

Goniometrické funkce v elementární matematice

Kapitola 6: Další aplikace goniometrických funkcí

In: Radka Smýkalová (author): Goniometrické funkce v elementární matematice. (Czech). Brno, 2016. pp. 186–229.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/404317>

Terms of use:

- © Akademické nakladatelství CERM
- © Nadace Universitas v Brně
- © Česká matematická společnost

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Kapitola 6

Další aplikace goniometrických funkcí

6.1 Goniometrické substituce

Kromě samotné trigonometrie, kterou jsme se zabývali ve třech kapitolách naší práce, nalézají goniometrické funkce uplatnění v řadě dalších matematických oborů. V matematické analýze je snad nejvýznamější role goniometrických funkcí v teorii Fourierových řad, o kterých jsme se zmínili v příkladu 4.7.1. Již v základním kurzu matematické analýzy sehrávají tyto funkce významnou úlohu při výpočtech neurčitých integrálů z racionálních i jiných funkcí, které určujeme pomocí vhodných *goniometrických substitucí*. Méně je známo, že tyto substituce lze využít i v elementární matematice při řešení různých algebraických úloh, ve kterých se objevují výrazy, které svým zápisem připomínají některý goniometrický vzorec, nebo rovnice, jež mají tvar některé goniometrické či trigonometrické identity. Právě takovým postupům se teď budeme formou jednotlivých řešených příkladů věnovat. Za pozornost stojí zejména příklad 6.1.26, který věnujeme goniometrickému řešení kubických rovnic.

■ **Příklad 6.1.1.** Najděte obor všech hodnot výrazu

$$V = x + \sqrt{1 - x^2}$$

s reálnou proměnnou x .¹

Řešení: Protože výraz V má smysl pouze pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$, můžeme zavést substituci $x = \sin \alpha$, kde $\alpha \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Pro taková α platí $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \cos \alpha$, takže $V = \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$. Protože pro $\alpha \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ proběhne součet $\alpha + \frac{\pi}{4}$ interval $\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \rangle$, na kterém má funkce sinus obor hodnot $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \rangle$, je hledaným oborem hodnot výrazu V interval $\langle -1, \sqrt{2} \rangle$. (Extrémní hodnoty $V = -1$, resp. $V = \sqrt{2}$, dostaneme pro $x = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, resp. $x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.)

■ **Příklad 6.1.2.** Předpokládejme, že pro čísla $x, y, z \in \mathbb{R}$ mají smysl zlomky

$$\frac{x - y}{1 + xy}, \quad \frac{y - z}{1 + yz}, \quad \frac{z - x}{1 + zx}.$$

Dokažte, že součet těchto tří zlomků je roven jejich součinu.²

Řešení: Zadané zlomky jsou tvaru, který dobře známe ze vzorce pro tangens rozdílu

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

¹[31], str. 31, upraveno.

²[34], str. 20.

Po substituci $x = \operatorname{tg} \alpha, y = \operatorname{tg} \beta, z = \operatorname{tg} \gamma$ pro vhodná $\alpha, \beta, \gamma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je tedy naším úkolem dokázat rovnost

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{tg}(\beta - \gamma) \cdot \operatorname{tg}(\gamma - \alpha).$$

Ta však přímo plyne z výsledku příkladu 4.6.4, podle kterého hodnoty $\operatorname{tg} u, \operatorname{tg} v, \operatorname{tg} w$ splňují identitu $\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w$ za předpokladu, že platí $\sin(u+v+w) = 0$, speciálně tedy v případě $u + v + w = 0$, který odpovídá naší situaci, kdy $u = \alpha - \beta, v = \beta - \gamma$ a $w = \gamma - \alpha$. Důkaz je tak hotov.

■ **Příklad 6.1.3.** V oboru reálných čísel řešte rovnici³

$$6x + 8\sqrt{1-x^2} = 5(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}).$$

(Řešení, které je iracionálním číslem, určete s přesností 10^{-3} a najděte kubickou rovnici, jejímž je kořenem.)

Řešení: Kromě goniometrické jedničky využijeme vzorce

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{a} \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Protože obě strany dané rovnice jsou definovány pouze pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$, můžeme výhodně zavést substituci $x = \cos \alpha$, kde $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$, a do rovnice dosadit

$$\sqrt{1-x^2} = \sin \alpha, \quad \sqrt{1+x} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{a} \quad \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

neboť hodnoty $\sin \alpha, \cos \frac{\alpha}{2}$ a $\sin \frac{\alpha}{2}$ jsou pro $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ nezáporné. Dostaneme tak pro novou neznámou α rovnici

$$6 \cos \alpha + 8 \sin \alpha = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right),$$

kterou dále upravíme obvyklým postupem:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} \cos \alpha + \frac{4}{5} \sin \alpha &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\ \sin(\alpha + \varphi) &= \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

kde $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ je úhel určený podmínkami

$$\sin \varphi = \frac{3}{5}, \quad \cos \varphi = \frac{4}{5}$$

spojenými se známým pravoúhlým trojúhelníkem o stranách 3, 4 a 5. Z omezení $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ plyne, že $\alpha + \varphi$ a $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ jsou dva úhly, které leží po řadě v intervalech $(0, \frac{3\pi}{2})$ a $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$. Proto se siny těchto dvou úhlů rovnají jedině ve dvou případech

$$(i) \quad \alpha + \varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad (ii) \quad (\alpha + \varphi) + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \pi.$$

V případě (i) vychází $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$, takže první řešení x_1 má hodnotu

$$x_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi \right) = \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

³[18], str. 13–14, kde rovnice řešena pouze v oboru $\langle \frac{3}{5}, 1 \rangle$.

V případě (ii) platí $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\varphi$, takže druhé řešení x_2 má vyjádření

$$x_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\varphi\right) = \sin\frac{2}{3}\varphi = \sin\left(\frac{2}{3}\arcsin\frac{3}{5}\right) \doteq 0,416.$$

Podle vzorce $\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta$ pro hodnotu $\beta = \frac{2}{3}\varphi$, při které platí $\sin\beta = x_2$ a $\sin 3\beta = x_1 = \frac{24}{25}$, dostáváme rovnost

$$\frac{24}{25} = 3x_2 - 4x_2^3,$$

takže číslo x_2 je kořenem kubické rovnice $100x^3 - 75x + 24 = 0$.

■ **Příklad 6.1.4.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic⁴

$$\frac{3x - y}{x - 3y} = x^2, \quad \frac{3y - z}{y - 3z} = y^2, \quad \frac{3z - x}{z - 3x} = z^2.$$

Řešení: Účinným prostředkem bude vzorec pro tangens trojnásobného argumentu, který je podle příkladu 4.6.1 tvaru

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Vyřešíme-li totiž rovnice zadané soustavy vzhledem k neznámým, v nichž jsou lineární (tedy po řadě y, z a x), dostaneme vztahy

$$y = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, \quad z = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2}, \quad x = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

se zlomky z uvedeného vzorce. Ukažme, že nová soustava rovnic je v oboru *nenulových* reálných čísel s původní soustavou ekvivalentní. Kdyby platilo např. $x = 0$, nesplňovalo by první původní rovnici žádné číslo y . Proto nutně platí $x \neq 0$ a podobně $y \neq 0$ a $z \neq 0$. Z důsledků původních rovnic

$$y(1 - 3x^2) = 3x - x^3, \quad z(1 - 3y^2) = 3y - y^3, \quad x(1 - 3z^2) = 3z - z^3$$

proto plyne, že žádné z čísel x^2, y^2, z^2 se nerovná ani číslu $\frac{1}{3}$, ani číslu 3. Zmíněná ekvivalence původní a upravené soustavy (druhé v oboru $xyz \neq 0$) je tak dokázána.

Předpokládejme nyní, že (x, y, z) je libovolné řešení upravené soustavy, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Hledejme hodnotu x ve tvaru $x = \operatorname{tg} \alpha$ pro vhodné $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq 0$. Z první rovnice soustavy plyne $y = \operatorname{tg} 3\alpha$, z druhé pak $z = \operatorname{tg}(3 \cdot 3\alpha) = \operatorname{tg} 9\alpha$ a konečně z třetí rovnice $x = \operatorname{tg}(3 \cdot 9\alpha) = \operatorname{tg} 27\alpha$. Platí tedy rovnost $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 27\alpha$, která znamená, že $27\alpha = \alpha + k\pi$ neboli $\alpha = \frac{k\pi}{26}$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$. Z podmínek $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ a $\alpha \neq 0$ dostáváme 24 možných hodnot $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm 12$ parametru k . Každé z nich odpovídá trojice hodnot

$$x = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{26}, \quad y = \operatorname{tg} \frac{3k\pi}{26}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{9k\pi}{26}.$$

Protože tyto hodnoty funkce tangens existují a jsou nenulové, je každá z těchto 24 trojic řešením soustavy ze zadání příkladu (a jiná její řešení, jak plyne z našeho postupu, neexistují).

⁴[18], str. 14.

■ **Příklad 6.1.5.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic⁵

$$x^3 - 3x = y, \quad y^3 - 3y = z, \quad z^3 - 3z = x.$$

Řešení: Levé strany zadaných rovnic připomínají vzorec pro kosinus trojnásobného argumentu, který jsme dokázali v příkladu 4.6.1 ve tvaru

$$\cos 3\omega = 4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega.$$

V zadaných rovnicích však „chybí“ koeficient 4, což napravíme, když je po vydělení číslem 2 zapíšeme ve tvaru

$$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{x}{2} = \frac{y}{2}, \quad 4 \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{y}{2} = \frac{z}{2}, \quad 4 \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{z}{2} = \frac{x}{2}.$$

Hledejme proto nejprve řešení dané soustavy v oboru $\langle -2, 2 \rangle$. V tomto případě totiž můžeme psát $x = 2 \cos \alpha$, $y = 2 \cos \beta$ a $z = 2 \cos \gamma$ pro vhodná $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi \rangle$ a po dosazení do upravených rovnic dostaneme díky uvedenému vzorci pro $\omega = \alpha, \beta, \gamma$ soustavu rovnic

$$\cos 3\alpha = \cos \beta, \quad \cos 3\beta = \cos \gamma, \quad \cos 3\gamma = \cos \alpha.$$

Je korektní závěr $\cos 27\alpha = \cos \alpha$, který se odtud nabízí? Všimněme si ještě jednou vzorce s obecným úhlem ω . Plyne z něj, že hodnota $\cos 3\omega$ je *jednoznačně určena* hodnotou $\cos \omega$. Proto v našem případě z rovnosti $\cos 3\alpha = \cos \beta$ plyne $\cos 3 \cdot 3\alpha = \cos 3\beta$, tedy – s ohledem na $\cos 3\beta = \cos \gamma$ – platí $\cos 9\alpha = \cos \gamma$. Odtud podobně obdržíme $\cos 27\alpha = \cos 3\gamma$, a tím je závěr $\cos 27\alpha = \cos \alpha$ korektně dokázán. V jeho důsledku pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$27\alpha = \pm\alpha + 2k\pi \quad \text{neboli} \quad \alpha \in \left\{ \frac{k\pi}{13}, \frac{k\pi}{14} \right\}.$$

S ohledem na $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ tak dostaneme 27 vyhovujících hodnot α , kterým odpovídá 27 různých řešení zadané soustavy:

$$x = 2 \cos \frac{k\pi}{13}, \quad y = 2 \cos \frac{3k\pi}{13}, \quad z = 2 \cos \frac{9k\pi}{13} \quad (k = 0, 1, \dots, 13)$$

a

$$x = 2 \cos \frac{k\pi}{14}, \quad y = 2 \cos \frac{3k\pi}{14}, \quad z = 2 \cos \frac{9k\pi}{14} \quad (k = 1, 2, \dots, 13).$$

(Protože je funkce kosinus prostá na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, jedná se skutečně o různá řešení, protože se liší ve složce x ; kvůli tomu jsme ve druhé skupině řešení vynechali hodnoty $k = 0$ a $k = 14$.)

Řešení příkladu by bylo neúplné, kdybychom neukázali, že soustava rovnic nemá žádné řešení, jež nesplňuje podmínku $x, y, z \in \langle -2, 2 \rangle$. Uděláme to nyní pěkným obratem. Kdybychom zadanou soustavu řešili algebraicky, a to eliminační metodou, po dosazení za y z první rovnice do druhé a poté po dosazení za z z druhé rovnice do třetí bychom dostali rovnici s jednou neznámou x

$$((x^3 - 3x)^3 - 3(x^3 - 3x))^3 - 3(x^3 - 3x)^3 + 9(x^3 - 3x) = x,$$

jež má zřejmě stupeň 27. A protože jsme našli právě 27 jejích řešení v oboru $\langle -2, 2 \rangle$, žádná jiná řešení ani mimo tento obor neexistují.

⁵[31], str. 29–30.

■ **Příklad 6.1.6.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic⁶

$$3(x^2 + 1)yz = 4(y^2 + 1)zx = 5(z^2 + 1)xy, \quad xy + yz + zx = 1.$$

Řešení: Poslední rovnice dané soustavy evokuje identitu

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1,$$

o které jsme v podkapitole 5.1 ukázali, že platí pro vnitřní úhly α, β, γ libovolného trojúhelníku. Hodnoty $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ jsou tehdy ovšem kladné, můžeme to však tvrdit o složkách x, y, z libovolného řešení zadané soustavy? Předně je jasné, že žádné z čísel x, y, z není rovno nule. Kdyby totiž například platilo $x = 0$, z prvních dvou rovnic soustavy bychom měli $yz = 0$, zatímco z třetí rovnice by plynulo $yz = 1$. Čísla yz, zx, xy jsou tedy nenulová a podle prvních rovnic mají stejné znaménko; protože je podle třetí rovnice jejich součet roven 1, jde o tři kladná čísla. Každé řešení (x, y, z) je tedy tvořeno buď třemi kladnými, nebo třemi zápornými čísly, přitom trojice $(-x, -y, -z)$ je zřejmě také řešením. Můžeme se proto skutečně omezit na hledání řešení v oboru kladných čísel, jak jsme si přáli.

Vrátíme se nyní k trigonometrické identitě zapsané v úvodní větě řešení a dokážeme užitečné pravidlo: *Splňují-li kladná reálná čísla x, y, z rovnost $xy + yz + zx = 1$, pak tato čísla mají vyjádření $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ a $z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, kde α, β, γ jsou vnitřní úhly vhodného trojúhelníku.* Skutečně, čísla α, β, γ pro kžžena vyjádření v intervalu $(0, \pi)$ existují, neboť funkce tangens nabývá v $(0, \frac{\pi}{2})$ všech kladných hodnot. Naším cílem je vysvětlit, proč pro taková α, β, γ platí rovnost $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Z předpokládané rovnosti $xy + yz + zx = 1$ zřejmě plyne $xy \neq 1$, takže ji lze upravit do tvaru

$$\frac{1}{z} = \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{neboli} \quad \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)$$

(díky vzorci pro tangens součtu). Poslední rovnost pro úhly $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ již ovšem znamená

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \quad \text{neboli} \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

a potřebné pravidlo je tak dokázáno.

Vraťme se k řešení zadané soustavy v oboru kladných čísel a dosadme odvozené trigonometrické vyjádření $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, y = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, z = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ do prvních dvou rovnic soustavy, upravených do tvaru

$$\frac{3(x^2 + 1)}{x} = \frac{4(y^2 + 1)}{y} = \frac{5(z^2 + 1)}{z}$$

po vydělení součinem xyz . Díky identitě

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} + 1}{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2} + \cos^2 \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{2}{\sin \omega},$$

kteřou použijeme pro $\omega = \alpha, \beta, \gamma$, dostaneme

$$\frac{3 \cdot 2}{\sin \alpha} = \frac{4 \cdot 2}{\sin \beta} = \frac{5 \cdot 2}{\sin \gamma} \quad \text{neboli} \quad \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 3 : 4 : 5.$$

Podle sinové věty jsou α, β, γ vnitřní úhly známého pravoúhlého trojúhelníku o stranách 3, 4, 5, takže platí $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \sin \beta = \frac{4}{5}$ a $\sin \gamma = 1$. Z výše uvedené identity s úhlem ω snadno vypočteme hodnoty $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$ a $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$. V oboru kladných čísel má tedy zadaná soustava jediné řešení $(x_1, y_1, z_1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$. Její druhé řešení je $(x_2, y_2, z_2) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1)$, žádné další řešení v oboru reálných čísel daná soustava nemá.

⁶[18], str. 15–16.

■ **Příklad 6.1.7.** V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic⁷

$$2x + x^2y = y, \quad 2y + y^2z = z, \quad 2z + z^2x = x.$$

Řešení: Využijeme vzorec pro tangens dvojnásobného argumentu

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

neboť zlomky uvedeného druhu dostaneme, když rovnice zadané soustavy vyřešíme po řadě vzhledem k y, z a x :

$$y = \frac{2x}{1 - x^2}, \quad z = \frac{2y}{1 - y^2}, \quad x = \frac{2z}{1 - z^2}.$$

Ujistěme se, že upravená soustava je ekvivalentní s původní soustavou, že tedy vydělení výrazy $1 - x^2, 1 - y^2, 1 - z^2$ je korektní úprava. Kdyby například platilo $1 - x^2 = 0$, tj. $x = \pm 1$, po dosazení do první rovnice bychom dostali $2x = 0$, tedy spor. Proto se dále budeme zabývat řešením upravené soustavy. Po substituci $x = \operatorname{tg} \alpha$ s vhodným úhlem $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ dostaneme z první rovnice $y = \operatorname{tg} 2\alpha$, z druhé pak $z = \operatorname{tg} 2 \cdot 2\alpha = \operatorname{tg} 4\alpha$ a konečně z třetí rovnice $x = \operatorname{tg} 2 \cdot 4\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$. Z rovnosti $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$ máme $8\alpha = \alpha + k\pi$ neboli $\alpha = \frac{k\pi}{7}$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$, jež díky podmínce $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nabývá hodnot $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. Těm odpovídá sedm trojic

$$(x, y, z) = \left(\operatorname{tg} \frac{k\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{2k\pi}{7}, \operatorname{tg} \frac{4k\pi}{7} \right),$$

jež jsou zřejmě různá řešení dané soustavy (liší se totiž ve složce x a žádná složka žádné trojice se nerovná ani 1, ani -1). Jiná řešení daná soustava nemá.

■ **Příklad 6.1.8.** V oboru reálných čísel řešte pro každé $n \geq 2$ soustavu rovnic⁸

$$2x_1x_2 + 1 = x_1^2, \quad 2x_2x_3 + 1 = x_2^2, \quad \dots, \quad 2x_nx_1 + 1 = x_n^2.$$

Řešení: Z první rovnice zřejmě plyne $x_1 \neq 0$, takže z ní lze vyjádřit x_2 pomocí x_1 zlomkem, k jehož úpravě se vyplatí – možná poněkud překvapivě – substituce $x_1 = \operatorname{cotg} \alpha$. Takový úhel $\alpha \in (0, \pi)$ jistě existuje, neboť obor hodnot funkce kotangens na $(0, \pi)$ je celé \mathbb{R} . Dostaneme tak

$$x_2 = \frac{x_1^2 - 1}{2x_1} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - 1}{2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{cotg} 2\alpha.$$

Podobně z druhé rovnice soustavy plyne $x_2 \neq 0$ a $x_3 = \operatorname{cotg} (2 \cdot 2\alpha) = \operatorname{cotg} 4\alpha$. Z dalších rovnic pak indukci dostaneme vyjádření $x_i = \operatorname{cotg} (2^{i-1}\alpha)$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$, až konečně z poslední rovnice $x_1 = \operatorname{cotg} (2^n \alpha)$. To znamená, že $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} 2^n \alpha$, a proto $2^n \alpha = \alpha + k\pi$ neboli $\alpha = \frac{k\pi}{2^n - 1}$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$. S ohledem na podmínku $\alpha \in (0, \pi)$ musí být číslo k rovno jednomu z čísel $1, 2, \dots, 2^n - 2$ a my tak nacházíme $2^n - 2$ n -tic

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\operatorname{cotg} \frac{k\pi}{2^n - 1}, \operatorname{cotg} \frac{2k\pi}{2^n - 1}, \dots, \operatorname{cotg} \frac{2^{n-1}k\pi}{2^n - 1} \right),$$

kteřá jsou různá řešení zadané soustavy, neboť se navzájem liší v první složce x_1 a žádná složka žádné n -tice se nerovná nule. V opačném případě by totiž některé z čísel $\frac{2^{i-1}k\pi}{2^n - 1}$ muselo být násobkem čísla π , takže číslo $2^{i-1} \cdot k$ by muselo být dělitelné číslem $2^n - 1$. Mocnina 2^{i-1} je však s lichým číslem $2^n - 1$ nesoudělná, takže by číslo $2^n - 1$ bylo dělitelem čísla $k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 2\}$, a to je spor. Dokázali jsme, že zadaná soustava má právě $2^n - 2$ řešení (uvedených výše) a žádná jiná řešení nemá.

⁷[31], str. 31.

⁸[31], str. 31, kde zadáno a řešeno pouze pro $n = 4$.

■ **Příklad 6.1.9.** Pro libovolná reálná čísla x_1, x_2, \dots, x_n dokažte implikace

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3} \cdot \max \{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 \leq \frac{n}{4} \cdot \max \{|x_i|^3 : 1 \leq i \leq n\}.$$

Pro obě dokazované nerovnosti rovněž zjistěte, kdy v nich nastane rovnost.⁹

Řešení: Využijeme vzorec pro sinus trojnásobného argumentu

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

který jsme odvodili v příkladu 4.6.1. Maxima M a M^3 v dokazovaných nerovnostech jsou nezáporná čísla, přitom v případě $M = 0$ jde o dvě triviální rovnosti, neboť tehdy platí $x_i = 0$ pro každé i . Až do konce řešení se proto zabýváme případem, kdy $M > 0$. Tehdy můžeme každé z čísel x_i vyjádřit ve tvaru $x_i = M \sin \alpha_i$ pro vhodné $\alpha_i \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$. Podle vzorce z úvodní věty řešení platí rovnosti

$$\sin 3\alpha_i = 3 \sin \alpha_i - 4 \sin^3 \alpha_i = \frac{3x_i}{M} - \frac{4x_i^3}{M^3},$$

jejichž sečtením pro $i = 1, 2, \dots, n$ dostaneme

$$\sum_{i=1}^n \sin 3\alpha_i = \frac{3}{M} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{4}{M^3} \sum_{i=1}^n x_i^3,$$

odkud již snadno plynou obě implikace pro zkoumané součty:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i^3 = 0 &\quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i = \frac{M}{3} \cdot \sum_{i=1}^n \sin 3\alpha_i \leq \frac{M}{3} \cdot \sum_{i=1}^n 1 = \frac{n}{3} \cdot M, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 0 &\quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n x_i^3 = -\frac{M^3}{4} \sum_{i=1}^n \sin 3\alpha_i \leq -\frac{M^3}{4} \sum_{i=1}^n (-1) = \frac{n}{4} \cdot M^3. \end{aligned}$$

Zároveň vidíme, že v první dokázané implikaci nastane rovnost, právě když bude platit $\sin 3\alpha_i = 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. To s ohledem na $3\alpha_i \in \langle -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$ znamená $3\alpha_i \in \{-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ neboli $\alpha_i \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\}$, tedy $x_i = M \sin \alpha_i \in \{-M, \frac{M}{2}\}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Kolik z čísel x_i má hodnotu $-M$ a kolik hodnotu $\frac{M}{2}$, zjistíme z předpokladu $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$, za kterého podmínku rovnosti hledáme. Je-li $x_i = -M$ pro právě k indexů i (a tedy $x_i = \frac{M}{2}$ pro $n - k$ indexů i), má zmíněný předpoklad tvar

$$k \cdot (-M)^3 + (n - k) \cdot \left(\frac{M}{2}\right)^3 = 0 \quad \text{neboli} \quad -k + \frac{n - k}{8} = 0$$

(připomínáme, že $M \neq 0$), což je ekvivalentní s rovností $n = 9k$. Kromě případu $M = 0$ proto platí v první implikaci rovnost, jen když je číslo n dělitelné devíti a přitom $\frac{n}{9}$ čísel x_i je rovno $-M$ a $\frac{8n}{9}$ čísel x_i je rovno $\frac{M}{2}$.

Pro rovnost v druhé dokázané implikaci zkoumáme kombinaci předpokladu a podmínky ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n \sin \alpha_i = 0 \quad \text{a} \quad \sin 3\alpha_i = -1 \quad (1 \leq i \leq n).$$

⁹[46], str. 12 a [18], str. 16, v obou zdrojích bez diskuse o případě rovnosti. O náročnosti možného důkazu první implikace bez užití goniometrické substituce se lze přesvědčit v [38], str. 147–8.

Z podmínky tentokrát dostaneme $\alpha_i \in \{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\}$ neboli $x_i \in \{-\frac{M}{2}, M\}$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Předpoklad tehdy bude splněn, jen když bude číslo n dělitelné třemi a přitom $\frac{2n}{3}$ čísel x_i bude rovno $-\frac{M}{2}$ a $\frac{n}{3}$ čísel x_i bude rovno M . To je hledané kritérium rovnosti v druhé implikaci (v případě $M \neq 0$).

■ **Příklad 6.1.10.** Předpokládejme, že pro kladná reálná čísla a, b, c, d platí

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

Dokažte nerovnost $abcd \geq 3$ a zjistěte, kdy v ní nastane rovnost.¹⁰

Řešení: Náš postup založíme na využití zřejmé identity

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x.$$

Určíme-li k daným číslům a, b, c, d úhly $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tak, aby platilo $\operatorname{tg} \alpha = a^2, \operatorname{tg} \beta = b^2, \operatorname{tg} \gamma = c^2, \operatorname{tg} \delta = d^2$, pak podmínku ze zadání příkladu můžeme díky uvedené identitě přepsat do tvaru

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = 1 \quad \text{neboli} \quad \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \sin^2 \alpha.$$

Odtud užitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem trojice čísel $\cos^2 \beta, \cos^2 \gamma, \cos^2 \delta$ (kterou jsme dokázali v úvodní části podkapitoly 5.2) dostaneme

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta \geq 3 \sqrt[3]{\cos^2 \beta \cos^2 \gamma \cos^2 \delta}.$$

Vynásobení tohoto odhadu pro $\sin^2 \alpha$ a analogických tří odhadů pro $\sin^2 \beta, \sin^2 \gamma, \sin^2 \delta$ získáme nerovnost

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 \delta \geq 81 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \cos^2 \delta,$$

kterou lze zřejmě upravit na tvar $\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{tg}^2 \delta \geq 3^4$. Levá strana poslední nerovnosti je však rovna $a^4 b^4 c^4 d^4$, takže požadovaný důkaz nerovnosti $abcd \geq 3$ je hotov. Rovnost v ní nastane, právě když nastane rovnost ve všech čtyřech nerovnostech, které jsme mezi sebou vynásobili. Taková podmínka bude splněna, právě když každá tři z průměrovaných čísel $\cos^2 \alpha, \cos^2 \beta, \cos^2 \gamma, \cos^2 \delta$ budou stejná. Protože součet všech čtyř čísel je roven 1, dostáváme kritérium rovnosti $abcd = 3$ v podobě vztahů

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta = \cos^2 \gamma = \cos^2 \delta = \frac{1}{4} \quad \text{neboli} \quad \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma = \sin^2 \delta = \frac{3}{4}.$$

Ekvivalentní zápis $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \delta = \sqrt{3}$ vede k závěru, že rovnost $abcd = 3$ nastane jedině pro čtveřici $a = b = c = d = \sqrt[4]{3}$.

■ **Příklad 6.1.11.** Dokažte, že z libovolné čtveřice různých čísel z intervalu $(0, 1)$ lze vybrat dvě čísla x a y tak, aby platilo¹¹

$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

Řešení: Daná čtyři různá čísla z intervalu $(0, 1)$ zapíšeme v goniometrickém tvaru jako

$$\sin \alpha_1, \quad \sin \alpha_2, \quad \sin \alpha_3, \quad \sin \alpha_4,$$

¹⁰[44], str. 14.

¹¹[31], str. 31.

kde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ jsou čtyři různé úhly z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Díky tomu, že $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_i} = \cos \alpha_i$ pro každé i , máme úkol dokázat existenci dvou indexů $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ s vlastností

$$0 < \sin \alpha_i \cos \alpha_j - \sin \alpha_j \cos \alpha_i < \frac{1}{2} \quad \text{neboli} \quad 0 < \sin(\alpha_i - \alpha_j) < \frac{1}{2}$$

(podle vzorce pro sinus rozdílu). Poslední podmínka bude splněna, právě když pro indexy i, j bude platit $0 < \alpha_i - \alpha_j < \frac{\pi}{6}$, neboť funkce sinus je na intervalu $(0, \frac{\pi}{6})$ rostoucí a $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Takovou dvojici α_i, α_j ze čtveřice $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ vždy vybereme, neboť v jednom ze tří intervalů $(0, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ a $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$, které dělí celý interval $(0, \frac{\pi}{2})$ na třetiny, musí dva ze čtyř daných úhlů vždy ležet.

■ **Příklad 6.1.12.** Pro všechna reálná čísla x, y dokažte nerovnosti¹²

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

Rozhodněte rovněž, kdy nastanou rovnosti.

Řešení: Elegantní postup založíme na využití goniometrických vzorců

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \omega = \frac{1}{\cos^2 \omega},$$

jejichž platnost je zřejmá. Každá dvě reálná čísla x, y můžeme zapsat ve tvaru $x = \operatorname{tg} \alpha$ a $y = \operatorname{tg} \beta$, kde $\alpha, \beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Podle uvedených vzorců upravíme výraz ze zadání příkladu, přitom třetí vzorec užijeme pro dvě hodnoty $\omega = \alpha$ a $\omega = \beta$:

$$\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos^2 \beta}} = \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \beta).$$

Obor hodnot posledního výrazu je skutečně interval $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. Tím jsou oba odhady ze zadání příkladu dokázány, přitom jedna z rovností nastane, právě když bude platit $\sin 2(\alpha + \beta) = \pm 1$, tj.:

$$2(\alpha + \beta) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{neboli} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$. To je zřejmě ekvivalentní s podmínkou $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \pm 1$, kterou lze užitím vzorce pro tangens součtu přepsat do původních proměnných x, y ve tvaru

$$\frac{x+y}{1-xy} = \pm 1.$$

(Vyhovující dvojice $[x, y]$ jako body v rovině s kartézskou soustavou souřadnic Oxy zaplní dvě rovnoosé hyperboly se středy $[1, 1]$ a $[-1, -1]$.)

■ **Příklad 6.1.13.** Dokažte, že funkce ϱ daná předpisem

$$\varrho(x, y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{R}$$

má obor hodnot $\langle 0, 1 \rangle$ a splňuje tzv. trojúhelníkovou nerovnost¹³

$$\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z) \quad \text{pro všechna } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

¹²[31], str. 31, bez diskuse o případech rovnosti.

¹³[30], str. 240.

Řešení: Libovolná reálná čísla x, y, z lze zapsat ve tvaru

$$x = \operatorname{tg} \alpha, \quad y = \operatorname{tg} \beta \quad \text{a} \quad z = \operatorname{tg} \gamma, \quad \text{kde } \alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dosaďme do předpisu pro funkci ϱ a upravme (s ohledem na to, že $\cos \omega > 0$ pro každé $\omega \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

$$\varrho(x, y) = \frac{|\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{|\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta|}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} \sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}} = |\sin(\alpha - \beta)|.$$

(Využili jsme běžné goniometrické vzorce.) Tím je tvrzení oboru hodnot funkce ϱ dokázáno a trojúhelníkovou nerovnost, kterou máme ověřit, lze zapsat ve tvaru

$$|\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)| \geq |\sin(\alpha - \gamma)|.$$

Prověrkou založíme na vzorci pro sinus součtu, podle kterého platí

$$\begin{aligned} |\sin(\alpha - \gamma)| &= |\sin((\alpha - \beta) + (\beta - \gamma))| = |\sin(\alpha - \beta) \cos(\beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma)| \leq \\ &\leq |\sin(\alpha - \beta)| \cdot |\cos(\beta - \gamma)| + |\cos(\alpha - \beta)| \cdot |\sin(\beta - \gamma)| \leq \\ &\leq |\sin(\alpha - \beta)| \cdot 1 + |\sin(\beta - \gamma)| \cdot 1. \end{aligned}$$

Tím je celé řešení ukončeno.

■ **Příklad 6.1.14.** Pro libovolná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1)$, kde $n \geq 2$, dokažte¹⁴

$$\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq 1.$$

Řešení: Nejprve se v případě $n > 2$ pomocí vynechání některých činitelů vedoucího k odhadům

$$\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \sqrt{a_1 a_2} \quad \text{a} \quad \sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2)}$$

„zbavíme“ proměnných a_3, a_4, \dots, a_n a zredukujeme tak vše na důkaz nerovnosti

$$\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2)} \leq 1.$$

Užitím substitucí $a_1 = \cos^2 \alpha_1, a_2 = \cos^2 \alpha_2$ s vhodnými úhly $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ prepíšeme díky goniometrickým jedničkám poslední nerovnost do tvaru

$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \leq 1.$$

Podle vzorce pro kosinus rozdílu je však levá strana rovna $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$, což je skutečně hodnota nepřevyšující číslo 1. Důkaz je hotov.

■ **Příklad 6.1.15.** Pro libovolná reálná čísla x, y, z dokažte nerovnost

$$(xy + yz + zx - 1)^2 \leq (x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)$$

a zjistěte, kdy v ní nastane rovnost.¹⁵

Řešení: Užitím substitucí $x = \operatorname{tg} \alpha, y = \operatorname{tg} \beta, z = \operatorname{tg} \gamma$ s úhly α, β, γ , které k daným číslům x, y, z vždy v intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ najdeme, upravíme součin na pravé straně dokazované nerovnosti do tvaru

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma} = \\ &= \frac{1}{(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)^2}. \end{aligned}$$

¹⁴[30], str. 239, upraveno.

¹⁵[29], str. 116, bez diskuse o případu rovnosti.

Naší úlohou je tak vlastně dokázat nerovnost

$$|(xy + yz + zx - 1) \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma| \leq 1.$$

Do výrazu uvnitř absolutní hodnoty dosadíme za x, y, z a dále užitím běžných goniometrických vzorců vyjádření výrazu podstatně zjednodušíme:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha - 1) \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \\ &= \sin \beta (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) - \cos \beta (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) = \\ &= \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) - \cos \beta \cos(\alpha + \gamma) = -\cos(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Protože poslední výraz má všechny hodnoty skutečně v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, je nerovnost ze zadání příkladu dokázána. Rovnost v ní přitom nastane, právě když bude platit $|\cos(\alpha + \beta + \gamma)| = 1$ neboli $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = 0$. Poslední rovnost je však podle výsledku příkladu 4.6.4 ekvivalentní s rovností

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \quad \text{neboli} \quad x + y + z = xyz.$$

Hledané trojice čísel x, y, z jsou tedy právě ty, jež splňují poslední rovnici.

■ **Příklad 6.1.16.** Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{ab + c^2}}$$

pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c splňující podmínku $ab \leq c^2$.¹⁶

Řešení: Substituce $a = c \operatorname{tg} \alpha, b = c \operatorname{tg} \beta$ pro vhodné úhly $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ vede k následujícím vyjádřením:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= c^2(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) = c^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{c^2}{\cos^2 \alpha}, \\ b^2 + c^2 &= c^2(\operatorname{tg}^2 \beta + 1) = \frac{c^2}{\cos^2 \beta}, \\ ab + c^2 &= c^2(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1) = c^2 \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{c^2 \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \end{aligned}$$

Zadanou nerovnost lze proto (s ohledem na $\cos \alpha, \cos \beta > 0$) zapsat jako

$$\frac{\cos \alpha}{c} + \frac{\cos \beta}{c} \leq \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)}},$$

odkud po vynásobení kladným číslem c a umocnění vychází ekvivalentní nerovnost ve tvaru

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \leq \frac{4 \cos \alpha \cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)}$$

neboli (s ohledem na $\cos(\alpha - \beta) > 0$)

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq 2 \cos \alpha \cos \beta (2 - \cos(\alpha - \beta)).$$

¹⁶[29], str. 80, upraveno.

Protože v této nerovnosti mezi kladnými výrazy platí pro čísel v závorce na pravé straně zřejmý odhad $2 - \cos(\alpha - \beta) \geq 1$, bude tato nerovnost platit, když dokážeme silnější nerovnost (se zmenšenou pravou stranou)

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Zvolíme k tomu cestu ekvivalentních úprav s využitím běžných goniometrických vzorců:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} \right) \cdot \cos(\alpha - \beta) \leq \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \\ & \left(1 + \cos \frac{2\alpha + 2\beta}{2} \cos \frac{2\alpha - 2\beta}{2} \right) \cos(\alpha - \beta) \leq \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \\ & \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \cos^2(\alpha - \beta) \leq \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \\ & -\cos(\alpha + \beta) [1 - \cos^2(\alpha - \beta)] \leq 0, \\ & \cos(\alpha + \beta) \sin^2(\alpha - \beta) \geq 0. \end{aligned}$$

Celý dosavadní postup byl korektní pro libovolné dva úhly $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Poslední nerovnost však (kromě případu $\alpha = \beta$) platí, jen když je splněna podmínka $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Tu nám zaručí, jak nyní ukážeme, předpoklad $ab \leq c^2$ ze zadání příkladu. Z něj po dosazení zavedené substituce $a = c \operatorname{tg} \alpha, b = c \operatorname{tg} \beta$ dostaneme $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \leq 1$, což podle známých vlastností funkce tangens na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ znamená právě to, že platí podmínka $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$, kterou jsme k ukončení celého důkazu potřebovali.

■ **Příklad 6.1.17.** Předpokládejme, že z daných kladných reálných čísel a, b, c je číslo c nejmenší. Dokažte nerovnosti¹⁷

$$\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right) \sqrt{ab} \leq \sqrt{(a+c)(b+c)} + \sqrt{(a-c)(b-c)} \leq 2\sqrt{ab}.$$

Řešení: K odstranění odmocnin v prostředním zadaném výrazu využijeme dvě zřejmé goniometrické identity

$$1 \pm \sin 2\omega = (\sin \omega \pm \cos \omega)^2.$$

Všechny tři zadané výrazy proto nejprve vydělíme kladnou hodnotou \sqrt{ab} a do získaných ekvivalentních nerovností

$$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \leq \sqrt{\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{c}{a}\right) \left(1 - \frac{c}{b}\right)} \leq 2$$

dosadíme za zlomky $\frac{c}{a}$ a $\frac{c}{b}$, které díky předpokladu ze zadání leží v intervalu $(0, 1)$, vyjádření

$$\frac{c}{a} = \sin 2\alpha \quad \text{a} \quad \frac{c}{b} = \sin 2\beta$$

s vhodnými úhly $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$. S přihlédnutím k nerovnostem $\cos \alpha \geq \sin \alpha > 0$ a $\cos \beta \geq \sin \beta > 0$ můžeme díky identitám z úvodu řešení zapsat výsledek dosazení jako dvojici nerovností

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta \leq (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta) + (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \beta - \sin \beta) \leq 2,$$

které lze užitím běžných vzorců zapsat jako

$$2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq 2 \cos(\alpha - \beta) \leq 2.$$

Protože z $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$ plyne, že obě hodnoty $\cos(\alpha - \beta)$ a $\sin(\alpha + \beta)$ leží v intervalu $(0, 1)$, je platnost posledních dvou nerovností zřejmá, a proto platí i to, co jsme měli dokázat.

¹⁷[19], str. 210.

■ **Příklad 6.1.18.** Předpokládejme, že z daných kladných reálných čísel a, b, c je číslo d největší. Dokažte nerovnost¹⁸

$$\sqrt{a(d-b)(d-c)} + \sqrt{b(d-a)(d-c)} + \sqrt{c(d-a)(d-b)} \leq \sqrt{d^3} + \sqrt{abc}.$$

Řešení: K odstranění odmocnin využijeme goniometrické jedničky následujícím postupem. Do dokazované nerovnosti vydělené kladným číslem $\sqrt{d^3}$, kterou zapíšeme va tvaru

$$\sqrt{\frac{a}{d} \left(1 - \frac{b}{d}\right) \left(1 - \frac{c}{d}\right)} + \sqrt{\frac{b}{d} \left(1 - \frac{a}{d}\right) \left(1 - \frac{c}{d}\right)} + \sqrt{\frac{c}{d} \left(1 - \frac{a}{d}\right) \left(1 - \frac{b}{d}\right)} \leq 1 + \sqrt{\frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{c}{d}},$$

dosadíme vyjádření

$$\frac{a}{d} = \sin^2 \alpha, \quad \frac{b}{d} = \sin^2 \beta \quad \text{a} \quad \frac{c}{d} = \sin^2 \gamma$$

pro vhodné úhly $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, které existují díky předpokladu $\max(a, b, c) \leq d$ ze zadání příkladu. S využitím goniometrických jedniček a s přihlédnutím k tomu, že obě funkce sinus a kosinus jsou na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ nezáporné, dostaneme po dosažení nerovnost

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \leq 1 + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Tu nyní dokážeme tak, že nejprve člen $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ převedeme z pravé strany na levou a nový výraz na levé straně upravíme užitím běžných goniometrických vzorců, abychom ověřili, že jeho hodnota je skutečně menší než 1:

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \\ & = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \cos \gamma + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \sin \gamma = \\ & = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos(\alpha + \beta) \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma) \leq 1. \end{aligned}$$

Tím je celý důkaz hotov.

■ **Příklad 6.1.19.** Necht' $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel splňující podmínku

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}} \quad \text{pro každé } n \geq 1.$$

Dokažte, že tato posloupnost je periodická.¹⁹

Řešení: Přímým algebraickým výpočtem můžeme užitím daného rekurentního vzorce vyjádřit pomocí x_n postupně $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots$ atd., až zjistíme, že $x_{n+6} = x_n$, že tedy zkoumaná posloupnost má periodu 6. Místo takového poměrně pracného postupu přepíšeme rekurentní vzorec do tvaru

$$x_{n+1} = \frac{x_n - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + x_n \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}},$$

který připomíná vzorec pro tangens rozdílu

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

¹⁸[19], str. 226.

¹⁹[31], str. 30–31.

se známou hodnotou $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pro $\beta = \frac{\pi}{6}$. Když tedy ke členu x_n určíme úhel α_n tak, aby platilo $x_n = \operatorname{tg} \alpha_n$, dostaneme porovnáním rekurentního a goniometrického vzorce vyjádření $x_{n+1} = \operatorname{tg}(\alpha_n - \frac{\pi}{6})$. Zopakujeme-li tuto úvahu pro index n o 1 větší, dostaneme $x_{n+2} = \operatorname{tg}(\alpha_n - \frac{2\pi}{6})$ a dále indukcí $x_{n+k} = \operatorname{tg}(\alpha_n - \frac{k\pi}{6})$ pro každé $k \geq 1$. Pro $k = 6$ tak díky periodě π funkce tangens obdržíme kýženou rovnost $x_{n+6} = x_n$, ve které je n (od začátku našich úvah) libovolné přirozené číslo. Tím je perioda 6 zkoumané posloupnosti prokázána.

■ **Příklad 6.1.20.** Najděte všechny posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel, jež splňují podmínku²⁰

$$\sqrt{x_{n+2} + 2} \leq x_n \leq 2 \quad \text{pro každé } n \geq 1.$$

Řešení: Díky nezápornosti odmocniny leží všechny členy x_n každé vyhovující posloupnosti v intervalu $(0, 2)$. Proto můžeme zavést substituci $x_n = 2 \cos \alpha_n$ pro vhodné $\alpha_n \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ při každém $n \geq 1$, abychom s výhodou využili goniometrický vzorec $1 + \cos 2\omega = 2 \cos^2 \omega$, díky kterému

$$2 \cos \alpha_n = x_n \geq \sqrt{x_{n+2} + 2} = \sqrt{2(1 + \cos \alpha_{n+2})} = \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha_{n+2}}{2}} = 2 \cos \frac{\alpha_{n+2}}{2}.$$

Protože je funkce kosinus na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ klesající, z odvozené nerovnosti $\cos \alpha_n \geq \cos \frac{\alpha_{n+2}}{2}$ plyne $\frac{\alpha_{n+2}}{2} \geq \alpha_n$ pro každé $n \geq 1$. Z tohoto závěru po záměně indexu n postupně za $n+2, n+4, \dots$ dostaneme řetězec nerovností

$$\alpha_n \leq \frac{\alpha_{n+2}}{2} \leq \frac{\alpha_{n+4}}{2^2} \leq \frac{\alpha_{n+6}}{2^3} \leq \dots,$$

v němž čitatel každého zlomku nepřevyšuje hodnotu $\frac{\pi}{2}$. Úhel α_n z intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ tak splňuje nerovnost $\alpha_n \leq \frac{\pi}{2^k}$ pro každé $k \geq 1$, což je možné, jedině když $\alpha_n = 0$. Index n však byl libovolný, takže podmínku ze zadání příkladu splňuje jediná posloupnost s konstantními členy $x_n = 2 \cos 0 = 2$.

■ **Příklad 6.1.21.** Pro libovolné číslo $p \in \mathbb{R}$ definujme posloupnost x_1, x_2, \dots vztahy $x_1 = p$ a

$$x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n} \quad \text{pro každé } n \geq 1,$$

pro které $x_n \neq \pm 1$. Platí-li $x_n = \pm 1$ pro jisté n , řekneme, že sestrojena posloupnost má (konečnou) délku n . Určete, kolik existuje dotýčných posloupností, jež mají délku 8.²¹

Řešení: Protože platí

$$\frac{1}{1-x_n} - \frac{1}{1+x_n} = \frac{2x_n}{1-x_n^2},$$

využijeme s výhodou vzorce pro tangens dvojnásobného argumentu

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Každá uvažovaná posloupnost je určena prvním členem $x_1 = p$, který lze zapsat ve tvaru $x_1 = \operatorname{tg} \psi$ pro vhodné $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ze zadání a uvedeného vzorce pak snadno indukcí dostáváme pro každé přípustné n vyjádření $x_n = \operatorname{tg}(2^{n-1}\psi)$. Pro posloupnost délky 8 tudíž musí platit $x_8 = \operatorname{tg} 2^7\psi = \operatorname{tg} 128\psi = \pm 1$, odkud $128\psi = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$. S ohledem na podmínku $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ tak dostáváme

$$\psi = \pm \frac{\pi}{512} + \frac{k\pi}{128} = \frac{(4k \pm 1)\pi}{512} = \frac{l\pi}{512},$$

²⁰[31], str. 31.

²¹[31], str. 31.

kde l je libovolné z (lichých) čísel $-255, -253, \dots, 253, 255$, kterých je právě 256. Zbývá ještě vysvětlit, že pro žádné takové ψ nenastane $\operatorname{tg}(2^{n-1}\psi) = \pm 1$ již při některém $n < 8$. Kdyby tomu tak bylo, muselo by existovat $m \in \mathbb{Z}$, pro které by platilo

$$2^{n-1} \cdot \frac{l\pi}{512} = \pm \frac{\pi}{4} + m\pi \quad \text{neboli} \quad 2^{n-1}l = \pm 128 + 512m.$$

Pravá strana je však násobkem čísla $128 = 2^7$, navíc číslo l je liché, takže levá strana je násobkem 2^7 , jen když $n - 1 \geq 7$, tj. $n \geq 8$. Tím je dokázáno, že dotyčných posloupností délky 8 je právě 256.

■ **Příklad 6.1.22.** Dvě posloupnosti reálných čísel x_1, x_2, \dots a y_1, y_2, \dots jsou definovány vztahy $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$,

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2} \quad \text{a} \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}} \quad \text{pro každé } n \geq 1.$$

Dokažte, že nerovnosti $2 < x_n y_n < 3$ platí pro všechny indexy $n \geq 2$.²²

Řešení: K úpravě výrazu $\sqrt{1 + x^2}$ je výhodná substituce $x = \operatorname{tg} \alpha$:

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{|\cos \alpha|}.$$

Obě naše posloupnosti jsou tvořeny výlučně kladnými čísly, takže jejich členy lze zapsat ve tvaru $x_n = \operatorname{tg} \alpha_n$ a $y_n = \operatorname{tg} \beta_n$, kde $\alpha_n, \beta_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ pro každé $n \geq 1$. Protože $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, platí $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\pi}{3}$ a podle zadaných rekurentních vztahů a vzorce z úvodu řešení, ve kterém v případě $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ můžeme psát $\cos \alpha$ bez znaku absolutní hodnoty, dostáváme běžnými goniometrickými úpravami

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{n+1} = x_{n+1} &= \operatorname{tg} \alpha_n + \frac{1}{\cos \alpha_n} = \frac{\sin \alpha_n + 1}{\cos \alpha_n} = \frac{(\sin \frac{\alpha_n}{2} + \cos \frac{\alpha_n}{2})^2}{\cos^2 \frac{\alpha_n}{2} - \sin^2 \frac{\alpha_n}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha_n}{2} + \cos \frac{\alpha_n}{2}}{\cos \frac{\alpha_n}{2} - \sin \frac{\alpha_n}{2}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{2}} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_n}{2} \right), \\ \operatorname{tg} \beta_{n+1} = y_{n+1} &= \frac{\operatorname{tg} \beta_n}{1 + \frac{1}{\cos \beta_n}} = \frac{\sin \beta_n}{1 + \cos \beta_n} = \frac{2 \sin \frac{\beta_n}{2} \cos \frac{\beta_n}{2}}{2 \cos^2 \frac{\beta_n}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\beta_n}{2}. \end{aligned}$$

Protože všechny úhly $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_n}{2}, \frac{\beta_n}{2}$ leží v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, odvozené rovnosti znamenají, že pro každé $n \geq 1$ platí

$$\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_n}{2} \quad \text{a} \quad \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2}.$$

Odtud s přihlédnutím k $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{\pi}{3}$ dostáváme pro úhly α_n, β_n s obecným indexem n vzorce (jež lze ověřit indukcí)

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \quad \text{a} \quad \beta_n = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

Pro každé $n \geq 1$ tak máme

$$\begin{aligned} x_n y_n = \operatorname{tg} \alpha_n \operatorname{tg} \beta_n &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} 2 \cdot \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}. \end{aligned}$$

²²[29], str. 134–5.

Proto dokazované nerovnosti $2 < x_n y_n < 3$ platí právě pro ty indexy n , pro které je splněna podmínka

$$0 < \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} < \frac{1}{3}.$$

Levá nerovnost je zřejmá, pravá pro každé $n \geq 2$ plyne z odhadu $\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} < \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$.

■ **Příklad 6.1.23.** Pro každé číslo $p \in \mathbb{R}$ definujeme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vztahy $x_1 = p$ a

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad \text{pro každé } n \geq 1.$$

Určete, pro kolik hodnot p platí $x_N = 0$ s pevně zvoleným indexem $N \geq 2$.²³

Řešení: Vyřešíme nejprve úkol pro $N = 2$. Protože $x_2 = 4x_1(1 - x_1) = 4p(1 - p)$, rovnost $x_2 = 0$ nastane pro právě dvě hodnoty p , totiž pro $p = 0$ a $p = 1$. Obecněji nyní ukážeme, že rovnost $x_N = 0$ celkem nastane pro $2^{N-2} + 1$ hodnot $p = \sin^2 \frac{k\pi}{2^{N-1}}$, kde $k = 0, 1, \dots, 2^{N-2}$.

Všimněme si, že funkce $f(x) = 4x(1 - x)$ z předpisu $x_{n+1} = f(x_n)$ zkoumaných posloupností splňuje identitu

$$f(x) = 4x(1 - x) = 1 - (2x - 1)^2.$$

Platí-li proto $f(x) \in \langle 0, 1 \rangle$ pro určité x , pak i $(2x - 1)^2 \in \langle 0, 1 \rangle$ neboli $-1 \leq 2x - 1 \leq 1$, což znamená $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Díky takto dokázané implikaci

$$f(x) \in \langle 0, 1 \rangle \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$

platí o našich posloupnostech pravidlo

$$x_N = 0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in \langle 0, 1 \rangle \quad \text{pro každé } n \in \{1, 2, \dots, N - 1\},$$

takže pro první člen $x_1 = p$ každé posloupnosti, jež splňuje podmínku $x_N = 0$ s daným (dále již pevným) indexem $N \geq 2$, můžeme zavést výhodnou substituci $p = \sin^2 \alpha$ s vhodným úhlem $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Díky ní totiž dostaneme

$$x_2 = 4 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha,$$

podobně $x_3 = \sin^2(2^2\alpha)$ a indukci $x_n = \sin^2(2^{n-1}\alpha)$ pro každé $n \geq 1$. Člen $x_N = \sin^2(2^{N-1}\alpha)$ je pak roven nule, právě když platí $2^{N-1}\alpha = k\pi$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$. Všechny různé vyhovující hodnoty parametru

$$p = \sin^2 \alpha = \sin^2 \frac{k\pi}{2^{N-1}}$$

pak zřejmě dostaneme volbou $k = 0, 1, \dots, 2^{N-2}$ (pro krajní hodnoty $k = 0$, resp. $k = 2^{N-2}$ to jsou hodnoty $p = 0$, resp. $p = 1$, jež vyhovují podmínce $x_N = 0$ pro každé $N \geq 2$). Rovnost $x_N = 0$ s daným $N \geq 2$ je tedy skutečně splněna pro právě $2^{N-2} + 1$ různých hodnot p členu x_1 , jak jsme slíbili dokázat.

■ **Příklad 6.1.24.** Rozhodněte, zda existuje 100-prvková množina reálných čísel, do které s každým číslem x patří i číslo $2x^2 - 1$.²⁴

Řešení: Kladnou odpověď potvrdíme konstrukcí vyhovující 100-prvkové množiny. Mnohočlen $2x^2 - 1$ ze zadání příkladu napovídá, že ke konstrukci bude možné využít vzorec pro kosinus dvojnásobného

²³[29], str. 145.

²⁴[19], str. 227.

argumentu $\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1$, platný pro každé $\omega \in \mathbb{R}$. Když totiž sestrojíme (nekonečnou) posloupnost reálných čísel x_1, x_2, x_3, \dots určenou vztahy $x_1 = \cos \alpha$ pro dané $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \quad \text{pro každé } n \geq 1,$$

bude díky zmíněnému vzorci platit $x_2 = \cos 2\alpha, x_3 = \cos 4\alpha, \dots$, obecně $x_n = \cos(2^{n-1}\alpha)$ pro každé $n \geq 1$. Požadovanou vlastnost pak bude mít množina

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{100}\},$$

budou-li v ní zapsané hodnoty navzájem různé a bude-li navíc platit $x_{101} = x_1$ neboli $\cos 2^{100}\alpha = \cos \alpha$. Stačí tedy najít takové $\alpha > 0$, aby všechna čísla

$$\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \dots, 2^{99}\alpha$$

ležela v intervalu $(0, \pi)$, na kterém je funkce kosinus prostá, a aby zároveň platilo $2^{100}\alpha = \alpha + 2\pi$. Protože obě tyto vlastnosti má číslo $\alpha = \frac{2\pi}{2^{100}-1}$, je konstrukce vyhovující množiny hotova.

■ **Příklad 6.1.25.** Najděte největší hodnotu výrazu

$$V = (1 - x_1)(1 - y_1) + (1 - x_2)(1 - y_2),$$

jsou-li zastoupené reálné proměnné vázány rovnostmi

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = c^2,$$

kde $c > 0$ je daná konstanta.²⁵

Řešení: Body $[x_1, x_2]$ a $[y_1, y_2]$ leží v rovině s kartézskou soustavou souřadnic na kružnici se středem v počátku a poloměrem rovným c , takže je můžeme zapsat jako

$$[x_1, x_2] = [c \cdot \cos \alpha, c \cdot \sin \alpha] \quad \text{a} \quad [y_1, y_2] = [c \cdot \cos \beta, c \cdot \sin \beta]$$

s vhodnými úhly $\alpha, \beta \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Dosaďme tato vyjádření do výrazu V , upravme užitím běžných goniometrických vzorců a nakonec shora odhadněme:

$$\begin{aligned} V &= 2 - c(\cos \alpha + \sin \alpha + \cos \beta + \sin \beta) + c^2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= 2 - c\sqrt{2} \left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} \right) \right) + c^2 \cdot \cos(\alpha - \beta) \leq \\ &\leq 2 + c\sqrt{2}(1 + 1) + c^2. \end{aligned}$$

Rovnost v odvozené nerovnosti nastane, bude-li platit zároveň

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\beta + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \quad \text{a} \quad \cos(\alpha - \beta) = 1,$$

což se vyplní například pro $\alpha = \beta = \frac{5\pi}{4}$. To znamená, že

$$\max V = 2 + 2c\sqrt{2} + c^2 = (c + \sqrt{2})^2.$$

²⁵[30], str. 240.

■ **Příklad 6.1.26.** V oboru reálných čísel řešte kubickou rovnici $x^3 + px + q = 0$ s obecnými nenulovými koeficienty $p, q \in \mathbb{R}$, a to goniometrickou metodou, založenou na užití vzorců pro sinus nebo kosinus trojnásobného argumentu. Charakterizujte rovněž ty kubické rovnice, pro něž je tato metoda použitelná.²⁶

Řešení: Před vlastním popisem metody připomeňme známý fakt, že na kubickou rovnici ze zadání příkladu, tedy rovnici bez členu x^2 , lze převést každou obecnou kubickou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

a sice záměnou neznámé x za novou neznámou $x + \frac{a}{3}$. Dodejme ještě, že přímo v zadání příkladu jsme vyloučili případy $p = 0$ a $q = 0$, kdy je postup řešení kubické rovnice $x^3 + px + q = 0$ triviální.

Vzorce, které máme využít a které jsme odvodili v příkladu 4.6.1, totiž

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad \text{a} \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

mají natolik podobné pravé strany, že oba dva přinášejí při zamýšleném řešení kubické rovnice $x^3 + px + q = 0$ stejný užitek. Budeme proto hledat její kořeny ve tvaru $x = r \cos \alpha$ s vhodnými čísly $r > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. K užití vzorce pro $\cos 3\alpha$ (kterému tedy dáme přednost) zadanou rovnicí $x^3 + px + q = 0$ po dosazení $x = r \cos \alpha$ upravíme takto:

$$\begin{aligned} (r \cos \alpha)^3 + pr \cos \alpha + q &= 0, \\ \frac{r^3}{4} \left(4 \cos^3 \alpha + \frac{4p}{r^2} \cos \alpha \right) + q &= 0. \end{aligned}$$

V závorce poslední rovnice dostaneme hodnotu $\cos 3\alpha$ z výše uvedeného vzorce, bude-li splněna podmínka $\frac{4p}{r^2} = -3$. Tu můžeme volbou parametru r zaručit, ovšem jen tehdy, když je koeficient p výchozí kubické rovnice záporný (to je první omezení na použitelnost naší metody). Zabývejme se proto dále pouze případem $p < 0$. Jak jsme naznačili, podmínku $\frac{4p}{r^2} = -3$ splníme volbou

$$r = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

a upravenou rovnicí zjednodušíme na

$$\frac{r^3}{4} \cdot \cos 3\alpha + q = 0 \quad \text{neboli} \quad \cos 3\alpha = \frac{-4q}{r^3} = \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}}.$$

Dostali jsme základní goniometrickou rovnici s funkcí kosinus, která má řešení, právě když je splněna podmínka (která je druhým omezením našeho postupu)

$$\left| \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right| \leq 1.$$

Je-li splněna, pak označíme

$$\omega = \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right) \in \langle 0, \pi \rangle$$

²⁶Podle internetové encyklopedie *Wolfram Math World* popsál tuto méně známou metodu řešení kubických rovnic poprvé L. E. Dickson v roce 1898. Lze s ní seznámit i středoškolsky znalé základů goniometrie, kteří dosud neprobírali komplexní čísla.

a z rovnosti $\cos 3\alpha = \cos \omega$ dostaneme $3\alpha = \pm\omega + 2k\pi$ pro vhodné $k \in \mathbb{Z}$. Kořenem původní kubické rovnice je tedy každé číslo x tvaru

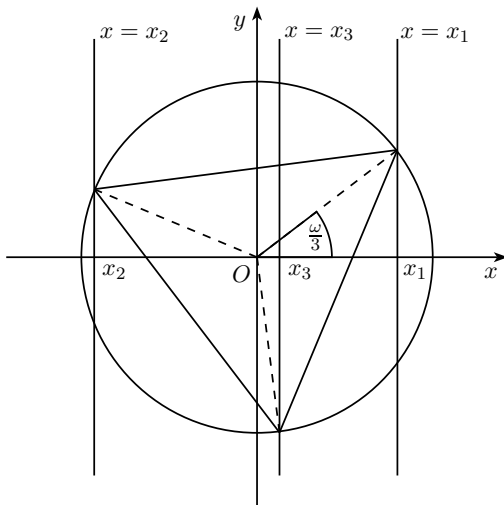
$$x = r \cos \alpha = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\pm\frac{\omega}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right), \quad \text{kde } k \in \mathbb{Z}.$$

S ohledem na to, že funkce kosinus je sudá a má periodu 2π , tak dostáváme tři kořeny rovnice $x^3 + px + q = 0$ ve tvaru

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\omega}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{\omega}{3} + \frac{2\pi}{3} \right), \quad x_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{\omega}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)$$

(lze ukázat, že jsou-li některé z hodnot x_1, x_2, x_3 rovny témuž číslu, jedná se o násobný kořen). Z nalezených vzorců pro kořeny x_1, x_2, x_3 je dobře patrný geometrický význam kladného parametru $r = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}$. V rovině s kartézskou soustavou souřadnic Oxy se jedná o poloměr r té kružnice se středem v počátku O , jež protíná tři rovnoběžné přímky o rovnicích $x = x_1, x = x_2$ a $x = x_3$ ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku, jak je znázorněno na obrázku. Taková kružnice vždy existuje, splňují-li čísla x_1, x_2, x_3 podmínku $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, jež vyjadřuje absenci členu x^2 ve zkoumané kubické rovnici.²⁷

Protože více než tři kořeny kubická rovnice mít nemůže, poskytuje popsaná metoda pro rovnici



Obrázek 6.1: Kružnice opsaná rovnostrannému trojúhelníku

$x^3 + px + q = 0$ za podmínek

$$p < 0 \quad \text{a} \quad \left| \frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{-3}{p}} \right| \leq 1$$

její úplné řešení. Pověsimněme si nyní, že při splnění první podmínky $p < 0$ lze druhou podmínku upravit do tvaru nerovnosti

$$4p^3 + 27q^2 \leq 0,$$

²⁷V kurzech syntetické geometrie se často objevuje konstrukční úloha sestavit rovnostranný trojúhelník s vrcholy na třech daných rovnoběžkách.

kteřá už (pro nenulová p, q) sama má za důsledek podmínku $p < 0$. Z teorie kubických rovnic je však dobře známo, že nerovnost $4p^3 + 27q^2 \leq 0$ charakterizuje právě ty rovnice $x^3 + px + q = 0$, jež mají tři reálné kořeny. Právě pro ně je tedy popsána goniometrická metoda řešení použitelná (a vede k nalezení všech tří kořenů). Dodejme, že Cardanova metoda řešení takových rovnic si vynucuje užití komplexních čísel k výpočtu druhých odmocnin ze záporných čísel. Tento případ bývá označován jako *casus irreducibilis* a my jsme se s ním už setkali při řešení goniometrické soustavy v příkladu 4.5.13.

6.2 Goniometrický tvar komplexních čísel

K úvahám v této podkapitole nám postačí základní pojmy a znalosti k dotyčné problematice, jak jsou vyloženy například v gymnaziální učebnici [9]. Nebudeme zde proto ani připomínat, jak se *komplexní čísla* a *aritmetické operace* s nimi zavádějí, co znamenají termíny jako *reálná část* a *imaginární část* komplexního čísla, číslo *komplexně sdružené* k danému číslu, *absolutní hodnota* komplexního čísla a jakými symboly se běžně tyto objekty značí. Za známou budeme považovat i skutečnost, že každé nenulové komplexní číslo $z = a + ib$ (kde $i^2 = -1$) má kromě právě zapsaného algebraického tvaru též standardní vyjádření

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad (6.1)$$

kterému se říká *goniometrický tvar komplexního čísla*. V něm je orientovaný úhel α (zvaný argument komplexního čísla z) reálné číslo s vlastností

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{a} \quad \sin \alpha = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (6.2)$$

jež však není určeno jednoznačně. (Je-li α_0 jedna vyhovující hodnota, pak každá jiná je tvaru $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$). Zdůrazněme, že v případě komplexní jednotky $|z| = 1$ není soustava dvou rovnic (6.2) ničím jiným, než definicí goniometrických funkcí kosinus a sinus v oboru \mathbb{R} , jak jsme ji podali v úvodní části kapitoly 4 pomocí jednotkové kružnice opatřené goniometrickou ručičkou.

Zapisování komplexních čísel ve tvaru (6.1) poskytuje jejich uživatelům významné početní výhody, zejména při umocňování a odmocňování těchto čísel. Přestože tyto jednoduché a všeobecně známé poznatky patří rovněž k základům aritmetiky komplexních čísel, vyložíme je nyní podrobně, abychom ukázali jejich souvislost s teorií goniometrických funkcí, kterou jsme vybudovali v kapitole 4. Aplikacemi těchto poznatků se pak budeme zabývat ve zbylé části podkapitoly. Budou to ukázky o to zajímavější, že komplexní čísla nebudou samotným námětem jednotlivých zadání, nýbrž prostředkem jejich řešení.

Zmíněné výhody zápisů (6.1) se odvíjí od pravidla o násobení dvou komplexních jednotek

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}), \quad (6.3)$$

které dokážeme tak, že závorky na levé straně algebraicky roznásobíme a poté využijeme součtové vzorce pro sinus a kosinus²⁸:

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + i \sin \beta) = \\ & = \cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta = \\ & = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) = \\ & = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

²⁸Zdůrazněme, že to byly i v kapitole 4 první dokázané vzorce, ze kterých jsme dále odvozovali vše, co jsme pro teorii goniometrických funkcí v oboru \mathbb{R} potřebovali.

Opakovaným užitím dokázaného pravidla (6.3) při volbě $\beta = \alpha$ dostaneme významné tvrzení, jež proto patří k těm matematickým větám, které mají své jméno. Říká se jí *Moivreova věta*, zmínili jsme se o ní již v historické části práce na str. 34 a její obsah lze vyjádřit vzorcem

$$\boxed{(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}).}$$

Uvedený vzorec platí dokonce pro všechny celé (nejen kladné) exponenty n , neboť z výchozího vzorce (6.3) plyne rovněž pravidlo o podílu dvou komplexních jednotek

$$\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta} = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Snadno totiž ověříme, že libovolné dvě komplexní jednotky s navzájem opačnými argumenty, řekněme právě β a $-\beta$, jsou čísla nejen navzájem komplexně sdružená, ale také navzájem převrácená:

$$\begin{aligned} \cos(-\beta) + i \sin(-\beta) &= \cos \beta - i \sin \beta, \\ (\cos \beta + i \sin \beta)(\cos \beta - i \sin \beta) &= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1. \end{aligned}$$

V důsledku toho také z Moivreovy věty plyne pravidlo

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \cos n\alpha = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) \quad \wedge \quad \sin n\alpha = \frac{1}{2i} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right), \quad (6.4)$$

kteří později oceníme při řešení některých příkladů.

První výhoda, kterou Moivreova věta poskytuje, je zřejmá. Máme-li vypočítat mocninu $(a + ib)^n$ vyššího stupně n , vyplatí se převést základ $a + ib$ z algebraického tvaru na goniometrický tvar a pak jednoduše aplikovat dotyčný vzorec.²⁹ Daleko významnější (protože prakticky nepostradatelná) je role Moivreovy věty při výpočtu *odmocnin* z komplexních čísel. Připomeňme, že n -tou odmocninou z komplexního čísla z (kde n je celé číslo větší než 1) nazýváme každé komplexní číslo w , které vyhovuje rovnici $w^n = z$. Pro $z = 0$ je to jediné číslo $w = 0$ (n -násobný kořen dané rovnice), v případě $z \neq 0$ rovnici vyhovuje n různých hodnot $w = w_k$, které dostaneme z goniometrického tvaru odmocněnce $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ podle vzorce

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Je patrné, jak tento vzorec získat: pro číslo w s neznámou absolutní hodnotou a neznámým argumentem stačí vyjádřit w^n podle Moivreovy věty a pak porovnat obě strany rovnice $w^n = z$. Bez důkazu dodejme, že pro obecné $z = a + ib$ lze pouze v případě $n = 2$ vypočítat hodnoty w_k aritmeticky, tj. vyjádřit je z daných čísel a, b užitím binárních operací $+, -, \times, :$ doplněných o unární operaci odmocnění (s libovolným odmocnitelem $2, 3, 4, \dots$), uvažovanou v oboru kladných reálných čísel (která je využita i ve výše uvedeném vzorci k vyjádření $|w_k|$). Proto jsou goniometrické funkce nepostradatelné, chceme-li například přesně vyjádřit kořeny jakékoliv kubické rovnice s reálnými koeficienty, a to dokonce i v případě, kdy taková rovnice má tři reálné kořeny. Poznali jsme to již při řešení příkladů 4.5.13 a 6.1.26.

Právě připomenuté řešení kubických rovnic bylo historicky první situací, při níž nový druh čísel, na něž ostatně nikdo předtím ani nepomýšlel, našel v matematických výpočtech uplatnění. Od té

²⁹Je to alternativa k přímým algebraickým výpočtům založeným buď na binomické větě, nebo na postupném výpočtu potřebných mocnin nižších stupňů – například k určení z^{17} stačí postupně počítat $z^2 = z \cdot z$, $z^4 = z^2 \cdot z^2$, $z^8 = z^4 \cdot z^4$, $z^{16} = z^8 \cdot z^8$, $z^{17} = z^{16} \cdot z$.

doby se komplexní čísla osvědčila i při řešení řady dalších otázek a stala se rovněž vhodným prostředkem vyjadřování různých vztahů a závislostí nejen v matematice, ale i fyzice. O užitečnosti komplexních čísel, speciálně jejich zápisů v goniometrickém tvaru, při řešení některých úloh z elementární matematiky, se právě nyní přesvědčíme.

Ukázky užití komplexních čísel, které jsme v závěru předchozího odstavce slíbili, jsou obsáhle zpracovány v paragrafu 7 kapitoly 1 dobře dostupného učebního textu [12], a tak by jejich prosté reprodukování v našem textu nebylo příliš účelné. Proto nejdůležitější dotyčné výsledky z [12] zde pouze okomentujeme následným volnějším výkladem. Doplníme je poté už jen čtyřmi řešenými příklady, dvěma převzatými z jiných, méně dostupných zdrojů, a dvěma příklady, které jsme sestavili sami.

První část zmíněného paragrafu z učebnice [12] na str. 61–62 se týká problematiky určování *součtů kombinačních čísel* $\binom{n}{k}$ s pevným parametrem n a proměnným parametrem k , který probíhá některou aritmetickou posloupností.³⁰ Obecně lze konstatovat, že tyto výsledky plynou z rovností

$$(1+z)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}z + \binom{n}{2}z^2 + \dots + \binom{n}{n-1}z^{n-1} + \binom{n}{n}z^n \quad (6.5)$$

platných podle binomické věty, v nichž za parametr z vybíráme různé (vhodně zvolené) komplexní jednotky. Volby $z = \pm 1$ znalost komplexních čísel nevyžadují a jsou známým prostředkem k odvození rovností

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}.$$

(Tečkami jsou zde, podobně jako v dalších rovnostech, označeny další sčítance $\binom{n}{k}$, které se tvoří podle zřejmého zákona, dokud platí $k \leq n$.) Přidejme k těmto dvěma rovnostem ještě rovnosti (6.5) pro $z = \pm i$, jejichž levé strany mají podle Moivreovy věty hodnoty

$$(1 \pm i)^n = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^n = \left(\sqrt{2} \right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} \pm i \sin \frac{n\pi}{4} \right),$$

zatímco na pravých stranách těchto rovností jsou mocniny $(\pm i)^k$, jejichž výpočet je triviální bez přechodu ke goniometrickému tvaru obou čísel $\pm i$. Z takových čtyř rovností lze odvodit, jak je v [12] ukázáno, vzorce pro čtveřici součtů

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j+4} + \binom{n}{j+8} + \dots, \quad \text{kde } j = 0, 1, 2, 3.$$

Poté je ve stejném zdroji ještě odvozen vzorec pro součet

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \dots,$$

a to z šesti rovností (6.5) pro $z = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^k$, kde $k = 0, 1, \dots, 5$. Konečně je zde jako cvičení uveden úkol odvodit vzorce pro obdobné součty

$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j+3} + \binom{n}{j+6} + \dots, \quad \text{kde } j = 0, 1, 2,$$

a to s návodem, jak kombinovat tři rovnosti (6.5) pro $z = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^k$, kde $k = 0, 1, 2$.³¹ Namísto těchto komplikovaných postupů ukažme pro zajímavost, jak lze vypočítat mocninu $(1+z)^n$

³⁰Řešení tohoto problému v obecném podání lze nalézt v [8] na str. 240 – 242.

³¹Pozoruhodná je skutečnost, že dva z posledních tří vypsanych součtů se při daném n rovnají a třetí součet je buď o 1 menší, nebo o 1 větší. Důkaz tohoto poznatku bez odvození explicitních vzorců pro uvažované tři součty je podán v [8] na str. 242.

z levé strany rovnosti (6.5) pro libovolnou komplexní jednotku $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Využijeme k tomu nejprve vzorce pro kosinus a sinus dvojnásobného argumentu a poté Moivreovu větu:

$$\begin{aligned} (1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n &= \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2i \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n = \\ &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n \cdot \left(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2} \right)^n = \\ &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^n \cdot \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Po dosazení tohoto výsledku do levé strany rovnosti (6.5) a porovnání reálných a imaginárních částí obou stran dostaneme nové goniometrické vzorce³²

$$\begin{aligned} 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2} &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cos \alpha + \dots + \binom{n}{n} \cos n\alpha, \\ 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2} &= \binom{n}{1} \sin \alpha + \binom{n}{2} \sin 2\alpha + \dots + \binom{n}{n} \sin n\alpha \end{aligned}$$

platné pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$.

Různým goniometrickým vzorcům je věnována i druhá část posuzovaného paragrafu z učebnice [12] na str. 62–67. Nejdříve jsou z rovnosti

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \quad (\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

užitím binomické věty k součtu na pravé straně a porovnáním reálných a imaginárních částí obou stran odvozeny užitečné vzorce pro kosinus a sinus n -násobného argumentu³³

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= \binom{n}{0} \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \dots, \\ \sin n\alpha &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots \end{aligned}$$

Dodejme k tomu, že pomocí goniometrické jedničky lze uvedené vzorce zjednodušit do tvaru $\cos n\alpha = F_n(\cos \alpha)$ a – v případě lichého n – rovněž $\sin n\alpha = G_n(\sin \alpha)$, s vhodnými mnohočleny F_n , resp. G_n . Dále jsou v [12] odvozena vyjádření součtů

$$\begin{aligned} S_n &= \sin \varphi + \sin(\varphi + \alpha) + \sin(\varphi + 2\alpha) + \dots + \sin(\varphi + n\alpha), \\ C_n &= \cos \varphi + \cos(\varphi + \alpha) + \cos(\varphi + 2\alpha) + \dots + \cos(\varphi + n\alpha) \end{aligned}$$

pro libovolná $\varphi, \alpha \in \mathbb{R}$, která jsme nejprve pro $\varphi = 0$ dokazovali v příkladu 4.6.11 (s jiným označením) bez užití komplexních čísel metodou teleskopického sčítání, abychom v následné poznámce rozšířili jejich platnost na případ obecného φ . Nyní po vzoru [12] z hledaných reálných hodnot S_n a C_n sestavíme komplexní číslo $C_n + iS_n$, které můžeme podle pravidla (6.3) a Moivreovy věty zapsat jako součet

$$C_n + iS_n = w(1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2n})$$

³²[8], str. 238–9.

³³Poznamenejme, že tento postup můžeme využít vždy, když potřebujeme například vzorce pro $\cos 3\alpha$ a $\sin 3\alpha$ a nemáme přitom po ruce žádnou příručku. To ostatně platí i pro součtové vzorce pro sinus a kosinus, pokud je náhodou zapomeneme – stačí zapsat pravidlo (6.3) a algebraicky roznásobit zastoupený součin.

s komplexními jednotkami $w = \cos \varphi + i \sin \varphi$ a $z = \cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2}$, přitom u druhé jednotky jsme záměrně zvolili argument $\frac{\alpha}{2}$ (a ne α) kvůli výhodě, která se ukáže v dalším výpočtu. K určení takového součtu lze v případě $z^2 \neq 1$ (neboli $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) využít zřejmou algebraickou identitu

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{2n} = \frac{z^{2n+2} - 1}{z^2 - 1},$$

podle které proto platí

$$C_n + iS_n = \frac{w(z^{2n+2} - 1)}{z^2 - 1} = \frac{wz^n(z^{n+1} - z^{-n-1})}{z - z^{-1}}.$$

Dosadíme-li sem ještě vyjádření

$$z^{n+1} - z^{-n-1} = 2i \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \quad \text{a} \quad z - z^{-1} = 2i \sin \frac{\alpha}{2}$$

platná podle pravidla (6.4) a uvážíme-li, že komplexní jednotka wz^n má argument rovný $\varphi + \frac{n\alpha}{2}$, obdržíme rovnost

$$C_n + iS_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\cos \left(\varphi + \frac{n\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\varphi + \frac{n\alpha}{2} \right) \right),$$

z níž porovnáním reálných a imaginárních částí plynou výsledné vzorce

$$S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \left(\varphi + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{a} \quad C_n = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \cos \left(\varphi + \frac{n\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

pro každé $\alpha \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). (Pro vyloučené hodnoty $\alpha = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) platí triviálně $S_n = (n+1)\sin \varphi$ a $C_n = (n+1)\cos \varphi$). Uveďme ještě jeden důsledek odvozeného vzorce pro součet C_n , totiž rovnost³⁴

$$\cos \frac{\pi}{2n+1} + \cos \frac{3\pi}{2n+1} + \cos \frac{5\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

jež platí pro každé celé $n \geq 1$. (Stačí dosadit $\varphi = \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2n+1}$ do vzorce pro C_{n-1} .)

Třetí, závěrečná část posuzovaného paragrafu z učebnice [12] na str. 63–69 je věnována odvozování složitějších výsledků cestou využití mnohočlenů a jejich rozkladů na kořenové činitele v komplexním oboru. Protože je tato problematika poněkud vzdálenější od zaměření naší práce, převezmeme z této části textu [12] jedinou jednodušší ukázkou, totiž důkaz zajímavé goniometrické rovnosti

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{3\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

pro každé celé číslo $n > 1$, založený na rovnosti mnohočlenů stupně n

$$x^n - 1 = (x - 1)(x - w^2)(x - w^4) \dots (x - w^{2n-2}),$$

kde x je (komplexní) proměnná a w komplexní jednotka s argumentem $\frac{\pi}{n}$, tedy

$$w = \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}.$$

³⁴Tato rovnost je pro $n = 3$ odvozena v [28], str. 70–71, a pro $n = 5$ v [8], str. 214.

Obě strany uvedené rovnosti, kterou lze zdůvodnit tím, že rovnice $x^n = 1$ má v oboru komplexních čísel n různých kořenů $1, w^2, w^4, \dots, w^{2n-2}$ (jsou to totiž právě hodnoty n -té odmocniny z čísla 1), můžeme zřejmě vydělit beze zbytku dvojitelnem $x - 1$ a získat tak novou rovnost mnohočlenů (stupně $n - 1$)

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = (x - w^2)(x - w^4) \dots (x - w^{2n-2}).$$

Oba poslední mnohočleny mají stejné hodnoty pro každé číslo x , tedy i pro $x = 1$, což znamená, že platí

$$n = (1 - w)(1 - w^2) \dots (1 - w^{2n-2}), \quad \text{odkud} \quad n = |1 - w| \cdot |1 - w^2| \dots |1 - w^{2n-2}|$$

podle pravidla o absolutní hodnotě součinu několika komplexních čísel. V našem případě jednotliví činitelé mají hodnotu

$$|1 - w^{2k}| = |w^{-k}(w^k - w^{-k})| = |w^k - w^{-k}| = \left| 2i \sin \frac{k\pi}{n} \right| = 2 \sin \frac{k\pi}{n},$$

kde jsme opět výhodně využili pravidlo (6.4). Vynásobením posledních rovností pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ už zřejmě po snadné úpravě dostaneme dokazovanou rovnost.

Posledním důkazem jsme ukončili náš výběr ukázek užití goniometrického tvaru komplexních čísel podle učebního textu [12]. Přistoupíme proto nyní k výkladu námětů převzatých z jiných zdrojů.

■ **Příklad 6.2.1.** Předpokládejme, že reálná čísla α, β, γ splňují rovnosti

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0.$$

Dokažte, že pak rovněž platí rovnosti³⁵

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 0.$$

Řešení: Sestavme tři komplexní jednotky

$$x = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad y = \cos \beta + i \sin \beta, \quad z = \cos \gamma + i \sin \gamma.$$

Podle předpokladu pro ně platí

$$\begin{aligned} x + y + z &= (\cos \alpha + i \sin \alpha) + (\cos \beta + i \sin \beta) + (\cos \gamma + i \sin \gamma) = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= (\cos \alpha - i \sin \alpha) + (\cos \beta - i \sin \beta) + (\cos \gamma - i \sin \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Z druhé rovnosti díky úpravě

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + xz + yz}{xyz}$$

plyne $xy + xz + yz = 0$, což spolu s první rovností vede k závěru, že platí

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 0.$$

To podle Moivreovy věty znamená

$$(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + (\cos 2\beta + i \sin 2\beta) + (\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma) = 0,$$

a proto reálná i imaginární část součtu na levé straně jsou rovny nule. Jinak řečeno, platí rovnosti, které jsme měli dokázat.

³⁵[28], str. 70.

■ **Příklad 6.2.2.** Dokažte rovnost³⁶

$$\frac{1}{\sin 24^\circ} + \frac{1}{\sin 48^\circ} + \frac{1}{\sin 96^\circ} = \frac{1}{\sin 12^\circ}.$$

Řešení: Zavedeme komplexní jednotku

$$z = \cos 12^\circ + i \sin 12^\circ,$$

pro kterou platí $z^{15} = \cos 15 \cdot 12^\circ + i \sin 15 \cdot 12^\circ = -1$. Z rozkladu

$$0 = z^{15} + 1^{15} = (z + 1)(z^{14} - z^{13} + z^{12} - z^{11} + \dots + z^2 - z + 1)$$

vzhledem k $z + 1 \neq 0$ plyne rovnost

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots + z^{14} = z + z^3 + z^5 + \dots + z^{13},$$

na kterou dokazovanou rovnost ekvivalentně převedeme. Nejprve do ní dosadíme vyjádření

$$\begin{aligned} \sin 12^\circ &= \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 - 1}{2iz}, & \sin 24^\circ &= \frac{1}{2i} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{z^4 - 1}{2iz^2}, \\ \sin 48^\circ &= \frac{1}{2i} \left(z^4 - \frac{1}{z^4} \right) = \frac{z^8 - 1}{2iz^4}, & \sin 96^\circ &= \frac{1}{2i} \left(z^8 - \frac{1}{z^8} \right) = \frac{z^{16} - 1}{2iz^8}, \end{aligned}$$

kteřá platí podle vzorců (6.4). Dostaneme rovnost

$$\frac{2iz^2}{z^4 - 1} + \frac{2iz^4}{z^8 - 1} + \frac{2iz^8}{z^{16} - 1} = \frac{2iz}{z^2 - 1},$$

kteřou vydělením číslem $2iz$ ekvivalentně upravíme na

$$\frac{z}{z^4 - 1} + \frac{z^3}{z^8 - 1} + \frac{z^7}{z^{16} - 1} = \frac{1}{z^2 - 1}.$$

Jmenovatelé čtyř zapsaných zlomků jsou jistě nenulová čísla (neboť nejmenší $n \in \mathbb{N}$, pro které platí $z^n = 1$, je zřejmě $n = 30$). Proto poslední rovnost můžeme dát upravit tak, že ji vynásobíme číslem $z^{16} - 1$, které rovnou v každém zlomku částečně zkrátíme podle rozkladu

$$z^{16} - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1).$$

Dostaneme tak opět ekvivalentní rovnost

$$z(z^4 + 1)(z^8 + 1) + z^3(z^8 + 1) + z^7 = (z^2 + 1)(z^4 + 1)(z^8 + 1).$$

Je snadné se přesvědčit, že na levé, resp. pravé straně obdržíme po roznásobení výrazy

$$z + z^3 + z^5 + \dots + z^{13}, \quad \text{resp. } 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots + z^{14},$$

kteřé se pro naše $z = \cos 12^\circ + i \sin 12^\circ$ rovnají, jak jsme odvodili v úvodu řešení. Tím je důkaz hotov.

V posledních dvou příkladech se vrátíme ke dvěma výsledkům z kapitol 2 a 4, které jsme tam odvodili bez užití komplexních čísel. S jejich pomocí teď tyto výsledky znovu dokážeme, tentokrát poměrně „přímočarou“ cestou aritmetických výpočtů s mocninami dotyčné komplexní jednotky.

³⁶[28], str. 192, upraveno zadání i řešení.

■ **Příklad 6.2.3.** Užitím komplexních čísel znovu dokažte rovnosti

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \quad \text{a} \quad \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

odvozené dříve na str. 47–51 geometrickými úvahami o pravidelném pětiúhelníku a pravidelném desetiúhelníku.

Řešení: Pomocí komplexní jednotky

$$z = \cos 36^\circ + i \sin 36^\circ,$$

jež zřejmě splňuje rovnici $z^5 = -1$, mají zkoumané hodnoty kosinu podle pravidla (6.4) vyjádření

$$\cos 36^\circ = \frac{1}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{a} \quad \cos 72^\circ = \frac{1}{z} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right).$$

Z rovnosti

$$0 = z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$$

s ohledem na $z + 1 \neq 0$ vyplývá

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0,$$

což lze (po vydělení nenulovým číslem z^2) zapsat jako

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) - \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 = 0.$$

Pro hodnoty $\cos 36^\circ$ a $\cos 72^\circ$ to znamená závislost

$$2 \cos 72^\circ - 2 \cos 36^\circ + 1 = 0 \quad \text{neboli} \quad \cos 72^\circ = \cos 36^\circ - \frac{1}{2},$$

takže ze dvou dokazovaných rovností zřejmě stačí ověřit pouze vzorec pro $\cos 36^\circ$, tedy vlastně rovnost

$$z + \frac{1}{z} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Všimněme si, že iracionální číslo na pravé straně je jediným kladným kořenem kvadratické rovnice $x^2 - x - 1 = 0$. Pro naše kladné číslo $2 \cos 36^\circ = z + \frac{1}{z}$ podle výše odvozené rovnosti platí

$$0 = \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) - \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 = \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 - \left(z + \frac{1}{z} \right) + 1 = \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1,$$

takže je to skutečně kořen zmíněné rovnice. Důkaz je hotov.

■ **Příklad 6.2.4.** Užitím komplexních čísel znovu dokažte, že čísla

$$a = \sin 10^\circ, \quad b = \sin 50^\circ, \quad c = \sin 70^\circ$$

splňují rovnosti

$$a + b = c, \quad abc = \frac{1}{8} \quad \text{a} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + 6,$$

odvozené v příkladu 4.6.28 metodou sestavení kubické rovnice s kořeny $a, b, -c$ na základě úvah o rovnici $\sin 3x = \frac{1}{2}$ s využitím vzorce pro sinus trojnásobného argumentu.

Řešení: Pro výpočet bude výhodnější daná čísla a, b, c interpretovat jako hodnoty kosinu, tedy

$$a = \cos 80^\circ, \quad b = \cos 40^\circ, \quad c = \cos 20^\circ,$$

a zapsat je pomocí komplexní jednotky

$$z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$$

ve tvaru

$$a = \frac{1}{2} \left(z^4 + \frac{1}{z^4} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right), \quad c = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Před dosazením těchto vyjádření do dokazovaných rovností si povšimneme, že z rovnosti $z^9 = -1$ a rozkladu

$$0 = z^9 + 1 = (z^3 + 1)(z^6 - z^3 + 1)$$

plyne $z^6 - z^3 + 1 = 0$ (neboť $z^3 + 1 \neq 0$). Kromě toho $z^{10} = z^9 \cdot z = -z$, $z^{11} = z^{10} \cdot z = -z^2$, $z^{12} = -z^3$, atd. Rovnost $a + b = c$ dokážeme výpočtem výrazu $a + b - c$:

$$\begin{aligned} a + b - c &= \frac{z^8 + 1}{2z^4} + \frac{z^4 + 1}{2z^2} - \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{z^8 + 1 + z^6 + z^2 - z^5 - z^3}{2z^4} = \\ &= \frac{(z^6 - z^3 + 1) + z^2(z^6 - z^3 + 1)}{2z^4} = 0. \end{aligned}$$

Také výpočet součinu z druhé dokazované rovnosti je snadný:

$$\begin{aligned} abc &= \frac{z^8 + 1}{2z^4} \cdot \frac{z^4 + 1}{2z^2} \cdot \frac{z^2 + 1}{2z} = \frac{(z^8 + 1)(z^4 + 1)(z^2 + 1)}{8z^7} \cdot \frac{1 - z^2}{1 - z^2} = \\ &= \frac{1 - z^{16}}{8(z^7 - z^9)} = \frac{1 + z^7}{8(z^7 + 1)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Do třetí dokazované rovnosti upravené násobením abc do tvaru

$$c(a + b) = ab + 6abc$$

dosadíme již odvozené vztahy $a + b = c$ a $abc = \frac{1}{8}$. Dostaneme rovnost

$$c^2 = ab + \frac{3}{4},$$

kterou nyní ověříme výpočtem rozdílu $c^2 - ab$:

$$\begin{aligned} c^2 - ab &= \frac{(z^2 + 1)^2}{4z^2} - \frac{(z^8 + 1)(z^4 + 1)}{4z^6} = \frac{z^4(z^2 + 1)^2 - (z^8 + 1)(z^4 + 1)}{4z^6} = \\ &= \frac{2z^6 + (z^3 - 1)}{4z^6} = \frac{2z^6 + z^6}{4z^6} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

6.3 Z matematické kartografie

Vědní obor, který se zabývá vytvářením map a ve svých výpočtech často používá goniometrické funkce, se nazývá *kartografie*. V této podkapitole pojednáme nejdříve něco málo o tomto oboru samotném a následně nahlédneme do historie zrodu prvních map, který by se bez funkcí sinus, kosinus, tangens a kotanges neobešel.³⁷ Při výkladu mírně přebročíme rámec elementární matematiky, když využijeme některé základní pojmy a poznatky z diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné (v rozsahu gymnaziálního úvodu do této oblasti matematické analýzy).

³⁷Hlavní inspirací pro tento text nám byla 13. kapitola knihy [25].

Země, Měsíc, ale i ostatní planety nemají matematicky popsatelný pravidelný tvar. Tato tělesa jsou proto v kartografii nahrazována tzv. referenčními tělesy, nejčastěji referenčním elipsoidem a koulí. Jejich povrchy nazýváme *referenčními plochami*, na nichž jsou definovány souřadnice zeměpisná šířka (ϕ) a zeměpisná délka (λ). Výslednou mapu kreslíme do roviny, které říkáme *zobrazovací rovina* a v níž polohu bodů určujeme buď polárními souřadnicemi (ρ, ε), nebo kartézskými souřadnicemi (x, y), jejichž vzájemné vztahy jsou vyjádřeny rovnostmi

$$x = \rho \cos \varepsilon, \quad y = \rho \sin \varepsilon.$$

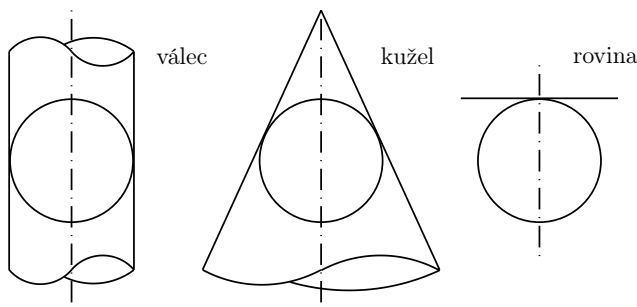
Základním úkolem matematické kartografie je teoretické i praktické vyřešení přenosu různých bodů a čar z referenční plochy do zobrazovací roviny. Tento přenos je nazýván kartografickým zobrazováním referenční plochy do zobrazovací roviny.

V rovinném obrazu referenčních ploch jsou vždy zobrazeny vzájemné polohy bodů i tvary čar. Zkreslení obecně roste s rozměry zobrazeného území. Matematická kartografie se proto rovněž zabývá vlastnostmi zkreslení rovinného mapového obrazu při zvoleném kartografickém zobrazení. Taková zkreslení však mohou být z některých hledisek příznivá, nazývají se pak *ekvidistantní* (nezkreslují vzdálenosti podél určitého systému čar), *konformní* (věrně zobrazují úhly mezi křivkami) nebo *ekvivalentní* (zachovávají poměry obsahů ploch).

Kartografické zobrazení může být definováno *geometrickou* nebo *matematickou* cestou. Zobrazení definovaná geometricky jsou zaváděna pomocí tzv. perspektivní projekce³⁸ referenčních těles na plochy rozvinutelné do zobrazovací roviny. Jsou proto často stručně označována jako *projekce*. Matematicky definovaná zobrazení jsou mnohem rozšířenější. Jsou zadána dvojicí funkcí o jedné nebo dvou proměnných, které vyjadřují, jak souřadnice v zobrazovací rovině (polární, resp. kartézské) závisí na souřadnicích na ploše referenční (kterými jsou zeměpisná šířka a délka). Můžeme je tedy obecně zapsat vztahy

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda), \quad \varepsilon = g_1(\varphi, \lambda) \quad \text{resp.} \quad x = f_2(\varphi, \lambda), \quad y = g_2(\varphi, \lambda).$$

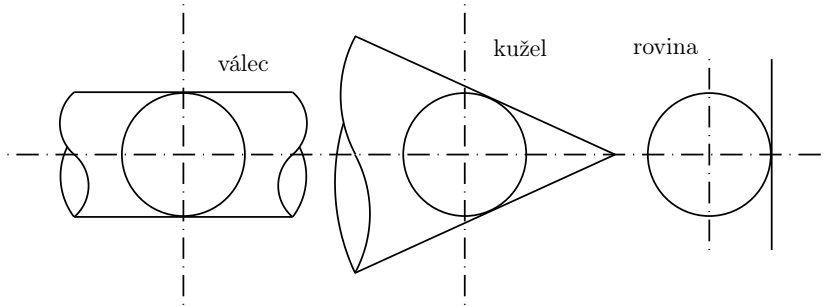
Velmi významnou skupinu zde tvoří zobrazení jednoduchá, u kterých platí, že každá z obou sou-



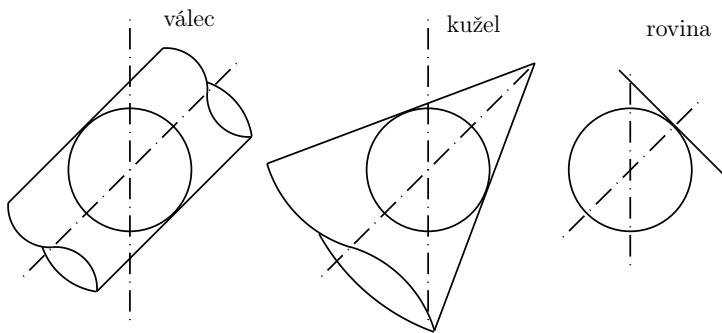
Obrázek 6.2: Pólová zobrazení

řadnic v zobrazovací rovině je funkcí pouze jedné ze dvou souřadnic na ploše referenční.

³⁸Promítání ze středu referenčního tělesa nebo z bodu na povrchu referenčního tělesa, většinou z jižního či severního pólu.



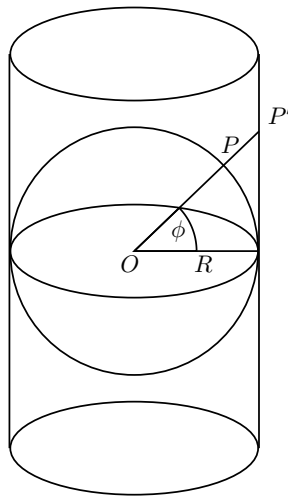
Obrázek 6.3: Rovníková zobrazení



Obrázek 6.4: Šikmá zobrazení

Jednoduchá kartografická zobrazení, která jsou projekcemi, se člení do skupin podle druhu zobrazovací plochy, která se při jejich realizaci rozvíjí do roviny. Podle toho se rozlišují zobrazení *válcová* (*cylindrická*), *kuželová* (*konická*) a *azimutální*. U válcového zobrazení jsou poledníky a rovnoběžky znázorněny soustavou vzájemně ortogonálních přímek. U kuželového zobrazení tvoří poledníky osnovu přímek vycházejících z jednoho bodu, který je současně společným středem kružnic znázorňujících jednotlivé rovnoběžky. Kuželová zobrazení mohou být řešena s jednou nebo se dvěma nezkreslenými rovnoběžkami – zvolíme-li k referenční ploše tečný kužel nebo sečný kužel. Azimutální zobrazení je mezním případem zobrazení kuželového, kdy úhel při vrcholu kužele dosáhne 180° a kužel přejde přímo v zobrazovací rovinu, tečnou k referenční ploše. Podle polohy zobrazovací roviny vůči ploše referenční se pak jednoduchá zobrazení, která jsou projekcemi, dělí na *pólová*, *rovníková* a *šikmá* (obr. 6.2, 6.3 a 6.4).

Věnujme se nyní projekcím, tedy kartografickým zobrazením s geometrickou podstatou, konkrétněji. Nejjednodušší z nich je pólová projekce cylindrická. Představme si, že Zemi zastupuje jako referenční těleso kulový glóbus o poloměru R , který ovíneme válcem, a to takovým způsobem, že se válec dotýká glóbu na rovníku (obr. 6.5). Dále si představme, že paprsky světla vyzařují ze středu



Obrázek 6.5: Glóbus ve válci.

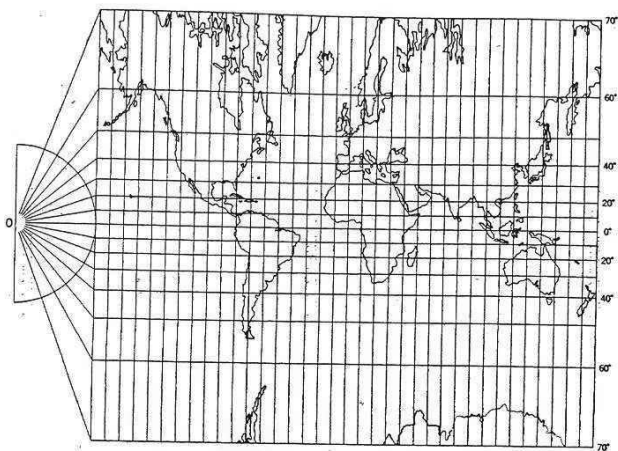
glóbu všemi směry. Paprsek, procházející bodem P na glóbu, vyznačí na válci bod P' , který nazveme obrazem bodu P . Když potom válec podle některé přímky rozstříháme a rozvineme, obdržíme rovinnou mapu celého světa. Téměř celého... Severní a jižní pól, body na glóbu, které leží na ose válce, mají svůj obraz v nekonečnu.

Je jasné, že popsaná cylindrická projekce zobrazuje všechny kružnice bodů téže zeměpisné délky λ (poledníky) na navzájem rovnoběžné svislé přímky, zatímco rovnoběžky (kružnice bodů téže zeměpisné šířky ϕ) se jeví na mapě jako vodorovné úsečky, jejichž rozestupy se při rovnoměrném zvyšování hodnot ϕ zvětšují. Abychom našli matematický vztah mezi bodem P a jeho obrazem P' , musíme vyjádřit kartézské souřadnice (x, y) bodu P' jako funkce souřadnic (λ, ϕ) bodu P . Zvolíme-li souřadnice x a y tak, aby bod na rovníku a hlavním poledníku (tedy bod se souřadnicemi $\lambda = 0$ a $\phi = 0$) byl počátkem, aby obrazem rovníku byla osa x a aby body severní polokoule měly kladnou y -ovou souřadnici, dostaneme zřejmá souřadnicová vyjádření

$$x = R\lambda, \quad y = R \operatorname{tg} \phi, \quad \lambda \in \langle -180^\circ, 180^\circ \rangle, \quad \phi \in \langle -90^\circ, 90^\circ \rangle.$$

Nejnápadnějším znakem cylindrické projekce je nadměrné tzv. severo-jívní prodlužování v oblastech blízkých severnímu a jižnímu pólu a z toho plynoucí drastické zkřivení tvaru kontinentů v těchto oblastech (obr. 6.6). Způsobuje to průběh funkce $\operatorname{tg} \phi$ v okolí bodů $\pm 90^\circ$, v nichž má nevlastní limity. Cylindrická projekce je v praxi někdy zaměňována s Mercatorovou projekcí, které se na první pohled podobá. Nicméně kromě faktu, že obě projekce mají obdélníkovou síť poledníků a rovnoběžek, jsou obě zobrazení stavěna na zcela odlišných principech, jak ostatně za chvíli uvidíme.

Nejen kartografové využívají další promítání, tzv. stereografickou projekci. Znal ji již Hypparchus a je jednou z azimutálních projekcí, kdy promítáme povrch referenční koule na tečnou zobrazovací rovinu. Položíme glóbus na list papíru, který se stane mapou, aby se glóbu dotýkal v jižním pólu S (obr. 6.7). Každý bod P na glóbu spojíme pomocí polopřímky vycházející z bodu N , který značí severní pól na glóbu. Průsečík P' této polopřímky s listem papíru je obrazem bodu P v zobrazení, které jsme chtěli popsat.



Obrázek 6.6: Cylindrická projekce.

Stereografická projekce zobrazuje všechny poledníky jako polopřímky vycházející z jižního pólu S , zatímco kružnice zeměpisné šířky se zobrazují soustřednými kružnicemi se středem S . Kružnice e , obraz rovníku, můžeme považovat za kružnici jednotkovou. (Jak za chvíli uvidíme, odpovídá to tomu, že průměr glóbu je jednotkový.) Tím stanovíme jednotku délky pro polární souřadnici ρ v soustavě zobrazovací roviny, za jejíž počátek vybereme bod S .

Celá severní polokoule se zobrazí na vnějšek zmíněné kružnice e a jižní polokoule na její vnitřek. Čím je bod P blíže k severnímu pólu, tím dále bude jeho obraz P' na mapě od středu S kružnice e . Pouze jeden bod na glóbu nebude mít svůj obraz. Je to severní pól, jehož obraz je v nekonečnu.

Uvažujme nyní na glóbu bod P se zeměpisnou šířkou ϕ a zeměpisnou délkou λ . Přejeme si určit polohu jeho obrazu P' v polárních souřadnicích (ρ, ε) na mapě. Protože jsme za počátek zvolili bod S , bude platit $\rho = |SP'|$, polární úhel ε můžeme zavést tak, aby platilo $\varepsilon = \lambda$. Délku úsečky SP' určíme z obrázku 6.8, na kterém vidíme řez glóbu rovinou NOP , kde O je střed glóbu. Kromě bodů P a P' jsme znázornili ještě bod E na rovníku a jeho obraz E' . Pravoúhlý trojúhelník ONE , a tedy i pravoúhlý trojúhelník SNE' , jsou rovnoramenné, takže platí $|\angle ONE| = 45^\circ$ a podle volby jednotky $|SN| = |SE'| = 1$. Dále platí $|\angle EOP| = \phi$ a $|\angle ENP| = \frac{\phi}{2}$ (obvodový úhel nad obloukem EP rovný polovině středového úhlu ϕ). Proto $|\angle ONP| = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$, a tudíž bod P' leží ve vzdálenosti

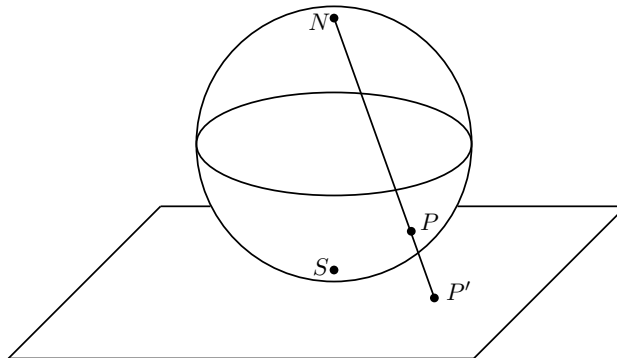
$$\rho = |SP'| = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)$$

od jižního pólu S na mapě.

Odvozená rovnice vede k zajímavému výsledku. Necht' $P(\lambda, \phi)$ a $Q(\lambda, -\phi)$ jsou dva body na glóbu se stejnou zeměpisnou délkou, avšak opačnou zeměpisnou šířkou. Jakou budou mít jejich obrazy P' a Q' vzájemnou polohu? Podle odvozené rovnice obdržíme

$$|SQ'| = \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\phi}{2} \right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)} = \frac{1}{|SP'|}.$$

Platí tedy $|SP'| \cdot |SQ'| = 1$ a navíc body P' a Q' leží na téže polopřímce s počátkem S , neboť oba mají stejnou polární souřadnici $\varepsilon = \lambda$. Každé dva body s těmito vlastnostmi se nazývají *sdrúženými*



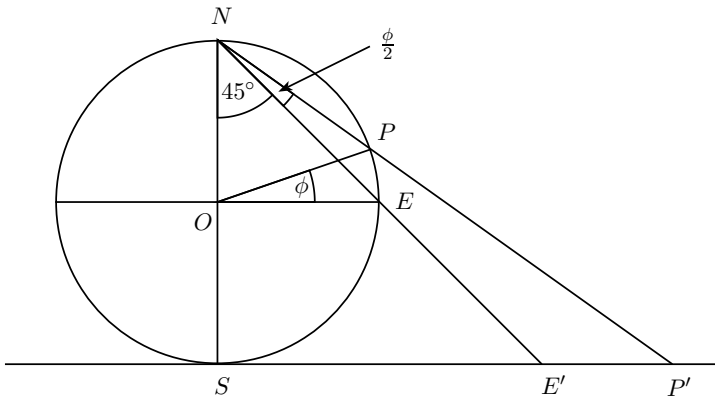
Obrázek 6.7: Stereografická projekce.

v kruhové inverzi určené jednotkovou kružnicí e . Toto geometrické zobrazení v rovině má řadu významných vlastností, které jsou tudíž vlastní i stereografické projekci. Je např. známo, že úhel mezi dvěma protínajícími se křivkami je stejný jako úhel mezi dvěma křivkami, které jsou obrazy původních křivek ve stejné kruhové inverzi. Z tohoto faktu ihned plyne, že stereografická projekce je izogonální zobrazení. Což znamená, že malá území na glóbu zachovávají svůj tvar na mapě. Na obrázku 6.9 vidíme severní polokouli ve stereografické projekci, při níž se ovšem glóbus dotýká zobrazovací roviny severním pólem a ne jižním. Je zřetelné, že tvary kontinentů na mapě jsou blízké těm na glóbu.

Představme si nyní, že jsme navigátory lodi, která má vyplout z přístavu určitým směrem. Nastavíme svůj kompas na zvolený směr, řekněme 45° severovýchodně, a potom jej pevně sledujeme. Pro zjednodušení si představme, že v naší cestě není žádná překážka, jako jsou ostrovy i pevniny. Jakou dráhou pak budeme plout? Dlouhá léta bylo v povědomí lidí, že dráha cesty s konstantním směrem (tedy křivka protínající všechny poledníky pod stejným úhlem – loxodroma) je obloukem kružnice, to znamená rovinnou křivkou (obr. 6.10). V šestnáctém století však Portugalec Pedro Nuňes ukázal, že loxodroma je ve skutečnosti spirálovitá křivka, která se nekonečně blíží k oběma pólům (obr. 6.11).

Kartografové v šestnáctém století byli postaveni před velkou výzvou: navrhnout takové zobrazení, aby se všechny loxodromy na mapě jevily jako přímé čáry. Taková mapa by umožnila navigátorovi spojit body startu a kýženého cíle pomocí úsečky, před vyplutím změřit na mapě úhel mezi touto dráhou a poledníkem a během celé plavby zjištěný směr stále dodržovat. Na všech dosud sestrojenných mapách přímé čáry neodpovídaly loxodromám na moři, takže navigace byla velmi složitým a riskantním úkolem.

Zmíněnému úkolu se začal usilovně věnovat jeden vlámský kartograf, který se pod jménem Gerardus Mercator stal později nejslavnějším kartografem novodobé historie. Narodil se 5. března 1512 jako Gerhard Kremer ve vlámském městě Rupelmonde (dnes v Belgii, v té době části Holandska). Bylo to dvacet let poté, co Kryštof Kolumbus podnikl svoji historickou plavbu do Nového Světa, která podnítila touhu mladého Kremera po vlastních nových zeměpisných objevech. V roce 1530 se přihlásil na Univerzitu v Louvainu a po absolvování se vypracoval do postavení jednoho z hlavních



Obrázek 6.8: Stereografická projekce.

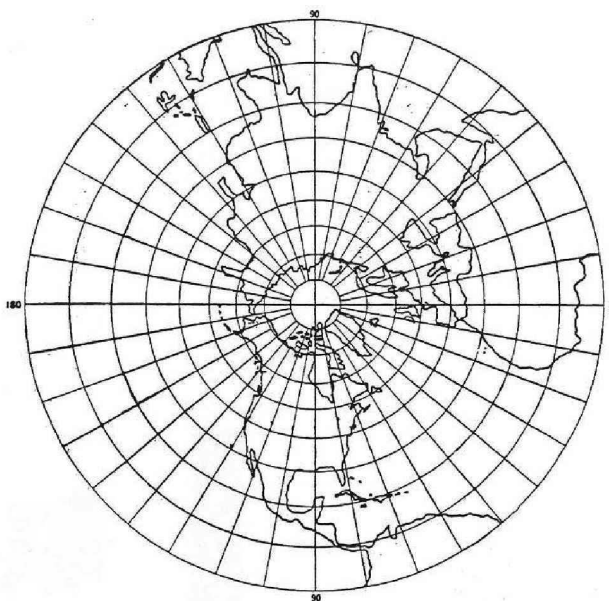
evropských kartografů a projektantů. V té době bylo obvyklé, že studovaní mužové užívali i latinské verze svých jmen. Tak Gerhard Kremer změnil své jméno na Gerardus Mercator (holandské „kramer“ a latinské „merchant“ znamenají česky nejspíš „kupec“ nebo „obchodník“).

Z života tohoto kartografa uveďme osudovou událost z roku 1544, kdy byl zatčen pro kacířství, neboť prosazoval protestantství v katolicky spravované oblasti. S velkým úsilím si zachránil holý život a následně uprchl do sousedního Duisburgu (v dnešním Německu), kde zůstal až do konce svého života.

Před Mercatorem zdobili kartografové své mapy nereálnými mytologickými figurkami a fiktivními zeměmi. Tyto mapy byly proto spíše uměleckým výtvozem než pravdivým zobrazením světa. Mercator byl jedním z prvních, který své mapy zakládal výlučně na exaktních údajích, získaných na základě přesných měření. Tím převedl kartografii z oblasti umění mezi skutečné vědecké disciplíny. Mercator byl rovněž první kartograf, který vytvořil ucelenou kolekci samostatných map, jakou dnes nazýváme *atlasem* na počest legendární bájně antické postavy.

Jak jsme již naznačili, Mercator se v roce 1568 pevně vnitřně rozhodl, že bude svůj čas a veškeré úsilí věnovat nalezení nové metody kreslení map, které by lépe odpovídaly námořnickým potřebám. Uvědomil si, že žádná jediná mapa nemůže současně zachovávat vzdálenost, tvar i směr. Maje na mysli potřeby navigace, Mercator se rozhodl obětovat vzdálenost a tvar, aby zachoval na mapě to, co je pro plavbu nejdůležitější, totiž směr. Proto za výchozí přijal Mercator dva principy: rovnoběžky a poledníky se na mapě musí zobrazit do obdélníkové sítě, v nichž obrazy všech bodů téže zeměpisné šířky budou navzájem rovnoběžné a shodné úsečky (jedna z nich bude obrazem rovníku); podle druhého principu by mapa měla být izogonální (tj. věrně zobrazující úhly mezi křivkami).

Posuďme nejdříve, co první princip znamená pro kružnice bodů téže zeměpisné šířky, obvykle zvané rovnoběžky. Ty zmenšují svoji délku, když se příslušná zeměpisná šířka zvětšuje, a to až dosáhnou nulové hodnoty v obou pólech. Protože na Mercatorově mapě mají být tyto kružnice znázorněny vodorovnými úsečkami o stejné délce jako rovník, musí být každá rovnoběžka roztažena s jistým koeficientem závislým na příslušné zeměpisné šířce. Na obr. 6.14 vidíme kružnici se zeměpisnou šířkou ϕ . Její poloměr je označen r , takže její obvod je $2\pi r = 2\pi R \cos \phi$ na glóbu, zatímco délka rovníku na glóbu je $2\pi R$. Kružnice bude tedy roztažena na mapě s koeficientem $\frac{2\pi R}{2\pi R \cos \phi} = \sec \phi$. Tímto jsme vyjádřili koeficient roztažení jako funkci proměnné ϕ . Čím větší je zeměpisná šířka, tím



Obrázek 6.9: Severní polokoule.

větší koeficient roztažení, jak ostatně ukazuje tabulka.

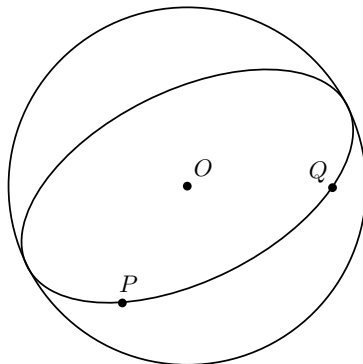
ϕ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	80°	85°	87°	89°	90°
sec ϕ	1,00	1,04	1,15	1,41	2,00	3,86	5,76	11,47	19,11	57,30	∞

Aby byla mapa izogonální, s roztažením rovnoběžek, které jsme právě popsali, musíme současně zajistit i vhodné zvětšování vzdáleností mezi sousedními rovnoběžkami v jejich síti, již kreslíme od rovníku k oběma pólům s pravidelným krokem např. 1° , 5° nebo 10° (obr. 6.15). Jak toho přesně Mercator dosáhl, není známo a stále se o tom vedou debaty mezi historiky kartografie. Sám Mercator o tom nezanechal žádný písemný záznam, až na následující poznámku, vytištěnou v doprovodném textu k jeho mapě:³⁹

Při znázorňování světa musíme rozvinout povrch koule do roviny, a to takovým způsobem, aby se polohy míst na všech stranách navzájem shodovaly ve skutečném směru a ve skutečné vzdálenosti. . . S tímto úmyslem musíme použít nové proporce a nové sestavení poledníků s přihlédnutím k rovnoběžkám. . . Kvůli tomuto důvodu jsme postupně zvětšovali stupně zeměpisné šířky směrem k jednotlivým pólům přímo úměrně s prodlužováním rovnoběžek do délky rovníku.

I přes toto nejasné vysvětlení je nepochybné, že Mercator musel objevit správnou matematickou metodu, aby vyhověl oběma principům, které vzal za základ při konstrukci své mapy. Když vytvořil síť rovnoběžek a poledníků, zbývalo mu už jen položit „kůži na kostru“ neboli překrýt tuto síť obrysy kontinentů, jež byly známy v jeho době. V roce 1569 publikoval svoji mapu světa pod názvem *Nový a vylepšený popis zemí ve světě, upraveno a určeno pro užívání navigátorů*. Byla to

³⁹Tento i další citáty uvádíme v překladu podle knihy [25].



Obrázek 6.10: Oblouk na hlavní kružnici.

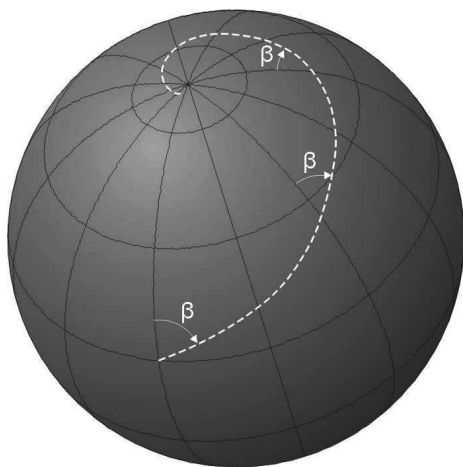
svým rozsahem obrovská mapa, jež proto byla pro vytištění rozdělena na 21 částí, neboť celkově měřila 137,16 x 210,82 cm². Tak vzniklo jedno z nejvýznamnějších děl v celé kartografické historii. Do současnosti se zachovaly pouze tři jeho exempláře.

Mapa, která přinesla Mercatorovi věčnou slávu, nebyla zprvu přijata ani kartografy, ani námořní komunitou. Lidé zpočátku nedokázali pochopit překvapivou změnu tvaru kontinentů, pro kterou ostatně Mercator nepodal vysvětlení, proč a jak vlastně zvětšoval vzdálenosti mezi sousedními rovnoběžkami. Tím dočasně způsobil i zmatek v myslích kartografů, kteří na jeho dílo chtěli navázat.

Přesné vysvětlení metody, která umožňuje sestavit Mercatorovu mapu vyhovující dvěma stanoveným a výše popsaným principům, podal až jeden anglický matematik. Žil v letech 1560 – 1615 a jmenoval se Edward Wright. Ve své práci s názvem *Konkrétní chyby v navigaci*, která byla publikována v Londýně roku 1599, napsal:

Části poledníků v každém bodě zeměpisné šířky se musí zvětšovat se stejnou mírou, jako se zvětšují sekanty. Neustálým přičítáním sekant odpovídajících zeměpisným šířkám jednotlivých rovnoběžek... vytvoříme tabulku, která pravdivě ukáže hodnoty zeměpisné šířky na polednících námořnické mapy.

Jazykem dnešní matematiky řečeno, Wright použil numerickou integraci, aby vyčíslil $\int_0^\phi \sec t \, dt$ pro potřebnou škálu hodnot ϕ z intervalu $\langle 0, 90^\circ \rangle$. Následujme jeho postup a použijme přitom současnou symboliku. Obrázek 6.16 ukazuje malý sférický obdélník na glóbu vymezený pomocí kružnic zeměpisné délky λ a $\lambda + \Delta\lambda$ a pomocí kružnic zeměpisné šířky ϕ a $\phi + \Delta\phi$, kde úhly λ a ϕ od tohoto okamžiku budeme měřit v radiánech, protože to přinese výhodu při vyjadřování délek oblouků kružnic. (Jelikož na volbě nultého poledníku nezáleží, je na obrázku vyznačen pouze přírůstek $\Delta\lambda$ zeměpisné délky.) Strany zmíněného obdélníku mají délky $(R \cos \phi)\Delta\lambda$ a $R\Delta\phi$. Nechť bod $P(\lambda, \phi)$ na glóbu přejde do bodu $P'(x, y)$ na mapě s kartézskou soustavou souřadnic, jejíž osa x je obrazem rovníku. Potom se sférický obdélník zobrazí na rovinný obdélník omezený přímkami znázorněnými na obr. 6.17. Zatímco přírůstek souřadnice x má známou hodnotu $\Delta x = R\Delta\lambda$, přírůstek Δy je



Obrázek 6.11: Loxodroma.



Obrázek 6.12: Gerardus Mercator.

nutné určit tak, aby mapa byla izogonální, neboli aby dva zmíněné obdélníky byly podobné. Právě to bude znamenat, že směr z bodu $P(\lambda, \phi)$ do bodu $Q(\lambda + \Delta\lambda, \phi + \Delta\phi)$ je stejný jako směr mezi body $P'(x, y)$ a $Q'(x + \Delta x, y + \Delta y)$, které jsou jejich obrazy na mapě. To nás přivádí k rovnici

$$\frac{R\Delta\phi}{R\cos\phi\Delta\lambda} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{neboli} \quad \Delta y = (R \sec \phi)\Delta\phi.$$

Rovnici $\Delta y = (R \sec \phi)\Delta\phi$ v moderní terminologii nazýváme diferenční rovnicí. Numericky může být řešena rekurentním postupem. Položíme $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, a stanovíme pevný přírůstek $\Delta\phi$. Pro $\phi = 0$ zvolíme počáteční hodnotu $y_0 = 0$ (odpovídající obrazu rovníku, kterým



Obrázek 6.13: Mercatorova mapa Evropy.

má být osa x). Další hodnoty y_1, y_2, \dots budeme postupně počítat ze vztahů

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \Delta y_1 = 0 + R \cdot \sec 0 \cdot \Delta \phi, \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_2 = y_1 + R \cdot \sec \Delta \phi \cdot \Delta \phi, \\ y_3 &= y_2 + \Delta y_3 = y_2 + R \cdot \sec 2\Delta \phi \cdot \Delta \phi, \\ &\vdots \\ y_N &= y_{N-1} + \Delta y_N = y_{N-1} + R \cdot \sec(N-1)\Delta \phi \cdot \Delta \phi. \end{aligned}$$

Výpočet jsme ukončili dosažením křýžené hodnoty $N \cdot \Delta \phi$ zeměpisné šířky. Tato numerická integrace byla náročná a pracná zejména v dobách „ručních“ výpočtů bez kalkulaček a počítačů. Přesto se Wrightovi podařilo celý postup realizovat s dostatečně malým přírůstkem $\Delta \phi$ rovným 1 minutě (ve stupňové míře). Výsledky svých výpočtů pro zeměpisnou šířku od 0° do 75° zveřejnil v tabulkách „poledníkových částí“. Tím se nakonec metoda konstrukce Mercatorovy mapy stala obecně známou.

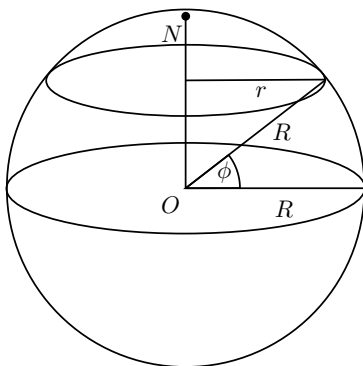
Dnes bychom odvozenou rovnici $\Delta y = (R \sec \phi) \Delta \phi$ přepsali jako rovnici diferenciální pro „neko-
nečně malé“ hodnoty $\Delta \phi$ a Δy , jež bude tvaru

$$\frac{dy}{d\phi} = R \sec \phi.$$

Její řešení $y = y(\phi)$ s počáteční hodnotou $y(0) = 0$ zapíšeme určitým integrálem

$$y(\phi) = R \int_0^\phi \sec t \, dt.$$

Dnes je tento integrál zadáván studentům ve cvičení k základnímu kurzu matematické analýzy. Avšak Wrightova kniha se objevila asi 70 let před Newtonem a Leibnizem, kteří teprve integrální počet vytvořili, takže samotný Wright nemohl použít techniku neurčitých integrálů. Nezbyvalo mu

Obrázek 6.14: Kružnice se zeměpisnou šířkou ϕ .

tedy nic jiného, než použít výše popsanou numerickou integraci.

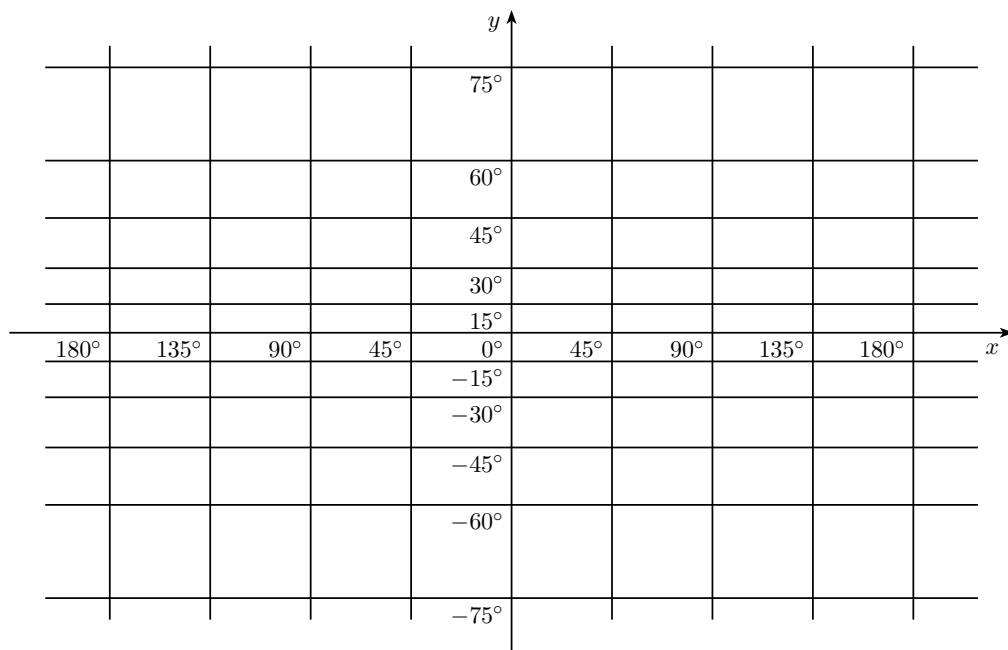
Jako učenec napsal Wright svou knihu pro matematicky erudované čtenáře. Jeho teoretická vysvětlení obyčejným námořníkům říkala velmi málo. Proto Wright též navrhl jednoduchý myšlenkový pokus, který měl konstrukci Mercatorovy mapy vysvětlit. Představme si, že glóbus obalíme válcovou plochou tak, aby se dotýkala glóbu na rovníku. Začněme glóbus nafukováním zvětšovat. Přitom každý bod na roztaženém glóbu přijde do kontaktu s válcem a zanechá na něm svou stopu, která bude obrazem původního bodu glóbu na Mercatorově mapě. Tu dostaneme, když nakonec válcovou plochu s obrazy bodů rozvineme do roviny.

Popsaný Wrightův model se bohužel stal (ne však chybou samotného autora) zdrojem přežívajícího mýtu, že Mercatorovu mapu obdržíme promítáním paprsků světla ze středu glóbu obaleného válcem (čímž ovšem získáme odlišnou cylindrickou projekci, o které jsme pojednali dříve). Důsledně vzato Mercatorova projekce vlastně není projekcí, alespoň ne v geometrickém významu tohoto pojmu. Může být popsána pouze matematickými vzorci pro převod souřadnic z glóbu do souřadnic na mapě, které v závěru našeho textu odvodíme. Sám Mercator nikdy model s válcem ke svým výpočtům nepoužíval. Jeho zobrazení – až na vnější podobnost – nemá s cylindrickou projekcí nic společného. Avšak jednou stvořené mýty umírají pomalu a ještě dnes se můžeme setkat s chybnými výroky o Mercatorově projekci v mnoha zeměpisných knihách.

Jak jsme již uvedli, k prvotním výhradám vůči Mercatorovým mapám přispělo zejména zkreslení pevnin ve vysokých zeměpisných šířkách: např. Grónsko je na mapě větší než Jižní Amerika, ačkoli jsou jejich skutečné rozlohy přibližně v poměru 1 : 9.⁴⁰ Navíc přímá čára spojující dva body na mapě (loxodróm) neodpovídá nejkratší čáře (ortodromě) mezi těmito body na glóbu, neleží-li oba body na rovníku nebo na stejném poledníku (obr. 6.18). Za tento nedostatek byla Mercatorova mapa často kritizována. Jeden Wrightův příznivec, evidentně uražený touto nespravedlivou kritikou, si vybil zlost těmito řádky:

Ať se nikdo neodvází hanit Mercatorovo jméno za špatný způsob zobrazování. Ať je ta hanba smyta docela a ostuda nechť padne na ty, kteří špatně jeho myšlenky popisovali, používali nebo přednášeli.

⁴⁰Kvůli nadměrnému severo-jížnímu roztažení je Mercatorova mapa obvykle omezena pouze na zeměpisné šířky od 75° severně do 60° jižně (viz obr. 6.19).

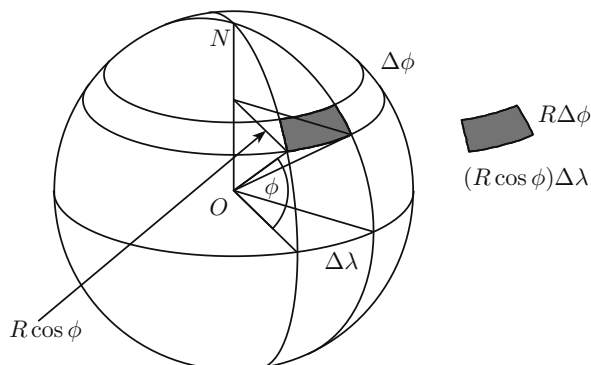


Obrázek 6.15: Roztažení vzdáleností mezi rovnoběžkami.

Wrightova kniha se objevila v roce 1599, třicet let poté, co Mercator publikoval svoji novou mapu světa. Námořní komunita pomalu začala oceňovat její velkou důležitost a v pravý čas se tato mapa stala celosvětově uznávanou. Významnost si udržela do našich dní. Když NASA začala průzkumy vesmíru v 60. letech 20. století, velká Mercatorova mapa, na které byly neustále sledovány dráhy satelitů, vévodila řídicímu centru v Houstonu ve státě Texas. A první mapy měsíců Jupitera a Saturna byly rovněž vyhotoveny Mercatorovou metodou.

Vraťme se do 17. století. V roce 1614 John Napier (1550-1617) ze Skotska objevil logaritmy, které se staly nejdůležitější pomůckou ve výpočetní matematice od dob středověku, kdy byla přinesena do Evropy indicko-arabská početní soustava. Sám Napier publikoval tabulky logaritmů sinů. Krátce nato anglický matematik a kněz Edmund Gunter (1581-1626) vydal tiskem tabulky logaritmů tangent (1620). Kolem roku 1645 Henry Bond, učitel matematiky a velká autorita přes navigaci, porovnal tyto tabulky s Wrightovými poledníkovými tabulkami a ke svému překvapení zjistil, že se tyto tabulky shodují za předpokladu, že úhel v Gunterově tabulce má hodnotu $45^\circ + \frac{\phi}{2}$, kde ϕ je úhel z Wrightovy tabulky. Bond tak usoudil, že určitý integrál $\int_0^\phi \sec t \, dt$ je roven $\ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$, avšak sám to nemohl dokázat. Brzy se tato jeho domněnka stala jedním z nejvýznamnějších matematických problémů 50. let 17. století. Pod nezdařilé pokusy o jeho řešení se podepsali mimo jiné John Collins, Nicolaus Mercator (bez vztahu k G. Mercatorovi), Edmond Halley. Byli to vrstevníci Isaaca Newtona a aktivní účastníci vývoje, který vedl ke zrodu matematické analýzy.

Teprve v roce 1668 James Gregory uspěl v dokazování domněnky, kterou vyslovil Bond. Jeho důkaz byl však natolik obtížný, že sám Halley ho kritizoval za příliš mnoho „komplikačí“. Štěstí přálo až Isaacu Barrowovi (1630-1677), který podal elegantní důkaz Bondovy domněnky v roce 1670. Tento profesor matematiky na Univerzitě v Cambridge byl zdá se prvním matematikem, který (nejen při



Obrázek 6.16: Sférický obdélník.

zmíněném důkazu) používal techniku rozkladu funkcí na parciální zlomky, jež je, jak dnes dobře víme, efektivním prostředkem výpočtu mnohých integrálů.

Gregoryův důkaz Bondovy domněnky nyní předvedeme. Začneme úpravou

$$\begin{aligned} \sec \phi &= \frac{1}{\cos \phi} = \frac{\cos \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{\cos \phi}{1 - \sin^2 \phi} = \\ &= \frac{\cos \phi}{(1 + \sin \phi)(1 - \sin \phi)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} + \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \right), \end{aligned}$$

podle které

$$\int \sec \phi \, d\phi = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi} + \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi} \right) d\phi.$$

První výraz v závorce, který integrujeme, je ve tvaru zlomku, jehož čítec je derivací jmenovatele, a druhý zlomek v závorce je ve tvaru, jehož čítec je (-1) -násobkem derivace jmenovatele. Platí tedy

$$\int \sec \phi \, d\phi = \frac{1}{2} (\ln |1 + \sin \phi| - \ln |1 - \sin \phi|) + C.$$

S využitím dobře známé vlastnosti logaritmů můžeme výsledek přepsat na

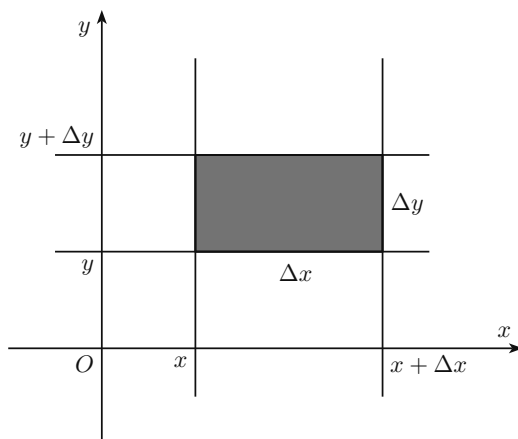
$$\frac{1}{2} (\ln |1 + \sin \phi| - \ln |1 - \sin \phi|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \right| + C.$$

Rozšířením zlomku uvnitř logaritmu obdržíme

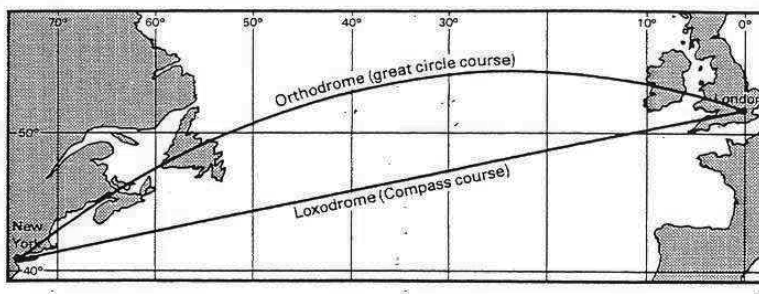
$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \cdot \frac{1 + \sin \phi}{1 + \sin \phi} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin \phi)^2}{\cos^2 \phi} + C.$$

Jelikož argument logaritmu je druhou mocninou, zapíšeme výsledek jako

$$\ln \left| \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} \right| + C,$$



Obrázek 6.17: Rovinný obdélník.



Obrázek 6.18: Loxodróna a nejkratší vzdálenost.

pomocí goniometrických vzorců dále upravíme

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{1 + 2 \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}}{\cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}} \right| + C &= \ln \left| \frac{(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2})^2}{(\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2})(\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2})} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{\cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\phi}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Nakonec čítec i jmenovatel v argumentu logaritmu vydělíme výrazem $\cos \frac{\phi}{2}$:

$$\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| + C.$$

Pro zkoumaný integrál tak dostáváme potvrzení Bondovy domněnky

$$\int_0^{\phi} \sec t \, dt = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \right| - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right),$$

neboť $\ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \ln 1 = 0$. V posledním vzorci jsme vynechali absolutní hodnotu, protože v intervalu, kde zeměpisné šířky uvažujeme, $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$, je $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$ kladné číslo. Dodejme, že v dnešních

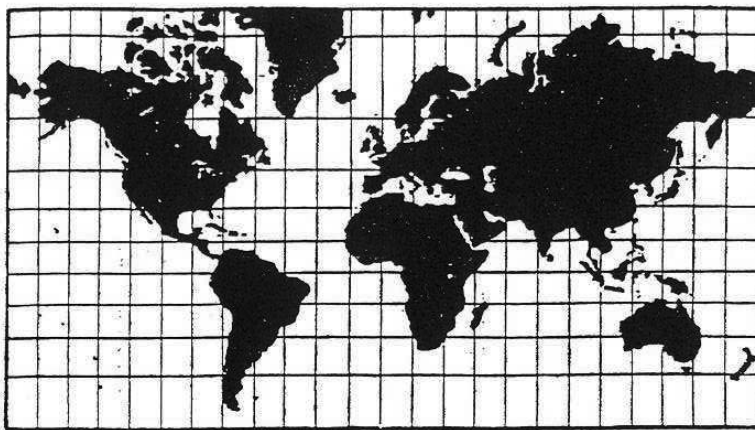
kurzech analýzy je integrál z funkce sekans řešen pomocí substituce $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $du = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} dt$.

Nyní jsme schopni vyjádřit souřadnice (x, y) bodu P' na Mercatorově mapě pomocí zeměpisné délky λ a zeměpisné šířky ϕ , které odpovídají bodu P na glóbu. Diferenční rovnice $\Delta x = R \Delta \lambda$ má zřejmé řešení $x = R\lambda$ a integrál $y = R \int_0^\phi \sec t dt$ je roven výrazu $R \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$. Tudíž máme

$$x = R\lambda, \quad y = R \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right).$$

Tím jsme splnili úkol, který jsme si předsevzali – našli jsme matematické vyjádření Mercatorova kartografického zobrazení.

Všimněme si, že výraz $\operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ uvnitř logaritmu v rovnici $y = R \ln \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ je stejný



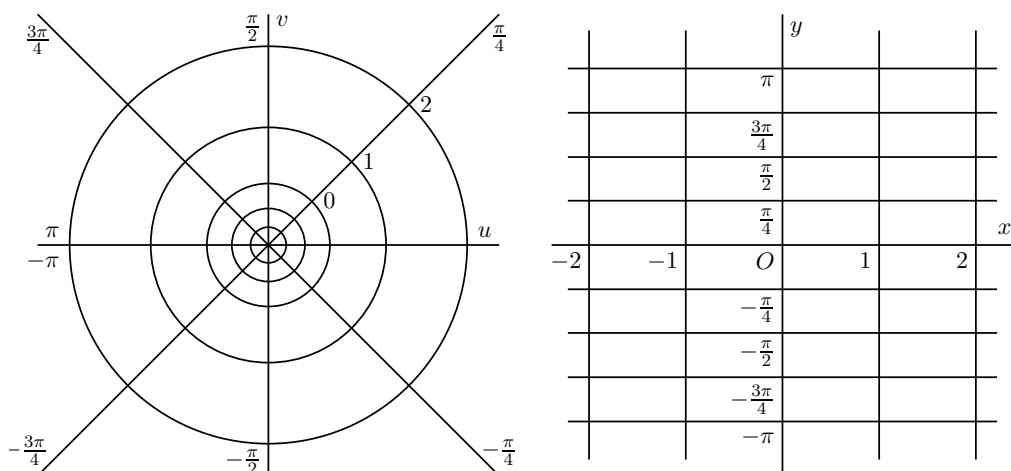
Obrázek 6.19: Svět podle Mercatora.

jako v rovnici $|SP'| = \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{\phi}{2})$ uvedené při výkladu o stereografické projekci. To není náhoda! Dříve než to vysvětlíme, poznamenáme obecněji, že jedním z velkých úspěchů matematiky osmáctého století bylo účelné rozšíření definičního oboru obvyklých funkcí jako např. $\sin x$, e^x a $\ln x$ o komplexní hodnoty proměnné x . Jak jsme podrobně popsali v podkapitole 1.4, na začátku tohoto vývoje stál Euler a jeho vrcholu bylo dosaženo v devatenáctém století vytvořením teorie analytických funkcí komplexních proměnných.

Nás však zajímá pouze funkce $w = \ln z$, kde jak hodnoty z , tak i hodnoty w jsou komplexní čísla, která je dána předpisem

$$w = \ln |z| + i \cdot \arg z.$$

Právě tohle konformní zobrazení aplikované při stereografické projekci nám dává Mercatorovo zobrazení až na to, že horizontální a vertikální přímky jsou navzájem vyměněny. Můžeme to opravit rotací souřadnicového systému o 90° , což odpovídá vynásobení hodnoty funkce komplexní jednotkou i . Mercatorovu projekci si tedy můžeme představit jako výsledek složení dvou zobrazení: první z nich je stereografická projekce glóbu na komplexní rovinu z , druhé je zobrazení této roviny z do roviny w (obr. 6.20) pomocí funkce $w = i \cdot \ln z$. Jak jsme dříve odvodili, při prvním zobrazení se bod $P(\lambda, \phi)$ glóbu zobrazí na komplexní číslo z s absolutní hodnotou $\rho = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right)$ a argumentem

Obrázek 6.20: Rovina z a rovina w .

$\varepsilon = \lambda$, takže po aplikaci druhého zobrazení dostaneme komplexní číslo

$$w = i \ln z = i [\ln \varrho + i\varepsilon] = -\lambda + i \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right),$$

které při zápisu $w = x + iy$ skutečně odpovídá bodu $P'[x, y]$ na Mercatorově mapě (při hodnotě $R = 1$ a pozměněné orientaci osy x). Tento výsledek, jako každé složení dvou konformních zobrazení, je opět konformní zobrazení. Tímto konstatováním naše exkurze za goniometrickými funkcemi do světa matematické kartografie končí.