jdoucí bodem T a protínající p v M'. Nahraďme páry $A'A''$, $B'B''$ involuce na p páry $M'M''$, $N'N''$, které se harmonicky oddělují a právě tak nahraďme páry $a'a''$, $b'b''$ jinými $m'm''$, $n'n''$, které se oddělují harmonicky. Pak roviny $(M''m'')$, $((N'n')$, $(N''n'')$ jdou touž přímkou x, roviny $(M''m'')$, $(N'n'')$, $N''n')$ přímkou y (srov. odst. 6 úl. b)). Prvá z nich je osou hledané roviny.

Cvičení. Uvažujte různé případy, kdy se protínají dvě imaginární přímky prvního druhu. Jak lze sestrojiti rovinu jimi určenou? [Označme přímky p, q, reálné roviny, ve kterých jsou, α, β, reálné jejich body P, Q, průsečík X a rovinu (pq) označme ϱ.

a) X i ϱ jsou imaginární (obecný případ); na průsečnici $(\alpha\beta)$ určí p i q tutéž involuci a involuce rovin s osou (PQ) je s ní perspektivní,

b) X reálné, ϱ imaginární,

c) ϱ reálné, X imaginární,

d) X i ϱ reálné.]

11. Imaginární přímka druhého druhu.

Imaginární přímka druhého druhu je dána jako spojnice dvou imaginárních bodů v prostoru (nesdružených) anebo jako průsečnice dvou imaginárních rovin, jejichž osy jsou mimoběžné. Oba způsoby určení jsou identické. Neboť, jsou-li A, B dané imaginární body určující přímku, a, b reálné nositelky těchto bodů, pak se jeví přímka jako průsečnice rovin (aB), (bA). Tato přímka nemá reálného bodu, ale dvouparametrickou soustavu bodů imaginárních a nositelky těchto protínají zároveň imaginární přímku sdruženou. Každé dvě jsou mimoběžné, neboť jinak by imaginární přímka ležela v reálné rovině. Tento útvar, tvořený reálnými nositelkami oněch bodů (budeme jim říkati sečny obou imaginárních přímek), sluje kongruence lineární.

Lineární kongruence sluje množství přímek, které protínají současně dvě mimoběžky. Jsou-li reálné, sluje kongruence hyperbolická, jsou-li imaginární sdružené (druhého druhu), sluje eliptická. Uvedeme nejdůležitější vlastnosti této kongruence, jež lze snadno sledovati v obou případech. Dané dvě mimoběžky a, b slují osy kongruence. Bodem mimo osy (reálným) jde jediná sečna. Neboť roviny (Pa), (Pb) se protínají v jediné přímce; jsou-li a, b imaginární, jsou i obě roviny imaginární sdružené, a průsečnice je tedy reálná. V rovině (reálné) ϱ, jež neobsahuje žádnou z os, leží také jen jedna sečna, která spojuje průsečíky roviny ϱ s přímkami a, b. Neboť, je-li a dáno jako průsečnice rovin α, β, jest b průsečnice sdružených α', β', tedy průsečíky (ϱ, α, β), $(\varrho, \alpha', \beta')$ jsou imaginární sdružené a spojnice jejich je reálná.

Lineární kongruencí je definována prostorová příbuznost zvaná zborcená involuce. Bodem P mimo osy a, b jde jedna sečna p, na ní jest involuce s dvojnými body $A \equiv \equiv (a, p)$, $B \equiv (b, p)$, ve které bodu P je přiřaděn P', jenž s P odděluje harmonicky body A, B. Bodu P' je ovšem obráceně přiřaděn bod P.

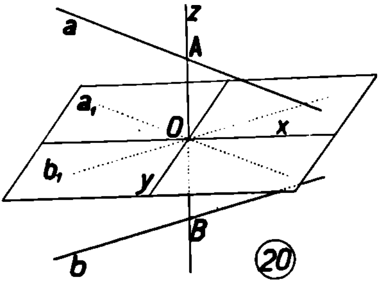
Analyticky lze tyto vztahy vyjádřiti jednoduše, volíme-li vhodně pravoúhlou soustavu souřadnic. Rovina nevlastní (v nekonečnu) obsahuje jedinou sečnu, jež spojuje nevlastní body A_∞, B_∞ obou os, ať jsou reálné nebo imaginární. Je to nevlastní přímka roviny rovnoběžné s oběma osami. Bodem nevlastním ve směru kolmém k této rovině jde jediná sečna, protínající osy a, b v bodech A, B („nejkratší příčka" mimoběžek a, b). Volme střed O úsečky AB (střed involuce s dvojnými A, B) za počátek soustavy, nejkratší příčku mimoběžek za osu z a v rovině kolmé k ose z bodem O osy x, y, takže roviny (zx), (zy) jsou kolmé roviny půlící úhly rovin (za), (zb) nebo pravoúhlý pár rovin příslušné involuce (obr. 20). (Osy x, y jsou osy souměrnosti obou mimoběžek a, b.)

Pak zní rovnice obou os, jsou-li reálné:

$$(a)\ \begin{matrix} z = -c, \\ y = -kx; \end{matrix} \qquad (b)\ \begin{matrix} z = c, \\ y = kx. \end{matrix} \tag{1}$$

Rovnice sečny, která spojuje bod $(x_1; -kx_1; -c)$ na a s bodem $(x_2; kx_2; c)$ na b, lze psáti

$$x = \frac{c\,(x_1 + x_2) + z\,(x_2 - x_1)}{2c},$$
$$y = k\,\frac{c\,(x_2 - x_1) + z\,(x_1 + x_2)}{2c}. \qquad (2)$$



20

Položme $x_1 + x_2 = u$, $x_2 - x_1 = v$, kde u, v jsou parametry, které mohou nabýti libovolných hodnot. Rovnice (2) pak jsou

$$x = \frac{cu + zv}{2c},$$
$$y = k\,\frac{cv + zu}{2c}. \qquad (3)$$

Body A, B a pravoúhlé průměty přiřaděných bodů P, P' do osy z tvoří harmonickou čtveřinu, tedy $zz' = c^2$ (viz str. 13). Dosadíme-li do posledních rovnic $z' = \frac{c^2}{z}$ za z, dostaneme rovnice naší příbuznosti ve tvaru

$$x' = \frac{c}{k}\,\frac{y}{z}, \qquad y' = c\,.\,k\,\frac{x}{z}, \qquad z' = \frac{c^2}{z} \qquad (4)$$

a obráceně právě tak

$$x = \frac{c}{k}\,\frac{y'}{z'}, \qquad y = ck\,\frac{x'}{z'}, \qquad z = \frac{c^2}{z'}.$$

Proběhne-li bod $(x; y; z)$ rovinu $Ax + By + Cz + D = 0$, proběhne přidružený rovinu

$$Bckx' + \frac{Ac}{k}\,y' + Dz' + Cc^2 = 0;$$

proběhne-li přímku, proběhne přidružený opět přímku.*)

*) Příbuznost, která je algebraická a v níž bodu odpovídá jedno-jednoznačně bod, rovině rovina (přímce přímka), sluje kolineace. Zborcená involuce je tedy kolineace.

Jsou-li osy a, b imaginární, nahradíme c veličinou ci, k veličinou ki a rovnice os jsou

$$(a) \quad \begin{aligned} z &= -ci, \\ y &= -kix; \end{aligned} \qquad (b) \quad \begin{aligned} z &= ci, \\ y &= kix. \end{aligned} \qquad (1')$$

Volíme-li za x_1, x_2 hodnoty komplexní sdružené, jsou body $(x_1; -kix_1; -ci)$, $(x_2; kix_2; ci)$ imaginární sdružené, veličina u je reálná, v ryze imaginární a sečna (3) opět reálná. Transformační formule (4) jsou opět reálné

$$x' = \frac{c}{k} \cdot \frac{y}{z}, \quad y' = -ck\frac{x}{z}, \quad z = -\frac{c^2}{z} \qquad (4')$$

Reálnému bodu v konečnu odpovídá opět reálný bod. Bodům nevlastním odpovídají body roviny $z = 0$. Body obou os a, b jsou samodružné. Sečny odpovídají samy sobě; na každé je involuce sdružených bodů a její dvojné body jsou průsečíky s osami. Rovina protíná přidruženou rovinu v sečně s, jež je tedy osou involučního svazku rovin; samodružné roviny jsou (as), (bs).

Tato zborcená eliptická involuce může sloužiti jako reálný representant imaginární přímky druhého druhu ve spojení se směrem bodové involuce na sečnách. Skutečně, volíme-li jistý směr involuce na jedné sečně p, je určen směr i na libovolné jiné sečně q. Je-li r další sečna mimoběžná s p i q, pak r je osa svazku rovin, které jsou si přiřaděny ve zborcené involuci a je perspek tivní s p i q. Směrem pohybu na p je tedy určen i směr pohybu na q.

Ještě jest možný jiný způsob určení přímky druhého druhu, poněkud jednodušší a prakticky velmi výhodný. Tři mimoběžné sečny p, q, r mimoběžek a, b určují přímkovou plochu druhého stupně. Bodem M na r jde jediná příčka, která seče p, q (průsečnice rovin (pM), (qM)). Všechny takové příčky $m, n, v, \ldots$ jsou navzájem mimoběžné (neboť jinak by se protínaly i p, q, r) a tvoří jeden systém čili regulus uvedené plochy, jemuž patří i a, b. Podobně ovšem tři přímky tohoto systému vedou opět k druhé soustavě přímek, která obsahuje p, q, r a jen sečny kongruence (a, b). To je doplňkový regulus prvého a oba leží na ploše druhého stupně, jež je jednodílný hyperboloid nebo hyperbolický paraboloid.*) Každá z takových ploch, jejichž přímky jsou obsaženy v kongruenci, má tedy dva systémy přímek: jeden je tvořen sečnami, z nichž každá zborcenou involucí přechází sama v sebe, druhá je tvořena přímkami, jež jsou si involučně přiřaděny. Na př. m' přejde v m'', n' v n'' atd., při tom průsečíky (pm'), (pm'') nebo (pn'), (pn'') si odpovídají v involuci na p. Říkáme, že tyto povrchové přímky tvoří involuci $m'm''$, $n'n''$, ... v příslušné osnově. Osy a, b jsou dvojné elementy této involuce.

Z toho je zřejmé, že každá přímková plocha určená třemi mimoběžnými sečnami p, q, r může sloužiti k určení imaginární přímky druhého druhu. Třeba jen stanoviti smysl involuce na jedné a tím ovšem na všech sečnách a v celé osnově přímkové. Na př. lze psáti

$$x = \begin{pmatrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} n' & m' \\ n'' & m'' \end{pmatrix}.$$

Poznámky a cvičení. 1. Zjistěte, je-li následující imaginární přímka (daná dvěma rovnicemi) prvého nebo druhého druhu. (Stanovte průsečík s přímkou sdruženou)

a) $x + (3 + 2i)\,y + (1 - 3i)\,z - 2 + i = 0$, $(1 + 2i)\,x + {} + 5iy - (1 + 3i)\,z + 3 + 3i = 0$;

b) $(5 - i)\,x - y + (2 + i)\,z + 1 = 0$, $(1 - 4i)\,x - iy - {} - (1 + 4i)\,z - 8i = 0$.

2. Dokažte: a) Přímka reálná a přímka imaginární druhého druhu jsou incidentní, je-li prvá sečnou příslušné kongruence.

b) Přímka imaginární druhého druhu p a přímka prvého druhu q se protínají v bodě X. Reálná rovina α přímky q obsa-

*) To jsou plochy, jejichž rovnice při vhodné volbě pravoúhlých souřadnic lze uvésti na tvar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, resp. $2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

huje sečnu s kongruence určené prvou přímkou. Involuce na s určené zborcenou involucí a přímkou q jsou identické.

c) Protínají-li se dvě imaginární přímky druhého druhu p, q, protínají se i přímky sdružené p', q'. Společný bod $X = (p, q)$ a sdružený $X' = (p', q')$ leží na paprsku x společném oběma kongruencím (p, p'), (q, q'). Právě tak roviny (p, q), (p', q') jsou imaginární sdružené a protínají se v druhé reálné přímce společné oběma kongruencím.

3. Nechť v rovnicích (1′) (str. 57) jest $k = 1$. Ukažte, je-li přímka p v kongruenci, že jsou v ní všechny přímky, které z ní povstanou rotací kolem osy z (rotační kongruence). Tyto přímky vyplní rotační hyperboloid. Je tedy v kongruenci celý svazek rotačních hyperboloidů.

4. Dány jsou v prostoru čtyři reálné mimoběžky p, q, r, s. Sestrojte příčky, které protínají všechny čtyři. Jsou buď reálné různé, reálné splývající, nebo imaginární druhého druhu. [p, q, r určí hyperboloid, s jej protíná ve dvou bodech X, Y a přímky druhé soustavy hyperboloidu jdoucí těmito body jsou hledané příčky.]

5. Sestrojte rovinu danou: a) Reálným bodem A a dvěma imaginárními B, C, jež jsou dány involucemi na nositelkách b, c; poslední dvě přímky jsou mimoběžné. [Roviny (Ab), (Ac) se protínají v přímce m, jež dává M' na b, M'' na c; nahraďte obě involuce harmonickými čtveřinami s bodem M', příp. s M''.] b) Třemi imaginárními body A, B, C, jichž nositelky a, b, c jsou mimoběžné.

6. Sestrojte průsečík tří rovin α, β, γ, je-li a) α reálné, β, γ imaginární (nesdružené); b) všechny tři imaginární.

12. Jiné imaginární útvary v prostoru.

a) Minimální neboli isotropické přímky.

Každá plocha druhého stupně protíná nevlastní rovinu v kuželosečce. Abychom našli průsek kulové plochy

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \qquad (1)$$

s nevlastní rovinou, zaveďme homogenní souřadnice, píšíce $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ místo x, y, z. Dostaneme

$$(x - x_0t)^2 + (y - y_0t)^2 + (z - z_0t)^2 = r^2t^2. \qquad (1')$$