každá rovina kolmá ku π seče cyklografickou kouli se středem v π v rovnoosé hyperbole, jíž patří svazek obsažený v trsu.

Dvě kružnice trsu určují svazek obsažený v trsu.

Tři body v prostoru určují jedinou cyklografickou kouli se středem v π. V rovině *tři kružnice určují trs*; kružnice kolmá ke všem třem je hrdlová kružnice cyklografické koule.

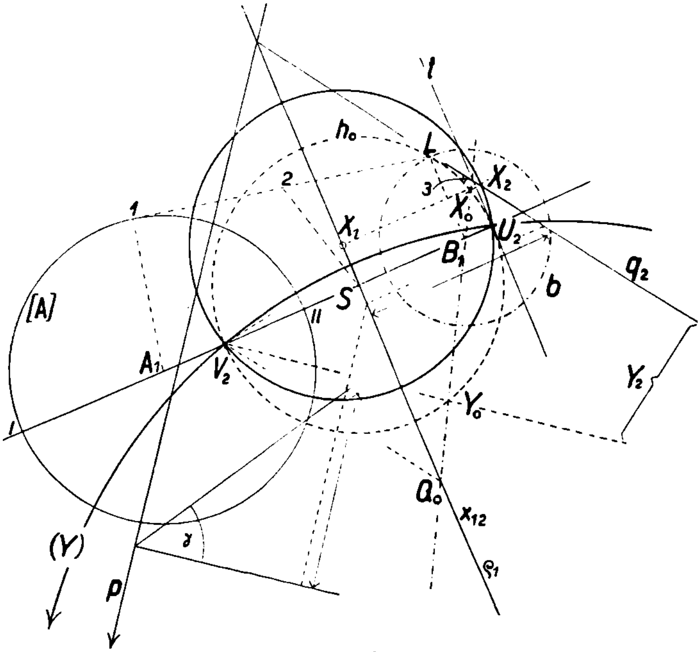
Zvláštní případ trsu je souhrn kružnic, které jdou jedním bodem; hyperboloid přešel zde v cyklografický kužel. Jiný zvláštní případ jsou kružnice se středem na přímce.

Dvě cyklografické koule o středu v průmětně π mají mimo kuželosečku C v nevlastní rovině ještě společnou hyperbolu v rovině kolmé ku π a kolmé k rovině obou os, v cyklografické projekci tedy *dva trsy mají společný svazek*, t. j. souhrn kružnic kolmých ke dvěma stopním kružnicím. Středy jejich jsou na chordále stopních kružnic.

4,2. Úlohy o kolmosti cyklů a kružnic. Úloha. *Sestrojte cykl, který seče kolmo kružnice* $[A]$, $[B]$ *a paprsek* p *v úhlu* $\varphi = 30°$.

Rozbor. Body, kterým přísluší žádané cykly nalézají se na cyklografických koulích s hrdlovými kružnicemi $[A]$, $[B]$ a v rovině α se stopou p. Prvé dvě plochy mají společnou rovnoosou hyperbolu v rovině ϱ kolmé ku π. α seče ϱ v přímce q. Jedná se tedy o průsečíky přímky s rovnoosou hyperbolou.

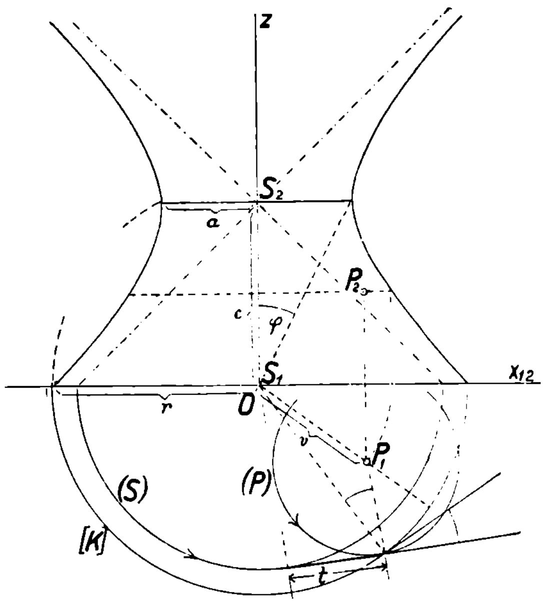
Sestrojení je v obr. 27. $[A]$ buď reálná, $[B]$ imaginární a zastoupena reálnou kružnicí b o středu B_1. ϱ_1 je chordála obou kružnic a sestrojena jest dle (1,7) : $B_1L \perp A_1B_1$, z L vedena tečna $L1$ ku $[A]$ a rozpůlena bodem *2*. Pak $2S \perp A_1L$. Bodem S jde $\varrho_1 \perp A_1B_1$. ϱ seče oba hyperboloidy v hyperbole h. Vrcholy U, V jsou průsečíky vertikály vztyčené v bodě S s jedním neb druhým hyperboloidem. Abychom je sestrojili, použijme promítací roviny přímky AB. Ta seče první hyperboloid v hyperbole s osou I II. Tedy kóta bodu $U(V)$ rovná se délce tečny vedené z S ke kružnici $[A]$ (1,9) a rovná se také SL. Sklopme rovinu ϱ



Obr. 27.

kolem $\varrho_1 \equiv x_{12}$ do π. Vrcholy U, V přijdou do U_2V_2 a tím je určena hyperbola h_2. Dále je určena odchylka γ roviny $\varkappa$. Jest $\cotg\gamma = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sestrojení průsečnice $q(q_2)$ je patrno z obrázku. Abychom určili průsečíky q_2 s h_2, použijme kolineace (1,9). Střed kolineace buď V_2, osa tečna t hyperboly v bodě U_2. Hyperbole h_2 odpovídá v kolineaci kružnice h_0 nad průměrem U_2V_2, ϱ_1 je úběžnice. q_2 seče t v bodě *3*, rovnoběžka s q_2 středem V_2 seče úběžnici v bodě Q_0. $3Q_0 \equiv q_0$ odpovídá v kolineaci přímce q_2 a seče kružnici h_0 v bodech $X_0 Y_0$. Jim nazpět odpovídají body X_2, Y_2, z nichž jsou odvozeny $X_1 Y_1$. Nalezené cykly se protnou v U_2, V_2 (3,2).

Cvičení 4,2,1. Sestrojte cykl, který seče kolmo kružnici $[A]$ a dotýká se paprsků p, q.



Obr. 28.

4,2,2. Sestrojte kružnici o daném poloměru, která seče kolmo kružnici $[A]$ a půlí kružnici $[B]$.

4,2,3. Sestrojte cykl, který seče kružnici $[A]$ v diametrálně protilehlých bodech a paprsky p, q v úhlech s danými kosiny (na př. $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}$).

4,2,4. Dány jsou cykly (A), (B), (C). Sestrojte cykl, který a) seče (A) kolmo a dotýká se (B) a (C), b) půlí (A), kolmo seče (B) a dotýká se (C).

4,3. Cyklografické koule v obecné poloze. Rovnoosý rotační hyperboloid s osou kolmou ku průmětně π a středem mimo průmětnu (obr. 28) jest dán rovnicí

$$x^2 + y^2 - (z - c)^2 = a^2;$$

a je reálné neb ryze imaginárné a hyperboloid pak jednodílný nebo dvoudílný.

Souřadnice středu S jsou $(0, 0, c)$, poloměr hrdlové kružnice a. Stopní kružnice $[K]$ jest dána rovnicemi

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{kde} \quad r = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Obrazem středu S je cykl (S) o poloměru c, říkejme mu *středový cykl.*

Cyklický obraz bodu $P(\xi, \eta, \zeta)$ na uvažované ploše jest cykl (P) na kružnici

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \zeta^2.$$

Pro bod P platí

$$\xi^2 + \eta^2 - (\zeta - c)^2 = a^2;$$

levá strana této rovnice jest však čtverec společné tečny t (1,6) cyklů (S) a (P), a tedy $t^2 = a^2$.

Cyklický obraz cyklografické koule v obecné poloze jest kongruence cyklů, jež od středového cyklu (S) mají konstantní tečnovou vzdálenost rovnou poloměru hrdlové kružnice.

Jiný význam této kongruence dostaneme, vyjádříme-li kosinus úhlu stopní kružnice $[K]$ o středu O a poloměru r s kružnicí $[P]$, jež odpovídá obecně položenému bodu cyklografické koule. Buď $\overline{OP_1} = v$, úhel kružnic φ, pak jest (1,5)

$$v^2 = r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta\cos\varphi.$$

Dosaďme za v^2 a r^2; dostaneme

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 - c^2 - a^2 + 2r\zeta\cos\varphi = 0.$$

Uvážíme-li, že P leží na cyklografické kouli, máme

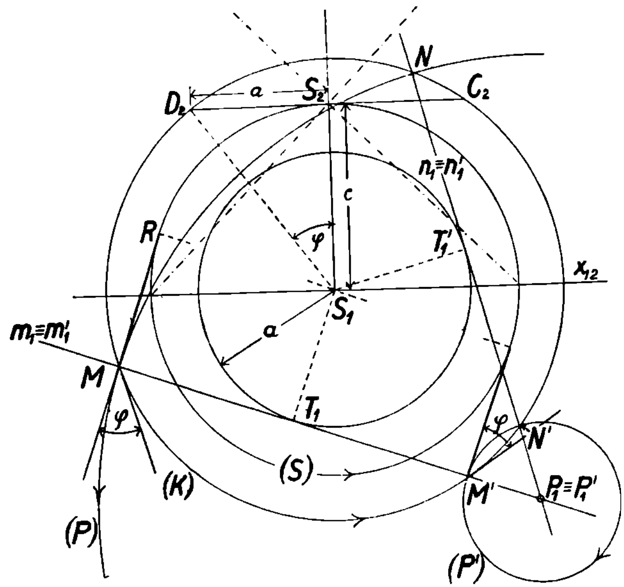
$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 - c^2 - a^2 + 2\zeta c = 0,$$

odkud

$$r\cos\varphi = c, \quad \cos\varphi = \frac{c}{r}.$$

Veličina c má určité znaménko; jestliže orientujeme také stopní kružnici, říkejme pak *stopní cykl,* má i r určité znaménko a vidíme:

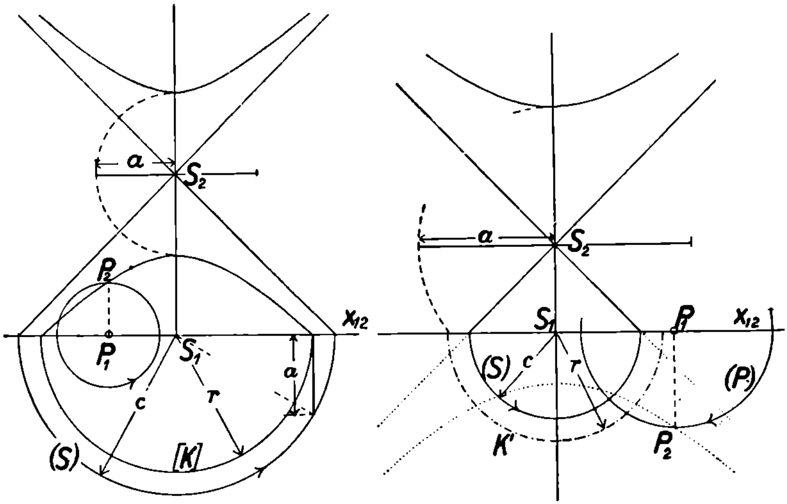
Uvažovaná kongruence je souhrn cyklů, které stopní cykl (K) *sekou v úhlu, jehož kosinus je konstantní a roven* $\frac{c}{r}$, *kde* c *je poloměr středového,* r *poloměr stopního cyklu.* Je tedy tato kongruence *isogonální kongruence* se základním cyklem (K).



Obr. 29.

Cyklografická koule je určena středem S a poloměrem a hrdlové kružnice (poloměrem cyklografické koule) anebo cyklem (S) a stopním cyklem (K), což se pro účely konstruktivní nejlépe hodí. Proberme různé případy tohoto určení.

a) Stopní cykl (K) je reálný a vně středového cyklu (S) (obr. 29). Cyklografická koule je jednodílný hyperboloid. Druhá průmětna je volena osou cyklografické koule, sestrojeno S_2 a asymptoty meridiánu. Ve sklopení leží koncové body C_2, D_2 reálné osy na kružnici $[K]$ dle vztahu $r^2 = a^2 + c^2$. Obrys v půdorysně je kružnice s poloměrem a. Bod P_1 v průmětně je půdorysem dvou bodů na cyklografické kouli, bodů P a P'; prvním jdou přímky m, n, druhým m', n'. V obraze jeví se jako tečny obrysové kružnice, takže $m_1 \equiv m_1'$, $n_1 \equiv n_1'$. Vertikální roviny (mm'), (nn') jsou tečné roviny v bodech T, T' hrdlové kružnice. Povrchové přímky mají ovšem odchylku půdorysnou 45°. Bodu P na hořejší polovině patří cykl (P), který jde stopníky M, N přímek m, n; bodu P' na dolejší polovině patří cykl (P') jdoucí body M', N'.



Obr. 29a, b.

Tečnová vzdálenost cyklu (S) od jednoho nebo druhého cyklu jest v obraze silněji vyznačena. Rovněž tak vyznačen úhel φ cyklu (K) s prvým neb druhým cyklem.

Pohybuje-li se bod P po površce m, opíše cykl (P) parabolický svazek. Všechny se v bodě M dotýkají tečny MR cyklu (S). Tato tečna je cykl zvrhlý patřící bodu nevlastnímu přímky m. Tečné paprsky cyklu (S) patří také uvažované kongruenci cyklů a jsou obrazy nevlastních bodů cyklogr. koule.

b) $[K]$ je reálné a uvnitř (S) (obr. 29a). Volme druhou průmětnu jako dříve. Jedná se o sestrojení meridiánu z asymptot a jednoho bodu. Z rovnice $a^2 = c^2 - r^2$ je patrno sestrojení úsečky a. Hrdlová kružnice má poloměr ai, cyklografická koule je dvoudílný hyperboloid. Tečnová vzdálenost je imaginární ai; pro úhel φ máme $\cos\varphi = \frac{c}{r} > 1$, tedy úhel je také imaginární (1,3). Cykl kongruence leží uvnitř cyklu (S) i (K) nebo je objímá, pokud poloměr je různý od nuly.

Je-li $r = 0$, přejde $[K]$ v bod, $\cos\varphi$ roste do nekonečna, úhel φ je neurčitý, tečnová vzdálenost cyklu kongruence od cyklu (S) jest ai.

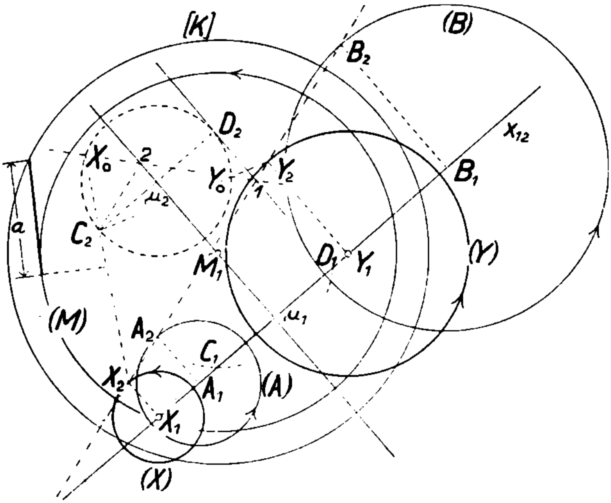
c) $[K]$ jest imaginární (obr. 29b). Její zástupkyní jest reálná kružnice K' o poloměru r. Při téže volbě druhé průmětny jako v případech předešlých jest rovnice meridiánu $(z - c)^2 - x^2 = a^2$ a hoví mu bod $(\pm ri, 0,0)$, tedy $c^2 + r^2 = a^2$, z čehož ihned plyne konstrukce délky a. Hyperboloid je dvoudílný, tečnová vzdálenost od cyklu (S) imaginární ai (ač kružnice mohou mít společné reálné vnější tečny), kosinus úhlu φ je rovněž imaginární $\frac{c}{ri}$.

4,4. Body společné dvěma neb třem cykl. koulím. Dvě cyklografické koule H, L o středech A, B mají obecně mimo základní kuželosečku C v nevlastní rovině společnou ještě cyklografickou kružnici r v rovině ϱ. Obě kuželosečky se sekou v nevlastních bodech U, V na průsečnici roviny ϱ s rovinou nevlastní. V těchto bodech se obě plochy dotýkají a tečné roviny společné jsou současně tečnými rovinami obou asymptotických kuželů a sekou se tedy ve spojnici středů AB obou ploch. Přímky UV, AB jsou reciproké poláry obou ploch. Průsečná kuželosečka r má tedy střed na AB. Její rovina ϱ má za stopu na průmětně π chordálu stopních kružnic $[H]$, $[L]$, jež spojuje jejich společné body, a je rovnoběžná s rovinou ϱ', ve které leží průsečná křivka asymptotických kuželů. Ostatně víme, že obě tyto roviny jsou rovnoběžny s polární rovinou přímky AB k jednomu i druhému kuželu (3,3).

Tři cyklografické koule H, L, M mají mimo C jen dva body obecně v konečnu společné. Neboť na př. prvé dvě mají společnou cyklografickou kružnici, která s třetí plochou má mimo dva body v nevlastní rovině na C ještě dva další X, Y v konečnu, jež současně leží na všech třech plochách. Přímkou XY jdou roviny všech tří kuželoseček společných vždy dvěma z ploch H, L, M.

Úloha 1. *Lineární řada cyklů je dána dvěma cykly* (A), (B). *Sestrojte cykl této řady,* a) *který od daného cyklu* (M) *má tečnovou vzdálenost* a, b) *který seče cykl* (K) *v úhlu* φ($\cos\varphi = \frac{2}{3}$).

a) *Rozbor.* Lineární řadě cyklů patří v prostoru přímka AB. Kongruenci cyklů, které mají od cyklu (M) tečnovou vzdálenost a, patří cyklografická koule o středu M. Stopní kružnice $[K]$ má poloměr $r = \sqrt{a^2 + c^2}$, kde $c = z_M$. Hledané cykly odpovídají průsečíkům přímky AB s touto cykl. koulí.



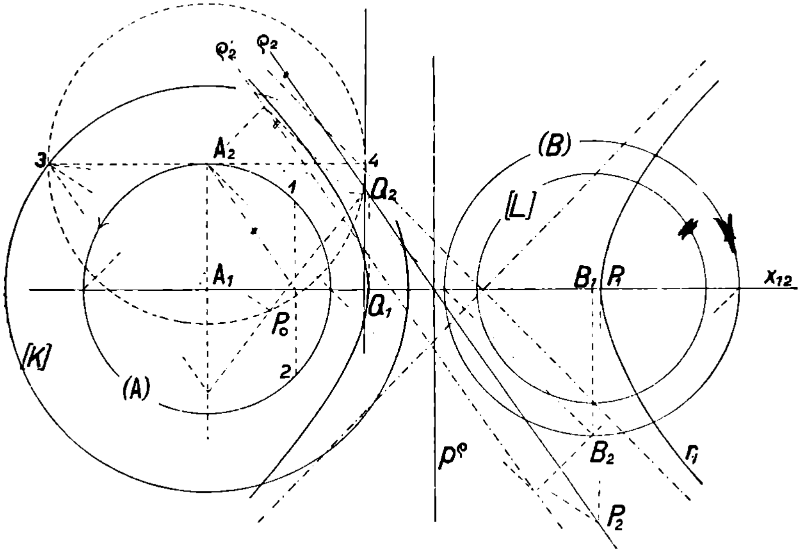
Obr. 30.

Sestrojení je v obr. 30. Poloměr r kružnice $[K]$ sestrojen jak z obrázku patrno. Abychom sestrojili průsečíky přímky AB s cykl. koulí, volme promítací rovinu této přímky za druhou průmětnu a otočme kol $x_{12} \equiv A_1B_1$ do průmětny. Tato rovina seče cykl. kouli v rovnoosé hyperbole. Střed μ je na kolmici spuštěné z bodu M k rovině hyperboly, hlavní osa $\overline{CD} = \overline{C_1D_1}$ je určena průsečíky s hrdlovou kružnicí o středu M a poloměru a. Teď jest určiti průsečíky přímky A_2B_2 s hyperbolou. To provedeno užitím kolineace hyperboly s kružnicí nad průměrem C_2D_2 (1,9). C_2 je střed kolineace, tečna v D_2 je osa kolineace. Přímce A_2B_2 odpovídá přímka *12*, jež dává průsečíky X_0, Y_0. Z nich odvozeno X_2, Y_2 a konečně X_1, Y_1.

b) *Rozbor.* Příslušná cyklografická koule má stopní cykl (K) s poloměrem r. Poloměr středového cyklu vychází ze vztahu $c = r \cos\varphi = \frac{1}{3} r$.

Sestrojení přenecháváme čtenáři.

Úloha 2. *Dána je cyklografická koule K stopní kružnicí $[K]$ a středovým cyklem (A), podobně druhá L stopní kružnicí $[L]$ a středovým cyklem (B). Sestrojiti jest průsečnou cyklografickou kružnici.*

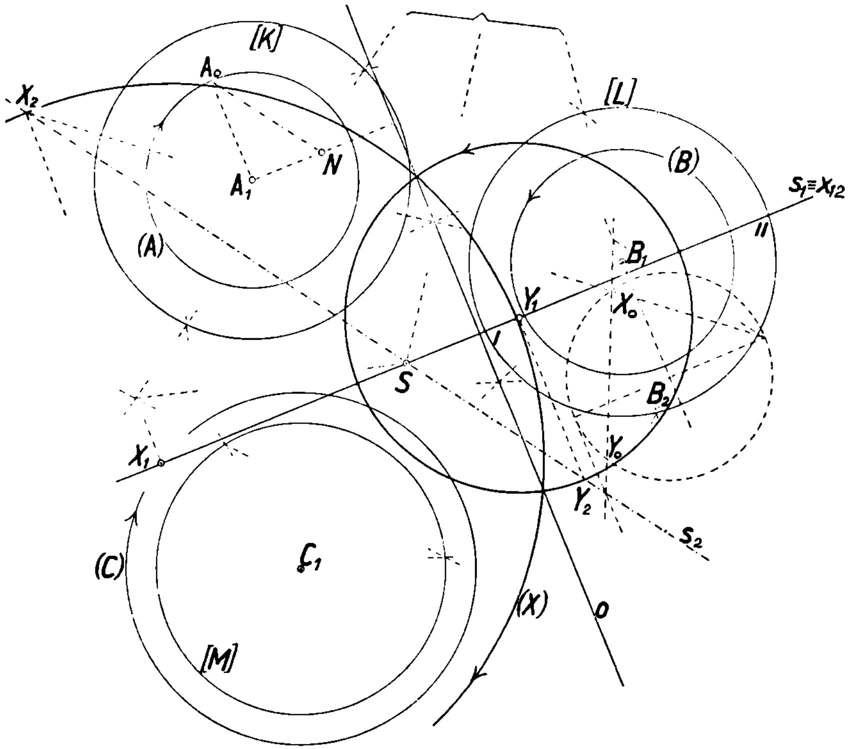


Obr. 31.

Sestrojení vyplývá z výkladu odstavce předchozího (obr. 31). Buď průsečná křivka r, její rovina ϱ, ϱ' rovina s ní rovnoběžná, ve které leží společná křivka kuželů $A(A)$, $B(B)$. Volme promítací rovinu přímky AB za druhou průmětnu a sdružme s prvou. Známým způsobem vychází ϱ_2' . p^ϱ je chordála kružnic $[K]$, $[L]$, ϱ_2 je rovnoběžno s ϱ_2'. Rovina bodem A rovnoběžná s ϱ (polární rov. přímky AB ke kuželu) seče cykl (A) v bodech *1*, *2*. $A1$, $A2$ jsou rovnoběžny s asymptotami křivky r. Koncové body reálné osy P, Q jsou průsečíky ϱ_2 s meridiánem plochy K ležícím v druhé průmětně, jenž je určen středem A_2 a reálnou osou *3*, *4*, a sestrojeny způsobem známým (Q_0 není v obrazu označeno).

Poznámky. Půdorys r_1 jest geom. místem středů všech cyklů, které od cyklů (A), (B) mají konstantní tečnové vzdálenosti rovné poloměrům hrdlových kružnic. Jsou-li stopní kružnice orientovány, sekou je cykly uvedené řady v úhlech s konstantními kosiny.

Průsečná křivka r je elipsa, hyperbola nebo parabola dle toho, jsou-li body dotyku obou cykl. koulí U, V imaginárné, reálné nebo



Obr. 32.

splývající čili spojnice středů AB uvnitř obou asymptotických kuželů, vně anebo dotýkají-li se podél celé přímky.

Úloha 3. *Sestrojte průsečíky tří cyklografických koulí* K, L, M. *Stopní kružnice buďte* $[K]$, $[L]$, $[M]$, *středové cykly* (A), (B), (C).

Rozbor. Dle předcházejícího výkladu jsou společné body X, Y na přímce s, ve které se sekou tři roviny obsahující průsečnou kuželosečku vždy dvou a dvou z daných ploch, označme je ϱ_{KL}, ϱ_{KM}, ϱ_{LM}. Ale na př. ϱ_{KL} je rovnoběžno s polární rovinou přímky AB ke kuželu $A(A)$, ϱ_{KM} je rovnoběžno s polární rovinou přímky AC k témuž kuželi, tedy s je rovnoběžno s polárou roviny (ABC) ke kuželu $A(A)$. Odtud plyne velmi jednoduchá konstrukce.

Sestrojení je provedeno v obr. 32. S je bod stejných mocností kružnic $[K]$, $[L]$, $[M]$, o je osa podobnosti cyklů (A), (B), (C) čili stopa roviny (ABC), N její pól ke kružnici $[A]$, AN tedy polární přímka roviny (ABC) ke kuželu $A(A)$. Přímka s jde bodem S rovnoběžně s AN. Konečně jsou sestrojeny průsečíky X, Y přímky s s cykl. koulí L.

Úloha 4. *Jsou dány cykly (K), (L), (M). Sestrojte cykl, který seče prvý v úhlu φ_1, druhý v úhlu φ_2 a třetí v úhlu φ_3.* (*Volme* $\cos\varphi_1 = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi_2 = -\frac{3}{2}$, $\cos\varphi_3 = \frac{2}{3}$).

Hledané cykly jsou společné třem isogonálním kongruencím určeným danými cykly a příslušnými kosiny. Jim jsou v prostoru přiřaděny tři cyklografické koule K, L, M, jež mají společné dva body; těm odpovídají hledané cykly.

Sestrojení přenecháváme čtenáři.

Poloměry cyklů středových čili kóty středů cykl. koulí plynou ze známého vzorce: $a = r_1\cos\varphi_1 = \frac{3}{5}r_1$, $b = r_2\cos\varphi_2 = -\frac{3}{2}r_2$, $c = r_3\cos\varphi_3 = \frac{2}{3}r_3$. Cykl (A) je tedy stejnosměrný s (K), (B) opačného smyslu s (L) a (C) téhož smyslu jako (M). Dále nutno sestrojiti bod S stejných mocností kružnic $[K]$, $[L]$, $[M]$ a osu podobnosti cyklů (A), (B), (C). Další konstrukce jako v předešlé úloze.

Cvičení 4,4,1. Dán jest cykl (K) a paprsek p a na něm bod P. Sestrojte cykl, který seče cykl (K) v úhlu $\pm 30°$ a dotýká se paprsku p v bodě P.

4,4,2. Dány jsou paprsky a, b a cykl (M). Sestrojte cykl, který seče a, b v úhlech s danými kosiny (na př. $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$) a mimo to a) má od cyklu (M) danou tečnovou vzdálenost (na př. ai), b) seče cykl (M) v úhlu s daným kosinem (na př. $\frac{3}{2}$).

4,4,3. Sestrojte cykl, který seče tři cykly v úhlech s danými kosiny (na př. $\sqrt{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$). Volte některý cykl imaginární nebo některý kosinus imaginární (na př. $\frac{1}{2}i$).

4,4,4. Sestrojte cykl, který a) má od cyklu (A) tečnovou vzdálenost a, od cyklu (B) teč. vzdálenost b a půlí kružnici $[C]$, b) dotýká se cyklů (A), (B)

a seče cykl (C) v daném úhlu, c) půlí kružnici $[A]$, seče kolmo kružnici $[B]$ a seče cykl (C) v daném úhlu.

4,4,5. Dány jsou cykly (A), (B). Co tvoří cykly, jež mají od obou stejné tečnové vzdálenosti? [*Návod*: Dvě cyklografické koule o stejném poloměru hrdlové kružnice mají rovnice

$$(x - \alpha_i)^2 + (y - \beta_i)^2 - (z - \gamma_i)^2 - t^2 = 0, \quad (i = 1,2),$$

kde α_i, β_i, γ_i jsou souřadnice středu. Odečtením dostaneme rovnici roviny ϱ společné kuželosečky

$$2x(\alpha_1 - \alpha_2) + 2y(\beta_1 - \beta_2) - 2z(\gamma_1 - \gamma_2) + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \ldots = 0.$$

Tato je nezávislá na t a leží v ní i společná křivka obou cyklografických kuželů $A(A)$, $B(B)$. Jde tedy půlícím bodem úsečky $\overline{AB}$ a polárou nevlastního bodu přímky AB k základní kuželosečce C. Hledané cykly tvoří tedy cyklické pole. Nalezená rovina ϱ (zobecnění roviny symetrie dvou bodů) je geom. místem středu cyklografické koule, která jde body A, B.

4,4,6. Co tvoří cykly, které mají od tří cyklů stejné tečnové vzdálenosti?

4,4,7. Sestrojte cykl, který má od čtyř cyklů rovné tečnové vzdálenosti. Příslušný bod v prostoru je střed cyklografické koule, jež jde danými čtyřmi body. (Srovnej úlohu: čtyřmi body sestrojiti jest kouli).

4,4,8. Sestrojte cykl, který má stejné tečnové vzdálenosti od cyklů (A) a (B), právě tak od cyklů (C) a (D) a od (E) a (F) (Viz cvičení 4, 4,5).

4,5. Svazek cyklografických koulí.

Buďte dány dvě cyklografické koule v obecné poloze

$$\begin{aligned} H &\equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - (z - c_1)^2 - m^2 = 0, \\ K &\equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - (z - c_2)^2 - n^2 = 0; \end{aligned} \tag{1}$$

stopní kružnice buďte $[H]$, $[K]$, středy S_H, S_K. Jimi je určen svazek ploch $H + \lambda K = 0$, kde λ probíhá všechny hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$. Basis svazku jsou dvě kuželosečky, základní kuželosečka C v rovině nevlastní a průsečná cyklografická kružnice r ploch H, K v rovině ϱ. Obecná plocha svazku je opět cyklografická koule. Její střed jest

$$S_\lambda \left(\frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda}, \frac{b_1 + \lambda b_2}{1 + \lambda}, \frac{c_1 + \lambda c_2}{1 + \lambda}\right);$$

stopa na průmětně $(z = 0)$

$$\begin{aligned} &(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - c_1^2 - m^2 + \\ &+ \lambda[(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - c_2^2 - n^2] = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Středy cyklografických koulí svazku vyplňují přímku $s(\equiv AB)$, *cyklické obrazy středů vyplňují lineární řadu cyklů. Stopní kružnice tvoří svazek.* Bod přímky s je středem jedné plochy svazku, kružnice svazku je stopou také jen jedné plochy svazku. Mezi plochami svazku jsou dva cyklografické kužele (pokud r není parabola) a jedna plocha rozpadlá ve dvojinu rovin, t. j. ϱ a rovinu nevlastní ($\lambda = -1$). Jedna plocha svazku má střed S v průmětně π; S je stopa přímky s.

Cyklografická kružnice r určuje svazek cyklografických koulí.

Z těchto prostorových vztahů vyplývá cyklografickou projekcí řada vět pro geometrii cyklů v rovině. Orientujme stopní kružnice a mluvme o stopních cyklech. Ploše H odpovídá kongruence cyklů, které sekou stopní cykl (H) v konstantním úhlu $\varphi_1(\pm)$, ploše K odpovídá kongruence cyklů, které sekou (K) v konstantním úhlu φ_2, křivce r patří tedy řada cyklů, jež sekou (H) v úhlu φ_1 a současně (K) v úhlu φ_2. Ale křivkou r jde svazek cyklografických koulí a je-li L jedna z nich, pak jí v průmětně π odpovídá kongruence, jež obsahuje i řadu r a jejíž cykly sekou stopní cykl (L) v konstantním úhlu φ_3. Tedy:

Cykly, které sekou dva dané cykly (H), (K) v konstantních úhlech φ_1, φ_2, sekou libovolný cykl svazku jimi určeného také v konstantním úhlu φ_3.

Máme-li na mysli tečnové vzdálenosti, lze říci:

Cykly, které mají od cyklů (S_H), (S_K) tečnové vzdálenosti konstantní (m, n), mají konstantní tečnovou vzdálenost od každého cyklu lineární řady jimi určené.

Ploše svazku cykl. koulí se středem S v π patří trs cyklů kolmých ke stopní kružnici, tedy:

Cykly, které sekou (H), (K) v konstantních úhlech φ_1, φ_2, sekou kolmo jednu kružnici svazku; její střed je středem podobnosti cyklů (S_H), (S_K). (Viz 3,2, poznámka).

Ve svazku ploch $H \,.\, K$ jsou dva kužele a jedna dvojice rovin (zahrnující rovinu nevlastní), tedy:

Cykly, které sekou cykly (H), (K) v konstantních úhlech φ_1, φ_2, dotýkají se dvou cyklů svazku a sekou také chordálu v konstantním úhlu.

Uvedené dva cykly jsou společné řadě středových a svazku stopních cyklů.

Jinak lze uvedené věty shrnouti takto:

Cykly, které se dotýkají dvou cyklů (M), (N), *jsou protaty každým cyklem svazku v konstantním úhlu a jsou kolmo protaty kružnicí tohoto svazku, jež má střed ve středu podobnosti daných cyklů.*

Tato kružnice sluje *potenční* čili *Steinerova* kružnice svazku (3,2).

Střed podobnosti cyklů S_H, S_K o poloměrech c_1, c_2 nesplývá obecně se středem podobnosti stopních kružnic, jež mají poloměry $\sqrt{c_1^2 + m^2}$, $\sqrt{c_2^2 + m^2}$. Podmínka, aby oba středy splynuly, jest $c_1 : c_2 = \sqrt{c_1^2 + m^2} : \sqrt{c_2^2 + m^2}$, neb dle (4,3) $r_H \cos\varphi_1 : r_K \cos\varphi_2 = r_H : r_K$, t. j. $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$.

Cykly protínající cykly (H), (K) v témž úhlu φ sekou kolmo potenční (Steinerovu) kružnici svazku $(H) \,.\, (K)$. Také obráceně cykly kolmé k této kružnici sekou cykly (H), (K) v úhlech o stejném kosinu. Píšeme-li v rovnici (1)

$$c_1 = r_H \cos\varphi, \quad c_2 = r_K \cos\varphi, \quad m = r_H \sin\varphi, \quad n = r_K \sin\varphi,$$

dostaneme

$$\begin{aligned} H &\equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - z^2 - r_H^2 + 2r_H\, z \sin\varphi = 0, \\ K &\equiv (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - z^2 - r_K^2 + 2r_K\, z \sin\varphi = 0. \end{aligned}$$

Při proměnném φ máme dva projektivní svazky cyklografických koulí. Vyloučením veličiny $\sin\varphi$ dostáváme rovnici

$$r_K H - r_H K = 0,$$

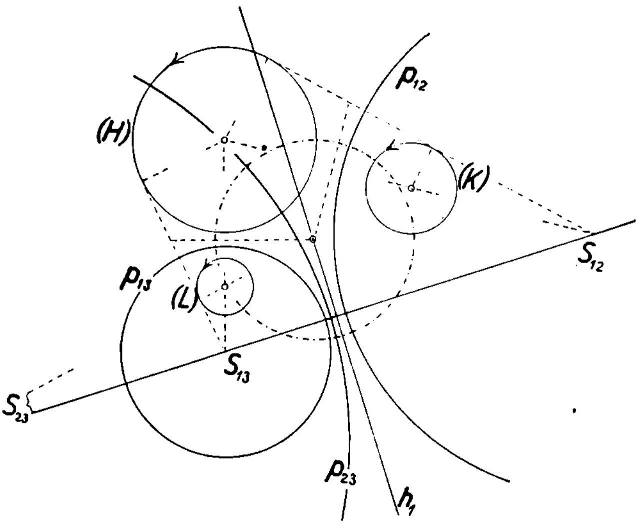
jež patří cyklografické kouli svazku $H \,.\, K$ a má střed

$$\left(\frac{a_1 r_K - a_2 r_H}{r_K - r_H},\ \frac{b_1 r_K - b_2 r_H}{r_K - r_H},\ 0\right)$$

ve středu podobnosti cyklů (H), (K).

Cykly, které sekou dva dané v úhlu o témž kosinu, tvoří trs. Jeho základní kružnice je potenční kružnice daných cyklů.

Teď můžeme zodpověděti otázku, co tvoří cykly, jež sekou tři dané cykly (H), (K), (L) v úhlech o témž kosinu. Cykly, které sekou cykly (H), (K) v úhlu o témž kosinu, tvoří trs a jemu v prostoru patří cyklogr. koule M_{12} se středem ve středu podobnosti S_{12} obou cyklů. Stopa její je potenční kružnice p_{12} (obr. 33). Podobně k cyklům (H), (L) patří cyklogr. koule M_{13} se středem S_{13} a potenční kružnicí p_{13} jako stopou. Plochy M_{12}, M_{13} sekou se v hyperbole h, jež leží v rovině kolmé k průmětně a má osu v průmětně. Jí odpovídá svazek kružnic, jež sekou všechny tři cykly v úhlech s týmiž kosiny. Hyperbolou h jde zřejmě i třetí hyperboloid M_{23} se středem S_{23} a hrdlovou kružnicí p_{23}. Máme tedy větu:



Obr. 33.

Potenční kružnice p_{12}, p_{13}, p_{23}, jež přísluší po dvou daným třem cyklům, tvoří svazek. Cykly, které sekou dané tři cykly v úhlech s týmiž kosiny, tvoří svazek s ním doplňkový (se středy na h_1).

Mezi těmito cykly jsou také soumístné cykly na kružnici, jež seče všechny tři kolmo, a také cykly, které se všech tří dotýkají. Je tedy znovu potvrzena věta, že tří cyklů se dotýkají dva cykly, jež s ortogonální kružnicí tvoří svazek, jehož chordálou je osa podobnosti daných cyklů (3,3).

4,6. Trs cyklografických koulí. Buďte dány tři cyklografické koule H, K, L o středech S_H, S_K, S_L rovnicemi

$$(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - (z - c_i)^2 - m_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Píšeme-li jejich rovnice zkráceně $H = 0$, $K = 0$, $L = 0$, jest rovnice jedné koule trsu

$$H + \lambda K + \mu L = 0,$$

kde λ, μ nabývají libovolných hodnot. *Střed této plochy* jest

$$x = \frac{a_1 + \lambda a_2 + \mu a_3}{1 + \lambda + \mu}, \quad y = \frac{b_1 + \lambda b_2 + \mu b_3}{1 + \lambda + \mu}, \quad z = \frac{c_1 + \lambda c_2 + \mu c_3}{1 + \lambda + \mu}$$

a *vyplní tedy rovinu* σ, jejíž stopa je osou cyklického pole daného cykly (S_H), (S_K), (S_L). *Stopní kružnice* $[H]$, $[K]$, $[L]$ dané rovnicemi

$$(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - c_i^2 - m_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

tvoří trs

$$[H] + \lambda[K] + \mu[L] = 0$$

a jsou všechny kolmé k téže kružnici, jejíž střed je bod stejné mocnosti kružnic $[H]$, $[K]$, $[L]$ (1,8).

Všechny plochy trsu jdou dvěma body X, Y, jež jsou společné třem daným plochám.

Bod roviny σ je středem jedné plochy trsu; opisuje-li bod přímku v rovině σ, opisuje příslušná plocha svazek a její stopa opisuje svazek kružnic. Bodům na stopě p^σ patří svazek cyklografických koulí, jež všechny jdou rovnoosou hyperbolou h ležící v rovině kolmé k průmětně π se středem a jednou osou v π. Příslušné věty v cyklické projekci zní:

Jsou-li dány cykly (H), (K), (L), pak existují dva cykly (X), (Y), jež je sekou v daných úhlech φ_1, φ_2, φ_3. Potom však každý cykl trsu $(H \,.\, K \,.\, L)$ seče cykly (X), (Y) v témž úhlu φ_4.

Jinak také:

Jsou-li dány cykly (S_H), (S_K), (S_L), existují dva cykly (X), (Y), jež mají od nich předepsané tečnové vzdálenosti. Potom však každý cykl cyklického pole $(S_H \,.\, S_K \,.\, S_L)$ má od obou tutéž tečnovou vzdálenost.

Body na p^σ jsou středy cyklografických koulí, které tvoří svazek a procházejí hyperbolou h, jež ovšem také jde body X, Y. Křivce h patří svazek kružnic obsahující kružnice $[X]$, $[Y]$; stopy uvažovaných cyklografických koulí se středy na p^σ tvoří svazek kružnic doplňkový s prvým se střednou p^σ. Tedy:

Cykly (X), (Y) *mají stopu* p^σ *za chordálu.*

Jako zvláštní případ dostaneme: Jsou-li H, K, L cyklografické kužele, (X), (Y) tedy cykly, které se dotýkají cyklů (H), (K), (L), pak se tyto cykly sekou na ose podobnosti cyklů (H), (K), (L).

Cvičení **4,6,1.** Dány jsou cykly (A), (B) a jimi řada cyklů, jež seče (A) v úhlu $\varphi_1(\cos\varphi_1 = \frac{1}{2})$, (B) v úhlu $\varphi_2(\cos\varphi_2 = \frac{2}{3})$. Sestrojte kružnici kolmou ke všem cyklům řady a oba cykly, jež se dotýkají všech cyklů řady.

4,6,2. Řešte Apolloniův problém užitím potenčních kružnic. (*Návod:* Potenční kružnice p_{12}, p_{13}, p_{23} tvoří svazek a hledané cykly patří doplňkovému svazku).

4,6,3. Sestrojte cykl, který seče cykly (A), (B), (C) ve stejném úhlu, cykl (D) v úhlu daném $(\cos\varphi = \frac{3}{4}$ nebo $2)$.

4,6,4. Dokažte: Cykly, které sekou dva cykly (A), (B) v úhlech φ_1, φ_2, pro něž platí $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 =$ konst., tvoří trs a základní jeho kružnice patří svazku (A), (B). Dle toho řešte úlohu: Dány jsou čtyři cykly; sestrojte cykl, který je seče v úhlech, pro něž platí $\cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \cos\varphi_3 : \cos\varphi_4 = 2 : 3 : 4 : 5$.

4,6,5. Dokažte: Cykly, které mají od cyklů (A), (B) tečnové vzdálenosti a, b s podmínkou $a^2 - b^2 = k^2$, vytvoří cyklické pole. Osa jeho je chordála kružnice $[B]$ a kružnice equitangenciální s $[A]$ ve vzdálenosti k.

4,6,6. Isogonální kongruence je dána čtyřmi cykly. Sestrojte základní kružnici, t. j. kružnici, jež všechny čtyři seče ve stejných úhlech. (Prostorové a planimetrické řešení!)

4,6,7. Jaké je geom. místo bodu dotyku dvou kružnic, které se dotýkají navzájem a dotýkají se současně kružnic $[A]$, $[B]$. (Návod: Orientujte dané kružnice a uvažujte i dotyk nevlastní).