Různé způsoby zobrazování v deskriptivní geometrii

9. Zobrazení dvojstopní

In: Josef Klíma (author): Různé způsoby zobrazování v deskriptivní geometrii. (Czech). Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1944. pp. 54–58.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403093

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

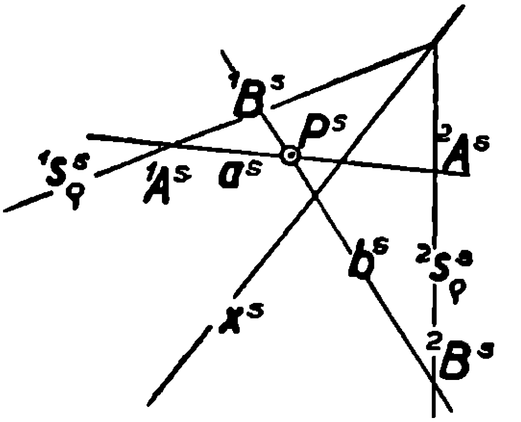
kost souřadnice $z_P = \overline{OQ}$ možno určiti podle postupu při středovém promítání (odst. 2,6, obr. 10) anebo lze spojnicí S^0Q^s dostati na z^0 kolmý průmět Q^0 bodu Q a na sklopené ose $[z]$ obdržeti $[Q]$ a tu $z_P = \overline{[O][Q]}$. Čtenáři se ponechává k laskavému sestrojení skutečných velikostí souřadnic x_P, y_P, jakož i obráceně sestrojení obrazů A^s, B^s, C^s bodů os x, y, z, pro něž $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = j$.

Při větě Pohlkově je možno obraz rovnoramenného trojhranu $O(A, B, C)$ voliti do jisté míry libovolně; jednou volbou je určen směr promítání i poloha trojhranu v prostoru a sice v oboru reálných řešení jsou obecně dva směry promítání a ke každému směru dvě polohy trojhranu, tedy čtyři reálná řešení. V středové axonometrii možno obraz $O^s(A^s, B^s, C^s)$ pravoúhlého rovnoramenného trojhranu voliti také libovolně, ale tím poloha středu promítání a trojhranu není v prostoru určena. Zvolíme-li ale ještě úběžníky X_u^s, Y_u^s, Z_u^s obrazů $x^s \equiv O^sA^s$, $y^s \equiv O^sB^s$, $z^s \equiv O^sC^s$, tu je úloha zase přeurčena, ježto prvky O^s, (A^s, B^s, C^s), (X_u^s, Y_u^s, Z_u^s) musí vyhovovati jisté podmínce. Podmínka ta však není jednoduchá a ježto středové axonometrie se prakticky málo používá, opomíjíme ji zde.

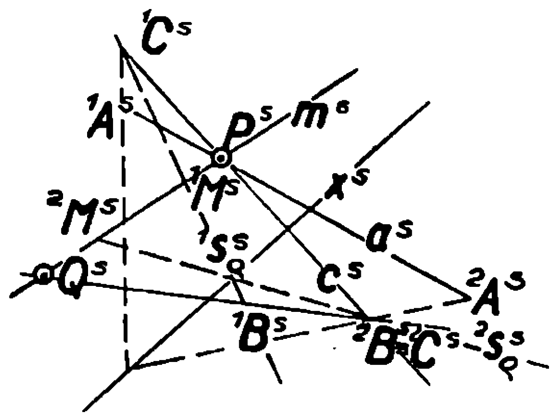
9. ZOBRAZENÍ DVOJSTOPNÍ

Pro zobrazování přímek a rovin prostoru jest velmi výhodné používati stop těchto prvků na dvou základních rovinách ${}^1\sigma, {}^2\sigma$. Toho jsme již použili pro určování přímek a rovin v středovém promítání (odst. 2), kde rovina ${}^1\sigma$ splývala s průmětnou a rovina ${}^2\sigma$ byla úběžnou rovinou prostoru. Nechť roviny ${}^1\sigma, {}^2\sigma$ mají obecnou polohu v prostoru; jejich průsečnici označme jako osu x. Libovolná přímka a protíná stopní roviny ${}^1\sigma, {}^2\sigma$ v stopnících ${}^1A, {}^2A$, a libovolná rovina ϱ v stopách ${}^1s_\varrho, {}^2s_\varrho$, kteréžto stopy se protínají v bodě průsečnice x. Naopak stopníky ${}^1A, {}^2A$ pokud nesplývají v témže bodě osy x, určují jednoznačně přímku a a dvě přímky ${}^1s_\varrho$, ${}^2s_\varrho$

protínající se v bodě přímky x, pokud současně nesplynou s osou x, určují jako stopy jedinou rovinu ϱ. Vymykají se tudíž tomuto určení dvěma stopami všechny přímky, jež protínají osu x a roviny jdoucí přímkou x.



Obr. 39. Dvojstopní zobrazení různoběžek a, b.

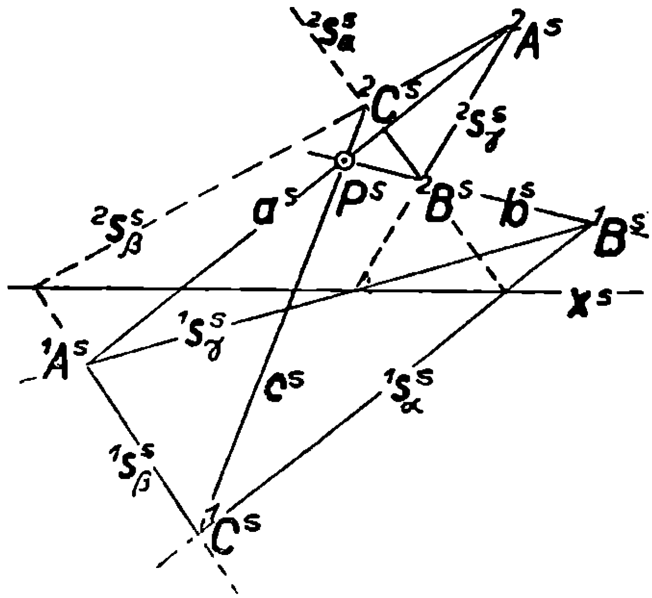


Obr. 40. Dvojstopní zobrazení přímky PQ.

Abychom mohli tyto stopy ležící ve dvou různých rovinách zobraziti na nákresně, promítneme obě stopní roviny do téže průmětny π ze středu S, který není v žádné z rovin ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ a π. Tak dostaneme obr. 39, kde zvoleny obrazy ${}^1A^s$, ${}^2A^s$ stopníků přímky a, jejíž obraz středový $a^s \equiv {}^1A^s\,{}^2A^s$ a přímka b ležící s přímkou a v téže rovině ϱ, jejíž stopy mají obrazy v přímkách ${}^1s_\varrho{}^s$, ${}^2s_\varrho{}^s$ protínajících se na ose x^s. Přímka ležící v rovině má své stopníky na souhlasných stopách roviny. Mají-li tedy dvě přímky býti v téže rovině, t. j. mají-li býti různoběžné nebo rovnoběžné, musí spojnice obrazů souhlasných jejich stopníků protínati se na ose x^s. Středové obrazy a^s, b^s protínají se v obraze P^s průsečíku $P \equiv (a, b)$. Přímky jdoucí v prostoru bodem P tvoří trs přímek a obrazy jejich stopníků odpovídají si v středové kolineaci o středu P^s a ose x^s. Dostáváme tento výsledek:

Body v prostoru se zobrazují v dvojstopním zobrazení v středové kolineace o téže ose x^s.

Z prostorových vztahů bodů, přímek a rovin lze nyní odvoditi ihned vztahy mezi jejich obrazy. Na př. ze vztahu: dva body P, Q určují přímku m, plyne: dvě středové kolineace o téže ose x^s a středech P^s, Q^s mají společný pár odpovídajících si bodů ${}^1M^s$, ${}^2M^s$. V obr. 40 byl tento společný pár



Obr. 41. Dvojstopní zobrazení společného bodu P tří rovin.

sestrojen, dán-li pár odpovídajících si bodů ${}^1A^s$, ${}^2A^s$ v prvé kolineaci o středu P^s a pár odpovídajících si bodů ${}^1B^s$, ${}^2B^s$ v druhé kolineaci o středu Q^s. Páry ${}^1A^{s2}A^s$, ${}^1B^{s2}B^s$ určují v prostoru přímky a, b, nositelky bodu P a Q, jež jsou obecně mimoběžné (${}^1A^{s1}B^s$ neprotíná se ${}^2A^{s2}B^s$ na ose x^s). Nositelku a nahradíme nositelkou c, která je s přímkou b různoběžná; v obr. 40 má přímka c týž druhý stopník ${}^2C^s \equiv {}^2B^s$ s přímkou b a její první stopník je ${}^1C^s$ (${}^1A^{s1}C^s$ protíná se ${}^2A^{s2}C^s$ na ose x^s). Přímky b, c určují rovinu ϱ, jejíž stopy mají obrazy ${}^1s_\varrho{}^s \equiv {}^1B^{s1}C^s$, ${}^2s_\varrho{}^s \equiv {}^2B^s$ (${}^1s_\varrho{}^s$, x^s), jež vytínají na spojnici $m^s \equiv P^sQ^s$ stopníky ${}^1M^s$, ${}^2M^s$ přímky m a tedy společný pár obou středových kolineací.

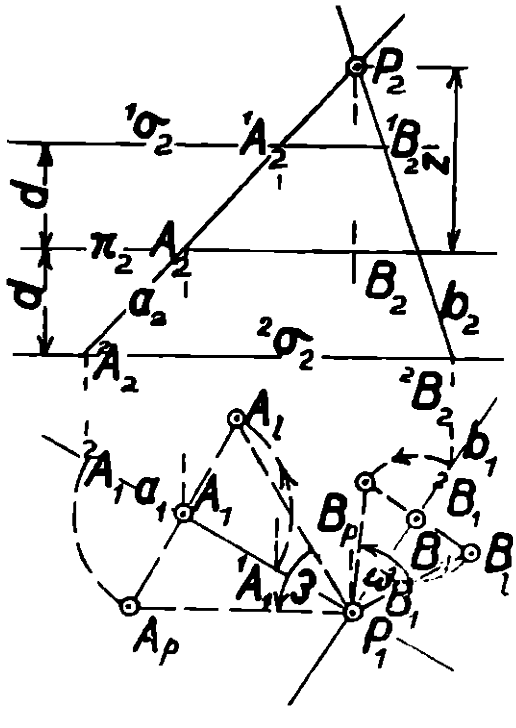
Z toho, že tři roviny mají obecně jediný bod společný, plyne Desarguesova věta o perspektivních trojúhelnících.

V obr. 41 určeny tři roviny α, β, γ obrazy stop, které vždy po dvou se protínají na ose x^s. Tři průsečnice těchto rovin a to $a \equiv (\beta, \gamma)$, $b \equiv (\gamma, \alpha)$, $c \equiv (\alpha, \beta)$ mají stopníky v průsečících odpovídajících si stop na př. ${}^1A^s \equiv ({}^1s_\beta{}^s, {}^1s_\gamma{}^s)$, ${}^2A^s \equiv$ $\equiv ({}^2s_\beta{}^s, {}^2s_\gamma{}^s)$. Obrazy těchto průsečnic procházejí obrazem P^s průsečíku $P \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$. Z toho je patrna věta Desarguesova:

Protínají-li se odpovídající strany (${}^1A^{s1}B^s$, ${}^2A^{s2}B^s$, atd.) *dvou trojúhelníků* (${}^1A^{s1}B^{s1}C^s$, ${}^2A^{s2}B^{s2}C^s$) *vždy po dvou v bodech téže přímky* (x^s), *pak spojnice odpovídajících si vrcholů obou trojúhelníků* (t. j. ${}^1A^{s2}A^s$, ${}^1B^{s2}B^s$, ${}^1C^{s2}C^s$) *jdou týmž bodem* (P^s).

A tak by bylo možno pokračovati, ale obrátíme se k některým zvláštním případům tohoto dvojstopního zobrazení.

9,1. Dvojstopní zobrazení s úběžnou osou x^s. (Osa x^s buď úběžnou přímkou nákresny.) Při středovém promítání je obraz průsečnice x stopních rovin ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ tehdy úběžný, jestliže průsečnice leží v středové rovině jdoucí středem promítání S rovnoběžně s průmětnou π. Důležitý je případ, kdy ${}^1\sigma \parallel {}^2\sigma \parallel \pi$. Tento případ se vyskytoval právě při středovém promítání (odst. 2), kde ${}^1\sigma \equiv \pi$ a ${}^2\sigma \equiv$ $\equiv \omega_\infty$. Další užívaný případ nastává, když ${}^1\sigma \equiv \pi$ a ${}^2\sigma \parallel \pi$ a promítáme rovnoběžně (ať již kosoúhle nebo pravoúhle). Rovina ${}^2\sigma$ má pak určitou vzdálenost d od průmětny π a jmenuje se *distanční rovinou.* Konečně ještě je důležitý případ, kdy ${}^1\sigma \parallel {}^2\sigma \parallel \pi$ a promítání je středové, nebo rovnoběžné. Ve všech těchto případech



Obr. 42. Dvojstopní zobrazení. (Stopní roviny rovnoběžné k průmětně.)

bod se zobrazuje v homothetičnost, ježto osa kolineace $x_\infty{}^s$ je úběžnou přímkou.

Pro další některá zobrazení povšimněme si případu dvojstopního zobrazení, při němž stopní roviny jsou rovnoběžny s průmětnou π a mají od této průmětny vzdálenosti $\pm d$, t. j. *jsou souměrně položeny k průmětně π a promítání je kolmé.* V obr. 42 je sestrojen půdorys a nárys takových rovin ${}^1\sigma, {}^2\sigma$, které jsou rovnoběžny s první průmětnou, která je v rovině π půlící vzdálenost stopních rovin. Označíme-li vzdálenost libovolného bodu P od průmětny π jako souřadnici z, tu souřadnice rovin ${}^1\sigma$, ${}^2\sigma$ jsou $\pm d$. Kolmý průmět do roviny π jeví se ve skutečné velikosti v půdoryse. Přímky $a, b, \ldots$ jdoucí bodem P mají stopníky na rovinách ${}^1\sigma, {}^2\sigma$, jejichž půdorysy jsou homothetické pro střed P_1 a poměr $\overline{P_1{}^1A_1} : \overline{P_1{}^2A_1} = \overline{P_1{}^1B_1} : \overline{P_1{}^2B_1} = \ldots = k$, kde $k = \dfrac{z - d}{z + d}$. Body průmětny π $(z = 0)$ se zobrazují v středovou souměrnost $(k = -1)$, úběžné body $(z = \infty)$ zobrazují se v translaci $(k = 1)$, body roviny ${}^1\sigma$ $(z = d)$ a roviny ${}^2\sigma$ $(z = -d)$ zobrazují se v speciální homothetičnosti, pro něž v prvém případě $k = 0$ a v druhém případě $k = \infty$.

Dvojstopního zobrazení se užívá s výhodou pro útvary přímkové; ukážeme to na příkladě t. zv. paprskové sítě, které (ve zvláštním případě) potřebujeme v dalším.

10. SÍŤOVÉ PROMÍTÁNÍ

Paprskovou sítí[16]) jmenujeme prostorový útvar skládající se z přímek, z nichž libovolným bodem v prostoru jde jedna a v libovolné rovině je též jen jedna přímka sítě. Tento přímkový útvar má nekonečně mnoho paprsků ∞^2. Lze dokázati, že taková paprsková síť je souhrn příček (trans-

[16]) Též „lineární kongruencí" viz *L. Seifert* l. c., str. 54.