Eduard Čech

Über die Bettischen Gruppen kompakter Räume

Erg. Koll. Wien 7 (1936), 47-50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501045

Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums
Heft 7, Wien 1936

paarweise höchstens Endpunkte gemein haben. Wir bezeichnen nun mit Ω einen Graphen, dessen Strecken die eben konstruierten $\sum \lambda r_\lambda$ einfachen Bogen und dessen „Endpunkte" die n Punkte $p_1, \ldots, p_n$, sowie die r Kontinua $C_1, \ldots, C_r$ sind. Es genügt zu beweisen, daß jede Komponente dieses Graphen Ω ein Baum ist. Denn dann ist ja bekanntlich die Anzahl $\sum\limits_{\lambda=2}^{n} \lambda r_\lambda$ der Strecken von Ω kleiner als die Anzahl $n + \sum\limits_{\lambda=2}^{n} r_\lambda$ der Endpunkte von Ω und das besagt gerade die zu beweisende Ungleichung. Machen wir also die Annahme, daß nicht jede Komponente von Ω ein Baum sei! Dann gibt es in Ω einen einfachen geschlossenen „Streckenzug", der offenbar mindestens zwei der Punkte $p_1, \ldots, p_n$ enthalten muß. Unter diesen Punkten existieren also zwei — wir bezeichnen sie mit p und p' — so daß es zwei Teilkontinua Ω_1 und Ω_2 von Ω gibt, deren Durchschnitt aus den beiden Punkten p und p' besteht. Bekanntlich gibt es zwischen p und p' irreduzible Kontinua $K_1 \subset \Omega_1$ und $K_2 \subset \Omega_2$. Nach Rosenthal (Sitzb. Münch. Akad. 1919, S. 91) ist das Kontinuum $K_1 + K_2$ gemeinsame Begrenzung von zwei Gebieten H und H'. Da $F.(K_1+K_2) \subset C_1 + \ldots + C_r$ gilt und die C_j echte Teilkontinua des unzerlegbaren Kontinuums F sind, so ist die Menge $F - F.(K_1+K_2)$ bekanntlich zusammenhängend, so daß entweder H oder H' zu F punktfremd ist. Dann ist aber $H+p+p'$ oder $H'+p+p'$ eine zusammenhängende Teilmenge des Komplementes von F und das ist ein Widerspruch, da ja p und p' in verschiedenen Komplementärgebieten von F liegen.

Über die Bettischen Gruppen kompakter Räume[1]**.** Von E. Čech (Brno).

R sei ein kompakter Raum, $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe. Ein $(n, \mathfrak{G})$-*Grenzzyklus* in R ist eine Folge $\{\gamma_i\}_1^\infty$ von algebraischen n-Zykeln in R, deren Koeffizienten $\mathfrak{G}$ entnommen sind, und für die es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, so daß: (1) für $i > m$ γ_i ein (n, ε)-Zyklus[2]) ist; (2) für $i > m$ und $j > m$ γ_i und γ_j ε-homolog[3]) in R sind. Zwei $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln $\{\gamma_i\}$ und $\{\gamma'_i\}$ sind äquivalent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein m gibt, so daß für $i > m$ γ_i und γ'_i ε-homolog in R sind. Äquivalente $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln werden immer identifiziert. Die $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzykeln in R bilden eine (additive) Abelsche Gruppe $B_n(R, \mathfrak{G})$, die *volle* n^{te} *Bettische Gruppe* des Raumes R bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.

---

[1]) Ein sehr wesentlicher Teil der hier mitgeteilten Sätze wurde etwa gleichzeitig und völlig unabhängig auch von N. E. Steenrod gefunden; s. seine demnächst in den Proc. Nat. Acad. erscheinende Note „On universal homology groups", die ich in Manuskriptform zu lesen Gelegenheit hatte.

[2]) D. h. die Durchmesser der Simplexe sind sämtlich $< \varepsilon$.

[3]) D. h. es gibt in R eine algebraische $(n+1, 2)$-Kette (vgl. Anm.[2])) mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}$, deren Rand gleich $\gamma_i - \gamma_j$ ist.

Γ sei die additive Gruppe der ganzen Zahlen, $\mathfrak{P}$ sei die additive Gruppe der modulo Eins reduzierten reellen Zahlen. In $B_n(R, \mathfrak{P})$ kann man nach Pontrjagin[4]) einen Stetigkeitsbegriff einführen, wodurch aus $B_n(R, \mathfrak{P})$ eine hier mit $P_n(R)$ bezeichnete *kompakte* Gruppe entsteht.

Ein algebraischer n-Zyklus γ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}$ heiße ein *Torsionszyklus*, wenn $\gamma = g_i \tau_i$[5]), wo $g_i \varepsilon \mathfrak{G}$, und es eine positive Zahl $m \varepsilon \Gamma$ gibt, so daß $m \tau_i$ gleich dem Rande einer $(n+1)$-Kette mit Koeffizienten aus Γ ist. Ein $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzyklus $\{\gamma_i\}$ heiße ein $(n, \mathfrak{G})$-*Torsionsgrenzzyklus*, wenn γ_i für fast alle i ein Torsionszyklus ist. Die $(n, \mathfrak{G})$-Torsionsgrenzzykeln bilden eine Untergruppe $T_n(R, \mathfrak{G})$ von $B_n(R, \mathfrak{G})$, die n^{te} *Torsionsgruppe* des Raumes R bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. In $T_n(R, \Gamma)$ kann man wieder einen Stetigkeitsbegriff einführen, wodurch aus $T_n(R, \Gamma)$ eine hier mit $Q_n(R)$ bezeichnete *kompakte* Gruppe entsteht.

Die Faktorgruppe in

$$B_n(R, \mathfrak{G}) / T_n(R, \mathfrak{G}) = B'_n(R, \mathfrak{G})$$

heiße die *reduzierte n^{te} Bettische Gruppe des Raumes R* bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Es gelten die Sätze.

I. Die volle n^{te} Bettische Gruppe $B_n(R, \mathfrak{G})$ ist direkte Summe der n^{ten} Torsionsgruppe $T_n(R, \mathfrak{G})$ und einer anderen — natürlich mit der reduzierten n^{ten} Bettischen Gruppe $B'_n(R, \mathfrak{G})$ isomorphen — Untergruppe.

II. Die n^{te} Torsionsgruppe $T_n(R, \mathfrak{G})$ ist durch $\mathfrak{G}$ und $Q_n(R)$ eindeutig bestimmt wie folgt. Nach Pontrjagin[6]) kann man die kompakte Gruppe $Q_n(R)$ festlegen durch eine Folge $\{Q_n^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ von Abelschen Gruppen mit je endlich vielen Erzeugenden (gegebenenfalls sogar endlichen Gruppen), wobei für jedes i eine homomorphe Abbildung π_i von $Q_n^{(i+1)}$ auf $Q_n^{(i)}$ vorliegt. Für jedes i sei die Gruppe $Q_n^{(i)}$ durch Erzeugende α_{ih} und definierende Relationen $a_{ihk}\alpha_{ih} = 0$ $(\alpha_{ihk} \varepsilon \Gamma)$ festgelegt; sei $\pi_i(\alpha_{i+1,\lambda}) = c_{\lambda h}^{(i)} \alpha_{ih}$[7]) $(c_{\lambda h}^{(i)} \varepsilon \Gamma)$. Man bilde die (additive) Gruppe $\mathfrak{Q}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$ der Vektoren $g_h X_{ih} (g_h \varepsilon \mathfrak{G})$ mit definierenden Relationen $a_{ihk} g X_{ih} = 0$ $(g \varepsilon \mathfrak{Q})$. Durch $\overset{*}{\pi}_i (g_\lambda X_{i+1,\lambda}) = c_{\lambda h}^{(i)} X_{ih}$[7]) wird $\mathfrak{Q}_n^{(i+1)}(\mathfrak{G})$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{Q}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$ homomorph bezogen. Die Folgen $\{v_i\}_1^{\infty}$ mit $v_i \varepsilon \mathfrak{Q}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$, $\overset{*}{\pi}_i v_{i+1} = v_i$ bilden eine mit $T_n(R, \mathfrak{G})$ isomorphe Gruppe.

III. Die reduzierte n^{te} Bettische Gruppe $B'_n(R, \mathfrak{G})$ ist durch $\mathfrak{G}$ und $P_n(R)$ eindeutig bestimmt wie folgt. Sei $M_n(R)$ die nach Pontrjagin[6]) definierte abzählbare Gruppe der Charaktere der kompakten Gruppe $P_n(R)$. Die Gruppe $M_n(R)$ sei gegeben durch

---

[4]) Annals of Math., *35* (1934), S. 909.
[5]) Über doppelt vorkommende Indizes wird immer summiert.
[6]) Annals of Math., *35*, 361—388 (1934).
[7]) Über i wird hier nicht summiert.

eine aufsteigende Folge $\{M_n^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ von Untergruppen mit je endlich vielen Erzeugenden. Für jedes i sei die Gruppe $M_n^{(i)}$ durch Erzeugende β_{ih} und definierende Relationen $b_{ihk}\beta_{ih}=0$ $(b_{ihk}\in\Gamma)$ festgelegt. Da $M_n^{(i)}$ Untergruppe von $M_n^{(i+1)}$ ist, hat man noch Relationen der Form $\beta_{ih}=e_{h\lambda}^{(i)}\beta_{i+1,\lambda}$ $(e_{h\lambda}^{(i)}\in\Gamma)$. Man bilde die (additive) Gruppe $\mathfrak{M}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$ der Vektoren $g_h Y_{ih}$, wobei g_h den Relationen $b_{ihk}g_h=$ $=0$ unterworfene Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind. Durch $\rho_i(g_\lambda Y_{i+1,\lambda})=$ $=e_{h\lambda}^{(i)}g_\lambda Y_{ih}$ [7]) wird $\mathfrak{M}_n^{(i+1)}(\mathfrak{G})$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{M}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$ homomorph bezogen.

Die Folgen $\{w_i\}_1^{\infty}$ mit $w_i\in\mathfrak{M}_n^{(i)}(\mathfrak{G})$, $\rho_i(w_{i+1})=w_i$ bilden eine mit $B'_n(R,\mathfrak{G})$ isomorphe Gruppe.

Ein algebraischer n-Zyklus γ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{G}$ heiße *rein*, wenn $\gamma=g_i\vartheta_i$, wo $g_i\in\mathfrak{G}$ und die ϑ_i algebraische n-Zykeln mit Koeffizienten aus Γ sind. Ein $(n,\mathfrak{G})$-Grenzzyklus $\{\gamma_i\}$ heiße *rein*, wenn die algebraischen n-Zykeln γ_i für fast alle i rein sind. Die reinen $(n,\mathfrak{G})$-Grenzzykeln bilden eine Untergruppe $C_n(R,\mathfrak{G})$ von $B_n(R,\mathfrak{G})$ die *reine* n^{te} *Bettische Gruppe* von R bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$. Die Torsionsgruppe $T_n(R,\mathfrak{G})$ ist eine Untergruppe von $C_n(R,\mathfrak{G})$. Die Faktorgruppe

$$C_n(R,\mathfrak{G})\,/\,T_n(R,\mathfrak{G})=C'_n(R,\mathfrak{G})$$

heiße die *reduzierte reine* n^{te} *Bettische Gruppe* von R bei Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$.

Als Untergruppe der *kompakten* Gruppe $B_n(R,\mathfrak{P})=P_n(R)$ ist $C_n(R,\mathfrak{P})$ in $P_n(R)$ abgeschlossen und folglich kompakt. In diesem Sinne (als kompakte Gruppe) wollen wir $C_n(R,\mathfrak{P})$ mit $Z_n(R)$ bezeichnen. Auch die Faktorgruppe $P_n(R)\,/\,Z_n(R)$ ist kompakt.

IV. Die Gruppe $Z_n(R)$ besteht aus denjenigen Elementen x der Gruppe $P_n(R)$, für die $\chi(x)=0$ bei jedem Charakter *endlicher Ordnung* der kompakten Gruppe $P_n(R)$.

V. Die Gruppe $Q_n(R)$ ist mit der Faktorgruppe $P_{n+1}(R)/$ $/Z_{n+1}(R)$ stetig isomorph.

VI. Die reine n^{te} Bettische Gruppe $C_n(R,\mathfrak{G})$ ist direkte Summe der n^{ten} Torsionsgruppe $T_n(R,\mathfrak{G})$ und einer anderen — natürlich mit der reduzierten reinen n^{ten} Bettischen Gruppe $C'_n(R,\mathfrak{G})$ isomorphen — Untergruppe.

VII. Die reduzierte reine n^{te} Bettische Gruppe $C'_n(R,\mathfrak{G})$ ist durch $\mathfrak{G}$ und $Z_n(R)$ eindeutig bestimmt. Man braucht nur in der im Satz III beschriebenen Konstruktion die Gruppe $P_n(R)$ durch $Z_n(R)$ zu ersetzen.

VIII. Die Faktorgruppe

$$B_n(R,\mathfrak{G})\,/\,C_n(R,\mathfrak{G})=B'_n(R,\mathfrak{G})\,/\,C'_n(R,\mathfrak{G})$$

ist durch $\mathfrak{G}$ und $Q_{n-1}(R)$ eindeutig bestimmt. Man braucht wieder nur in der im Satz III beschriebenen Konstruktion die Gruppe $P_n(R)$ durch $Q_{n-1}(R)$ zu ersetzen.

Der kompakte Raum R heiße *n-normal,* wenn es zu jedem $\eta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß, wenn γ ein algebraischer (n, ε)-Zyklus[2]) in R mit beliebigem Koeffizientenbereiche $\mathfrak{G}$ ist, ein $(n, \mathfrak{G})$-Grenzzyklus $\{\gamma_i\}$ in R existiert, so daß γ_i η-homolog γ für fast alle i ist. Ähnlich werden *n-seminormale* und *n-quasinormale* kompakte Räume eingeführt; man erhält die Definition, indem man γ und $\{\gamma_i\}$ auf *reine* Zykeln bzw. auf Torsionszykeln einschränkt. Ist der Koeffizientenbereich $\mathfrak{G}$ vorgegeben, so spreche man von $(n, \mathfrak{G})$-*Normalität* usw.

IX. Jeder kompakte Raum ist n-quasinormal.

X. Ein (n, Γ)-seminormaler kompakter Raum ist n-seminormal.

XI. Damit der kompakte Raum R n-seminormal sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Charaktergruppe der kompakten Gruppe $Z_n(R)$ direkte Summe von höchstens abzählbar vielen zyklischen Gruppen sei.

Ist p eine Primzahl, so sei Δ_p die direkte Summe von abzählbar vielen zyklischen Gruppen φ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, wobei φ_i die endliche zyklische Gruppe der Ordnung p^i ist. Δ_p ist also eine abzählbare Abelsche Gruppe.

XII. Wenn ein kompakter R gleichzeitig (n, Γ)-seminormal[8]) und (n, Δ_p)-normal für jede Primzahl p ist, so ist R n-normal.

XIII. Damit der kompakte Raum R n-normal sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Charaktergruppe der kompakten Gruppe $P_n(R)$ direkte Summe von höchstens abzählbar vielen zyklischen Gruppen sei.

Wir nennen eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer Abelschen Gruppe *speziell*, wenn: (1) $\tau(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}$ bei jeder homomorphen Abbildung τ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, (2) $\mathfrak{H}$ immer abgeschlossen in $\mathfrak{G}$ ist, wenn man irgend einen Stetigkeitsbegriff in $\mathfrak{G}$ einführt, der $\mathfrak{G}$ zu einer kompakten Gruppe macht.

XIV. Jeder kompakte Raum R ist $(n, \mathfrak{G})$-normal, wenn die Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ dem folgenden Teilerkettensatz genügt: jede absteigende Folge von speziellen Untergruppen bricht im Endlichen ab. Dem Teilerkettensatz genügen z. B. alle endlichen Abelschen Gruppen, dann die additive Gruppe der rationalen Zahlen und die Gruppe $\mathfrak{P}$, dagegen nicht z. B. die Gruppe Γ und die Gruppen Δ_p.

G. v. Alexits (Budapest): Metrische Behandlung der Torsion von Raumkurven.

95. Kolloquium (27. VI. 1935).

Programmatisches zur Anwendung der metrischen Geometrie auf die Variationsrechnung. Von Karl Menger.

Die Theorie der geodätischen Linien in metrischen Räumen (Mathem. Annalen *103*) legt es nahe, die eindimensionalen Probleme der Variationsrechnung in eine allgemeine metrische Theorie der

---

[8]) Oder (n, Γ)-normal; die beiden Begriffe sind ja äquivalent.