Vojtěch Jarník

O lineárních nehomogenních diofantických aproximacích

Rozpravy II. Třídy Čes. akademie LI (1941), No. 29, 21 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500520

ROZPRAVY II. TŘÍDY ČESKÉ AKADEMIE.
ROČNÍK LI. ČÍSLO 29.

O lineárních nehomogenních diofantických aproximacích.

Napsal

Vojtěch Jarník, Praha.

Předloženo 22. listopadu 1941.

§ 1. Úvod.

Buďte dána celá kladná r, s a vedle toho rs reálných čísel θ_{ij} $(1 \leq i \leq r,$ $1 \leq j \leq s)$. Budeme vyšetřovati vztahy mezi přibližným řešením homogenní soustavy

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_{ij}\, b_{s+i} - b_j = 0 \; (j = 1, \ldots, s)$$

celými čísly $b_1, \ldots, b_{r+s}$[1]) a přibližným řešením nehomogenní soustavy

$$\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij}\, a_j + a_{i+s} + \alpha_i = 0 \; (i = 1, \ldots, r)$$

celými čísly $a_1, \ldots a_{r+s}$ [2]), při čemž $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ jsou libovolná reálná čísla. Všechna čísla v tomto článku — s výjimkou Dodatku — jsou reálná; písmena a, b, c, d (s libovolnými indexy) značí vždy celá čísla. Pro $t \geq 1$ zaveďme tyto funkce:

$$(1)\left\{\begin{aligned}
\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) &= \min_{\substack{0 < \max |a_j| \leq t \\ 1 \leq j \leq s}} \left(\max_{1 \leq i \leq r} |\theta_{i1} a_1 + \ldots + \theta_{is} a_s + a_{i+s} + \alpha_i|\right);\\
\psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) &= \min_{\substack{\max |a_j| \leq t \\ 1 \leq j \leq s}} \left(\max_{1 \leq i \leq r} |\theta_{i1} a_1 + \ldots + \theta_{is} a_s + a_{i+s} + \alpha_i|\right);\\
\psi_2(t; \beta_1, \ldots, \beta_s) &= \min_{\substack{0 < \max |b_{s+i}| \leq t \\ 1 \leq i \leq r}} \left(\max_{1 \leq j \leq s} |\theta_{1j} b_{s+1} + \ldots + \theta_{rj} b_{s+r} - b_j - \beta_j|\right)
\end{aligned}\right.$$

(nezavádím již funkci ψ_2', protože ji nebudu potřebovati). Pro zkrácení pišme

[1]) Ovšem s vyloučením triviálního řešení $b_1 = \ldots = b_{r+s} = 0$.

[2]) Zde ovšem nemusíme systém $a_1 = a_2 = \ldots = 0$ vylučovati.

$$\psi_1(t) = \psi_1(t; 0, \ldots, 0), \psi_2(t) = \psi_2(t; 0, \ldots, 0).$$

Poznámka 1. Funkce (1) jsou nezáporné nerostoucí funkce proměnné t. Dále je zřejmo, že se tyto funkce nezmění, změním-li čísla α_i nebo β_j o celá čísla (stačí, změníme-li vpravo příslušným způsobem čísla a_{i+s} nebo b_j); je proto lhostejno, vyšetřujeme-li na př. všechny systémy hodnot $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ nebo pouze ony systémy, pro něž je $0 \leqq \alpha_1 < 1, \ldots, 0 \leqq \alpha_r < 1$, což učiníme v důkazech vět 6, 8. Dále je $\psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.

Známa je tato

Věta 1. $\limsup_{t \to \infty} \psi_1(t) . t^{\frac{s}{r}} \leqq 1$ (*a tedy, následkem symetrie, též*

$$\limsup_{t \to \infty} \psi_2(t) . t^{\frac{r}{s}} \leqq 1).$$

Dále potřebujeme tuto větu:

Věta 2. *Je-li* $\liminf_{t \to \infty} \psi_2(t)\, t^{\frac{r}{s}} > 0$, *je též* $\liminf_{t \to \infty} \psi_1(t) t^{\frac{s}{r}} > 0$.

Cíl, který jsme si vytkli, lze vysloviti takto: máme srovnati řád funkce $\psi_2(t; 0, \ldots, 0)$ (při rostoucím t) s řádem funkce $\psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ (nebo též s řádem funkce $\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, chceme-li vyloučiti případ $a_1 = \ldots = a_s = 0$). V tomto směru jsou známy následující věty 3, 4, 5, kterým předešlu tyto poznámky: $\varphi(t)$, $\sigma(t)$ budou vždy značiti funkce spojité a rostoucí v intervalu $t \geqq 0$. Dále budiž $\varphi(0) = \sigma(0) = 0$ a nechť existuje číslo $\eta > 0$ tak, že funkce $\varphi(t) . t^{-\eta}$ je rostoucí v intervalu $t > 0$, $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) . t^{-\eta} = \infty$; tedy je

$$(2) \quad \varphi(\alpha t) > \alpha^\eta \varphi(t) \text{ pro } \alpha > 1,\ t > 0.$$

Znak $\varrho(t)$ bude vždy značiti funkci inversní k $\varphi(t)$, takže $\varrho(t)$ je rostoucí a spojitá v intervalu $t \geqq 0$, $\varrho(0) = 0$, $\lim_{t \to \infty} \varrho(t) = \infty$. Platí pak:

Věta 3. *Budiž* $\liminf_{t \to \infty} \varphi(t) \psi_2(t; 0, \ldots, 0) > 1$; *potom jest*[3])

$$(3) \quad \limsup_{t \to \infty} \varrho(t) . \sup_{0 \leqq \alpha_i < 1} \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq ((r+s)!\,(r+s))^{\frac{\eta+1}{\eta}}.$$

Tím spíše platí tedy pro každý[4]) *systém* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ *nerovnosti*

$$\limsup_{t \to \infty} \varrho(t)\, \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq \limsup_{t \to \infty} \varrho(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq$$
$$\leqq ((r+s)!\,(r+s))^{\frac{\eta+1}{\eta}}.$$

Z věty 3 plyne tato

Věta 3'. *Budiž*

$$(4) \quad \liminf_{t \to \infty} \varphi(t)\, \psi_2(t; 0, \ldots, 0) > 0;$$

potom je pro každý systém $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$

3) $\sup_{0 \leqq \alpha_i < 1} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ značí supremum čili horní hranici funkce $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ pro $0 \leqq \alpha_1 < 1, \ldots, 0 < \alpha_r < 1$.

4) Viz Poznámku 1.

(5) $\limsup\limits_{t\to\infty} \varrho(t)\psi'_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \leqq \limsup\limits_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) < \infty.$

Důkaz. Nechť platí (4), takže existuje číslo $A > 1$ tak, že $\liminf A\,\varphi(t)\,\psi_2(t;0,\ldots,0) > 1$. Podle (2) je $\varphi(A^{\frac{1}{\eta}}t) > A\,\varphi(t)$, takže můžeme užíti věty 3, v níž místo $\varphi(t)$ klademe $\varphi(A^{\frac{1}{\eta}}t)$; inversní funkce k této funkci je $A^{-\frac{1}{\eta}}\varrho(t)$, takže vskutku $\limsup A^{-\frac{1}{\eta}}\varrho(t)\,\psi_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \leqq ((r+s)!(r+s))^{\frac{\eta+1}{\eta}} < \infty$.

Věta 4. *Budiž*

(6) $\liminf\limits_{t\to\infty} \varphi(t)\,\psi_2(t;0,\ldots,0) < \infty;$

potom existuje systém $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ *takový, že*

(7) $\limsup\limits_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \geqq \limsup\limits_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1'(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) > 0.$

Věta 5. *Platí-li* (6), *platí nerovnosti* (7) *dokonce pro skoro všechny systémy* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$[5]).

Věta 4, jež ukazuje, jak ostrá je věta 3', je ovšem důsledkem věty 5. Věty 3, 5 jsou známy[6]), takže se jimi nebudeme dále zabývati. Budeme však vyšetřovati obdobný problém, v němž lim sup, lim inf jsou vyměněny. Dokážeme předně tyto věty:

Věta 6. *Budiž*

(8) $\qquad A > 0,\ \limsup\limits_{t\to\infty} \varphi(t)\,\psi_2(t;0,\ldots,0) > A;$

potom je

$$\liminf_{t\to\infty} \varrho(t).\ \sup_{0\leqq\alpha_i<1} \psi_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \leqq \Delta,$$

kde (9) $\qquad \Delta = \dfrac{3}{2}(r+s)!\,(r+s).\ \mathrm{Max}\left(1,\left(\dfrac{(r+s)!\,(r+s)}{2A}\right)^{\frac{1}{\eta}}\right).$

Tedy je tím spíše

$$\liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1'(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \leqq \liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) \leqq \Delta$$

pro každý systém reálných čísel $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$.

Odtud plyne zřejmě

Věta 6'. *Je-li* $\limsup\limits_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_2(t;0,\ldots,0) > 0,$

je pro každý systém $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$

$$\liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1'(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) < \liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r) < \infty.$$

---

[5]) „pro skoro všechny systémy $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$" znamená: pro všechny systémy $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, s výjimkou nějakých systémů $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$, jež v r-rozměrném prostoru bodů $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ tvoří bodovou množinu, jejíž Lebesgueova míra je rovna nule.

[6]) Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 68 (1939), str. 103—111.

Věta 7. *Budiž* $\limsup_{t\to\infty} \varphi(t)\,\psi_2(t; 0, \ldots, 0) < \infty$;

potom existuje systém $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ *tak, že*

$$\liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > \liminf_{t\to\infty} \varrho(t)\,\psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > 0.$$

Je patrno, že věty 6, 6′, 7 jsou zcela analogické větám 3, 3′, 4. Hledáme-li však větu, odpovídající větě 5, dostaneme tyto dvě věty, jež mají zcela jiný charakter než věta 5:

Věta 8. *Budiž řada*

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{\sigma^r(x)} \tag{10}$$

konvergentní. Potom je pro skoro všechny systémy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$

$$\liminf_{t\to\infty} \sigma(t)\,\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \liminf_{t\to\infty} \sigma(t)\,\psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \infty\text{[7]}. \tag{11}$$

Věta 9. *Budiž* $\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma(t)}{t^{\frac{r}{s}}} = \infty$; *budiž* $\liminf_{t\to\infty} t^{\frac{r}{s}}\,\psi_2(t; 0, \ldots, 0) > 0$

(*podle věty 1 je tedy*

$$0 < \liminf_{t\to\infty} t^{\frac{r}{s}}\,\psi_2(t) < \limsup_{t\to\infty} t^{\frac{r}{s}}\,\psi_2(t) \leqq 1).$$

Potom platí:

1. Je-li řada (10) konvergentní, platí pro skoro všechny systémy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ *rovnice (11).*

2. Je-li řada (10) divergentní, platí pro skoro všechny systémy $(\alpha_1, \ldots \alpha_r)$ *rovnice*

$$\liminf_{t\to\infty} \sigma(t)\,\psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \liminf_{t\to\infty} \sigma(t)\,\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0. \tag{12}$$

Poznámka 2. Krátké důkazy vět 2 a 6, provedené v § 2, neposkytují metodicky celkem nic nového[8]); musil jsem je však provésti, ježto se v literatuře nevyskytují. Velmi speciální případ věty 7 byl dokázán v Acta arithmetica 2 (1937), str. 161—172. Tamtéž byl nadhozen, ale nikoliv rozřešen, problém, vyřešený zde větou 9.

Poznámka 3. Věty 3 až 9 mají limitní charakter; z toho je viděti, že tyto věty platí i tehdy, splňují-li funkce φ, σ podmínky jim před vyslovením věty 3 uložené pouze pro dostatečně velká t (a ne pro všechna $t \geqq 0$).

Poznámka 4. Podstatný rozdíl, který je mezi větou 5 a větou 9, vysvitne z tohoto příkladu. Budiž $a = 1$ a pišme zkráceně θ_i místo θ_{i1}, takže

$$\psi_2(t) = \min_{\substack{0 < \max |c_i| \leq t \\ 1 \leq i < r}} |\theta_1 c_1 + \ldots + \theta_r c_r - c_0|,\ \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) =$$

---

7) Zde ovšem lze psáti lim místo lim inf.

8) Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 68 (1939), str. 93 až 102 a 103—111.

$$= \min_{|d| \leq t} (\max_{1 \leq i \leq r} |\theta_i d + d_i + \alpha_i|).$$

Zvolme specielně $\theta_1, \ldots, \theta_r$ tak, že čísla $1, \theta_1, \ldots, \theta_r$ jsou lineárně nezávislá čísla[9]) reálného algebraického tělesa stupně $r + 1$. Potom jest, jak známo[10])

(13) $$0 < \liminf_{t \to \infty} t^r \psi_1(t) < \limsup_{t \to \infty} t^r \psi_1(t) < 1.$$

Ve větách 3′, 4, 6′, 7 položme $\varphi(t) = t^r$ a dostaneme: pro všechny systémy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ je $\liminf_{t \to \infty} t^{\frac{1}{r}} \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \infty$, ba dokonce $\limsup t^{\frac{1}{r}} \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \infty$; existují však systémy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ takové, že platí $\limsup t^{\frac{1}{r}} \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > 0$, ba dokonce

$\liminf t^{\frac{1}{r}} \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > 0$. Až potud jsou výsledky stejné pro lim inf jako pro lim sup.

Pro *skoro všechny* systémy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ je však podle věty 9 a pro každé $\delta > 0$: $\liminf t^{\frac{1}{r}} (\log t)^{\frac{1}{r} + \delta} \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \infty$, ale $\liminf t^{\frac{1}{r}} (\log t)^{\frac{1}{r}} \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$, tedy též $\liminf t^{\frac{1}{r}} \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$, kdežto z vět 3′, 5 plyne pro skoro všechny systémy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$

$0 < \limsup t^{\frac{1}{r}} \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \infty$. Odtud je jasně viděti rozdíl mezi charakterem věty 5 a věty 9.

§ 2. Důkaz vět 1, 2, 6.[11])

V tomto paragrafu budeme pracovati v q - rozměrném euklidovském prostoru, jehož body $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q)$ jsou dány pravoúhlými souřadnicemi $x_1, \ldots, x_q$. Body o celočíselných souřadnicích nazýváme mřížovými body. Znak $\mathbf{o}$ bude značiti vždy počátek: $\mathbf{o} = (0, \ldots, 0)$. Jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_q)$ dva body, u, v dvě čísla, značí $u\mathbf{x} + v\mathbf{y}$ bod $(ux_1 + vy_1, \ldots, ux_q + vy_q)$ a pod. Říkáme, že bod $\mathbf{x}$ je nezávislý na bodech $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(v)}$, neexistují-li čísla $t_1, \ldots, t_v$ tak, aby bylo $\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + t_v\mathbf{x}^{(v)}$. Budiž dána funkce $f(\mathbf{x})$ bodu $\mathbf{x}$, jež má tyto vlastnosti: je-li t libovolné číslo a jsou-li $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ dva libovolné body, je

---

[9]) To značí, že neplatí žádná rovnice $c_1\theta_1 + \ldots + c_r\theta_r = c_0$, v níž $\max(|c_1|, \ldots, |c_r|) > 0$.

[10]) Pro pohodlí čtenáře podávám krátký důkaz nerovnosti (13) v Dodatku (věta 10.).

[11]) Známé výsledky, uvedené v tomto paragrafu před důkazem věty 1, jsou vyloženy podrobněji na př. v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky 68 (1939), str. 103—105; důležité nerovnosti (I) byly po prvé dokázány tamtéž, str. 93—102.

(14) $f(\mathbf{x}) > 0$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$; $f(t\mathbf{x}) = |t| f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leqq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

Je-li σ libovolné kladné číslo, potom množina všech bodů $\mathbf{x}$, splňujících nerovnost $f(\mathbf{x}) \leqq \sigma$, je v důsledku vlastností (14) konvexní těleso, souměrné vzhledem k počátku. Budiž J objem tělesa $f(\mathbf{x}) \leqq 1$.

Zaveďme nyní q bodů $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(q)}$ takto: budiž $\mathbf{x}^{(1)}$ onen mřížový bod různý od počátku, pro nějž má $f(\mathbf{x})$ nejmenší hodnotu[12]). Jsou-li mřížové body $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(v)}$ $(1 < v < q)$ již určeny, budiž $\mathbf{x}^{(v+1)}$ onen z mřížových bodů, nezávislých na bodech $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(v)}$, pro nějž má $f(\mathbf{x})$ nejmenší hodnotu[12]). Položíme-li $f(\mathbf{x}^{(v)}) = \sigma_v$, je

$$(15) \qquad 0 < \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \ldots \leqq \sigma_q$$

a čísla σ_v, t. zv. *postupná minima funkce* f, jsou funkcí f jednoznačně určena (body $\mathbf{x}^{(v)}$ však nejsou jednoznačně určeny, viz poznámku [12])). Platí pak důležité nerovnosti

$$(16) \qquad \frac{2^q}{q!J} \leqq \sigma_1 \ldots \sigma_q \leqq \frac{2^q}{J}.$$

Buďte dále

$$X_h = \sum_{k=1}^{q} A_{hk} x_k, \quad Y_h = \sum_{k=1}^{q} A'_{hk} y_k \quad (h = 1, \ldots, q)$$

dvě substituce takové, že je identicky

$$X_1 Y_1 + \ldots + X_q Y_q = x_1 y_1 + \ldots + x_q y_q.$$

Položíme-li

$$(17) \qquad F(\mathbf{x}) = \max_{1 \leqq h \leqq q} \Big| \sum_{k=1}^{q} A_{hk} x_k \Big|, \quad G(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^{q} \Big| \sum_{k=1}^{q} A'_{kh} x_k \Big|$$

(při čemž $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q)$), splňuje funkce F i funkce G podmínky (14) (píšeme-li v nich F nebo G místo f). Buďte $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ postupná minima funkce F; buďte $\tau_1, \ldots, \tau_q$ postupná minima funkce G.

Potom platí toto:

(I) $$1 \leqq \sigma_h \tau_{q-h+1} \leqq q! \text{ pro } 1 \leqq h \leqq q.$$

(II) Ke každému bodu $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_q)$ existuje mřížový bod $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_q)$ tak, že

$$(18) \qquad F(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = \max_{1 \leqq h \leqq q} \Big| \sum_{k=1}^{q} A_{hk} (x_k + v_k) \Big| \leqq \frac{q!\,q}{2\tau_1}.$$

Až do konce tohoto paragrafu budiž $q = r + s$ a pro $z > 0$ položme

$$(19) \qquad F(\mathbf{x}) = F_z(\mathbf{x}) = \max \Big(|\theta_{11} x_1 + \ldots + \theta_{1s} x_s + x_{s+1}| z^s, \ldots,$$
$$|\theta_{r1} x_1 + \ldots + \theta_{rs} x_s + x_{s+r}| z^s, \left| \frac{-x_1}{z^r} \right|, \ldots, \left| \frac{-x_s}{z^r} \right| \Big),$$

---

[12]) Ježto $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ (viz (14)), jsou takové body aspoň dva a může jich býti více; jeden z nich si vybereme.

$$(20) \qquad G(\mathbf{x}) = G_s(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} \left| \frac{x_{s+i}}{z^s} \right| + \sum_{j=1}^{s} z^r \left| \theta_{1j} x_{s+1} + \ldots + \theta_{rj} x_{s+r} - x_j \right|.$$

Potom jsou F, G ve vztahu svrchu zmíněném. Těleso $F(\mathbf{x}) \leqq 1$, vznikající z krychle $|x_v| \leqq 1$ $(1 \leqq v \leqq q)$ lineární substitucí o determinantu 1, má objem 2^q; těleso $G(\mathbf{x}) \leqq 1$, vznikající z „oktaedru“ $|x_1| + \ldots + |x_q| \leqq 1$ lineární substitucí o determinantu 1, má objem $\frac{1}{q!} 2^q$. Podle (16) je tedy

$$(21) \qquad \frac{1}{q!} \leqq \sigma_1 \ldots \sigma_q \leqq 1, \; 1 \leqq \tau_1 \ldots \tau_q \leqq q!$$

Tělesa $F(\mathbf{x}) \leqq 1$, $G(\mathbf{x}) \leqq 1$ a tedy i čísla $\sigma_1, \ldots, \sigma_q, \tau_1, \ldots, \tau_q$ závisejí ovšem na z; budeme proto někdy psáti $\sigma_1(z)$ místo σ_1 atd. Z (20) je patrno, že $\tau_1(z)$ je spojitou funkcí proměnné z.

Důkaz věty 1. Podle (15), (21) je $\sigma_1^q \leqq \sigma_1 \ldots \sigma_q \leqq 1$, tedy $\sigma_1 \leqq 1$. Budiž $t > 1$ a položme $z = t^{\frac{1}{r}} > 1$. Podle definice čísla σ_1 existuje tedy mřížový bod $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{r+s}) \neq \mathbf{o}$ tak, že $F(\mathbf{a}) \leqq 1$, t. j. (viz (19))

$$(22) \qquad \max_{1 \leqq j \leqq s} |a_j| \leqq z^r = t, \; \max_{1 \leqq i \leqq r} |\theta_{i1} a_1 + \ldots + \theta_{is} a_s + a_{s+i}| \leqq z^{-s} = t^{-\frac{s}{r}} < 1.$$

Kdyby bylo $a_1 = \ldots = a_s = 0$, bylo by podle (22) též $a_{s+1} = \ldots = a_{s+r} = 0$, t. j. $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. Tedy je $\max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |a_j| > 0$ a z (22), (1) plyne $\psi_1(t) \leqq t^{-\frac{s}{r}}$ pro každé $t > 1$, čímž věta 1 dokázána.

Důkaz věty 2. Budiž splněn předpoklad věty 2, takže existuje číslo A $(0 < A < 1)$ tak, že $\psi_2(t) > A t^{-\frac{r}{s}}$ pro všechna $t > 1$, tedy $\psi_2(z^s) > A z^{-r}$ pro všechna $z > 1$. Podle definice (1) potom platí: je-li $z > 1$ a je-li $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_{r+s})$ libovolný mřížový bod různý od počátku, je buďto $\max\limits_{1 \leqq i \leqq r} |b_{s+i}| > z^s$ nebo $\max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |\theta_{1j} b_{s+1} + \ldots + \theta_{rj} b_{s+r} - b_j| > A z^{-r}$ nebo konečně $b_{s+1} = b_{s+2} = \ldots = b_{s+r} = 0$ a potom jistě (ježto $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$) $\max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |\theta_{1j} b_{s+1} + \ldots + \theta_{rj} b_{s+r} - b_j| = \max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |b_j| \geqq 1 > A z^{-r}$; tedy (viz (20)) $G(\mathbf{b}) \geqq A$, tedy $\tau_1 \geqq A$. Podle (21) je tedy $\tau_1^{q-1} \tau_q \leqq \tau_1 \ldots \tau_q \leqq q!$, $\tau_q \leqq q!\, A^{-q+1}$ a tedy podle (I)

$$(23) \qquad \sigma_1 \geqq \tau_q^{-1} \geqq B \text{ pro } z > 1, \text{ kde } B = (q!)^{-1} A^{q-1}.$$

Budiž $t > 1$ a definujme $z > 0$ rovnicí $t = \frac{1}{2} B z^r$, takže $z^r > 2 B^{-1} > 1$ a tedy platí (23); pro každý mřížový bod $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{r+s}) \neq \mathbf{o}$ je tedy $F(\mathbf{a}) \geqq \sigma_1 \geqq B$. Je-li tedy $0 < \max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |a_j| \leqq t$, je $\left| \frac{a_j}{z^r} \right| \leqq \frac{1}{2} B$ $(1 \leqq j \leqq s)$ a tedy podle (19) $\max\limits_{1 \leqq i \leqq r} |\theta_{i1} a_1 + \ldots + \theta_{is} a_s + a_{i+s}| \geqq B z^{-s} = B \left(\frac{1}{2} B\right)^{\frac{s}{r}} t^{-\frac{s}{r}}$; tedy $t^{\frac{s}{r}} \psi_1(t) \geqq B \left(\frac{1}{2} B\right)^{\frac{s}{r}}$ pro $t > 1$, čímž věta 2 dokázána.

Důkaz věty 6. Nechť platí (8), takže existuje posloupnost $t_1, t_2, \ldots$ tak, že

(24) $$\lim_{v \to \infty} t_v = \infty, \ \varphi(t_v)\ \psi_2(t_v) > A \ (v = 1, 2, \ldots).$$

Budiž $z > 0$, $z^{qr} > q!$ Podle (21) je $\tau_1 \leqq (\tau_1 \ldots \tau_q)^{\frac{1}{q}} \leqq (q!)^{\frac{1}{q}} < z^r$. Dále existuje mřížový bod $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_{r+s}) \neq \mathfrak{o}$ tak, že $G(\mathfrak{b}) = \tau_1$, tedy

(25) $$\max_{1 \leqq i \leqq r} |b_{s+i}| \leqq \tau_1 z^s, \ \max_{1 \leqq j \leqq s} |\vartheta_{1j} b_{s+1} + \ldots + \vartheta_{rj} b_{s+r} - b_j| \leqq \frac{\tau_1}{z^r} < 1.$$

Z poslední nerovnosti plyne

(26) $$\max_{1 \leqq i \leqq r} |b_{s+i}| > 0;$$

kdyby totiž bylo $b_{s+1} = \ldots = b_{s+r} = 0$, bylo by podle (25) též

$b_1 = \ldots = b_s = 0$, tedy $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$. Z (25), (26) plyne tedy $\tau_1 z^s \geqq 1$,

(27) $$\psi_2(\tau_1 z^s) \leqq \frac{\tau_1}{z^r} \leqq (q!)^{\frac{1}{q}} z^{-r}.$$

Ježto τ_1 závisí na z, pišme pro větší zřetelnost $\tau_1(z)$ místo τ_1. Ježto podle (24) je $\psi_2(t_v) > 0$, $t_v \to \infty$ pro $v \to \infty$, a ježto $\psi_2(t)$ je nerostoucí, je $\psi_2(t) > 0$ pro každé $t \geqq 1$. Podle (27) je $\psi_2(\tau_1(z) . z^s) \to 0$ pro $z \to \infty$, takže je nutně $\tau_1(z) . z^s \to \infty$ pro $z \to \infty$. Ježto je $\tau_1(z)$ spojitou funkcí z, nabývá $\tau_1(z) . z^s$ pro $z \to \infty$ všech dostatečně velkých hodnot, takže lze zvoliti celé $k_0 > 0$ tak, že ke každému celému $k \geqq k_0$ existuje číslo $z_k > (q!)^{\frac{1}{qr}}$, vyhovující podmínce

(28) $$\tau_1(z_k) . z_k^s = t_k;$$

při tom $\lim_{k \to \infty} z_k = \infty$. Podle (24), (27), (28) je potom

(29) $$\frac{1}{\varphi(t_k)} < \frac{1}{A} \psi_2(t_k) = \frac{1}{A} \psi_2(\tau_1(z_k) z_k^s) < \frac{1}{A} \frac{\tau_1(z_k)}{z_k^r} \ (k \geqq k_0).$$

Buďte nyní $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ libovolná čísla, $0 \leqq \alpha_i < 1$ $(1 \leqq i \leqq r)$. Podle (II), kde klademe $v_1 = \ldots = v_s = 0$, $v_{s+1} = \alpha_1, \ldots, v_{s+r} = \alpha_r$, existují celá čísla $a_1, \ldots, a_{r+s}$ tak, že

(30) $$F_{z_k}(a_1, \ldots, a_s, a_{s+1} + \alpha_1, \ldots, a_{s+r} + \alpha_r) \leqq \frac{q!q}{2\tau_1(z_k)},$$

t. j. (viz (19), (28), (29))

$$\max_{1 \leqq j \leqq s} |a_j| \leqq \frac{q!q}{2\tau_1(z_k)} z_k^r < \frac{q!q}{2A} \varphi(t_k),$$

$$\max_{1 \leqq i \leqq r} |\vartheta_{i1} a_1 + \ldots + \vartheta_{is} a_s + a_{s+i} + \alpha_i| \leqq \frac{q!q}{2\tau_1(z_k) z_k^s} = \frac{q!q}{2t_k}.$$

Položme

$$B = \max\left(1, \left(\frac{q!q}{2A}\right)^{\frac{1}{\eta}}\right), \ T_k = \varphi(B t_k), \text{ takže } B \geqq 1,$$

$$t_k = \frac{1}{B} \varrho(T_k), \ T_k \geqq B^\eta \varphi(t_k) \geqq \frac{q!q}{2A} \varphi(t_k)$$

(viz (2)); potom máme $T_k \to \infty$ pro $k \to \infty$ a dále

(31) $$\max_{1 \le j \le s} |a_j| < T_k, \quad \max_{1 \le i \le r} |\theta_{i1} a_1 + \ldots + \theta_{is} a_s + a_{s+i} + \alpha_i| < \frac{q!\,q\,B}{2\,\varrho\,(T_k)}.$$

Tím je dokázána nerovnost (viz (9))

$$\varrho\,(T_k)\,\psi_1'\,(T_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq \frac{1}{3}\,\Delta.$$

Abychom zvládli též funkci $\psi_1\,(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, položme $\frac{q!\,q\,B}{2\,\varrho\,(T_k)} = M_k$ a zvolme $k_1 > k_0$ tak velké, že $M_k < \frac{1}{4}$ pro $k \geqq k_1$; budiž v dalším $k \geqq k_1$. Je-li

(32) $$2\,M_k \leqq \alpha_i < 1 - 2\,M_k$$

aspoň pro jednu hodnotu i ($1 \leqq i \leqq r$), plyne z (31) zřejmě $\max_{1 \le j \le s} |a_j| > 0$; neplatí-li však (32) pro žádnou hodnotu i, položme $\gamma_i = \alpha_i$ pro $2 \leqq i \leqq r$, $\gamma_1 = 2\,M_k$ pro $0 \leqq \alpha_1 < 2\,M_k$, $\gamma_1 = 1 - 2\,M_k$ pro $1 - 2\,M_k < \alpha_1 < 1$. Potom existují podle (31) celá čísla $c_1, \ldots, c_{r+s}$ tak, že

(33) $$\max_{1 \le j \le s} |c_j| < T_k, \quad \max_{1 \le i \le r} |\theta_{i1} c_1 + \ldots + \theta_{is} c_s + c_{s+i} + \gamma_i| \leqq M_k.$$

Ježto $2\,M_k \leqq \gamma_1 \leqq 1 - 2\,M_k$, je $\max_{1 \le j \le s} |c_j| > 0$; ježto $|\gamma_i - \alpha_i| < 2\,M_k$ pro $1 \leqq i \leqq r$, je podle (33)

$$\max_{1 \le i \le r} |\theta_{i1} c_1 + \ldots + \theta_{is} c_s + c_{s+i} + \alpha_i| \leqq 3\,M_k.$$

V obou případech (ať (32) platí pro některé i nebo ne) dostáváme tedy (viz (1), (9))

$$\psi_1\,(T_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \leqq 3\,M_k = \frac{\Delta}{\varrho\,(T_k)}$$

pro $k \geqq k_1$, čímž věta 6 dokázána.

§ 3. Důkaz věty 7.

Rozeznávejme dva případy: I. buďto existuje číslo $t \geqq 1$ tak, že $\psi_2\,(t) = 0$; II nebo je $\psi_2\,(t) > 0$ pro všechna $t \geqq 1$. V prvním případě existují celá čísla $B_1, \ldots, B_{r+s}$ tak, že

(34) $$B = \max_{1 \le i \le r} |B_{s+i}| > 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \theta_{ij} B_{s+i} - B_j = 0 \;(j = 1, \ldots, s).$$

Zvolme čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tak, že

(35) $$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_{s+i} = \frac{1}{2}.$$

Kdyby pro některý systém celých čísel $a_1, \ldots, a_{r+s}$ bylo

(36) $$\left|\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} a_j + a_{i+s} + \alpha_i\right| < \frac{1}{2r\,B} \text{ pro } i = 1, \ldots, r,$$

bylo by

$$\left|\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\theta_{ij}\,a_j\,B_{s+i}+\sum_{i=1}^{r}B_{s+i}\,a_{s+i}+\sum_{i=1}^{r}B_{s+i}\,\alpha_i\right|<\frac{1}{2}$$

a tedy podle (34), (35)

$$\left|\sum_{j=1}^{s}B_j\,a_j+\sum_{i=1}^{r}B_{s+i}\,a_{s+i}+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2},$$

což je nemožno, neboť levá strana má tvar „celé číslo plus $\frac{1}{2}$". Tedy neplatí (36) a tedy je $\psi_1'(t;\alpha_1\ldots,\alpha_r)\geqq\frac{1}{2r\,B}$ pro každé $t\geqq 1$ a tedy

$\liminf\limits_{t\to\infty}\varrho(t)\,\psi_1'(t;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)=\infty$, čímž věta 7. v tomto případě dokázána.

Předpokládejme tedy až do konce tohoto paragrafu, že nastává druhý případ, t. j. $\psi_2(t)>0$ pro každé $t>1$. Podle věty 1 je $\lim\limits_{t\to\infty}\psi_2(t)=0$. Dále je z definice (1) patrno: je-li n libovolné přirozené číslo, je funkce $\psi_2(t)$ konstantní v intervalu $n\leqq t<n+1$. Zřejmě tedy existuje posloupnost přirozených čísel $t_1<t_2<t_3<\ldots$ tak, že $\psi_2(t)$ je konstantní v každém intervalu $t_k\leqq t<t_{k+1}$, ale $\psi_2(t_{k+1})<\psi_2(t_k)$ $(k=1,2,\ldots)$. Existují pak ke každému $k>1$ celá čísla $b_{1,k},\ldots,b_{r+s,k}$ tak, že

$$(37)\quad 0<\max_{1\leqq i\leqq r}|b_{s+i,k}|<t_k,\ \max_{1\leqq j\leqq s}\left|\sum_{i=1}^{r}\theta_{ij}\,b_{s+i,k}-b_{j,k}\right|=\psi_2(t_k).$$

Při tom je dokonce

$$(38)\qquad \max_{1\leqq i\leqq r}|b_{s+i,k}|=t_k\ \text{ pro } k=2,3,\ldots;$$

kdyby totiž bylo $\max\limits_{1\leqq i\leqq r}|b_{s+i,k}|=\beta<t_k$, bylo by podle (37) $\psi_2(\beta)\leqq\psi_2(t_k)$, což není možno podle definice čísla t_k. Podle předpokladu věty 7 existuje číslo A a celé číslo $\varkappa>0$ tak,že pro $t\geqq t_\varkappa$ je $\varphi(t)\,\psi_2(t)<A$; ježto $\psi_2(t)$ je konstantní pro $t_k\leqq t<t_{k+1}$, je speciálně $\varphi(t)\,\psi_2(t)=\varphi(t)\,\psi_2(t_k)<A$ pro $t_k\leqq t<t_{k+1}$, $k\geqq\varkappa$; ježto je $\varphi(t)$ spojitá funkce, plyne odtud

$$(39)\qquad \varphi(t_{k+1})\,\psi_2(t_k)\leqq A\qquad\text{pro } k\geqq\varkappa.$$

Dokážeme nyní:

1. pomocná věta. *Existuje posloupnost přirozených čísel*

$$1<k_1<k_2<k_3<\ldots\ \textit{tak, že}$$

$$t_{k_{\nu+1}}>(2r+1)\,t_{k_\nu}\quad,\ \psi_2(t_{k_\nu})<\frac{A}{\varphi\left(\frac{1}{(2r+1)^2}\,t_{k_\nu+1}\right)}$$

Při důkazu rozeznávejme tyto dva případy:

I. Od jistého k počínaje je stále $t_{k+1}\leqq(2r+1)t_k$. Potom lze zřejmě vybrati posloupnost $k_1<k_2<k_3<\ldots$ $(k_1>\varkappa)$ tak, že $(2r+1)\,t_{k_\nu}<t_{k_{\nu+1}}\leqq(2r+1)^2\,t_{k_\nu}$; potom je podle (39), ježto φ je rostoucí funkce:

$$\psi_2(t_{k_v}) \leqq \frac{A}{\varphi(t_{k_v+1})} < \frac{A}{\varphi(t_{k_v})} \leqq \frac{A}{\varphi\left(\frac{1}{(2r+1)^2}\, t_{k_v+1}\right)}.$$

Tím je pomocná věta v tomto případě dokázána.

II. Nenastává případ I, takže existuje nekonečně mnoho indexů $k > \varkappa$, pro něž je $t_{k+1} > (2r+1)\, t_k$; označme tyto indexy po řadě

$$z_1 < z_2 < z_3 < \ldots,\ \text{takže}$$

(40) $$t_{z_v+1} > (2r+1)\, t_{z_v}\ (v = 1, 2, \ldots),\ z_1 > \varkappa$$

(41) $$t_{i+1} \leqq (2r+1)\, t_i \ \text{pro}\ z_v + 1 \leqq i < z_{v+1} \quad (v = 1, 2, \ldots).$$ [13])

Definuji nyní: množina $\mathfrak{M}_1$ nechť se skládá z jediného čísla t_{z_1}; množina $\mathfrak{M}_v$ $(v = 2, 3, \ldots)$ nechť se skládá z čísel

(42) $$t_{z_{v-1}+1},\ t_{z_{v-1}+2},\ \ldots,\ t_{z_v}.$$

Z každé z těchto množin $\mathfrak{M}_v$ $(v = 1, 2, \ldots)$ vybereme nyní jistou část $\mathfrak{A}_v$ podle tohoto předpisu: skládá-li se $\mathfrak{M}_v$ z jediného čísla t_{z_v}, budiž $\mathfrak{A}_v = \mathfrak{M}_v$ (tedy speciálně $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{M}_1$). Skládá-li se $\mathfrak{M}_v$ z více čísel (42), lze podle (41) zvoliti mezi čísly (42) čísla

(43) $$t_{w_1} > t_{w_2} > \ldots > t_{w_c} \qquad (c > 1)$$

tak, že

(44) $$t_{w_1} = t_{z_v};\ \frac{1}{2r+1}\, t_{w_i} > t_{w_{i+1}} \geqq \frac{1}{(2r+1)^2}\, t_{w_i}\ (1 \leqq i < c);\ t_{w_c} \leqq (2r+1)\, t_{z_{v-1}+1}$$

Prvky množiny $\mathfrak{A}_v$ buďte pak právě čísla $t_{w_1}, \ldots, t_{w_c}$. Čísla množiny $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3 + \ldots$, srovnaná podle velikosti, označme

$$t_{k_1} < t_{k_2} < t_{k_3} < \ldots.$$

Tvrdím, že tato čísla mají žádané vlastnosti. Patří-li totiž t_{k_n}, $t_{k_{n+1}}$ do téže množiny $\mathfrak{A}_v$, je podle (44) (všimněte si, že čísla (43) byla srovnána sestupně) $(2r+1)\, t_{k_n} < t_{k_{n+1}} \leqq (2r+1)^2\, t_{k_n}$ a tedy podle (39)

$$\psi_2(t_{k_n}) \leqq \frac{A}{\varphi(t_{k_n+1})} < \frac{A}{\varphi(t_{k_n})} \leqq \frac{A}{\varphi\left(\frac{1}{(2r+1)^2}\, t_{k_n+1}\right)}$$

Patří-li však t_{k_n} do $\mathfrak{A}_v$ a $t_{k_{n+1}}$ nepatří do $\mathfrak{A}_v$, patří $t_{k_{n+1}}$ do $\mathfrak{A}_{v+1}$ a jest podle

(44) $$t_{k_n} = t_{z_v},\ t_{z_v+1} \leqq t_{k_n+1} \leqq (2r+1)\, t_{z_v+1},$$ [14])

a tedy podle (40)

$$t_{k_{n+1}} \geqq t_{z_v+1} > (2r+1)\, t_{z_v} = (2r+1)\, t_{k_n}\ ;$$

---

[13]) tato podmínka neříká ovšem nic pro $z_{v+1} = z_v + 1$.

[14]) Uvědomte si, že (44) platí i v tom případě, že $\mathfrak{M}_v = \mathfrak{A}_v$ se skládá z jediného čísla t_{z_v}; potom je ovšem $c = 1$, $z_{v-1} + 1 = z_v$.

$$\psi_2(t_{k_n}) = \psi_2(t_{z_v}) \leqq \frac{A}{\varphi(t_{z_v+1})} \leqq \frac{A}{\varphi\left(\frac{1}{2r+1}\, t_{k_n+1}\right)} < \frac{A}{\varphi\left(\frac{1}{(2r+1)^2}\, t_{k_n+1}\right)}.$$

Tím je pomocná věta úplně dokázána.

Píšeme-li stručněji $T_n = t_{k_n}$, $B_{v,n} = b_{v,k_n}$ $(v = 1, \ldots, r+s)$, můžeme obsah této pomocné věty a vzorců (37), (38) vysloviti takto:

Obdrželi jsme rostoucí posloupnost přirozených čísel $T_1, T_2, \ldots$ tak, že

$$(45)\qquad T_{n+1} > (2r+1)\,T_n,\ \psi_2(T_n) \leqq \frac{A}{\varphi\left(\frac{1}{(2r+1)^2}\,T_{n+1}\right)}$$

Ke každému celému $n > 0$ existuje pak $r+s$ celých čísel $B_{1,n}, \ldots, B_{r+s,n}$ tak, že

$$(46)\qquad \max_{1\leq i\leq r} |B_{s+i,n}| = T_n,\ \max_{1\leq j\leq s}\left(\left\|\sum_{i=1}^{r}\theta_{ij}B_{s+i,n} - B_{j,n}\right\|\right) = \psi_2(T_n).$$

* * *

Budeme nyní, v tomto i v následujícím paragrafu, vyšetřovati r-rozměrný prostor bodů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Slovem „krychle" budeme vždy rozuměti krychli, jejíž hrany jsou rovnoběžny s osami souřadnými. Zvolme číslo f_1 a potom f_2 tak malé, že je

$$(47)\qquad 0 < f_1 < \frac{1}{(2r+1)^2},\ s\,A\,f_1^{\eta}\,(2r+1)^{2\eta} < \frac{1}{8r+4},\ 0 < \frac{rf_2}{f_1} < \frac{1}{8r+4};$$

zvolme n_0 tak, že $\varphi(f_1 T_{n_0}) > 1$. Pro $n \geq n_0$ budiž $\mathfrak{B}_n$ množina oněch bodů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, jež mají tuto vlastnost: existuje číslo t intervalu $\varphi(f_1 T_n) \leqq t < \varphi(f_1 T_{n+1})$, pro něž je $\varrho(t)\,\psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < f_2$.

Je-li tedy $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathfrak{B}_n$[15]), existuje číslo t a celá čísla $a_1, \ldots, a_{r+s}$ tak, že

$$(48)\qquad \left|\sum_{j=1}^{s}\theta_{ij}a_j + a_{i+s} + \alpha_i\right| < \frac{f_2}{\varrho(t)}\ (i = 1, \ldots, r),$$

$$\max_{1\leqq j\leqq s}|a_j| \leqq \varphi(f_1 T_{n+1}),\ t \geqq \varphi(f_1 T_n),\ \text{tedy } \varrho(t) \geqq f_1 T_n.$$

Podle (45), (46), je potom při vhodném celém čísle D_1

$$\left|\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\theta_{ij}a_j B_{s+i,n} + D_1\right| \leqq s\,\psi_2(T_n)\,\varphi(f_1 T_{n+1})$$

$$\leqq sA\,\frac{\varphi(f_1 T_{n+1})}{\varphi\left(\frac{1}{(2r+1)^2}T_{n+1}\right)} \leqq sA\,f_1^{\eta}\,(2r+1)^{2\eta} < \frac{1}{8r+4}$$

(viz též (2), (47)). Dosadím-li sem podle (48) za $\sum_{j=1}^{s}\theta_{ij}a_j$, dostanu při vhodném celém čísle D

---

[15]) $\lambda \in M$ značí: λ je prvkem množiny M. Znak 0 značí prázdnou množinu. μM značí Lebesgueovu míru množiny M.

$$\left|\sum_{i=1}^{r} B_{s+i,n}\alpha_i + D\right| < \frac{1}{8r+4} + \frac{f_2 r T_n}{\varrho(t)} \leqq \frac{1}{8r+4} + \frac{f_2 r}{f_1}.$$

Podle (47) vidíme tedy: *je-li* $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_r) \epsilon \mathfrak{B}_n$ $(n \geqq n_0)$, *existuje celé číslo* D *tak, že*

(49) $$\left|\sum_{i=1}^{r} B_{s+i,n}\alpha_i + D\right| < \frac{1}{4r+2}.$$

Tvrdím nyní: *každá uzavřená krychle* W *o hraně* $\frac{2}{(2r+1)T_{n-1}}$ $(n > n_0)$ *obsahuje uzavřenou krychli* W' *o hraně* $\frac{2}{(2r+1)T_n}$, *jež neobsahuje žádný bod množiny* $\mathfrak{B}_n$. Důkaz: Bez újmy obecnosti budiž $B_{s+1,n} = T_n$ (jinak bychom event. změnili pořadí indexu i $(1 \leqq i \leqq r)$ a po případě ještě změnili znamení u všech $B_{v,n}$). Budiž $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ střed krychle W. Pro zkrácení položme

(50) $$X = -\frac{1}{T_n}\sum_{i=2}^{r} B_{s+i,n}\gamma_i{}^{16})$$

a zvolme celé číslo E tak, že

$$\gamma_1 - \frac{1}{(2r+1)T_{n-1}} < X + \frac{E}{T_n} < X + \frac{E+1}{T_n} < \gamma_1 + \frac{1}{(2r+1)T_{n-1}};$$

to je možno, ježto $T_n > (2r+1)T_{n-1}$. Položme nyní

(51) $$\delta_1 = X + \frac{E+\frac{1}{2}}{T_n} = \frac{-\sum_{i=2}^{r} B_{s+i,n}\gamma_i + E + \frac{1}{2}}{B_{s+1,n}}$$

a sestrojme uzavřenou krychli W' o hraně $\frac{2}{(2r+1)T_n}$ a o středu $(\delta_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$. Zřejmě je $W' \subset W$, neboť $\frac{1}{(2r+1)T_n} < \frac{1}{(2r+1)T_{n-1}}$, $\frac{1}{(2r+1)T_n} < \frac{1}{2T_n}$.

Budiž $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \epsilon W'$, takže $|\alpha_1 - \delta_1| \leqq \frac{1}{(2r+1)T_n}$,

$|\alpha_i - \gamma_i| \leqq \frac{1}{(2r+1)T_n}$ $(2 \leqq i \leqq r)$. Tedy (viz (51), (46))

(52) $$\left|\sum_{i=1}^{r}\alpha_i B_{s+i,n} - E - \frac{1}{2}\right| \leqq \left|\delta_1 B_{s+1,n} + \sum_{i=2}^{r}\gamma_i B_{s+i,n} - E - \frac{1}{2}\right| +$$
$$+ \left|(\alpha_1-\delta_1)B_{s+1,n} + \sum_{i=2}^{r}(\alpha_i-\gamma_i)B_{s+i,n}\right| =$$
$$= \left|(\alpha_1-\delta_1)B_{s+1,n} + \sum_{i=2}^{r}(\alpha_i-\gamma_i)B_{s+i,n}\right|$$
$$\leqq \frac{rT_n}{(2r+1)T_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4r+2}.$$

---

[16]) Pro $r = 1$ jest klásti $\sum_{i=2}^{r} = 0$.

Kdyby bylo současně $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathfrak{B}_n$, bylo by podle (49), (52) při vhodných celých číslech D, E

$$\left| D + E + \frac{1}{2} \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^{r} B_{s+i,n} \alpha_i + D \right) + \right.$$

$$\left. + \left(E + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{r} B_{s+i,n} \alpha_i \right) \right| < \frac{1}{4r+2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4r+2} = \frac{1}{2},$$

což je nemožno, neboť číslo $D + E + \frac{1}{2}$ má tvar „celé číslo plus $\frac{1}{2}$“ a nemůže tudíž míti prostou hodnotu menší než $\frac{1}{2}$. Tedy žádný bod krychle W' neleží v množině $\mathfrak{B}_n$, což bylo dokázati.

Podle tohoto výsledku lze sestrojiti posloupnost uzavřených krychlí $W_{n_0} \supset W_{n_0+1} \supset W_{n_0+2} \supset \ldots$ tak, že hrana krychle W_n je $\frac{2}{(2r+1)\,T_n}$ a že pro $n > n_0$ je $W_n \, \mathfrak{B}_n = 0$. Existuje bod $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, ležící v průniku $W_{n_0} W_{n_0+1} W_{n_0+2} \ldots$ Tento bod neleží tedy v množině $\mathfrak{B}_{n_0+1} + \mathfrak{B}_{n_0+2} + \ldots$; to znamená však — podle definice množiny $\mathfrak{B}_n$ —, že $\varrho(t)\, \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \geqq f_2$ pro $t \geqq \varphi(f_1 T_{n_0+1})$, tedy $\liminf_{t \to \infty} \varrho(t)\, \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > 0$, čímž věta 7 dokázána.

§ 4. Důkazy vět 8, 9.

Důkaz věty 8. Budiž řada (10) konvergentní. Pro každé celé $n > 0$ je

$$\sum_{x=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{x^{s-1}}{\sigma^r(x)} \geqq 2^{n-1} \cdot \frac{2^{(s-1)(n-1)}}{\sigma^r(2^n)} = 2^{-s} \frac{2^{ns}}{\sigma^r(2^n)},$$

takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{ns}}{\sigma^r(2^n)}$ konverguje. Budiž W krychle $0 \leq \alpha_i < 1$ $(1 \leqq i \leqq r)$ a budiž M_k $(k = 1, 2, \ldots)$ množina oněch bodů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ krychle W, pro něž je $\liminf_{t \to \infty} \sigma(t)\, \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < k$; máme dokázati, že $\mu(M_1 + M_2 + \ldots) = 0$, a k tomu cíli stačí dokázati, že $\mu M_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Pro celé $n > 0$ budiž $M_{k,n}$ množina oněch bodů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \subset W$, jež mají tuto vlastnost: existuje číslo t intervalu $2^n \leq t < 2^{n+1}$ tak, že $\sigma(t)\, \psi_1'(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < k$. Je-li $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in M_k$, existuje ke každému celému N celé číslo $n > N$ tak, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in M_{k,n}$, takže

$$M_k \subset \sum_{n=N}^{\infty} M_{k,n} \quad \text{a tedy}$$

(53) $$\mu M_k \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mu M_{k,n} \text{ pro každé celé } N > 0.$$

Dokážeme-li, že řada

(54) $$\sum_{n=1}^{\infty} \mu M_{k,n}$$

je konvergentní, vyplyne z (53) limitním přechodem $N \to \infty$ ihned hledaná rovnice $\mu M_k = 0$.

Je-li $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in M_{k,n}$, existuje číslo t a celá čísla $a_1, \ldots, a_{r+s}$ tak, že

$$2^n \leq t < 2^{n+1}, \max_{1 < j \leq s} |a_j| \leq t, \max_{1 \leq i \leq r} \left|\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} a_j + a_{i+s} + \alpha_i\right| < \frac{k}{\sigma(t)}, \text{ tedy}$$

$$(55)\ |a_j| < 2^{n+1}\ (1 < j \leq s), \left|\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} a_j + a_{i+s} + \alpha_i\right| < \frac{k}{\sigma(2^n)} < 1\ (1 \leq i \leq r),$$

je-li n dosti velké. Jsou-li $a_1, \ldots, a_s$ dána, platí pro každé číslo a_{i+s} $(1 \leq i \leq r)$ podle (55) nerovnosti

$$-\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} a_j - 2 \leq a_{i+s} \leq -\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} a_j + 1$$

(neboť $0 \leq \alpha_i < 1$), což dává pro číslo a_{i+s} nejvýše čtyři možnosti; každé z čísel $a_1, \ldots, a_s$ má podle (55) právě $2^{n+2} - 1$ možností; když pak $a_1, \ldots, a_{r+s}$ jsou dány, je bod $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ podle (55) omezen na krychli o hraně $\frac{2k}{\sigma(2^n)}$.

Pro dosti velká celá n je tedy

$$\mu M_{k,n} \leq (2^{n+2} - 1)^s 4^r \left(\frac{2k}{\sigma(2^n)}\right)^r < 2^{2s+3r} k^r \cdot \frac{2^{ns}}{\sigma^r(2^n)},$$

takže řada (54) vskutku konverguje.

Důkaz věty 9. Buďte splněny předpoklady věty 9, takže existuje podle věty 2. číslo $A > 0$ tak, že

$$(56) \qquad \psi_1(t) > A t^{-\frac{s}{r}} \text{ pro } t > 1.$$

Podle věty 6 (v níž klademe $\varphi(t) = t^{\frac{r}{s}}$, $\varrho(t) = t^{\frac{s}{r}}$) existuje ke každému celému $m \geq 0$ celé číslo $f(m) > 1$ tak, že

$$(57) \qquad \psi_1(f(m); \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < 2^{-m-2}$$

pro všechny body $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$.[17] Konečně je patrno, že první případ věty 9 (s konvergentní řadou (10)) je obsažen ve větě 8; předpokládejme proto v dalším, že řada (10) diverguje.

V dalším budou nejenom písmena a, b, c, d, nýbrž i písmeno h (s libovolnými indexy) značiti vždy celé číslo; písmena m, n (s libovolnými indexy) budou značiti celá nezáporná čísla. Znakem $p(a_1, \ldots, a_{r+s})$ budeme značiti obecně bod o souřadnicích $-\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} a_j - a_{i+s}$ $(i = 1, \ldots, r)$.

Je-li $b_v \neq a_v$ aspoň pro jednu hodnotu v $(1 \leq v \leq r + s)$, je $p(b_1, \ldots, b_{r+s}) \neq p(a_1, \ldots, a_{r+s})$. Kdyby tomu totiž tak nebylo, bylo by $\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij}(b_j - a_j) + (b_{i+s} - a_{i+s}) = 0$ pro $1 \leq i \leq r$; zde nemůže býti

[17]) Viz „Poznámku 1" v § 1.

$\max_{1 \leq j \leq s} | b_j - a_j | = 0$, neboť potom by bylo též $b_{i+s} - a_{i+s} = 0$ pro $1 \leq i \leq r$, tedy $b_v = a_v$ pro $1 \leq v \leq r + s$. Tedy $t_0 = \max_{1 \leq j \leq s} | b_j - a_j | \geq 1$; definice (1) dává potom $\psi_1 (t_0) = 0$, což je ve sporu s (56).

Bod $p (a_1, \ldots, a_{r+s})$ nazveme bodem n-tého řádu, je-li $\max_{1 \leq j \leq s} | a_j | < 2^n$; nazveme jej *primitivním* bodem n-tého řádu, je-li $n \geq 2r + 4s$, $2^{n-2r-4s} < \max_{1 \leq j < s} | a_j | \leq 2^n$. Znak $W (h_1, h_2, \ldots, h_r; m)$ bude značiti krychli $2^{-m} h_i < \alpha_i < 2^{-m} (h_i + 1)$ $(1 \leq i \leq r)$. Budiž $P (h_1, \ldots, h_r; m; n)$ resp. $Q (h_1, \ldots, h_r; m; n)$ počet oněch bodů n-tého řádu, resp. počet oněch primitivních bodů n-tého řádu, jež leží v krychli $W (h_1, \ldots, h_r; m)$. Zřejmě je

$$(58) \quad \sum_{h_1 = 0}^{2^m - 1} \ldots \sum_{h_r = 0}^{2^m - 1} P (h_1, \ldots, h_r; m; n) = P (0, \ldots, 0; 0; n) = (2^{n+1} + 1)^s$$

(to plyne z toho, že při daných $a_1, \ldots, a_s$ existuje právě jeden systém $a_{s+1}, \ldots, a_{s+r}$ takový, že bod $p (a_1, \ldots, a_{r+s})$ leží v krychli $0 < \alpha_i < 1$ $(1 \leq i \leq r)$). Dále je pro $n > 2r + 4s$

(59) $Q (h_1, \ldots, h_r; m; n) = P (h_1, \ldots, h_r; m; n) - P (h_1, \ldots, h_r; m; n - 2r - 4s)$. Budiž nyní $2^n > f(m)$ a buďte h_i, h_i' $(1 \leq i \leq r)$ libovolná celá čísla. Podle (57) existují celá čísla $A_1, \ldots, A_{r+s}$ tak, že

$$| A_j | \leq f(m) < 2^n \; (1 \leq j < s), \quad \left| \sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} A_j + A_{i+s} + \frac{2 h_i' - h_i + \frac{1}{2}}{2^{m+1}} \right| < $$
$$< \frac{1}{2^{m+2}} \; (1 \leq i \leq r).$$

Leží-li bod n-tého řádu $p (a_1, \ldots, a_{r+s})$ v krychli $W (h_1, \ldots, h_r; m + 1)$, dostáváme po řadě: $| a_j | \leq 2^n$ $(1 \leq j < s)$,

$$\frac{h_i}{2^{m+1}} < - \sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} a_j - a_{i+s} < \frac{h_i + 1}{2^{m+1}} \; (1 \leq i \leq r),$$

$$| a_j + A_j | < 2^{n+1} \, (1 \leq j < s),$$

$$\frac{h_i'}{2^m} \leq - \sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} (a_j + A_j) - (a_{i+s} + A_{i+s}) < \frac{h_i' + 1}{2^m} \; (1 \leq i < r),$$

t. j. $p (a_1 + A_1, \ldots, a_{r+s} + A_{r+s})$ je bod řádu $n + 1$, ležící v krychli $W (h_1', \ldots, h_r'; m)$; tedy je pro libovolná h_i, h_i'

$$(60) \quad P (h_1, \ldots, h_r; m + 1; n) \leq P (h_1', \ldots, h_r'; m; n + 1).$$

Nechám-li zde $h_1, \ldots, h_r$ pevná a sčítám-li přes $0 < h_i' < 2^m$ $(1 \leq i \leq r)$, dostanu z (60), (58)

$$(61) \quad 2^{mr} P (h_1, \ldots, h_r; m + 1; n) < (2^{n+2} + 1)^s < 2^{(n+3)s}.$$

Nechám-li v (60) h'_i pevná a sčítám-li přes $0 \leq h_i < 2^{m+1}$ $(1 \leq i \leq r)$, dostanu obdobně

(62) $$2^{(m+1)r} P(h_1', \ldots, h_r'; m; n+1) \geq (2^{n+1}+1)^s > 2^{(n+1)s}.$$

Vzorce (61), (62) platí pro $m \geq 0$, $2^n > f(m)$. Píši-li v (61) m místo $m+1$ a v (62) n místo $n+1$, obdržím ihned

$$2^{ns-(m+1)r} < P(h_1, \ldots, h_r; m; n) < 2^{(n+3)s-(m-1)r}$$

pro $m > 0$, $2^n > \max(2f(m), f(m-1))$. Odtud a z (59) plyne pak pro

$$m > 0, 2^{n-2r-4s} > \max(2f(m), f(m-1))$$

(63) $$2^{ns-mr-r-1} < Q(h_1, \ldots, h_r; m; n) < 2^{ns-mr+3s+r},$$

neboť podle (59) je

$$Q(h_1, \ldots, h_r; m; n) > 2^{ns-(m+1)r} - 2^{(n+3-2r-4s)s-(m-1)r} =$$
$$= 2^{ns-(m+1)r}(1-2^{3s-4s^2-2r(s-1)}) \geq 2^{ns-mr-r-1}.$$

* * *

Budiž nyní dána krychle

(64) $$W(h_1, \ldots, h_r; m) \quad (m > 0).$$

Krychlí řádu n $(n \geq 2r+4s)$ rozumím každou otevřenou krychli o středu $p(a_1, \ldots, a_{r+s})$ a o straně $\frac{2}{\sigma(2^n)}$, kde $p(a_1, \ldots, a_{r+s})$ je kterýkoliv primitivní bod řádu n-tého, ležící v krychli (64). Tato krychle n-tého řádu je tedy množina všech bodů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, pro něž je

(65) $$\left|\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} a_j + a_{i+s} + \alpha_i\right| < \frac{1}{\sigma(2^n)} \quad (1 \leq i \leq r).$$

Ježto je $2^n \geq \max_{1 \leq j \leq s} |a_j| > 2^{n-2r-4s} > 0$, platí pro každý bod $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ krychle (65) nerovnost

(66) $$\psi_1(2^n; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \frac{1}{\sigma(2^n)}.$$

Počet krychlí řádu n je $Q(h_1, \ldots, h_r; m; n)$, objem každé z nich je $2^r(\sigma(2^n))^{-r}$. Klíčem k důkazu věty 9. je tato

2. pomocná věta. *Ke každému n_0 existuje konečný počet krychlí* K_1, $\mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_w$ *s těmito vlastnostmi:*

A. *Každá krychle* K_i $(1 \leq i \leq w)$ *je krychle řádu vyššího než n_0.*

B. $\mathsf{K}_i \mathsf{K}_j = 0$ *pro* $1 \leq i < j \leq w$.

C. $\mu \mathsf{K}_1 + \ldots + \mu \mathsf{K}_w > \Gamma \cdot 2^{-mr}$, *kde*

(66′) $$\Gamma = A^r 2^{-5-5r-4s}.$$

Ukážeme napřed, že věta 9. plyne z této pomocné věty. Předpokládejme tedy na okamžik, že 2. pomocná věta je již dokázána. Budiž M_k pro $k = 1, 2, \ldots$ množina oněch bodů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, pro něž je

$$\liminf_{t \to \infty} \sigma(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > \frac{1}{k}, \text{ takže } M_1 + M_2 + \ldots$$

je množina oněch bodů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, pro něž je $\liminf \sigma(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) > 0$. Předpokládejme, že $\mu\, M_1 > 0$. Potom existuje jistě krychle

$$W = W(h_1, \ldots, h_r; m) \quad (m > 0) \text{ taková, že} \tag{67}$$

$$\mu\, M_1\, W > (1 - \frac{1}{2} \Gamma)\, \mu\, W = (1 - \frac{1}{2} \Gamma)\, 2^{-mr}, \text{ takže}$$

$$\mu\,(W - M_1) < \frac{1}{2} \Gamma \cdot 2^{-mr}. \tag{68}$$

Pro každé $n_0 > 0$ budiž $N(n_0)$ množina oněch bodů $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in W$, pro něž existuje číslo $t \geqq 2^{n_0}$ tak, že $\psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) < \frac{1}{\sigma(t)}$. Zřejmě je $N(n_0) \supset N(n_0 + 1)$, $W - M_1 \supset \prod_{n_0 = 1}^{\infty} N(n_0)$, a tedy podle známých vět

$$\mu\,(W - M_1) \geqq \mu \prod_{n_0 = 1}^{\infty} N(n_0) = \lim_{n_0 \to \infty} \mu\, N(n_0). \tag{69}$$

Víme, že nerovnost (66) platí pro každý bod $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, ležící v nějaké krychli n-tého řádu. Podle vlastnosti **A** z druhé pomocné věty je tedy

$$N(n_0) \supset W\,(\mathbf{K}_1 + \ldots + \mathbf{K}_w),$$

kde $\mathbf{K}_1, \ldots, \mathbf{K}_w$ jsou právě krychle, uvedené v 2. pomocné větě. Ježto každá krychle $\mathbf{K}_i$ má hranu $\leqq \frac{2}{\sigma(2^{n_0})}$ a její střed leží v krychli (67), leží množina $\mathbf{K}_1 + \ldots + \mathbf{K}_w$ celá v krychli W', jež je koncentrická s krychlí W a má hranu $\frac{1}{2^m} + \frac{2}{\sigma(2^{n_0})}$. Tedy

$$\mu\, N(n_0) \geqq \mu\,(\mathbf{K}_1 + \ldots + \mathbf{K}_w) - \mu\,(W' - W),$$

takže podle vlastností **B**, **C** z 2. pomocné věty je

$$\mu\, N(n_0) > \Gamma . 2^{-mr} - \left(\left(\frac{1}{2^m} + \frac{2}{\sigma(2^{n_0})} \right)^r - \frac{1}{2^{mr}} \right). \tag{70}$$

Ježto $\lim_{n_0 \to \infty} \sigma(2^{n_0}) = \infty$, plyne z (69), (70)

$$\mu\,(W - M_1) \geqq \Gamma . 2^{-mr},$$

což je ve sporu s (68); tedy je $\mu\, M_1 = 0$. Použijeme-li tohoto výsledku na funkce $2\sigma(t), 3\sigma(t), \ldots$ (místo funkce $\sigma(t)$), jež rovněž splňují předpoklady věty 9, dostáváme $\mu\, M_1 = \mu\, M_2 = \mu\, M_3 = \ldots = 0$, tedy též $\mu\,(M_1 + M_2 + \ldots) = 0$, t. j.: pro skoro všechny systémy $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ je $\liminf \sigma(t)\, \psi_1(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_r) = 0$, čímž věta 9. dokázána. Zbývá nám ještě úkol, provésti

důkaz 2. pomocné věty. Budiž dána krychle (64) a číslo n_0. Zvolme celé ν_0 tak velké, že

$$(71)\left|\begin{array}{l} \nu_0 > n_0,\ \nu_0 \geqq 2r + 4s,\ \sigma(2^{\nu_0}) > 2,\ 2^{\nu_0 - 2r - 4s} > \max\,(2f(m),\ f(m-1)), \\ \dfrac{A}{2^{(\nu_0+1)\frac{s}{r}}} < 1,\ \dfrac{t^s}{\sigma^r(t)} < \dfrac{A^r}{2^{5r+4s+8}}\ \left(\text{tedy } \dfrac{2.(2t)^{\frac{s}{r}}}{A\sigma(t)} < 1\right) \text{ pro } t \geqq 2^{\nu_0}. \end{array}\right.$$

Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ položme $\nu_k = \nu_0 + (2r + 4s)\,k$.

Řada

$$(72)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\nu_k s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})}$$

je divergentní, ježto řada (10) je divergentní a ježto

$$\sum_{x=2^{\nu_k}+1}^{2^{\nu_k+1}} \frac{x^{s-1}}{\sigma^r(x)} \leqq \frac{2^{\nu_k+1^s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})} \leqq 2^{(2r+4s)\,.\,s} \cdot \frac{2^{\nu_k s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})}\,.$$

Ježto každý člen řady (72) je menší než $4\,\Gamma$ (viz (71) a (66′)), lze nalézti celé číslo $K > 0$ tak, že

$$(73)\qquad 4\,\Gamma < \sum_{k=0}^{K} \frac{2^{\nu_k s}}{\sigma^r(2^{\nu_k})} < 8\,\Gamma.$$

Středy krychlí řádu ν_k jsou, jak víme, primitivní body řádu ν_k a nejsou tedy body žádného řádu ν_l, kde $l < k$ (neboť $\nu_l \leqq \nu_k - 2r - 4s$ pro $l < k$). Má-li nějaká krychle

$$(74)\qquad \left|\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij}\, a_j + a_{i+s} + \alpha_i\right| < \frac{1}{\sigma(2^{\nu_k})}\ (1 \leqq i \leqq r)$$

řádu ν_k společný bod s jinou krychlí

$$(75)\qquad \left|\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij}\ b_j + b_{i+s} + \alpha_i\right| < \frac{1}{\sigma(2^{\nu_l})}\ (1 < i \leqq r)$$

řádu ν_l $(0 \leqq l < k)$, je nutně (viz svrchu)

$$\max_{1 \leqq v \leqq r+s} |b_v - a_v| > 0,\ \max_{1 \leqq i \leqq r} \left|\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij}\,(b_j - a_j) + (b_{i+s} - a_{i+s})\right| < \frac{2}{\sigma(2^{\nu_l})} < 1$$

(viz (71)), tedy $0 < \max\limits_{1 \leqq j \leqq s} |b_j - a_j| < 2^{\nu_k+1}$,

tedy $\psi_1\,(2^{\nu_k+1}) < \dfrac{2}{\sigma(2^{\nu_l})}$. Podle (56) je tedy

$$(76)\qquad A\,.\,2^{\,\cdot\,(\nu_k+1)\frac{s}{r}} < \frac{2}{\sigma(2^{\nu_l})},\ \frac{2.2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}}{A\,\sigma(2^{\nu_l})} > 1.$$

Tato nerovnost nemůže podle (71) platiti pro $k = l$, takže dvě různé krychle téhož řádu nemají společných bodů.

Budiž nyní $0 \leqq l < k$, budiž

$$(77)\qquad \left|\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij}\, a_j + a_{i+s} + \alpha_i\right| < \frac{1}{\sigma(2^{\nu_l})}\ (1 \leqq i \leqq r)$$

krychle řádu ν_l a budiž S počet krychlí řádu ν_k, jež mají aspoň jeden bod společný s krychlí (77). Tvrdím, že

$$S \leqq \frac{2^{s+3r}\, 2^{\nu_k s}}{A^r\, \sigma^r(2^{\nu_l})}. \tag{78}$$

Důkaz: neplatí-li (76), je $S = 0$, takže (78) platí. Předpokládejme tedy, že platí (76). Nechť neplatí (78); potom je (viz (76))

$$S > \frac{2^{s+3r}\, 2^{\nu_k s}}{A^r\, \sigma^r\,(2^{\nu_l})} \geqq \left(\left[\frac{4}{\sigma\,(2^{\nu_l})} \cdot \frac{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}}{A}\right] + 1\right)^r, \tag{79}$$

kde $[x]$ značí celé číslo, definované nerovnostmi $[x] \leqq x < [x] + 1$. Středy všech krychlí řádu ν_k, jež mají společný bod s krychlí (77), leží v jisté krychli $\mathfrak{W}$, jež je soustředná s krychlí (77) a má hranu $\frac{4}{\sigma\,(2^{\nu_l})}$ $\left(\text{neboť } \frac{2}{\sigma\,(2^{\nu_l})} + \frac{2}{\sigma\,(2^{\nu_k})} < \frac{4}{\sigma\,(2^{\nu_l})}\right)$ Rozdělme krychli $\mathfrak{W}$ na

$$\left(\left[\frac{4}{\sigma\,(2^{\nu_l})} \cdot \frac{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}}{A}\right] + 1\right)^r$$

krychlí $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, ... o hraně

$$\frac{4}{\sigma\,(2^{\nu_l})} \left(\left[\frac{4}{\sigma\,(2^{\nu_l})} \cdot \frac{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}}{A}\right] + 1\right)^{-1} < \frac{A}{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}}; \tag{80}$$

ježto počet krychlí $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, ... je podle (79) menší než S, existují dvě různé krychle řádu ν_k, jejichž středy $p\,(b_1, \ldots, b_{r+s})$, $p\,(c_1, \ldots, c_{r+s})$ leží v téže krychli o hraně (80), takže

$$\max_{1 \leqq v \leqq r+s} |b_v - c_v| > 0, \quad \max_{1 \leqq i \leqq r} \left|\sum_{j=1}^{s} \theta_{ij}\,(b_j - c_j) + (b_{i+s} - c_{i+s})\right| < \frac{A}{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}} < 1$$

(viz (71)), tedy $0 < \max\limits_{1 < j \leqq s} |b_j - c_j| \leqq 2^{\nu_k+1}$, tedy $\psi_1\,(2^{\nu_k+1}) < \frac{A}{2^{(\nu_k+1)\frac{s}{r}}}$, což je ve sporu s (56). Tedy nemůže platiti (79), čímž (78) dokázáno.

Budiž nyní $\mathfrak{A}_k$ ($k = 0, 1, \ldots$) množina všech krychlí řádu ν_k, jež nemají pro $0 \leqq l < k$ společných bodů s žádnou krychlí řádu ν_l. Množina $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_K$ se skládá z konečného počtu krychlí, jež označme $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_w$. Tyto krychle mají zřejmě vlastnosti **A**, **B** z 2. pomocné věty. Zbývá dokázati vlastnost **C**, což provedeme takto: Budiž Z_k počet krychlí, patřících k množině $\mathfrak{A}_k$. Podle (78), (63) je pro $0 \leqq k < K$

$$Z_k \geqq Q\,(h_1, \ldots, h_r; m; \nu_k) - \sum_{0 \leqq l < k} \frac{2^{s+3r}\, 2^{\nu_k s}}{A^r\, \sigma^r(2^{\nu_l})}\, Q\,(h_1, \ldots, h_r; m; \nu_l)$$

$$> 2^{\nu_k s - mr - r - 1} - \sum_{l=0}^{K} \frac{2^{4s+4r}}{A^r} \, \frac{2^{\nu_k s} \,.\, 2^{\nu_l s - mr}}{\sigma^r\,(2^{\nu_l})}.$$

Tedy je (viz (73), (66'))

$$\mu K_1 + \ldots + \mu K_n = \sum_{k=0}^{K} Z_k \left(\frac{2}{\sigma(2^{\nu k})}\right)^r$$

$$\geqq 2^{-mr} \sum_{k=0}^{K} \cdot \frac{1}{2} \frac{2^{\nu k s}}{\sigma^r(2^{\nu k})} \left(1 - \sum_{l=0}^{K} \frac{2^{5r+4s+1}}{A^r} \frac{2^{\nu l s}}{\sigma^r(2^{\nu l})}\right)$$

$$> 2^{-mr} \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{2} \frac{2^{\nu k s}}{\sigma^r(2^{\nu k})} \left(1 - \frac{1}{2}\right) > \Gamma . 2^{-mr},$$

čímž vlastnost **C** dokázána.

§ 5. Dodatek.

Věta 10. *Buďte* $1, \theta_1, \ldots, \theta_r$ *lineárně nezávislá reálná čísla algebraického tělesa* $\mathfrak{K}$ *stupně* $r + 1$. *Položme pro* $t \geqq 1$

$$\psi_2(t) = \min_{\substack{0 < \max |c_i| \leqq t \\ 1 \leqq i \leqq r}} |\theta_1 c_1 + \ldots + \theta_r c_r + c_0|;$$

potom je $\liminf_{t \to \infty} t^r \psi_2(t) > 0$.

Důkaz. Budiž $a > 0$ celistvé racionální číslo takové, že $a\theta_1, \ldots, a\theta_r$ jsou celistvá algebraická čísla. Pro $l = 1, 2, \ldots, r + 1$ buďte $\theta_{1,l}, \ldots, \theta_{r,l}$ systémy čísel konjugované k systému $\theta_1, \ldots, \theta_r$; specielně $\theta_{i1} = \theta_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ (zde ovšem $\theta_{i,l}$ nemusí býti pro $l > 1$ reálná čísla). Položme

$$M = 1 + \max_{\substack{1 \leqq i \leqq r \\ 1 \leqq l \leqq r+1}} |\theta_{il}| > 1, \; \lambda = a^{-1} (3 a r M)^{-r} < 1.$$

Dokáži, že pro každé $t \geqq 1$ je $t^r \psi_2(t) \geqq \lambda$; tím bude věta dokázána. Kdyby pro nějaké $t \geqq 1$ bylo $t^r \psi_2(t) < \lambda$, existovala by celá čísla $c_0, c_1, \ldots, c_r$ tak, že $0 < \max_{1 \leqq i \leqq r} |c_i| \leqq t$, $|a\theta_1 c_1 + \ldots + a\theta_r c_r + a c_0| < \lambda a t^{-r}$, tedy

$$|c_0| < |\theta_1 c_1| + \ldots + |\theta_r c_r| + \lambda t^{-r} < r M t + 1 < 2 r M t,$$

$$|a\, \theta_{1l} c_1 + \ldots + a\, \theta_{rl} c_r + a\, c_0| < 3 a r M t \; (2 \leqq l \leqq r + 1),$$

$$(81) \qquad \left|\prod_{l=1}^{r+1} (a\theta_{1l} c_1 + \ldots + a\theta_{rl} c_r + a\, c_0)\right| < a \lambda t^{-r} (3 a r M t)^r = 1.$$

Součin vlevo je norma celistvého algebraického čísla $a(\theta_1 c_1 + \ldots + \theta_r c_r + c_0)$; toto číslo je od nuly různé, ježto $1, \theta_1, \ldots, \theta_r$ jsou lineárně nezávislá, $a > 0$. Levá strana v nerovnosti (81) je tedy celé kladné číslo, jež by podle (81) mělo býti menší než 1, což je hledaný spor.
