Goniometrické funkce v elementární matematice

Kapitola 2: Goniometrie pravoúhlého trojúhelníku

In: Radka Smýkalová (author): Goniometrické funkce v elementární matematice. (Czech). Brno, 2016. pp. 40–62.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/404321

Terms of use:

© Akademické nakladatelství CERM

© Nadace Universitas v Brně

© Česká matematická společnost

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Kapitola 2

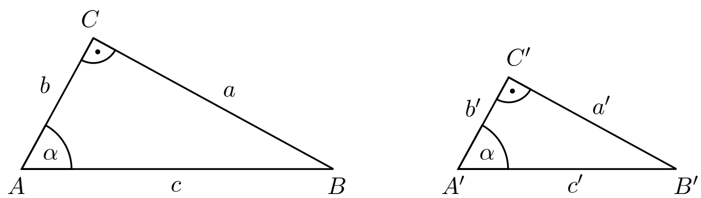
Goniometrie pravoúhlého trojúhelníku

2.1 Funkce ostrého úhlu

Zavedení goniometrických funkcí sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans ostrých úhlů $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ je spojeno s řešením pravoúhlých trojúhelníků.

2.1.1 Od podobnosti k poměrům

Na obrázku 2.1 vidíme dva různé pravoúhlé trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, které se shodují ve vnitřním úhlu α. Podle věty *uu* o podobnosti trojúhelníků jsou navzájem podobné, z čehož plyne,



Obrázek 2.1

že poměry odpovídajících si stran jsou *stejné*:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\,.$$

Odtud pro poměry dvojic stran téhož trojúhelníku dostáváme šest rovností

1. $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$,	2. $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$,	3. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$,
4. $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$,	5. $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$,	6. $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$,

ze kterých plyne, že ve všech pravoúhlých trojúhelnících se shodným ostrým vnitřním úhlem α má

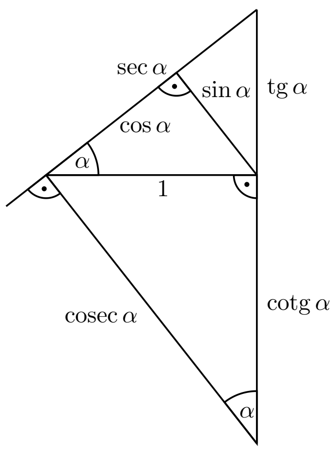
1. poměr odvěsny protilehlé úhlu α a přepony stejnou hodnotu,
2. poměr odvěsny přilehlé úhlu α a přepony stejnou hodnotu,
3. poměr odvěsny protilehlé úhlu α a odvěsny přilehlé úhlu α stejnou hodnotu,

4. poměr odvěsny přilehlé úhlu α a odvěsny protilehlé úhlu α stejnou hodnotu,
5. poměr přepony a odvěsny přilehlé úhlu α stejnou hodnotu,
6. poměr přepony a odvěsny protilehlé úhlu α stejnou hodnotu.

Tyto poměry tedy nezáleží na velikosti pravoúhlého trojúhelníku. Jejich hodnoty jsou kladná čísla, která *závisí pouze na velikosti úhlu* α a kterým říkáme

1. sinus úhlu α – $\sin\alpha = \frac{a}{c}$,
2. kosinus úhlu α – $\cos\alpha = \frac{b}{c}$,
3. tangens úhlu α – $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$,
4. kotangens úhlu α – $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$,
5. sekans úhlu α – $\sec\,\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}$,
6. kosekans úhlu α – $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}$.

Zvolíme-li délku přepony pravoúhlého trojúhelníku za jednotku délky, hodnoty sinu a kosinu budou rovny přímo délkám odvěsen a délkami úseček lze znázornit i hodnoty tangens, kotangens, sekans a kosekans (viz obr. 2.2). Z takového znázornění lze geometricky zdůvodnit všechny poznatky, které uvedeme v následující části.



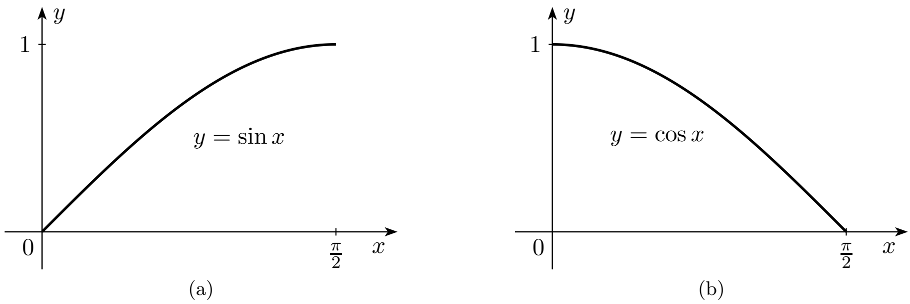
Obrázek 2.2: Goniometrické hodnoty graficky

2.1.2 Grafy a základní vztahy

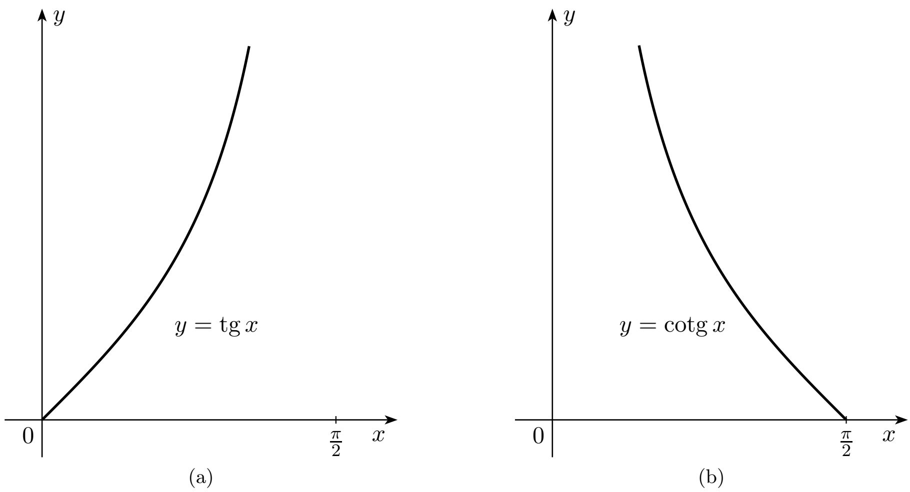
Z předchozího zavedení hodnot sinu a kosinu úhlu $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ plyne, že obě tato čísla leží v otevřeném intervalu $(0, 1)$. Krajních hodnot dosáhnout nemohou. (V žádném pravoúhlém trojúhelníku nemůže být délka odvěsny nulová a odvěsna s přeponou nemohou mít stejnou délku.) Z geometrického názoru je však zřejmé, že hodnoty sinu a kosinu mají v krajních bodech $\alpha = 0$ a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ jednostranné limity

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \sin\alpha = 0, \qquad \lim_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^-} \sin\alpha = 1, \qquad \lim_{\alpha\to 0^+} \cos\alpha = 1, \qquad \lim_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^-} \cos\alpha = 0.$$

Proto můžeme dodefinovat hodnoty $\sin 0$, $\sin \frac{\pi}{2}$ a $\cos 0$, $\cos \frac{\pi}{2}$ a mluvit o *funkcích* sinus a kosinus na uzavřeném intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Funkce sinus je na intervalu $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ rostoucí, funkce kosinus klesající (obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Grafy funkcí sinus a kosinus na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$



Obrázek 2.4: Grafy funkcí tangens a kotangens na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$

Hodnoty tangens a kotangens úhlu $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ leží v otevřeném intervalu $(0, \infty)$. V krajních bodech definičního oboru mají zřejmé limity:

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{tg}\alpha = 0, \qquad \lim_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}\alpha = \infty, \qquad \lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{cotg}\alpha = \infty, \qquad \lim_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{cotg}\alpha = 0.$$

Jelikož ∞ není reálné číslo, nebudeme hodnoty $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{cotg} 0$ definovat. Rostoucí funkce tangens tak bude definována na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2})$, klesající funkci kotangens budeme uvažovat na intervalu $(0, \frac{\pi}{2}\rangle$ (obr. 2.4).

Poslední dvě goniometrické funkce – sekans a kosekans – lze jednoduše vyjádřit pomocí funkcí sinus a kosinus rovnostmi

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \text{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Vypočítat převrácené číslo k dané hodnotě je v epoše počítačů triviální úkol. Proto funkce sekans a kosekans již ztratily praktický význam a ani my se jimi dále nebudeme téměř vůbec zabývat.

Mezi goniometrickými funkcemi existuje řada závislostí, které můžeme vyjádřit pomocí různých rovností. Např. každá výše zmíněná goniometrická funkce $f(\alpha)$ má svoji tzv. goniometrickou kofunkci $cof(\alpha)$, pro kterou při každém $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí

$$f(\alpha) = cof\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Které dvě goniometrické funkce jsou takto svými „sourozenci", se dá jednoduše odvodit vyjádřením goniometrických poměrů v pravoúhlém trojúhelníku pro oba vnitřní ostré úhly α a $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. (Úhly α, β nazýváme doplňkové, jelikož $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.) Zde jsou očekávané vztahy:

$$\boxed{\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

a

$$\boxed{\sec\alpha = \mathrm{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).}$$

Dlouhá staletí se hledaly hodnoty goniometrických funkcí pro daný úhel jen pomocí tabulek. Tabulky sloužily i opačné úloze – najít úhel, jehož goniometrická hodnota byla dána. Tato úloha vedla ke vzniku inverzních funkcí arkussinus (arcsin), arkuskosinus (arccos), arkustangens (arctg) a arkuskotangens (arccotg), které budeme uvažovat prozatím na intervalech $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, $(0, \infty)$, a $(0, \infty)$. Velikost příslušných úhlů bude ležet v rozmezí $(0, \frac{\pi}{2})$.

Cyklometrické funkce – název pro inverzní funkce ke goniometrickým – dnes také slouží k přesnému zápisu výsledků, které v daný okamžik nepotřebujeme vyjadřovat přibližnými čísly pro účely praxe. Například pro ostré úhly α, β, γ píšeme:

$$\sin\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \beta = \arccos\frac{1}{5}, \quad \mathrm{tg}\,\gamma = 2\,011 \Rightarrow \gamma = \mathrm{arctg}\,2\,011.$$

2.2 Pythagorova a Eukleidovy věty

Pythagorova věta byla pojmenována podle Pythagora ze Samu (okolo 570 př. n. l. – 510 př. n. l.), jenž ji objevil pro Evropu, resp. starověké Řecko. Pravděpodobně však byla známa i v jiných starověkých civilizacích dávno předtím (v Číně, částečně např. v Egyptě). Popisuje vztah, který platí mezi délkami stran pravoúhlých trojúhelníků v rovině.

Věta 2.2.1 (Pythagorova)**.** *Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého rovinného trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů dvou čtverců nad jeho odvěsnami:*

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2.}$$

Eukleidova věta je označení pro geometrická tvrzení o vlastnostech pravoúhlých trojúhelníků, pojmenovaná po svém objeviteli, řeckém matematikovi Eukleidovi (450 př. n. l. – 370 př. n. l.). Ve skutečnosti jsou Eukleidovy věty dvě – Eukleidova věta o výšce a Eukleidova věta o odvěsně. V obou se mluví o *úsecích*, na které je přepona rozdělena patou výšky z protilehlého vrcholu trojúhelníku.

Věta 2.2.2 (Eukleidova věta o výšce)**.** *Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku ABC je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony:*

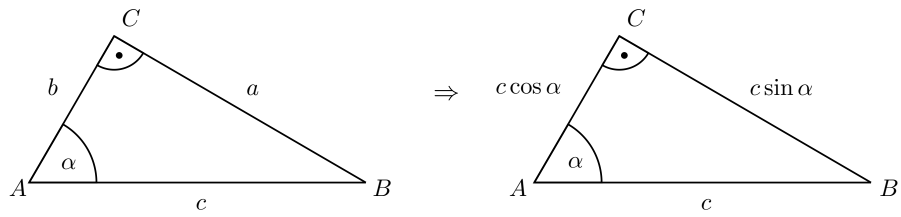
$$\boxed{v^2 = c_a \cdot c_b.}$$

Věta 2.2.3 (Eukleidova věta o odvěsně). *Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku ABC je roven obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a úseku přepony k této odvěsně přilehlého:*

$$\boxed{a^2 = c \cdot c_a \qquad a \qquad b^2 = c \cdot c_b.}$$

Všechny tyto tři věty nyní odvodíme pomocí goniometrických funkcí ostrých úhlů.

Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Ze vztahů pro hodnoty sinu a kosinu úhlu α u vrcholu A vyjádříme délky odvěsen a, b pravoúhlého trojúhelníku (viz obr. 2.5). V troj-

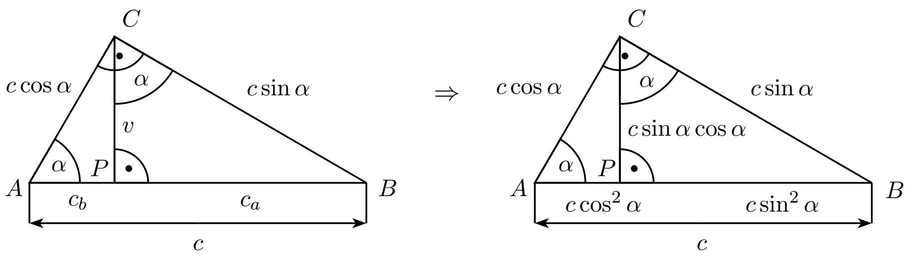


Obrázek 2.5

úhelníku ABC dále vyznačíme výšku $v = CP$, která nám rozdělí trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky APC a PBC (viz obr. 2.6). Z trojúhelníků ABC a BCP vidíme, že každý z úhlů CAB a PCB je doplňkový ke společnému úhlu u vrcholu B, takže platí $|\angle PCB| = \alpha$. Proto můžeme pomocí hodnot $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ vyjádřit i výšku v, i délky obou úseků $c_a = |BP|$ a $c_b = |AP|$, jak je uvedeno v pravé části obrázku:

$$v = c \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha, \qquad c_a = c \cdot \sin^2\alpha, \qquad c_b = c \cdot \cos^2\alpha.$$

Z nalezených vyjádření délek a, b, v, c_a, c_b již dostaneme všechny potřebné rovnosti:



Obrázek 2.6

$$\begin{aligned}
a = c \cdot \sin\alpha \Rightarrow a^2 = c^2 \cdot \sin^2\alpha \Rightarrow a^2 = c \cdot (c \cdot \sin^2\alpha) &\Rightarrow \underline{a^2 = c \cdot c_a}, \\
b = c \cdot \cos\alpha \Rightarrow b^2 = c^2 \cdot \cos^2\alpha \Rightarrow b^2 = c \cdot (c \cdot \cos^2\alpha) &\Rightarrow \underline{b^2 = c \cdot c_b}, \\
v = c \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow v^2 = c^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \Rightarrow v^2 = (c \cdot \sin^2\alpha) \cdot (c \cdot \cos^2\alpha) &\Rightarrow \underline{v^2 = c_a \cdot c_b}, \\
a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b \Rightarrow a^2 + b^2 = c \cdot (c_a + c_b) &\Rightarrow \underline{a^2 + b^2 = c^2}.
\end{aligned}$$

Dodejme, že z rovnosti $c = c_a + c_b$ okamžitě plyne klíčový vztah mezi hodnotami sinu a kosinu, tzv. *goniometrická jednička*

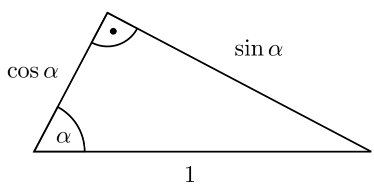
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

která je rovněž bezprostředním důsledkem dokázané Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník s jednotkovou přeponou.

2.3 Goniometrické hodnoty téhož úhlu

Na začátku této kapitoly jsme každému ostrému úhlu α přiřadili čtyři goniometrické hodnoty – $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$. Z každé z těchto čtyř hodnot je zpětně určen nejen úhel α, ale i další tři zbývající goniometrické hodnoty, což nyní potvrdíme. Obdržíme jednoduché vzájemné vztahy mezi goniometrickými hodnotami téhož ostrého úhlu, které plynou přímo z definice goniometrických hodnot a z Pythagorovy věty.

- Je-li dána hodnota $\sin\alpha$, zvolíme pravoúhlý trojúhelník s jednotkovou přeponou a s vnitřním ostrým úhlem α. Z definice plynou délky odvěsen (obr. 2.7).



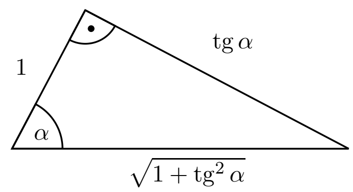
Obrázek 2.7

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 && \text{(Pythagorova věta)},\\
\cos\alpha &= \sqrt{1-\sin^2\alpha} &&\\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} && \text{(definice hodnoty } \operatorname{tg}\alpha),\\
\operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} && \text{(definice hodnoty } \operatorname{cotg}\alpha).
\end{aligned}$$

- Je-li dána hodnota $\cos\alpha$, použijeme opět obr. 2.7.

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha} && \text{(Pythagorova věta)},\\
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} && \text{(definice hodnoty } \operatorname{tg}\alpha),\\
\operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} && \text{(definice hodnoty } \operatorname{cotg}\alpha).
\end{aligned}$$

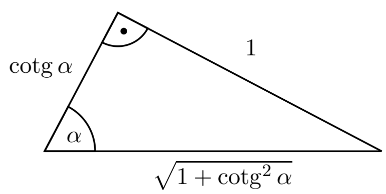
- Je-li dána hodnota $\operatorname{tg}\alpha$, zvolíme pravoúhlý trojúhelník s jednotkovou odvěsnou a přilehlým vnitřním ostrým úhlem α. Z definice tangens plyne délka protilehlé odvěsny a z Pythagorovy věty délka přepony (obr. 2.8).



Obrázek 2.8

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad \text{(definice hodnoty } \sin\alpha\text{)},$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad \text{(definice hodnoty } \cos\alpha\text{)},$$
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \text{(definice hodnoty } \operatorname{cotg}\alpha\text{)}.$$

- Je-li dána hodnota $\operatorname{cotg}\alpha$, zvolíme pravoúhlý trojúhelník s jednotkovou odvěsnou a protilehlým vnitřním ostrým úhlem α. Z definice kotangens plyne délka přilehlé odvěsny a z Pythagorovy věty délka přepony (obr. 2.9).



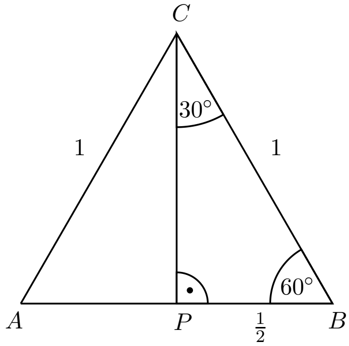
Obrázek 2.9

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} \qquad \text{(definice hodnoty } \sin\alpha\text{)},$$
$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} \qquad \text{(definice hodnoty } \cos\alpha\text{)},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} \qquad \text{(definice hodnoty } \operatorname{tg}\alpha\text{)}.$$

2.4 Goniometrické hodnoty významných úhlů

V části 2.1.2 jsme pomocí limit přiřadili goniometrickým funkcím hodnoty pro „okrajové“ úhly $\alpha = 0°$ a $\alpha = 90°$. Žádné konkrétní goniometrické hodnoty pro úhly mezi 0° a 90° jsme dosud nepoznali. V této podkapitole ukážeme, že z pravidelných mnohoúhelníků lze odvodit hodnoty goniometrických funkcí pro ostré úhly $\alpha \in \{18°, 30°, 36°, 45°, 54°, 60°, 72°\}$. (Tyto významné úhly je výhodnější zapisovat ve stupních než v obloukové míře, které dáváme jinde přednost.)

- Pravidelný trojúhelník – *rovnostranný trojúhelník* – o délce strany jedna jednotka lze výškou



Obrázek 2.10

rozdělit na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s vnitřními ostrými úhly o velikosti 30° a 60° (obr. 2.10). Délku jejich delší odvěsny vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|PC| = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhly 30° a 60° z pravoúhlého trojúhelníku PBC jsou:

$$\sin 30° = \cos 60° = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30° = \sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{cotg} 60° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{cotg} 30° = \operatorname{tg} 60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

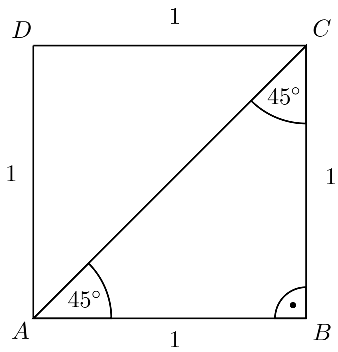
- Pravidelný čtyřúhelník – *čtverec* – o délce strany jedna jednotka lze úhlopříčkou rozdělit na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s vnitřními ostrými úhly o velikosti 45° (obr. 2.11). Délku jejich přepony vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|AC| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhel 45° z pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou:

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{tg} 45° = \operatorname{cotg} 45° = \frac{1}{1} = 1.$$

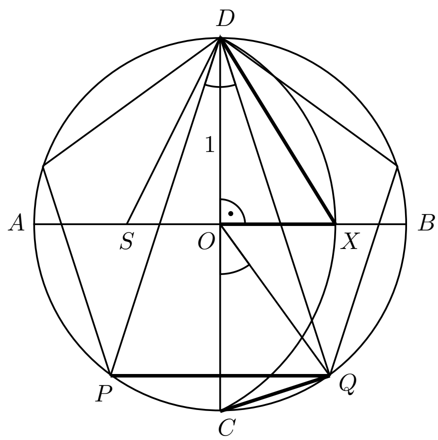
K dalšímu odvozování budeme potřebovat délky stran pravidelného pětiúhelníku a pravidelného desetiúhelníku vepsaných do kružnice o poloměru jedna jednotka. Nejdříve popíšeme konstrukci těchto dvou délek, která je znázorněna na obr. 2.12.



Obrázek 2.11

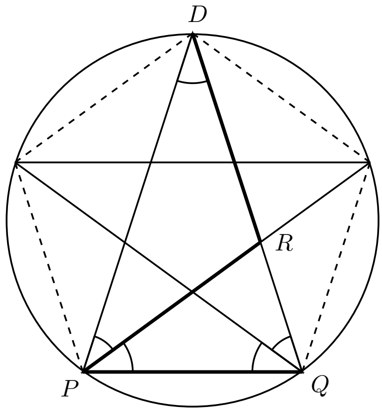
Postup:

1. Sestrojíme jednotkovou kružnici se středem O a její dva navzájem kolmé průměry AB a CD.
2. Nalezneme střed S úsečky AO.
3. Sestrojíme oblouk CD kružnice se středem v bodě S a poloměrem $|SD|$, průsečík oblouku s úsečkou OB označíme X.
4. Délka strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného do jednotkové kružnice je $a_5 = |DX|$, délka strany příslušného pravidelného desetiúhelníku je $a_{10} = |OX|$.



Obrázek 2.12: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku

Důkaz. Abychom ověřili správnost konstrukce délek stran pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku, podíváme se nejprve na pentagram - pěticípou hvězdu nakreslenou pěti přímými tahy téže délky (obr. 2.13). Pentagram velmi úzce souvisí s pravidelným pětiúhelníkem, který dostaneme spojením vrcholů pentagramu úsečkami. Uvažujme jeho dvě úhlopříčky vycházející z jednoho vrcholu,



Obrázek 2.13: Pentagram

například úhlopříčky DP a DQ na obrázku. Tyto dvě úhlopříčky spolu se stranou PQ vymezují rovnoramenný trojúhelník DPQ. Další úhlopříčka vycházející z vrcholu P protne úsečku DQ ve vnitřním bodě R.

Protože stranám pravidelného pětiúhelníku příslušejí v opsané kružnici shodné obvodové úhly (vyznačené na obrázku obloučky), jsou trojúhelníky PQR a DPQ podobné a rovnoramenné a rovněž trojúhelník DRP je rovnoramenný. Úsečky DR, PR a PQ jsou proto shodné a pro poměry stran trojúhelníků PQR a DPQ platí

$$\frac{|DP|}{|PQ|} = \frac{|PQ|}{|QR|} = \frac{|PQ|}{|DQ| - |DR|} = \frac{|PQ|}{|DP| - |PQ|}$$

neboli

$$|PQ|^2 = |DP| \cdot (|DP| - |PQ|).$$

Po vydělení hodnotou $|PQ|^2$ tak pro poměr $\varphi = \frac{|DP|}{|PQ|}$ dostáváme kvadratickou rovnici $1 = \varphi\cdot(\varphi-1)$, která má jediný kladný kořen $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Určená hodnota φ je známá jako *zlatý řez* a objevuje se v různých souvislostech v geometrii a v teorii čísel.)

Pravidelný pětiúhelník se stranou PQ a protilehlým vrcholem D je přikreslen i k naší konstrukci na obr. 2.12. Protože přímka CD je osou úsečky PQ, je úsečka CQ stranou vepsaného pravidelného desetiúhelníku. Její délku a_{10} určíme z rovnoramenného trojúhelníku OCQ, který má u hlavního vrcholu O úhel velikosti poloviny středového úhlu POQ, tedy úhel shodný s obvodovým úhlem PDQ (oba shodné úhly jsou na obr. vyznačeny obloučky). Rovnoramenné trojúhelníky DPQ a OCQ jsou tedy podobné. Z rovnosti

$$\frac{|OC|}{|CQ|} = \frac{|DP|}{|PQ|} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

po dosazení $|OC| = 1$ již dostaneme

$$a_{10} = |CQ| = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Abychom určili druhou hledanou délku $a_5 = |PQ|$, vypočteme nejdříve délku odvěsny DQ pravoúhlého trojúhelníku CDQ:

$$|DQ| = \sqrt{|CD|^2 - |CQ|^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$

Odtud již dostáváme

$$a_5 = |PQ| = \frac{|DP|}{\varphi} = \frac{|DQ|}{\varphi} = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Nyní se vraťme k původní konstrukci. Naším cílem je ukázat, že úsečky DX a OX mají délky rovné hodnotám a_5, resp. a_{10}, jejichž výpočet jsme před chvílí dokončili. K tomu nám stačí použít dvakrát Pythagorovu větu:

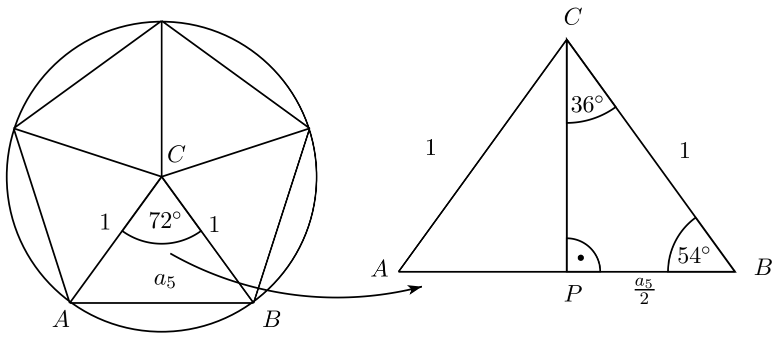
$$|SX| = |SD| = \sqrt{|OD|^2 + |OS|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$|OX| = |SX| - |OS| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$|DX| = \sqrt{|OD|^2 + |OX|^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

Správnost celé konstrukce je tak ověřena. Zároveň jsme určili délky a_5, a_{10} stran pravidelných pětiúhelníků a desetiúhelníků vepsaných do jednotkové kružnice, které nyní uplatníme k našemu hlavnímu záměru. $\square$

- Pravidelný pětiúhelník o délce strany $|AB| = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$ lze rozdělit na pět shodných rovno-



Obrázek 2.14: Pravidelný pětiúhelník

ramenných trojúhelníků s vnitřním úhlem proti základně o velikosti 72° (obr. 2.14), jejichž výšku na základnu vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

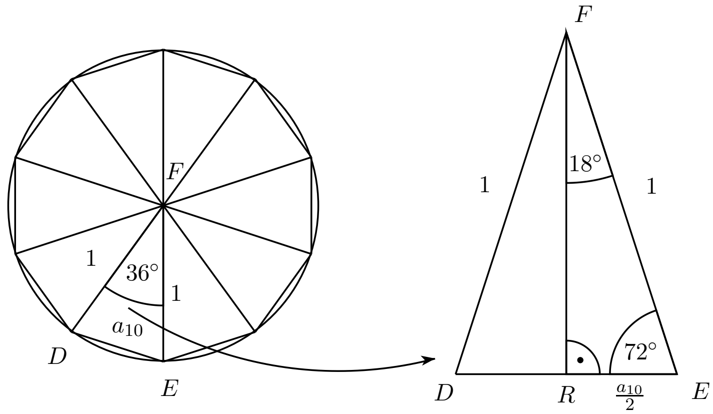
$$|CP| = \sqrt{|BC|^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhly 36° a 54° z pravoúhlého trojúhelníku PBC jsou:

$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \qquad \cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \operatorname{cotg} 54^\circ = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \qquad \operatorname{cotg} 36^\circ = \operatorname{tg} 54^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}.$$

- Pravidelný desetiúhelník o délce strany $|DE| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ lze rozdělit na deset shodných rovno-



Obrázek 2.15: Pravidelný desetiúhelník

ramenných trojúhelníků s vnitřním úhlem proti základně o velikosti 36° (obr. 2.15), jejichž výšku na základnu vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$|FR| = \sqrt{|EF|^2 - \left(\frac{|DE|}{2}\right)^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhly 18° a 72° z pravoúhlého trojúhelníku REF jsou:

$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \qquad \cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 18^\circ = \operatorname{cotg} 72^\circ = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}, \qquad \operatorname{cotg} 18^\circ = \operatorname{tg} 72^\circ = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Z odvozených hodnot bychom mohli užitím goniometrických vzorců (viz 2.5) algebraicky vyjadřovat hodnoty příslušné dalším úhlům, např. $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, $6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$ apod. Takové výpočty dnes nemají příliš valný význam, v historii však sehrály (jak jsme uvedli v kap. 1) velkou roli při sestavování trigonometrických tabulek.

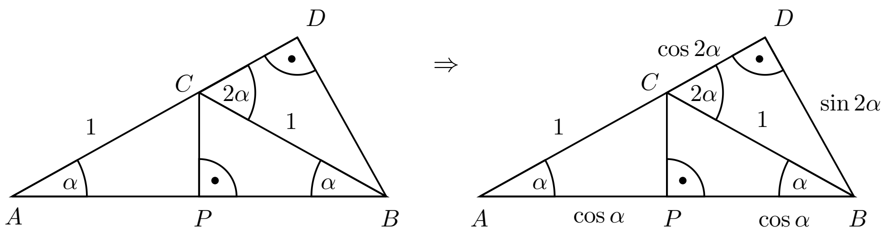
2.5 Goniometrické vzorce

V goniometrii pracujeme s velkým množstvím vzorců. Zatím jsme definovali goniometrické funkce v souvislosti s pravoúhlým trojúhelníkem, budeme proto nyní u goniometrických vzorců uvádět omezení, za kterých jsou *všechny* zastoupené argumenty z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Názorně odvodíme vzorce pro dvojnásobný argument, součtové vzorce a vzorce pro součet funkcí.[1]

- Vzorce pro dvojnásobný argument, kde $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.}$$

Odvození: Zvolíme si rovnoramenný trojúhelník ABC s rameny AC, BC o délce jedna jednotka tak, aby vnitřní úhly přilehlé k základně AB měly velikost $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$, a výškou PC ho rozdělíme na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky. Základna AB je současně přeponou pravoúhlého trojúhelníku ABD (viz obr. 2.16 vlevo). Z trojúhelníku ABC je $|\angle ACB| = \pi - 2\alpha$,



Obrázek 2.16

tudíž pro velikost vedlejšího úhlu BCD platí $|\angle BCD| = 2\alpha$.
Nyní vyjádříme a do obrázku vpravo zapíšeme délky jednotlivých stran pomocí goniometrických funkcí:

$$\triangle APC : \cos\alpha = \frac{|AP|}{1} \Rightarrow |AP| = \cos\alpha, \qquad \Rightarrow |AB| = 2|AP| = 2\cos\alpha,$$
$$\triangle CBD : \sin 2\alpha = \frac{|BD|}{1} \Rightarrow |BD| = \sin 2\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \frac{|CD|}{1} \Rightarrow |CD| = \cos 2\alpha.$$

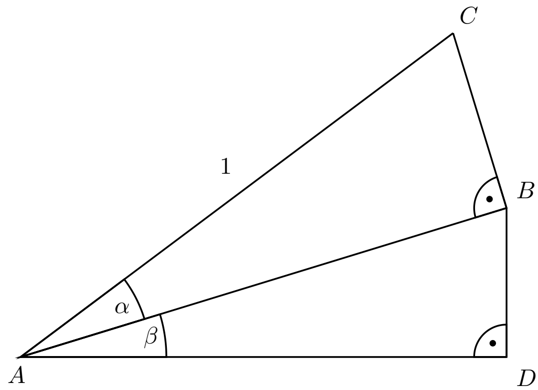
Z trojúhelníku ABD již odvodíme kýžené vzorce:

$$\sin\alpha = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos\alpha = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

- Součtové vzorce pro sinus a pro kosinus, kde $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.}$$

Odvození: Zvolíme si dva pravoúhlé trojúhelníky ABC a ADB s přeponami AC, resp. AB tak, aby strana AB byla společná, strana AC měla délku jedna jednotka a aby vnitřní úhly



Obrázek 2.17

CAB, BAD měly velikosti α, resp. β o součtu menším než $\frac{\pi}{2}$ (viz obr. 2.17). Do stejného obrázku dokreslíme obdélník $ADEF$ (obr. 2.18). Úhly CAD a ACF jsou střídavé, z čehož plyne, že $|\angle ACF| = \alpha + \beta$. Jednoduše lze také spočítat, že $|\angle CBE| = \beta$. Nyní určíme a do dolní části obrázku 2.18 zapíšeme délky jednotlivých stran pomocí goniometrických funkcí, z čehož pak obdržíme kýžené vzorce:

$$\begin{aligned}
\triangle ABC : \sin\alpha &= \frac{|BC|}{1} \Rightarrow |BC| = \sin\alpha, & \cos\alpha &= \frac{|AB|}{1} \Rightarrow |AB| = \cos\alpha,\\
\triangle ADB : \sin\beta &= \frac{|DB|}{|AB|} \Rightarrow |DB| = \cos\alpha\sin\beta, & \cos\beta &= \frac{|AD|}{|AB|} \Rightarrow |AD| = \cos\alpha\cos\beta,\\
\triangle BEC : \sin\beta &= \frac{|EC|}{|BC|} \Rightarrow |EC| = \sin\alpha\sin\beta, & \cos\beta &= \frac{|BE|}{|BC|} \Rightarrow |BE| = \sin\alpha\cos\beta,\\
\triangle ACF : \sin(\alpha+\beta) &= \frac{|AF|}{1} \Rightarrow |AF| = \sin(\alpha+\beta), & \cos(\alpha+\beta) &= \frac{|CF|}{1} \Rightarrow |CF| = \cos(\alpha+\beta).
\end{aligned}$$

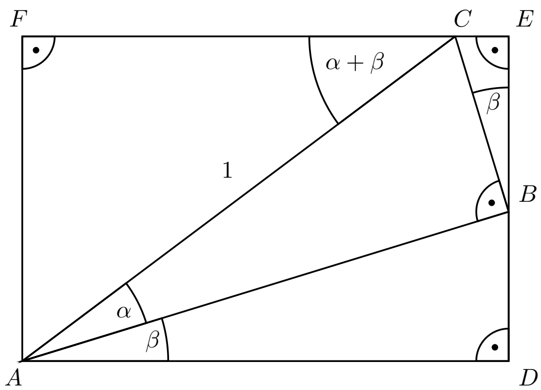
$$\begin{aligned}
|AF| = |DE| = |BE| + |DB| &\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\
|AD| = |FE| = |FC| + |CE| &\Rightarrow \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin\beta,\\
&\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

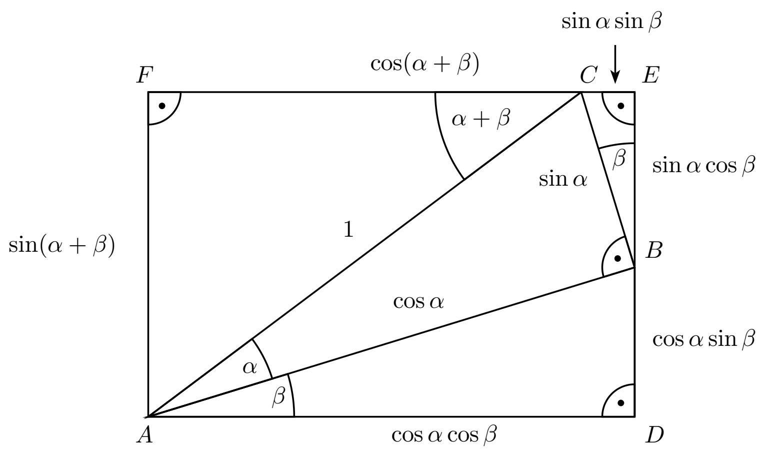
- Součtový vzorec pro tangens, kde $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.}$$

Odvození: Součtový vzorec pro tangens lze názorně demonstrovat ze stejného obrázku obdélníku $ADEF$ z obr. 2.18, pokud jinak (vhodně) zvolíme výchozí jednotku délky (obr. 2.19).

[1] Díky analytičnosti obou stran vzorců můžeme tvrdit, že takto odvozené vzorce budou platit pro *všechny* argumenty z oboru reálných či dokonce komplexních čísel. S ohledem na zaměření naší práce však budeme rozšiřovat obory pravdivosti goniometrických vzorců v následujících kapitolách výhradně elementárními prostředky.





Obrázek 2.18

$$\triangle ADB : \mathrm{tg}\,\beta = \frac{|DB|}{1} \Rightarrow |DB| = \mathrm{tg}\,\beta, \qquad \cos\beta = \frac{1}{|AB|} \Rightarrow |AB| = \frac{1}{\cos\beta},$$

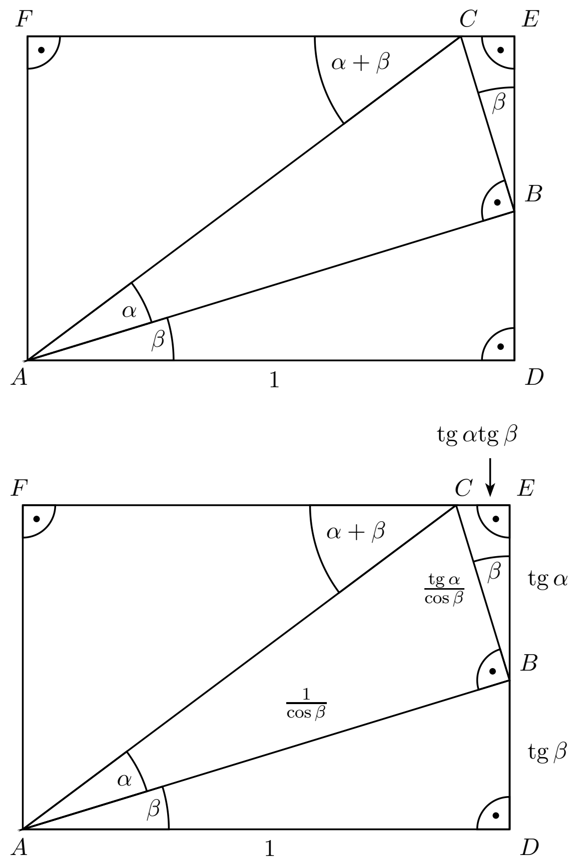
$$\triangle ABC : \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{|BC|}{\frac{1}{\cos\beta}} \Rightarrow |BC| = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\beta},$$

$$\triangle BEC : \sin\beta = \frac{|CE|}{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\beta}} \Rightarrow |CE| = \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta, \qquad \cos\beta = \frac{|BE|}{\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\beta}} \Rightarrow |BE| = \mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$\triangle ACF : \mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|DE|}{|FC|} = \frac{|BE| + |DB|}{1 - |CE|} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Dodejme, že v případě $\alpha = \beta \in (0, \frac{\pi}{4})$ odtud plyne vzorec

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

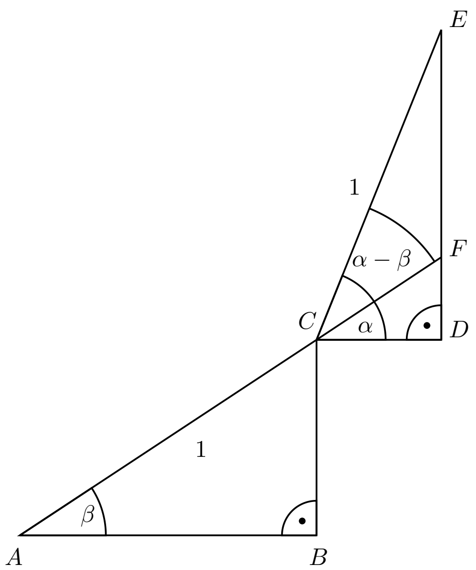


Obrázek 2.19

- Vzorce pro součet sinů a pro součet kosinů, kde $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.}$$

Odvození: Zvolíme si dva pravoúhlé trojúhelníky ABC a CDE se společných vrcholem C tak, aby jejich přepony AC a CE měly délku jedna jednotka, odvěsny AB a CD byly navzájem rovnoběžné a aby pro vnitřní úhly $\alpha = |\angle DCE|$ a $\beta = |\angle BAC|$ platilo $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (viz obr. 2.20). Prodloužením strany AC za bod C obdržíme průsečík F se stranou DE. Ze shodnosti střídavých úhlů BAC a DCF plyne $|\angle ECF| = \alpha - \beta$. Do stejného obrázku (viz obr. 2.21) dokreslíme pravoúhlý trojúhelník AGE. V rovnoramenném trojúhelníku ACE sestrojíme výšku na základnu AE a její patu označíme písmenem H. K odvození vzorců nám zbývá už jen zjistit velikost úhlu EAF, shodného s oběma vnitřními úhly při základně AE trojúhelníku ACE. Protože jeho vnější úhel při vrcholu C má velikost $\alpha - \beta$, je $|\angle EAF| = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Nyní vyjádříme a do obrázku zapíšeme potřebné délky pomocí goniometrických funkcí:



Obrázek 2.20

$$\triangle ABC : \sin\beta = \frac{|BC|}{1} \Rightarrow |BC| = \sin\beta = |GD|, \qquad \cos\beta = \frac{|AB|}{1} \Rightarrow |AB| = \cos\beta,$$
$$\triangle CDE : \sin\alpha = \frac{|DE|}{1} \Rightarrow |DE| = \sin\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{|CD|}{1} \Rightarrow |CD| = \cos\alpha = |BG|.$$

$$\triangle ACH : \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{|AH|}{1} \Rightarrow |AH| = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow |AE| = 2|AH| = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Zaměříme se na pravoúhlý trojúhelník AGE, jehož odvěsny AG a GE mají délky

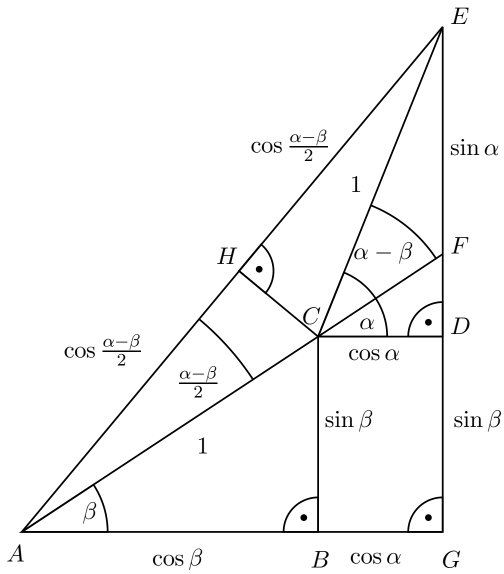
$$|AG| = |AB| + |BG| = \cos\alpha + \cos\beta,$$

$$|GE| = |GD| + |DE| = \sin\alpha + \sin\beta$$

a jehož ostrý vnitřní úhel u vrcholu A má velikost $\frac{\alpha-\beta}{2}+\beta = \frac{\alpha+\beta}{2}$. To nám spolu s dříve určenou délkou přepony AE umožňuje vyjádřit délky odvěsen AG, GE jiným způsobem zapsaným na obr. 2.22:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{|GE|}{|AE|} \Rightarrow |GE| = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{|AG|}{|AE|} \Rightarrow |AG| = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Porovnáním obou vyjádření délek $|AG|$ a $|GE|$ docházíme k očekávaným vzorcům.



Obrázek 2.21

2.6 Příklady

■ **Příklad 2.6.1.** Geometricky dokažte rovnost[2]

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.$$

Řešení: Do čtvercové sítě o délce strany jedna jednotka nakreslíme trojúhelník ABC (obr. 2.23). Jelikož jsou trojúhelníky ADC a CFB shodné, je trojúhelník ABC rovnoramenný pravoúhlý, tedy $|\sphericalangle CAB|=\frac{\pi}{4}$. Další postup důkazu můžeme stručně zapsat takto:

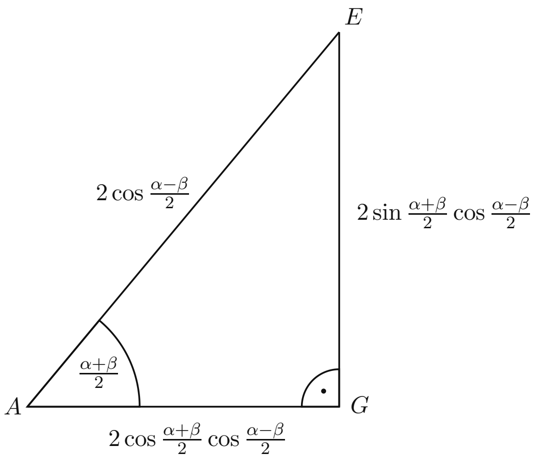
- $\Delta ADC : \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$,
- $\Delta ABE : \operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$,
- $\alpha+\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$,
- $\alpha+\beta=|\sphericalangle CAB|=\dfrac{\pi}{4}$.

■ **Příklad 2.6.2.** Geometricky dokažte rovnost

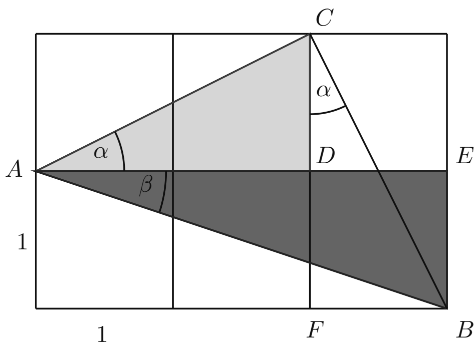
$$\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\pi.$$

Řešení: Do čtvercové sítě o délce strany jedna jednotka nakreslíme trojúhelník ABC, který následně rozdělíme na tři trojúhelníky ADE, EDC a CDB (obr. 2.24). Vnitřní úhly trojúhelníků u vrcholu

[2]Autorem příkladů a řešení 2.6.1 a 2.6.2 je podle [21] Edward M. Harris.



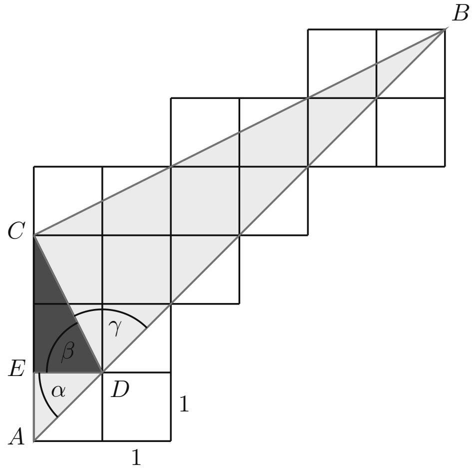
Obrázek 2.22



Obrázek 2.23

D označíme postupně α, β, γ, přičemž $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Z obrázku je zřejmé, že $|CB| = 3\cdot|CD|$. Další postup důkazu můžeme stručně zapsat takto:

- $\Delta ADE : \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 1$,
- $\Delta EDC : \operatorname{tg}\beta = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} 2$,
- $|CD| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, $|CB| = 3\cdot\sqrt{5}$, $|DB| = 5\cdot\sqrt{1^2+1^2} = 5\cdot\sqrt{2}$,
  $|CD|^2 + |CB|^2 = 5 + 45 = 50$, $|DB|^2 = 25\cdot 2 = 50 \Rightarrow \Delta CDB$ je pravoúhlý,
- $\Delta CDB : \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{|CB|}{|CD|} = \dfrac{3\cdot|CD|}{|CD|} \Rightarrow \gamma = \operatorname{arctg} 3$,
- $\alpha+\beta+\gamma = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.



Obrázek 2.24

■ **Příklad 2.6.3.** Bez užití goniometrických vzorců odvoďte hodnoty goniometrických funkcí pro úhly 15° a 75°.
Řešení: K odvození použijeme obrázek 2.10 z podkapitoly 2.4, který ještě doplníme o rovnoramenný trojúhelník CBQ s rameny CB a CQ o délce jedna jednotka, přičemž rameno CQ leží na polopřímce opačné k CP (viz obr. 2.25). Vnitřní úhly trojúhelníku CBQ jsou 15°, 15° a 150°. Délku výšky CP v rovnostranném trojúhelníku ABC jsme již vypočítali v podkapitole 2.4 – $|CP| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Zbývá určit délku strany BQ pomocí Pythagorovy věty:

$$|BQ| = \sqrt{|PB|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Hodnoty goniometrických funkcí pro úhly 15° a 75° určíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku PBQ:

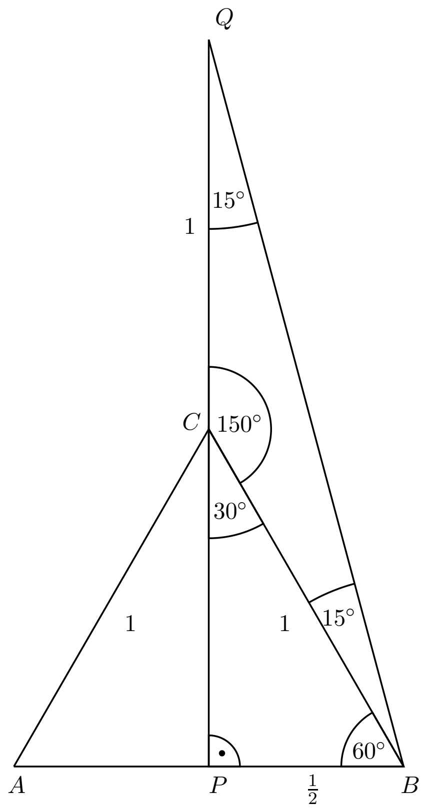
$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{|PB|}{|BQ|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{|PQ|}{|BQ|} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{cotg} 75^\circ = \frac{|PB|}{|PQ|} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} = 2 - \sqrt{3},$$

$$\operatorname{cotg} 15^\circ = \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{|PQ|}{|PB|} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3}.$$

■ **Příklad 2.6.4.** Jak je poznamenáno v [8, str. 126], v případě ostrých úhlů lze součtové vzorce pro sinus a kosinus odvodit třemi postupy. Vždy vycházíme z dvojice pravoúhlých trojúhelníků, které se navzájem stýkají podél jedné společné strany. Možné způsoby takového jejich spojení vidíme na obr. 2.26. Levou dvojici trojúhelníků jsme využili při odvozování v podkapitole 2.5 (obr. 2.17), pravou dvojici jsme v podstatě uplatnili při odvozování Ptolemaiovy věty v části 1.1.2 (obr. 1.5 v případě,

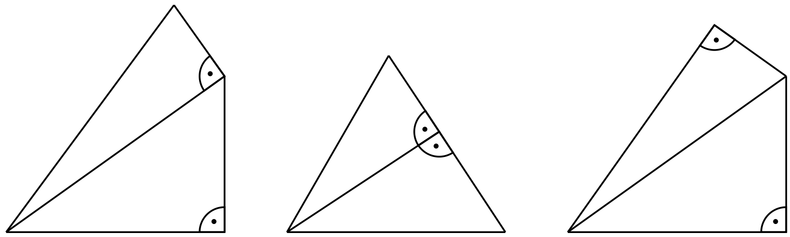


Obrázek 2.25

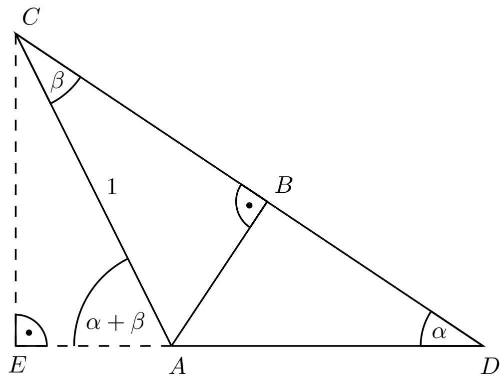
kdy AC je průměrem kružnice) a k získání součtových vzorců bychom ještě potřebovali sinovou větu, o které pojednáme teprve v kapitole 3. Nyní pomocí prostřední dvojice trojúhelníků z obr. 2.26 znovu dokažte, že platí součtový vzorec

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

jsou-li všechny tři úhly $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ ostré.
Řešení: Dva pravoúhlé trojúhelníky ABC a ABD se společnou odvěsnou AB a jedním vnitřním úhlem α, resp. β zvolíme podle obr. 2.27.



Obrázek 2.26



Obrázek 2.27

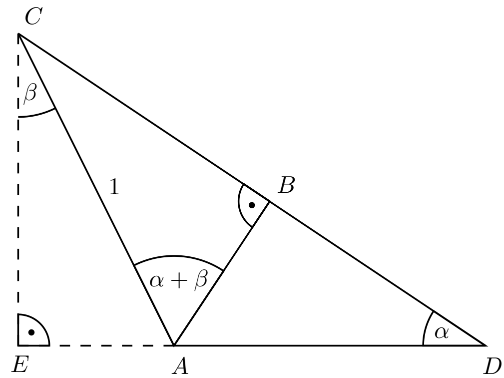
- $\Delta ACE : \sin(\alpha+\beta) = \dfrac{|CE|}{1} \Rightarrow |CE| = \sin(\alpha+\beta)$,
- $\Delta ABC : \sin\beta = \dfrac{|AB|}{1} \Rightarrow |AB| = \sin\beta$,
- $\Delta ABC : \cos\beta = \dfrac{|BC|}{1} \Rightarrow |BC| = \cos\beta$,
- $\Delta ABD : \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{|AB|}{|BD|} = \dfrac{\sin\beta}{|BD|} \Rightarrow |BD| = \dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}$,
- $\Delta CDE : \sin\alpha = \dfrac{|CE|}{|CD|} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta + \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}} \Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

■ **Příklad 2.6.5.** Pomocí dvou pravoúhlých trojúhelníků se společnou odvěsnou (obr. 2.26 uprostřed) znovu dokažte, že platí součtový vzorec

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

jsou-li všechny tři úhly $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ ostré.

Řešení: Opět zvolíme pravoúhlé trojúhelníky ABC a ABD se společnou odvěsnou AB, které



Obrázek 2.28

tentokrát mají po vnitřním úhlu α, resp. $\alpha+\beta$ (obr. 2.28).

- $\Delta ABC : \sin(\alpha+\beta) = \dfrac{|BC|}{1} \Rightarrow |BC| = \sin(\alpha+\beta)$,
- $\Delta ABC : \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{|AB|}{1} \Rightarrow |AB| = \cos(\alpha+\beta)$,
- $\Delta ACE : \sin\beta = \dfrac{|AE|}{1} \Rightarrow |AE| = \sin\beta$,
- $\Delta ACE : \cos\beta = \dfrac{|CE|}{1} \Rightarrow |CE| = \cos\beta$,
- $\Delta ABD : \sin\alpha = \dfrac{|AB|}{|AD|} = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{|AD|} \Rightarrow |AD| = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$,
- $\Delta CDE : \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{|CE|}{|DE|} = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}} \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.