O mnohoúhelnících a mnohostěnech

II. Vypuklé mnohoúhelníky v rovině

In: Bohuslav Hostinský (author): O mnohoúhelnících a mnohostěnech. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1947. pp. 9–22.

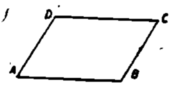
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403149

II. VYPUKLÉ MNOHOÚHELNÍKY V ROVINĚ

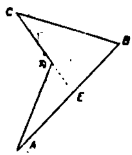
5. Vypuklý mnohoúhelník. Mnohoúhelník je *vypuklý* (neboli *konvexní*), vyhovuje-li každá jeho strana A_kA_{k+1} této podmínce: Prodloužíme-li ji v obou smyslech do nekonečna, nemá žádného dalšího bodu společného s obvodem mnohoúhelníka mimo body úsečky A_kA_{k+1}.

Příkladem vypuklého mnohoúhelníka je rovnoběžník (obr. 7a). Naproti tomu čtyrúhelník $ABCD$ v obr. 7b není vypuklý, neboť strana CD prodloužená za bod D (prodloužení je v obr. 7b vytečkováno) protíná stranu AB v bodě E.

Z obrazce 7b vyplývá, že vnitřní úhel vypuklého mnohoúhelníka není nikdy vypuklý; všechny vnitřní úhly vypuklého mnohoúhelníka jsou duté.



Obr. 7a.



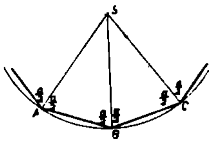
Obr. 7b.

6. Pravidelné mnohoúhelníky. Podle odst. 4 je součet vnitřních úhlů v n-úhelníku roven $(n - 2)\,\pi$. Jsou-li tedy všechny vnitřní úhly v n-úhelníku stejné, má každý z nich velikost $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$, je tedy dutý.

Mnohoúhelník, jehož všechny strany jsou stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly stejně veliké, nazývá se *pravidelný*. Podle právě uvedené poznámky jsou vnitřní úhly pravidelného mnohoúhelníka duté a totéž platí o jeho vnějších úhlech. Vnější úhel v pravidelném n-úhelníku je roven $2\pi : n$, poněvadž součet všech vnějších je 2π (odst. 4b). Tak pravidelný (rovnostranný) trojúhelník má vnější úhel $2\pi : 3 = 120°$; pravidelný čtyrúhelník, t. j. čtverec, má vnější úhel $\pi : 2 = 90°$, atd.

Buďte A, B, C tři sousední vrcholy pravidelného n-úhelníka a α jeho vnitřní úhel. Rozpůlíme-li vnitřní úhly při A

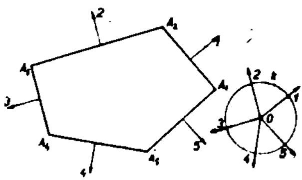
a B, protnou se půlící přímky v bodě S; ABS je rovnoramenný trojúhelník ($\overline{SA} = \overline{SB}$), jenž má při základně AB úhly $\frac{1}{2}\alpha$. Půlící přímka CS vnitřního úhlu při C prochází rovněž bodem S (obr. 8) a to platí vůbec o půlící přímce každého vnitřního úhlu; $\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \ldots$, všechny vrcholy $ABC \ldots$ mají od bodu S stejné vzdálenosti. Bod S je středem kružnice opsané n-úhelníku. Kterákoli jeho strana je tětivou této kružnice a neprotíná, prodloužíme-li ji, obvod n-úhelníka v dalším bodě. *Pravidelný mnohoúhelník je vypuklý.*



Obr. 8.

7. Obraz normály u vypuklého mnohoúhelníka. a) Kolmice vztyčená na stranu n-úhelníka v libovolném jejím bodě nazývá se *normála* té strany. Každá strana má *vnější* normálu, která míří ven z n-úhelníka a *vnitřní normálu*, která míří dovnitř. V následujícím budeme nazývati vnější normálu zkrátka normálou; jen směr normály bude míti význam, nezáleží na tom, ve kterém bodě uvažované strany normálu sestrojíme.

b) Kolem pomocného bodu O opíšeme kružnici k jednotkovým poloměrem. Normálu (vnější) strany A_1A_2 daného vypuklého mnohoúhelníka označíme zkrátka *1*, normálu strany A_2A_3 označíme *2* atd. V obr. 9 je vypuklý pětiúhelník s příslušnými pěti směry *1, 2, 3, 4, 5* normál. Veďme nyní v kružnici k poloměry *O1, O2, …* po řadě souhlasně rovnoběžné s oněmi normálami. Bod *1* na kružnici k se nazývá *obraz normály 1* mnohoúhelníka; bod *2* na k je obrazem normály *2* atd. Každá normála má svůj určitý obraz na k.

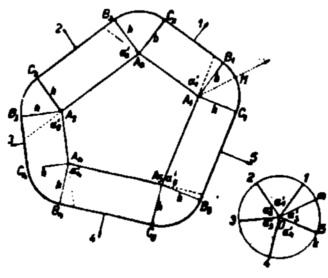


Obr. 9.

8. Zaoblený vypuklý mnohoúhelník. a) Ve všech bodech obvodu vypuklého n-úhelníka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sestrojíme kolmice, vždy ve smyslu vnější normály, a naneseme na každou úsečku délky h tak, že jeden koncový bod úsečky leží na obvodě. Druhé koncové body naplňují úsečky B_1C_2, $B_2C_3, \ldots$ (viz obr. 10, kde je $n = 5$) po řadě rovnoběžné se stranami n-úhelníka a stejně s nimi dlouhé:

$$\overrightarrow{B_1C_2} \# \overline{A_1A_2}, \quad \overline{B_2C_3} \# \overline{A_2A_3}, \ldots$$

Nechť jsou $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots$ po řadě vnější úhly mnohoúhelníka. Úhel $C_1A_1B_1$ je roven α'_1, neboť C_1A_1 stojí kolmo na A_5A_1 a B_1A_1 kolmo na A_1A_2 (obr. 10). Podobně je úhel $C_2A_2B_2$ roven α'_2 atd. Opíšeme-li kolem A_1 kruhový oblouk C_1B_1 poloměrem h, kolem A_2 kruhový oblouk C_2B_2 se stejným poloměrem atd., doplní se tyto oblouky s úsečkami B_1C_2, $B_2C_3, \ldots$ na souvislou uzavřenou čáru $C_1B_1C_2B_2C_3B_3 \ldots B_nC_1$, kterou nazveme *zaobleným vypuklým n-úhelníkem* sestrojeným rovnoběžně k původnímu $A_1A_2A_3 \ldots$ ve vzdálenosti h.



Obr. 10.

b) Normála *1* sestrojená k straně B_1C_2 v libovolném jejím bodě má stejný směr s normálou sestrojenou ke straně A_1A_2 původního n-úhelníka; podobně normála *2* sestrojená k B_2C_3 má stejný směr s normálou k A_2A_3 atd.

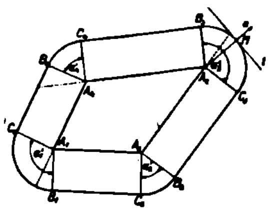
Za normálu v některém bodě M kruhového oblouku C_1B_1 považujeme poloměr A_1M (v obr. 10 vytečkovaný); tato normála má na kružnici k obraz m. Pohybuje-li se bod M podél oblouku C_1B_1, mění se směr normály tak, že její obraz vytvoří na k oblouk se středovým úhlem α'_1. Obecně obrazy všech normál sestrojených k bodům oblouku C_kB_k opsaného kolem A_k naplňují oblouk kružnice k se středovým úhlem α'_k.

Poněvadž

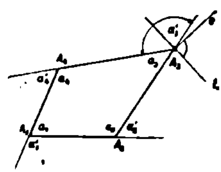
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha'_k = 2\pi,$$

tvoří všech n oblouků opsaných kolem vrcholů $A_1, A_2, \ldots A_n$ původního n-úhelníka, dohromady kružnici o poloměru h; obrazy všech normál zaobleného mnohoúhelníka naplňují tedy celou kružnici k. Shrneme takto: *Každý bod na obvodu zaobleného mnohoúhelníka má určitou normálu a každý bod na kružnici k je obrazem jedné z těchto normál;* při tom ovšem mají všechny body strany B_1C_2 stejný směr normály, podobně všechny body strany B_2C_3 atd (viz obr. 10).

9. Opěrné přímky vypuklého mnohoúhelníka. a) Budiž $A_1A_2A_3\ldots$ vypuklý n-úhelník (v obr. 11a je $A_1A_2A_3A_4$ čtyrúhelník), k němuž sestrojíme rovnoběžný zaoblený n-úhelník ve vzdálenosti h. Na jednom z kruhových oblouků, jež jsou částmi obvodu zaobleného mnohoúhelníka (na př. na oblouku C_3B_3 opsaném kolem bodu A_3), zvolme bod M a budiž a příslušný směr vnější normály (prodlouženého poloměru). Sestrojme tečnu t k oblouku kružnice v M; t je kolmá ke směru a.



Obr. 11a.



Obr. 11b.

Předpokládejme nyní, že h se blíží k nule a že se při tom směr a nemění. Bod M se tedy blíží podél určitého poloměru ke středu A_3 kružnice a přímka t se blíží limitní poloze t_0 (viz obr. 11b, kde je znázorněn limitní tvar zaobleného čtyrúhelníka pro lim $h = 0$ totožný s původním čtyrúhelníkem

$A_1A_2A_3A_4$). Přímka t_0 má s obvodem $A_1A_2A_3A_4$ jediný společný bod A_3.

b) *Opěrná přímka zaobleného vypuklého mnohoúhelníka* je název pro přímku, která je buď prodlouženou jeho stranou (jako na př. B_2C_3 v obr. 11a) nebo tečnou některého z kruhových oblouků tvořících jeho obvod (jako na př. t v obr. 11a).

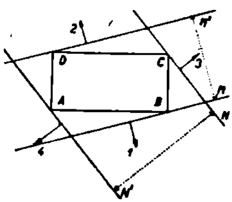
Opěrná přímka vypuklého mnohoúhelníka nezaobleného je název pro přímku, která je buď jeho prodlouženou stranou (na př. A_1A_2 v obr. 11b) nebo prochází jeho vrcholem a nemá žádného dalšího bodu s ním společného (jako na př. t_0 v obr. 11b).

c) Každé opěrné přímce t vypuklého mnohoúhelníka (zaobleného nebo nezaobleného) patří určitý směr normály. Sledujme, jak se ten směr mění, zaujímá-li t postupně všechny možné polohy (t. j. valí-li se t po obvodě mnohoúhelníka). Docházíme k výsledku: Odvalí-li se přímka t podél celého obvodu, proběhne obraz normály celou kružnici k. *Obrazy všech normál vypuklého mnohoúhelníka naplňují celou kružnici k; normála každé jeho opěrné přímky má za obraz určitý bod na kružnici k a naopak každý bod kružnice k je obrazem normály k jediné určité opěrné přímce.*

V obr. 12 je plný úhel s vrcholem ve středu kružnice k rozdělen na čtyři části $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$; obvod kružnice k se tak dělí rovněž na čtyři části. Jedna z nich je vytvořena obrazy normál pro ty opěrné přímky, které procházejí vrcholem A_1 čtyrúhelníka $A_1A_2A_3A_4$ (obr. 11b), druhá je vytvořena obrazy normál pro opěrné přímky jdoucí vrcholem A_2 čtyrúhelníka atd.

Obr. 12.

10. Šířka vypuklého mnohoúhelníka. a) Budiž M vypuklý n-úhelník a k jednotková kružnice, jejíž body jsou podle odst. 9 obrazy normál sestrojených k opěrným přímkám n-úhelníka M. Volme na k pár protilehlých bodů *1* a *2*, takže jejich spojnice *12* je průměrem kružnice k. Bodu *1* odpovídá určitá opěrná přímka t_1 n-úhelníka a bodu *2* jeho opěrná přímka t_2 rovnoběžná s t_1. Naopak ke každé opěrné přímce t_1 daného vypuklého mnohoúhelníka patří jiná jeho opěrná přímka t_2 rovnoběžná s t_1 a obrazy příslušných dvou normál jsou koncové body průměru v kružnici k. Vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek t_1 a t_2, měřená podél jejich společné kolmice nazývá se *šířkou* vypuklého mnohoúhelníka ve směru 1 nebo 2. V obr. 13 jsou dva páry opěrných přímek obdélníka $ABCD$. Opěrné přímky prvního páru mají normály ve směrech 1 a 2, a příslušná šířka obdélníka je MM'; přímky druhého páru mají normály ve směrech *3* a *4* a příslušná šířka je NN'.



Obr. 13.

b) Z obr. 13 je zřejmo, že šířka daného n-úhelníka v daném směru závisí na tom, jak ten směr volíme. Šířka obdélníka $ABCD$ má nejmenší hodnotu ve směru kolmém k AB nebo k CD (je-li $AB > AD$) a největší hodnotu ve směru kolmém k uhlopříčce AC nebo BD.

c) Rozdělme obvod jednotkové kružnice k o středu O na sudý počet $2m$ stejných dílů a označme dělící body *1*, *2*, ..., *2m*. Polopaprsky (poloměry v k), jež vedou z O k jednotlivým dělícím bodům, označíme po řadě x_1, x_2, ..., x_{2m}. Každý z nich má směr normály sestrojené k určité opěrné přímce daného n-úhelníka. Polopaprsky x_1 a x_{m+1} mají protivné smysly, podobně x_2 a x_{m+2}, obecně x_i a x_{m+i}. Je-li s_j šířka n-úhelníka ve směru j ($s_{j+m} = s_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$), je střední hodnota šířky dána výrazem

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_m}{m}$$

nebo, označíme-li součet symbolem $\sum$,

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} s_j.$$

Tato střední hodnota závisí na m a na tom, jak volíme polohu prvního dělícího bodu na k. Limitní hodnota

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} s_j \tag{1}$$

je však číslo, které — je-li n-úhelník M dán — nezávisí ani na m ani na poloze prvního dělícího bodu na k a které se nazývá *střední šířka* mnohoúhelníka.

Hodnotu limity (1) vypočteme v odst. 12; budeme k tomu potřebovati dvou formulí pro obsah vypuklého mnohoúhelníka, které odvodíme v odst. 11.

11. Věty o obsahu vypuklých mnohoúhelníků. a) Budiž L_0 obvod (délka obvodu) daného vypuklého n-úhelníka M_0 a P_0 jeho obsah. Sestrojme zaoblený mnohoúhelník M rovnoběžný k M_0 ve vzdálenosti h ($h > 0$); viz odst. 8. Je-li L obvod mnohoúhelníka M a P jeho obsah, klademe si za úlohu vypočísti L a P jakožto funkce veličin L_0, P_0 a h.

Z obr. 10, kde $A_1A_2A_3 \ldots$ je n-úhelník M_0 ($n = 5$ v obrazci), plyne: Obvod L se skládá jednak ze stran B_1C_2, B_2C_3, ..., jednak z kruhových oblouků C_1B_1, C_2B_2, ... Strany B_kC_{k+1} ($k = 1, 2, 3, \ldots$) jsou po řadě rovny stranám n-úhelníka M_0, totiž

$$\overline{B_1C_2} = \overline{A_1A_2}, \quad \overline{B_2C_3} = \overline{A_2A_3}, \ldots,$$

takže jejich součet se rovná L_0. Oblouky C_1B_1, C_2B_2, ... opsané poloměrem h mají středové úhly α'_1, α'_2, ... rovné po řadě vnějším úhlům mnohoúhelníka L_0; poněvadž (odst. 4c)

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots + \alpha'_n = 2\pi,$$

je součet všech těch oblouků roven obvodu kružnice o poloměru h:

$$\widehat{C_1B_1} + \widehat{C_2B_2} + \ldots + \widehat{C_nB_n} = 2\pi h.$$

Hledaná formule pro obvod L je tedy

$$L = L_0 + 2\pi h. \tag{1}$$

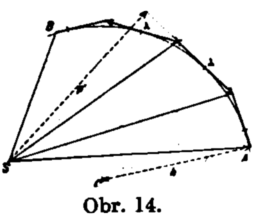
b) Obsah P skládá se z obsahu P_0, z obsahu n obdélníků $A_1B_1C_2B_2$, $A_2B_2C_3B_3$, ... a z obsahu n kruhových výsečí o poloměru h se středovými úhly po řadě rovnými α'_1, $\alpha'_2 \dots \alpha'_n$. Základny oněch obdélníků A_1B_1, A_2B_2, ... mají součet rovný L_0; všechny obdélníky mají stejnou výšku h, takže součet obsahů všech obdélníků je L_0h. Součet všech kruhových výsečí je celý kruh o poloměru h; jeho obsah je πh^2. Hledaná formule pro obsah P je tedy*)

$$P = P_0 + L_0 \,.\, h + \pi h^2. \tag{2}$$

c) Obsah vypuklého n-úhelníka nezaobleného vypočteme tímto způsobem:

Budiž S bod zvolený uvnitř n-úhelníka, l_1 délka jedné jeho strany a p_1 její vzdálenost od S (t. j. délka kolmice spuštěné z bodu S na onu stranu, vždy kladně čítaná); budiž pak l_2 délka druhé strany, p_2 její vzdálenost od S atd. Spojnice, kterými se spojuje bod S s jednotlivými vrcholy n-úhelníka, dělí n-úhelník na n trojúhelníků. První z nich má základnu o délce l_1 a výšku p_1, tedy obsah $\frac{1}{2}p_1l_1$, druhý má obsah $\frac{1}{2}p_2l_2$ atd. Obsah P_0 vypuklého nezaobleného n-úhelníka, jehož strany mají délky $l_1, l_2, \dots, l_n$ a vzdálenosti $p_1, p_2, \dots, p_n$ od bodu S voleného uvnitř n-úhelníka, je tedy dán vzorcem

$$P_0 = \frac{p_1l_1 + p_2l_2 + \dots + p_nl_n}{2}. \tag{3}$$



Obr. 14.

d) Uveďme ještě vzorec pro obsah Q obrazce SAB (obr. 14) omezeného jednak kruhovým obloukem AB o poloměru h a středu C, jednak úsečkami SA a SB. Mysleme si *celou* kružnici, jejíž částí je oblouk AB, rozdělenu na $2m$ stejných dílů. Několik dělících bodů, řekněme

*) Formule (1) a (2) jsou obdobné vzorcům pro povrch a objem vypuklých mnohostěnů, které odvodil J. Steiner (viz odst. 34).

r (v obr. 14 je $r = 4$), bude na oblouku AB; číslo r závisí na m (a také na volbě prvního dělícího bodu) a je tím větší, čím je m větší. V dělících bodech sestrojíme tečny ke kruhovému oblouku AB, tečny tvoří podél AB část pravidelného $2m$-úhelníka opsaného kružnici o poloměru h. Budiž λ délka jedné strany tohoto $2m$-úhelníka a σ délka příslušného kruhového oblouku se středovým úhlem rovným $(2\pi) : (2m) = \pi : m$; je tedy

$$\sigma = \frac{\pi}{m} \cdot h.$$

Trojúhelník, jehož základnou je jedna z r stran o délce λ a jenž má vrchol v S, nazveme „elementární trojúhelník"; jeho obsah je

$$\frac{\lambda p'}{2},$$

kde p' značí vzdálenost jeho základny (tečny kružnice) od bodu S. Součet všech r elementárních trojúhelníků má, roste-li m do nekonečna, za limitu plochu Q našeho obrazce SAB. Je tedy

$$Q = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1} \frac{\lambda p'_k}{2};$$

p'_k značí vzdálenost k-té strany λ od bodu S. Poněvadž pak*)

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\lambda}{\sigma} = 1,$$

je

$$Q = \frac{1}{2} \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{r} \sigma \cdot p'_k$$

a tedy, dosadíme-li na místo σ shora odvozený výraz,

*) Odvoláváme se na větu: Strana pravidelného m-úhelníka opsaného kružnici dělená m-tým dílem obvodu kružnice dává podíl rovný v limitě jednotce, roste-li m do nekonečna.

$$Q = \frac{\pi h}{2} \lim_{m\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{r} p'_k}{m} \tag{4}$$

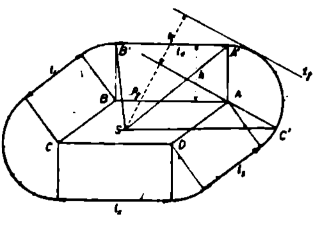
Roste-li m do nekonečna, roste též r do nekonečna.

12. Cauchyova věta o střední šířce vypuklého mnohoúhelníka. a) Vraťme se nyní k úloze vyslovené na konci odst. 10, totiž k výpočtu limity (1) odst. 10. Za tím účelem vyjádříme dvojím způsobem obsah P zaobleného n-úhelníka M sestrojeného rovnoběžně k M_0 ve vzdálenosti h (srv. odst. 11); srovnáním obou příslušných výrazů dostaneme hledanou hodnotu.

První způsob výpočtu P poskytuje vzorec (2) odst. 11. Je-li L_0 obvod n-úhelníka M_0 a P_0 jeho plošný obsah, platí

$$P = P_0 + L_0 h + \pi h^2. \tag{a}$$

Druhý způsob výpočtu: zvolme uvnitř M_0 bod S a spojme S přímkami se všemi vrcholy zaobleného n-úhelníka M (jeho vrcholy rozumíme body, v nichž se přímočaré části obvodu stýkají s kruhovými oblouky). Tak se rozdělí vnitřek M jednak na trojúhelníky, jichž obsah se počítá podle (3) odst. 11, jednak na křivočaré trojúhelníky, jichž obsah se počítá podle (4) odst. 11. V obr. 15 je M_0 rovnoběžník o stranách l_1, l_2, l_3, l_4. Pomocnou kružnici o poloměru h dělíme v obrazci na 12 dílů ($m = 6$); na kruhovém oblouku o středu A (a také na oblouku o středu C) budou čtyři dělící body, na oblouku o středu B (nebo D) budou dva dělící body. Budiž q_k vzdálenost k-té strany n-úhelníka M_0 od S a tedy $(q_k + h)$ vzdálenost k-té strany n-úhelníka M od S. K tečně t_j kruhového oblouku sestrojené v j-tém dělícím bodě veďme rovnoběžku středem kružnice (na př. bodem A v obr. 15,



Obr. 15.

jenž je středem oblouku $C'A'$). Vzdálenost této rovnoběžky od S budiž p_j, takže t_j má od S vzdálenost $(p_j + h)$. Sečtěme obsahy všech n trojúhelníků jako $SA'B'$ a obsahy všech n obrazců jako $SC'A'$. Podle uvedených vzorců bude

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{(q_k + h)\, l_k}{2} + \frac{\pi h}{2} \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{2m} (p_j + h)}{m}.$$

Součet za znamením lim má $2m$ členů, neboť všech n kruhových oblouků, jež jsou částmi obvodu obrazce M, má dohromady $2m$ dělících bodů. Vzhledem k tomu, že

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{q_k l_k}{2} = P_0, \quad \sum_{k=1}^{n} l_k = L_0, \quad \frac{\pi h}{2} \,.\, 2m \,.\, \frac{h}{m} = \pi h^2,$$

nabývá vzorec pro P tvaru

$$P = P_0 + \frac{L_0 h}{2} + \frac{\pi h}{2} \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{2m} p_j}{m} + \pi h^2.$$

Vzdálenost dvou rovnoběžných opěrných přímek obrazce M_0 je jeho šířka, která se rovná součtu vzdáleností, jež mají jedna a druhá přímka od S. V označení odst. 10c je tedy

$$p_1 + p_{m+1} = s_1, \quad p_2 + p_{m+2} = s_2, \ldots, \quad p_m + p_{2m} = s_m,$$

a máme

$$P = P_0 + \frac{L_0 h}{2} + \frac{\pi h}{2} \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j}{m} + \pi h^2. \tag{b}$$

Přirovnejme vzorce (a) a (b). Vychází

$$L_0 h = \frac{L_0 h}{2} + \frac{\pi h}{2} \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j}{m}$$

aneb

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j}{m} = \frac{L_0}{\pi}, \tag{1}$$

což jest Cauchyova věta: *Střední šířka vypuklého mnohoúhelníka rovná se jeho obvodu dělenému číslem π.*

Zaveďme střední hodnotu vzdáleností p_j opěrných přímek od S. Patrně je

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{2m} p_j}{2m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{m} s_j}{2m} = \frac{L_0}{2\pi}.$$

Střední hodnota vzdálenosti opěrné přímky od pevného bodu voleného uvnitř mnohoúhelníka rovná se jeho obvodu dělenému číslem 2π; to je jiný tvar Cauchyovy věty.

b) Uveďme některé příklady: Rovnostranný trojúhelník o straně a má střední šířku $3a : \pi = 0{,}955 \ldots a$; čtverec o straně a má střední šířku $4a : \pi = 1{,}273 \ldots a$; pravidelný šestiúhelník o straně a má střední šířku $6a : \pi = 1{,}910 \ldots a$.

13. O vztahu mezi obvodem a obsahem vypuklého mnohoúhelníka. Z rovnic (1) a (2) odst. 11 vyplývá snadným výpočtem

$$L^2 - 4\pi P = L_0^2 - 4\pi P_0,$$

nechť je h jakékoli (kladné) číslo. Čtverec obvodu zmenšený o 4πnásobný obsah je tedy veličina, která má stejnou hodnotu pro všechny zaoblené mnohoúhelníky rovnoběžné s daným.

Každý vypuklý mnohoúhelník o obsahu P_0 a obvodu L_0 má tu vlastnost, že

$$L_0^2 - 4\pi P_0 > 0.$$

Kořeny rovnice druhého stupně pro neznámou x:

$$P_0 + L_0 x + \pi x^2 = 0$$

jsou tedy pro každý vypuklý mnohoúhelník reální. Neuvádíme zde obecný důkaz této věty; potvrdíme toliko její platnost ve dvou zvláštních případech:

a) Je-li dán obdélník o stranách a a b, je

$$L_0 = 2(a + b), \quad P_0 = ab, \quad a > 0, b > 0,$$

$$\begin{aligned} L_0^2 - 4\pi P_0 &= 4[(a + b)^2 - \pi ab] \\ &= 4[(a - b)^2 + (4 - \pi) ab] > 0. \end{aligned}$$

Srovnejme hodnoty výrazu v lomené závorce pro různé obdélníky, které mají daný obsah $P_0 = ab$. Druhý člen v lomené závorce je pro ně konstantní; první člen, totiž $(a - b)^2$ nabývá nejmenší možné hodnoty, je-li $a = b$, t. j. pro čtverec. Z předchozí nerovnosti plyne, že *ze všech obdélníků, které mají daný obsah, má čtverec nejmenší obvod.*

b) Je-li dána kružnice o poloměru r, je strana a pravidelného n-úhelníka vepsaného do té kružnice dána vzorcem

$$a = 2r \sin \frac{\pi}{n};$$

obvod L_0 a obsah P_0 tohoto n-úhelníka jsou

$$L_0 = na = 2nr \sin \frac{\pi}{n},$$

$$P_0 = \frac{nr^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = nr^2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n}.$$

Z toho plyne

$$L_0^2 - 4\pi \cdot \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \cdot P_0 = 0.$$

Poněvadž úhel $\pi : n$ je pro $n = 3, 4, 5, \ldots$ v prvním kvadrantu, platí

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}, \quad \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} > 1$$

a tedy

$$L_0^2 - 4\pi P_0 > 0 \text{ pro každé } n.$$

Podle věty

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

je, položíme-li $\alpha = \pi : n$ nebo $\alpha = 2\pi : n$,

$$\lim_{n \to \infty} L_0^2 = \lim_{n \to \infty} 4\pi^2 r^2 \left(\frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \right)^2 = 4\pi^2 r^2$$

$$\lim_{n \to \infty} 4\pi P_0 = \lim_{n \to \infty} 4\pi^2 r^2 \left(\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} \right) = 4\pi^2 r^2,$$

a tedy

$$\lim_{n \to \infty} (L_0^2 - 4\pi P_0) = 0.$$

Z toho plyne: $\lim\limits_{n \to \infty} L_0 = 2\pi r$, t. j. obvodu kružnice o poloměru r, a $\lim\limits_{n \to \infty} P_0 = \pi r^2$, t. j. obsahu příslušného kruhu; pro obvod L a obsah kruhu P platí

$$L^2 - 4\pi P = 0.$$