Miloš Kössler

O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru. Část I

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 24 (1915), No. 41, 34 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501277

O rozvojích platných pro funkci analytickou v daném oboru.

Napsal

Miloš Kössler.

(Předloženo dne 30. října 1915.)

Předmětem tohoto pojednání jest důkaz následujících dvou vět:

Nechť značí K konečný jednoduše souvislý obor, vymezený v rovině komplexní proměnné z uzavřenou racionálnou křivkou algebraickou C.

Funkce $F(z)$ analytická v oboru K i na křivce C dá se rozvinouti v rozvoj tvaru

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \, . \, b_k(z),$$

kdež $b_k(z)$ jsou v oboru K jednoznačné funkce algebraické, vyplývající z parametrické rovnice křivky C a naprosto nezávislé na funkci $F(z)$. Funkcí tou jsou určovány jenom koefficienty A_k. Pro jednu a touž funkci $F(z)$ a jednu a touž křivku C existuje neomezený počet takových rozvojů. Pro kružnici jest nejjednodušším z nich řada Taylorova. . . . (H)

Táž věta platí i pro každou funkci $H(z)$ analytickou na křivce C a všude vně křivky C, bod nekonečný v to počítaje.

Druhá věta, do jisté míry obecnější, zní:

Nechť značí K libovolný konečný jednoduše souvislý obor, vymezený v rovině komplexní proměnné z; obor ten dá se vždy s libovolnou přesností ohraničiti uzavřenou regulární křivkou analytickou C.

Funkce $F(z)$ analytická v oboru K i na jeho hranici dá se rozvinouti v rozvoj tvaru

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \, . \, b_k(z),$$

kdež $b_k(z)$ jsou v oboru K jednoznačné funkce analytické, závislé na tvaru oboru K a naprosto nezávislé na funkci $F(z)$. Funkcí tou jsou určovány jenom koefficienty A_k. Pro jednu a touž funkci $F(z)$ a jeden a týž obor K existuje neomezený počet takových rozvojů. Nejjednodušším z nich jest polynomický rozvoj Faberův. . . . (J)

Táž věta platí i pro každou funkci $H(z)$ analytickou v oboru K_1, doplňujícím K na celou rovinu, a na hranicích toho oboru. Nejjednodušším z rozvojů jest zde rozvoj podle jistých racionálných funkcí veličiny z, majících jediný všem společný pól, obsažený v oboru K.

Platnost těchto vět jest pak rozšířena i na obory mnohonásobně souvislé.

Pojednání rozpadá se na tři oddíly. Oddíl označený I., obsahující důkaz věty (H), tvoří samostatný celek. V prvém paragrafu řešen jest pro danou parametrickou rovnici křivky C problém vnitřní a probrány podrobněji rozvoje pro funkci analytickou uvnitř ellipsy, racionálných hypocykloid a nejjednodušší epicykloidy. V druhém paragrafu jest řešen podobný problém vnější a přihlédnuto blíže k ellipse a racionálným epicykloidám. Třetí paragraf obsahuje důkaz o neomezeném počtu rozvojů a ukázány jsou specielní jejich případy pro funkci analytickou uvnitř kružnice.

Na popud prof. harvardské university Dra W. F. Osgooda byl pak proveden důkaz věty J.[1])

Prof. Osgood upozornil totiž autora na svůj důkaz věty, která tvrdí, že každý obor jednoduše souvislý může býti s libovolnou přesností omezen jednoduchou uzavřenou křivkou analytickou. Tím bylo autorovi umožněno odvoditi obecné výsledky, tvořící oddíl II. a III.

V prvním paragrafu oddílu II. poukázáno jest na důkaz pomocné věty Osgoodovy a nalezen pomocí konformního zobrazení jistý rozvoj pro funkci $F(z)$.

---

[1]) Na příslušném místě jest podotčeno, že není vždy možno větu (H) považovati za zvláštní případ věty (J).

Paragraf druhý obsahuje důkaz o neomezeném počtu rozvojů podobného typu pro funkci analytickou buď uvnitř nebo vně Osgoodovy křivky. V paragrafu třetím poukázáno jest na nejjednodušší z nich a seznáno, že jest to pro vnitřní problém polynomický rozvoj Faberův a pro vnější problém jistý analogický rozvoj podle racionálných funkcí veličiny z. Pro Faberovy polynomu odvozeny jsou při tom vzorce rekurrentní, identické s formulemi Newtonovými pro součet n-tých mocnin všech kořenů algebraické rovnice.

Odstavec III. konečně pojednává o rozvojích pro funkce analytické v oboru mnohonásobně souvislém. Rozvoje ty jsou pouhým důsledkem vyplývajícím z výsledků oddílu II. Jako příklad uveden jest nejjednodušší rozvoj pro funkci analytickou uvnitř prstenu omezeného dvěma libovolnými uzavřenými křivkami analytickými. Rozvoj ten tvoří sevšeobecnění Laurentovy řady pro prstenec kruhový.

I. Obor jednoduše souvislý omezený racionálnou křivkou algebraickou.

§ 1. Budiž C uzavřená racionálná křivka algebraická, která omezuje v rovině (x, y) jednoduše souvislý a konečný obor K.[1]) Souřadnice libovolného bodu křivky C lze vyjádřiti, jak dokázáno bylo v algebraické geometrii, pomocí dvou racionálných funkcí parametru τ ve tvaru

$$x = f_1(\tau), \quad y = g_1(\tau), \quad -\infty \leqq \tau \leqq +\infty.$$

Každé reálné hodnotě parametru v naznačeném intervallu $(-\infty, +\infty)$ odpovídá při tom jeden jediný bod křivky a i obráceně každému bodu křivky jedna jediná reálná hodnota parametru.

Všeobecnost dalších úvah nijak se neporuší, budeme-li předpokládati, že po křivce C pohybujeme se v kladném směru otáčení tenkráte, když τ probíhá reálné hodnoty od $-\infty$ přes 0 do $+\infty$.

Zaveďme místo τ nový parametr φ rovnicí

$$\tau = i\,\frac{1 + e^{i\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} = -\,cotg\,\frac{\varphi}{2}.$$

Probíhá-li nyní φ všechny hodnoty intervallu 0 až 2π, probíhá τ hodnoty $-\infty$ až $+\infty$. Rovnice křivky C obdrží tím tvar

$$x = f_2(e^{i\varphi}), \quad y = g_2(e^{i\varphi}), \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

kdež $f_2(u)$ a $g_2(u)$ jsou racionálné funkce veličiny u, které mohou obsahovati kromě reálných konstant také konstanty imaginární.[2])

---

[1]) Příklady takových křivek jsou kružnice, ellipsa, cissoidy bez dvojných bodů, astroida atd.

[2]) N. př. pro kružnici $x^2 + y^2 = a^2$ obdržíme

$x = a\,\dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad y = a\,\dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$. Tedy $f_2(u) = a\,\dfrac{u^2+1}{2u}$, $g_2(u) = a\,i\,\dfrac{1-u^2}{2u}$.

Funkce $F(z)$ komplexní proměnné $z = x + iy$, která jest analytická v oboru K i na křivce C, dá se psáti ve tvaru Cauchy-ho integralu podle křivky C

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(t)\,dt}{t-z}.$$

Značí-li na př. C jednotkovou kružnici[1]) se středem v počátku, vyplývá z Cauchyho integralu pro funkci $F(z)$ jednoduchým způsobem řada Taylorova; rozvine se totiž zlomek $\frac{1}{t-z}$ v řadu geometrickou $\frac{1}{t}\left(1 + \frac{z}{t} + \frac{z^2}{t^2} + \ldots\right)$ a integrují se pak jednotlivé členy řady. Řada Taylorova jest tedy rozvojem vyplývajícím z integrace podle kružnice. Můžeme analogicky očekávati, že z integrace podél jiné křivky C obdržíme jiný rozvoj pro funkci $F(z)$. Problém se patrně redukuje na rozvinutí zlomku $\frac{1}{t-z}$ v nějaký rozvoj konvergující pro všechna z obsažená v oboru K. K tomu nám dopomůže parametrická rovnice (1). Integrační proměnná v Cauchy-ho integrálu jest totiž

$$t = f_2(e^{i\varphi}) + i\,g_2(e^{i\varphi}),$$

místo čehož můžeme psáti prostě

$$t = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1a)$$

Při tom značí $f(\xi)$ a $g(\xi)$ obyčejné, již nesoudělné mnohočleny proměnné ξ, jichž konstanty jsou po případě čísla komplexní.

Cauchyho integral pro $F(z)$ nabude tím tvaru

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi=0}^{2\pi} F_1(\varphi)\,\frac{\dfrac{d}{d(e^{i\varphi})}\left[\dfrac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}\right] d(e^{i\varphi})}{\dfrac{f(e^{i\varphi}) - z\,g(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

kdež

$$F_1(\varphi) = F\left(\frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}\right).$$

V čitateli zlomku za integračním znaménkem můžeme patrně psáti

$$\frac{d}{d(e^{i\varphi})}\left[\frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}\right] = \frac{d}{d(e^{i\varphi})}\,\frac{f(e^{i\varphi}) - z\,g(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}.$$

---

[1]) Jednotkovou kružnicí rozumíme zde i všude v dalším kružnici opsanou poloměrem rovným jedné v rovině komplexní proměnné kolem bodu nullového jakožto středu.

Všimněme si nyní blíže polynomů $g(\xi)$ a $f(\xi) - z\,g(\xi)$, které mají pro další úvahu význam fundamentální. Při tom předpokládáme stále, že z neleží na křivce C.

Pišme

$$\left.\begin{aligned} g(\xi) &= b_0(\xi-\beta_1)(\xi-\beta_2)\ldots\ldots(\xi-\beta_m), \\ f(\xi) - z\,g(\xi) &= a_0(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)\ldots\ldots(\xi-\alpha_n). \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Patrně jest $n \geqq m$; při tom budiž

$$\begin{aligned} |\beta_1| \leqq |\beta_2| \leqq |\beta_3| \leqq \ldots\ldots \leqq |\beta_m|, \\ |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \leqq \ldots\ldots \leqq |\alpha_n|. \end{aligned}$$

Čísla β jsou konstanty, případně komplexní, závislé na tvaru křivky C a nezávislé na proměnné z.

Čísla α — kořeny to alg. rovnice $f(\xi) - z\,g(\xi) = 0$ — jsou algebraické funkce veličiny z, závislé na tvaru křivky C. Dokážeme větu:

Žádné z čísel α nebo β není co do absolutní hodnoty rovno jedné. $\Big\}\ldots\ldots (A)$

Máme tedy dokázati platnost nerovnin

$$\left.\begin{aligned} f(\iota^{i\varphi}) - z\,g(\iota^{i\varphi}) &\gtrless 0, \\ g(\iota^{i\varphi}) &\gtrless 0 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3a)$$

pro každé φ intervallu 0 až 2π. Pro pevné $\varphi = \varphi_1$ z tohoto intervallu jsou celkem čtyři možnosti. Buď platí nerovniny (3a), nebo

1. $f(\iota^{i\varphi_1}) - z\,g(\iota^{i\varphi_1}) = 0,$
   $g(\iota^{i\varphi_1}) = 0,$

nebo

2. $f(\iota^{i\varphi_1}) - z\,g(\iota^{i\varphi_1}) \gtrless 0,$
   $g(\iota^{i\varphi_1}) = 0,$

nebo konečně

3. $f(\iota^{i\varphi_1}) - z\,g(\iota^{i\varphi_1}) = 0,$
   $g(\iota^{i\varphi_1}) \gtrless 0.$

Jiná možnost neexistuje. Případ 1. není možný, neboť kdyby platilo 1., bylo by také

$$f(\iota^{i\varphi_1}) = 0, \quad g(\iota^{i\varphi_1}) = 0.$$

To však znamená, že algebraické rovnice $f(\xi) = 0$, $g(\xi) = 0$ mají společný kořen $\iota^{i\varphi_1}$, což jsme vyloučili (viz 1a) předpokladem nesoudělnosti polynomů $f(\xi)$ a $g(\xi)$.

Kdyby platila možnost 2., bylo by také

$$g(\iota^{i\varphi_1}) = 0, \quad f(\iota^{i\varphi_1}) \gtrless 0, \quad \text{čili}$$

$$\frac{f(\iota^{i\varphi_1})}{g(\iota^{i\varphi_1})} = \infty,$$

to jest: Křivce C příslušel by podle (1 a) pro $\varphi = \varphi_1$ bod nekonečný, což jsme vyloučili.

Kdyby konečně platila možnost 3., bylo by

$$z = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}$$

a tedy podle (1 a) by z leželo na křivce C, což jsme vyloučili. Zbývá tedy jen čtvrtá možnost vyjádřená nerovninami (3 a). Tím jest věta (A) dokázána.

Dosaďme nyní do Cauchyho integrálu (2) pravé strany rovnic (3), kladouce při tom

$$\frac{\frac{d}{d\xi}\,\frac{f(\xi) - z\,g(\xi)}{g(\xi)}}{\frac{f(\xi) - z\,g(\xi)}{g(\xi)}} = \frac{d}{d\xi}\log\frac{f(\xi) - z\,g(\xi)}{g(\xi)}$$

a tedy

$$\frac{d}{d\xi}\log\frac{f(\xi) - z\,g(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi - \alpha_1} + \frac{1}{\xi - \alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\xi - \alpha_n} - \left[\frac{1}{\xi - \beta_1} + \frac{1}{\xi - \beta_2} + \ldots + \frac{1}{\xi - \beta_m}\right],$$

kdež místo hranaté závorky na pravé straně možno jest také psáti $\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}$. Tak obdržíme místo (2) rovnici

$$\left.\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} F_1(\varphi)\,d(e^{i\varphi})\,.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^{i\varphi} - \alpha_k} - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} F_1(\varphi)\,d(e^{i\varphi})\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{e^{i\varphi} - \beta_k}, \\ &\text{nebo} \\ F(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} F_1(\varphi)\,d(e^{i\varphi})\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^{i\varphi} - \alpha_k} - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} F_1(\varphi)\,d(e^{i\varphi})\,\frac{g'(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}\ ^{1)} \end{aligned}\right\} (4)$$

Chceme-li nyní nalézti pro $F(z)$ rozvoj, který by byl sevšeobecněním řady Taylorovy, musíme rozvinouti analogicky jako při kružnici, jednotlivé zlomky $\frac{1}{e^{i\varphi} - \alpha_k}$, $\frac{1}{e^{i\varphi} - \beta_k}$ v řady geometrické. To jest vždy možné, protože jsme dokázali větou (A), že každé číslo α_k nebo β_k jest svou absolutní hodnotou buď větší nebo menší než jedna.

Zbývá ještě odděliti ona čísla α a β, jichž absolutní hodnota jest menší než jedna, od těch, jichž abs. hodnota jest větší než jedna.

Čísla β nalezneme řešením rovnice $g(\xi) = 0$. Jsou to konstanty závislé jedině na tvaru křivky C. Jsou naprosto neodvislá od hodnoty z a od tvaru funkce $F(z)$. Můžeme je tedy pokládati za čísla známá. Budiž p

[1]) Pro pozdější použití připomeňme, že pravá strana rovnice (2) a tedy i obou rovnic (4) jest rovna nulle, leží-li z vně křivky C.

počet čísel β, která jsou svou absolutní hodnotou menší než jedna a hledejme počet čísel α, menších svou absolutní hodnotou než jedna. Protože α jsou funkcemi veličiny z, mohl by tento počet, jejž označíme písmenou r, býti také závislým na z. Ukáže se však, že tomu tak není.

Užijme první z rovnic (4) na funkci $F(z) = 1$.

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi}\frac{d(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-\alpha_k} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int_0^{2\pi}\frac{d(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-\beta_k}.$$

Jest známo, že

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{d(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-u} = \begin{cases} 1, \text{ pro } |u| < 1 \\ 0, \text{ pro } |u| > 1. \end{cases}$$

Tedy

$$1 = r - p,\text{[1])}$$

$$r = p + 1 \quad \ldots \quad (4a)$$

Tím dokázali jsme větu:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Počet čísel } \alpha \text{, která svou absolutní hodnotou jsou menší} \\ \text{než jedna, jest nezávislý na veličině } z \text{, pokud jen } z \text{ zůstává} \\ \text{uvnitř křivky } C.\end{array}\right\} \ldots (B)$$

Jest tedy

$$|\alpha_k| < 1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots p + 1),$$
$$|\alpha_k| > 1 \quad (k = p + 2, \ldots n).$$

Tím umožněn jest rozvoj zlomku $\frac{1}{e^{i\varphi}-\alpha_k}$, nebo $\frac{1}{e^{i\varphi}-\beta_k}$ v geometrickou řadu. Jest tedy na př.

$$\frac{1}{e^{i\varphi}-\alpha_1} = \frac{1}{e^{i\varphi}}(1 + \alpha_1 e^{-i\varphi} + \alpha_1^2 e^{-2i\varphi} + \alpha_1^3 e^{-3i\varphi} + \ldots).$$

Řada tato konverguje pro všechna z ležící uvnitř křivky C absolutně a mimo to při pevně zvoleném z a tedy α_1 pro všechna reálná φ absolutně a stejnoměrně; jest tedy dovoleno integrovati ji člen za členem, to jest

$$\int_0^{2\pi} F_1(\varphi)\frac{e^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i\varphi}-\alpha_1} = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_1^k \cdot \int_0^{2\pi}F_1(\varphi)\,e^{-ki\varphi}\,d\varphi.$$

---

[1]) Kdyby bod z ležel vně křivky C, bylo by podle poznámky k rovnici (4) pro $F(z) = 1$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi}\frac{d(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-\alpha_k} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int_0^{2\pi}\frac{d(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}-\beta_k}, \text{ čili}$$

$$r = p.$$

Tak dostáváme místo rovnic (4)

$$\left.\begin{aligned}
F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_{p+1}^k - \beta_1^k - \beta_2^k - \ldots - \beta_p^k) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} B_k (\alpha_{p+2}^{-k} + \alpha_{p+3}^{-k} + \ldots + \alpha_n^{-k} - \beta_{p+1}^{-k} - \beta_{p+2}^{-k} - \ldots - \beta_m^{-k}), \\
&\text{nebo také} \\
F(z) &= A + \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_{p+1}^k) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} B_k (\alpha_{p+2}^{-k} + \alpha_{p+3}^{-k} + \ldots + \alpha_n^{-k}),
\end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

kdež

$$A = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\varphi)\, \frac{e^{i\varphi} g'(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}\, d\varphi,$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\varphi)\, e^{-ki\varphi}\, d\varphi, \quad B_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\varphi)\, e^{ki\varphi}\, d\varphi.$$

V prvním z rozvojů (5) jest nutno klásti v tom případě, že některé $\beta_r' = 0$, místo β_r^0 číslo 1.

Místo nekonečných součtů $\sum\limits_{k=0,1}^{\infty}$ mohli jsme také vzíti jen součet prvních N nebo $N+1$ členů $\sum\limits_{k=0,1}^{N}$ a připojiti k rozvoji zbytek R_N, jehož tvar čtenář si snadno sám odvodí.

Aby rozvoj (5) měl praktický význam, jest nutno ještě dokázati, že algebraické funkce veličiny z definované součty $\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_{p+1}^k$ nebo $\alpha_{p+2}^{-k} + \ldots + \alpha_n^{-k}$ jsou *jednoznačné* funkce veličiny z, pokud jen tato zůstává uvnitř křivky C.

Racionálná funkce (1 *a*)

$$z = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

definuje nám $\xi(z)$ jako n-značnou funkci inversní. Funkce $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z), \ldots . \alpha_n(z)$ jsou jednotlivé větve této funkce. Pro $\xi(z)$ sestrojíme podle známých návodů[1]) n-listou Riemannovu plochu a na této ploše narýsujeme křivku C. Vnitřek této křivky buď vůbec není prostoupen rozvětvovacím řezem Riemannovy plochy anebo jest jím prostoupen, kterážto možnost nastane tenkráte, když některý z rozvětvovacích bodů funkce $\xi(z)$ leží uvnitř křivky C. V prvém případě jest všech n větví funkce $\xi(z)$ pro celý vnitřek C jednoznačně určeno a tedy také součty jejich mocnin, o které se nám jedná. Uvažme nyní druhý případ, když totiž

[1]) Viz n. př. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie I. B. 2. Aufl., p. 398.

vnitřek křivky C jest prostoupen rozvětvovacím řezem. Kterákoliv větev funkce $\xi(z)$ jest na Riemannově ploše uvnitř křivky C analytickou a tedy také spojitou funkcí veličiny z; vyňaty jsou při tom jen rozvětvovací body funkce $\xi(z)$, jichž spojením právě vznikne řez rozvětvovací. Zvolme libovolný regulární bod z_0 na některém listu Riemannovy plochy. Přiřazená hodnota funkce $\xi(z)$ budiž $\alpha_2(z_0)$, při čemž předpokládejme, že $|\alpha_2(z_0)| < 1$.

Postupujeme-li nyní, vycházejíce z bodu z_0, po libovolné dráze uvnitř křivky C, obdržíme podle předcházejícího pro $\alpha_2(z)$ hodnoty spojitě se měnící. Protože pak podle věty (A) při tom $|\alpha_2(z)|$ nemůže nabýti hodnoty rovné jedné, musí býti stále $|\alpha_2(z)| < 1$. Vrátíme-li se tedy opět do bodu z_0, překročivše libovolněkráte řez rozvětvovací, obdržíme hodnotu $\alpha_s(z_0)$, o níž bude opět platiti $|\alpha_s(z_0)| < 1$. Touž úvahu mohli bychom opakovati o každé větvi funkce $\xi(z)$, která v bodě z_0 má absolutní hodnotu menší než jedna. Věta (B) praví, že takovýchto větví v bodě z_0 jest $p + 1$. Označili jsme je již dříve $\alpha_1(z_0)$, $\alpha_2(z_0)$, $\alpha_3(z_0)$, $\ldots$ $\alpha_{p+1}(z_0)$.

Při opsání uzavřené dráhy, vycházející z bodu z_0, vyměňují se tedy tyto hodnoty navzájem. To znamená, že symmetrická funkce jejich $\alpha_1^k(z_0) + \alpha_2^k(z_0) + \ldots + \alpha_{p+1}^k(z_0)$ se při tom nezmění. Jest tedy tento součet pro všechna z uvnitř křivky C jednoznačnou analytickou funkcí veličiny z. Podle známých pravidel nejsou z toho vyňaty ani rozvětvovací body funkce $\xi(z)$. Úplně obdobnou úvahou bychom dokázali, že také součet $\alpha_{p+2}^{-k}(z) + \alpha_{p+3}^{-k}(z) + \ldots + \alpha_n^{-k}(z)$ jest analytickou funkcí uvnitř křivky C.

Shrneme-li dosavadní výsledky, obdržíme větu:

> Funkce $F(z)$ analytická uvnitř a na obvodě křivky C dá se rozvinouti v rozvoj (5), v němž čísla β jsou závislá jedině na rovnici křivky C, čísla α jednak na rovnici křivky C, jednak na proměnné z avšak ani α ani β nezávisí na tvaru funkce $F(z)$. Na tvaru této funkce jsou závislé jedině koeficienty rozvoje, totiž čísla A_k a B_k. Při tom jsou čísla α, β určena rovnicemi (3) a polynomy $f(\xi)$, $g(\xi)$ opět rovnicí křivky (1a) a (1). Funkce, podle nichž rozvoj (5) jest proveden, jsou jednoznačné. . . . (D)

Z toho opět vyplývá důsledek: Má-li křivka C několik parametrických rovnic tvaru (1), přísluší téže funkci $F(z)$ několik různých rozvojů typu (5). Dokážeme dokonce v paragrafu třetím, že každá křivka C má neomezený počet rovnic typu (1) a tedy každá funkce $F(z)$ neomezený počet rozvojů typu (5).

Probeřeme nyní podrobněji zvláštní skupinu křivek C, při nichž všech n čísel α splňuje nerovninu $|\alpha| < 1$. Z toho plynou rovnice

$$r = n, \quad n = p + 1, \quad p = n - 1,$$

kdež p značí počet čísel β splňujících nerovninu $|\beta| < 1$. Protože pak jest podle (3) buď $m < n$, anebo $m = n$, jest buď $m = n - 1$ a pak jsou tedy všechna $|\beta_k| < 1$, anebo $m = n$ a tedy jen jediné β má absolutní hodnotu větší než 1.

V druhém tvaru rozvoje (5) odpadne část obsahující záporné mocniny čísel α a obdržíme tedy

$$F(z) = A + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \, . \, s_k \, , \qquad \qquad (5a)$$

kdež

$$s_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_n^k .$$

Rozeznávejme nyní dva případy, které jsme svrchu rozlišili.

1. $m = n - 1$; všechna čísla β mají absolutní hodnotu menší než jedna. Polynomy $g(\xi)$ a $f(\xi)$ mají stupně n-tý a $(n-1)$-ný. Jest tedy

$$g(\xi) = B_0 \xi^{n-1} + B_1 \xi^{n-2} + \ldots + B_{n-1},$$
$$f(\xi) = \xi^n + C_1 \xi^{n-1} + C_2 \xi^{n-2} + \ldots + C_n .$$

Pak jest

$$f(\xi) - z g(\xi) = \xi^n + (C_1 - B_0 z) \xi^{n-1} + (C_2 - B_1 z) \xi^{n-2} + \ldots + (C_n - B_{n-1} z).$$

s_k jsou součty k-tých mocnin *všech* kořenů rovnice $f(\xi) - z g(\xi) = 0$. Jest tedy podle Newtonových rekurrentních formulí

$$s_0 = n, \qquad s_1 = B_0 z - C_1,$$

$$s_k + (C_1 - B_0 z) s_{k-1} + (C_2 - B_1 z) s_{k-2} + \ldots +$$
$$+ (C_{k-1} - B_{k-2} z) s_1 + k (C_k - B_{k-1} . z) = 0, \quad (k \leqq n)$$

$$s_k + (C_1 - B_0 z) s_{k-1} + (C_2 - B_1 z) s_{k-2} + \ldots + (C_n - B_{n-1} . z) s_{k-n} = 0,$$
$$(k > n).$$

Jest tedy s_k polynom k-tého stupně proměnné z.

Tak obdrželi jsme polynomický rozvoj pro analytickou funkci $F(z)$ obdobný rozvoji Faberovu.[1])

V oddílu II. ukážeme, že takový rozvoj existuje pro každou regulární analytickou křivku C, uzavírající obor jednoduše souvislý.

2. $m = n$; polynomy $g(\xi)$ a $f(\xi)$ mají nyní tvar

$$g(\xi) = B_0 \xi^n + B_1 \xi^{n-1} + \ldots . + B_n$$
$$f(\xi) = \xi^n + C_1 \xi^{n-1} + \ldots . + C^n$$

a tedy

$$f(\xi) - z g(\xi) = \xi^n (1 - B_0 z) + \xi^{n-1}(C_1 - B_1 z) + \ldots + (C_n - B_n z).$$

Zde dostáváme pro s_k v rozvoji (5a) racionalné funkce lomené, vyplývající z rekurrentních formulí

[1]) M. Faber, Ueber polynomische Entwickelungen (M. A. LVII., 1913, p. 389 a LXIV., 1907, p. 118).

$$s_0 = n,$$

$$s_k(1-B_0z)+s_{k-1}(C_1-B_1z)+\ldots+s_1(C_{k-1}-B_{k-1}z)+k(C_k-B_kz)=0,$$
$$(k \leqq n)$$

$$s_k(1-B_0z)+s_{k-1}(C_1-B_1z)+\ldots+s_{k-n}(C_n-B_nz)=0, \quad (k>n).$$

Parametrickou rovnici pro příslušnou křivku C bychom obdrželi, kdybychom ve vzorci $x+iy=\dfrac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}$ separovali také na pravé straně reálnou a imaginárnou část. Nutno však připomenouti, že nikoliv všechny takto vzniklé křivky C vyhovují všem podmínkám pro rozvoj (5*a*); jsou to jenom ony z nich, které omezují prostor jednoduše souvislý.

Obecné vývody tohoto odstavce stanou se názornějšími propočtením zvláštních případů. Odvodíme si polynomické po případě racionálné rozvoje pro funkce analytické uvnitř ellipsy a racionálné hypocykloidy a jako třetí příklad rozvoj pro funkce analytické uvnitř nejjednodušší epicykloidy.

1. Ellipsa jest definována na př. rovnicemi typu (1)

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi.$$

Podle (1*a*) jest tedy

$$x+iy=\frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}=\frac{(a+b)e^{2i\varphi}+(a-b)}{2e^{i\varphi}}.$$

Rovnice (3) jsou zde

$$g(\xi)\equiv 2\xi=0,$$

$$f(\xi)-zg(\xi)\equiv(a+b)\xi^2-2z\xi+a-b=0.$$

Tedy jest

$$\beta_1=0; \qquad p=1; \qquad r=2.$$

Z toho vyplývá, že oba kořeny α mají absolutní hodnotu menší než jedna.

$$\alpha_1=\frac{z+\sqrt{z^2-\eta^2}}{a+b}; \qquad \alpha_2=\frac{z-\sqrt{z^2-\eta^2}}{a+b}; \qquad (\eta^2=a^2-b^2).$$

Formule (5*a*) poskytuje nám polynomický rozvoj pro každou funkci $F(z)$ analytickou uvnitř ellipsy.

$$F(z)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\frac{(z+\sqrt{z^2-\eta^2})^k+(z-\sqrt{z^2-\eta^2})^k}{(a+b)^k}\ldots. \quad (6)$$

$$A_p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F\left(\frac{(a+b)e^{2i\varphi}+a-b}{2e^{i\varphi}}\right)e^{-pi\varphi}d\varphi.^{1)}$$

[1]) Tento rozvoj odvodil poprvé jiným způsobem M. Picard (Traité d'analyse II., p. 317).

Pro $a = b$, $\eta = 0$ redukuje se ellipsa na kružnici a přirozeně také rozvoj na řadu Taylorovu.

Polární rovnice ellipsy poskytne nám pro touž funkci $F(z)$ jiný rozvoj. Rovnice ta zní

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \qquad \left(p = \frac{b^2}{a}, \ \varepsilon = \frac{\eta}{a}\right).$$

Tedy

$$x = \eta + r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi,$$

$$x + i y = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} = \frac{(a^2 + b^2) e^{2i\varphi} + 2 a \eta e^{i\varphi} + \eta^2}{\eta e^{2i\varphi} + 2 a e^{i\varphi} + \eta},$$

$$g(\xi) \equiv \eta \xi^2 + 2 a \xi + \eta = 0,$$

$$f(\xi) - z g(\xi) \equiv (a^2 + b^2) \xi^2 + 2 a (\eta - z) \xi + \eta (\eta - z) = 0.$$

Z toho vyplývá

$$\beta_1 = \frac{b - a}{\eta}, \qquad \beta_2 = -\frac{b + a}{\eta},$$

$$|\beta_1| < 1, \qquad |\beta_2| > 1; \qquad p = 1, \qquad r = 2$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{a(z - \eta) \pm b\sqrt{z^2 - \eta^2}}{a^2 + b^2 - \eta z}.$$

Protože jest $r = 2$, budou míti oba kořeny α absolutní hodnotu menší než jedna. Užijeme tedy pro rozvoj funkce $F(z)$ analytické uvnitř ellipsy opět vzorce (5*a*).

$$F(z) = A + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{[a(z-\eta) + b\sqrt{z^2-\eta^2}]^k + [a(z-\eta) - b\sqrt{z^2-\eta^2}]^k}{(a^2 + b^2 - \eta z)^k}, \quad \ldots (7)$$

$$A = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{(a^2 + b^2) e^{2i\varphi} + 2 a \eta e^{i\varphi} + \eta^2}{\eta e^{2i\varphi} + 2 a e^{i\varphi} + \eta}\right) \frac{\eta e^{2i\varphi} + a e^{i\varphi}}{\eta e^{2i\varphi} + 2 a e^{i\varphi} + \eta}\, d\varphi,$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{(a^2 + b^2) e^{2i\varphi} + 2 a \eta e^{i\varphi} + \eta^2}{\eta e^{2i\varphi} + 2 a e^{i\varphi} + \eta}\right) e^{-ki\varphi}\, d\varphi.$$

Položíme-li $b = a$, $\eta = 0$, redukuje se opět ellipsa na kruh a rozvoj pro $F(z)$ ovšem opět na řadu Taylorovu.

2. Racionálná *hypocykloida* vznikne, když volí se kružnice o poloměru $\frac{a}{n}$ beze smýkání po vnitřním obvodu pevné kružnice o poloměru a, jejíž střed jest v počátku souřadnic. Bod pohyblivé kružnice rýsuje pak v tom případě, že n jest celistvé číslo, racionálnou hypocykloidu, jejíž rovnici možno dáti parametrický tvar:

$$x = \frac{a}{n}\Big((n-1)\cos\varphi + \cos(n-1)\varphi\Big),$$
$$y = \frac{a}{n}\Big((n-1)\sin\varphi - \sin(n-1)\varphi\Big).$$

Zde jest tedy

$$x + i\,y = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} = \frac{a(n-1)\,e^{ni\varphi} + a}{n\,e^{(n-1)i\varphi}};$$

$$g(\xi) \equiv n\,\xi^{n-1} = 0,$$

$$f(\xi) - z\,g(\xi) \equiv a(n-1)\,\xi^n - n\,z\,\xi^{n-1} + a = 0;$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{n-1} = 0, \qquad p = n-1, \qquad r = p + 1 = n;$$

protože $r = n$, bude všech n kořenů α míti absolutní hodnotu menší než jedna. Můžeme tedy opět užíti vzorce (5*a*). Funkce analytická uvnitř dané hypocykloidy má rozvoj

$$F(z) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,s_k. \qquad\qquad (8)$$

kdež

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{a(n-1)\,e^{ni\varphi} + a}{n\,e^{(n-1)i\varphi}}\right) e^{-ki\varphi}\,d\varphi.$$

Součty mocnin s_k určí se Newtonovými vzorci z rovnice

$$\xi^n - \frac{n}{n-1}\,\frac{z}{a}\,\xi^{n-1} + \frac{1}{n-1} = 0.$$

Z té plyne

$$s_0 = n, \qquad s_k = \left[\frac{n\,.\,z}{(n-1)\,a}\right]^k, \qquad (k \leqq n-1)$$

$$s_k = \frac{n\,.\,z}{(n-1)\,a}\,s_{k-1} - \frac{1}{n-1}\,s_{k-n}, \qquad (k \geqq n).$$

Rozvoj pro $F(z)$ má tedy prvních n členů:

$$A_0 + B_1\left(\frac{z}{a}\right) + B_2\left(\frac{z}{a}\right)^2 + B_3\left(\frac{z}{a}\right)^3 + \ldots + B_{n-1}\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1},$$

kdež

$$B_k = \left(\frac{n}{n-1}\right)^k . \, A_k.$$

Tato část rozvoje postupuje podle mocnin zlomku $\frac{z}{a}$ a shoduje se tedy s řadou Taylorovou. Členy další však se již liší tím, že nastoupí místo pouhé mocniny zlomku $\frac{z}{a}$ polynom tohoto zlomku. Tato vlastnost rozvoje (8) vystihuje úplně geometrický tvar hypocykloidy.

Pro velké n jest totiž hypocykloida podobna ozubenému kolu s n ostrými zuby a s mělkými obloukovitými mezerami mezi nimi.

Čím větší jest n, tím mělčí jsou mezery mezi zuby a tím více se hypocykloida blíží pevné kružnici o poloměru a. Konverguje-li n k nekonečnému, přejde konečně hypocykloida v kružnici o poloměru a; příslušný rozvoj pro funkci analytickou uvnitř hypocykloidy přejde pak v řadu Taylorovu; jest totiž

$$\lim_{n=\infty} s_k = \left(\frac{z}{a}\right)^k,$$

$$\lim_{n=\infty} A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(a\,e^{i\varphi})\,e^{-ki\varphi}\,d\varphi.$$

3. Příklad na rozvoj typu (5) pokračující podle algebraických funkcí obdržíme na př. pro funkci $F(z)$ analytickou uvnitř a na obvodu křivky dané parametrickou rovnicí:

$$x = a\,(2\cos\varphi - \cos 2\varphi),$$
$$y = a\,(2\sin\varphi - \sin 2\varphi).$$

Jest to nejjednodušší epicykloida, která vznikne, když se valí kružnice o poloměru a po vnějším obvodu stejné kružnice pevné se středem v počátku. Zde jest

$$x + iy = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} = 2\,a\,e^{i\varphi} - a\,e^{2i\varphi}$$

$$g(\xi) \equiv 1, \qquad (\beta \text{ neexistuje};\ p = 0,\ \ r = 1);$$

$$f(\xi) - z\,g(\xi) \equiv 2\,a\,\xi - a\,\xi^2 - z = 0$$

$$\alpha_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{z}{a}}.$$

Protože $r = 1$ jest jen jediný kořen α co do absolutní hodnoty menší než 1. Abychom určili, který z obou kořenů jest to, stačí učiniti tak pro libovolný bod z, ležící uvnitř křivky. Jest to na př. bod $z = 0$. Pak jest patrně

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2.$$

Jest tedy $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| > 1$ pro každé z uvnitř křivky. Funkce $F(z)$ analytická uvnitř křivky má tedy rozvoj typu (5)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(1 - \sqrt{1 - \frac{z}{a}}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(1 + \sqrt{1 - \frac{z}{a}}\right)^{-k},$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(2\,a\,e^{i\varphi} - a\,e^{2i\varphi})\,e^{-ki\varphi}\,d\varphi,$$

$$B_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(2\,a\,e^{i\varphi} - a\,e^{2i\varphi})\,e^{ki\varphi}\,d\varphi.$$

Ukážeme ještě, že funkce v rozvoji užité jsou jednoznačné pro všechna z ležící uvnitř křivky.

Dvojznačná funkce

$$\xi(z) = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{z}{a}}$$

má v konečnu rozvětvovací bod $z = a$, ležící na obvodě křivky. Rozvětvovací řez příslušné Riemannovy plochy můžeme tedy vésti z tohoto bodu do nekonečna tak, že vnitřek křivky nebude jím prostoupen. Obě větve funkce $\xi(z)$ jsou tedy jednoznačné analytické funkce pro všechna z uvnitř křivky.

§ 2. V paragrafu prvém nalezli jsme rozvoj (5) pro funkci analytickou uvnitř a na obvodě křivky C. Rozřešili jsme tím, jak stručně chceme říkati problém vnitřní.

Obraťme se nyní k řešení problemu vnějšího, to jest k hledání rozvoje pro funkci $H(z)$ analytickou a konečnou všude vně křivky C a na jejím obvodě. K vnějším bodům křivky počítejme také bod nekonečný a předpokládejme dále, že funkce $H(z)$ má v něm nullový bod prvého řádu, to jest, že

$$\lim_{z=\infty} H(z) = 0, \qquad \lim_{z=\infty} z \,.\, H(z) = A,$$

kdež A jest konečná konstanta.

Tím se nijak nezříkáme všeobecnosti. Neboť značí-li $H_1(z)$ funkci analytickou a konečnou všude vně křivky C a na jejím obvodě beze všech dalších předpokladů, dá se vždy kolem počátku opsati kružnice jistým poloměrem a tak, že křivka C leží celá uvnitř této kružnice. Funkce $H_1(z)$ bude pak analytickou na obvodě této kružnice a všude vně kružnice. Pro funkci takovou platí, jak známo, rozvoj Laurentův

$$H_1(z) = C_0 + C_1\left(\frac{a}{z}\right)^1 + C_2\left(\frac{a}{z}\right)^2 + C_3\left(\frac{a}{z}\right)^3 + \ldots .$$

Liší se tedy $H(z)$ od $H_1(z)$ nanejvýš o konstantu additivní C_0.

Funkce $H(z)$ dá se psáti ve tvaru Cauchyho integralu

$$H(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{H(t)\,dt}{t - z}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

kdež z značí bod vně křivky C, definované rovnicemi (1 a) nebo (1) a integrace děje se v kladném směru otáčení.[1]) Pro integrační proměnnou t užijeme vzorce (1 a)

$$t = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})},$$

[1]) Vlastně jest $H(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{H(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{H(t)\,dt}{t-z}$, kdež integrál první vztahuje se k nekonečné kružnici. Tento jest však podle supposice, kterou jsme o $H(z)$ učinili, roven nulle.

takže obdržíme místo (9)

$$H(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} H\left(\frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}\right)\frac{\frac{d}{d(e^{i\varphi})}\left(\frac{f(e^{i\varphi}) - z\,g(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}\right)}{\frac{f(e^{i\varphi}) - z\,g(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}}\,d(e^{i\varphi}) \ldots (9a)$$

Zachovávajíce označení vzorců (3), seznáme, že zůstává v platnosti věta A, takže ze vzorce ($9a$) dostáváme rovnici analogickou vzorci (4)

$$\left.\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} H_1(\varphi)\,d(e^{i\varphi})\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{e^{i\varphi}-\beta_k} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} H_1(\varphi)\,d(e^{i\varphi})\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^{i\varphi}-\alpha_k}, \\ &\text{nebo také} \\ H(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} H_1(\varphi)\,\frac{d(e^{i\varphi})\,.\,g'(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} H_1(\varphi)\,d(e^{i\varphi})\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e^{i\varphi}-\alpha_k}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (10)$$

kdež

$$H_1(\varphi) = H\left(\frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}\right).$$

Při tom jsou opět β_k a α_k kořeny rovnic

$$g(\xi) = 0; \quad f(\xi) - z\,g(\xi) = 0.$$

Značí-li opět p počet kořenů β menších svou absolutní hodnotou než 1 a r počet takových kořenů α, bude podle poznámky ke vzorci ($4a$)

$$r = p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10a)$$

Platí tedy věta B i pro z ležící vně křivky C. Jest tedy

$$|\alpha_k| < 1, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots p)$$
$$|\alpha_k| > 1, \quad (k = p+1, p+2, \ldots n).$$

Pro $H(z)$ dostáváme rozvoj analogický rozvoji (5)

$$\left.\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_p^k - \beta_1^k - \beta_2^k \ldots \beta_p^k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\alpha_{p+1}^{-k} + \alpha_{p+2}^{-k} + \ldots + \alpha_n^{-k} - \beta_{p+1}^{-k} - \beta_{p+2}^{-k} - \ldots - \beta_m^{-k}),^{1)} \\ &\text{nebo také} \\ H(z) &= A + \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\alpha_1^k + \alpha_2^k + \ldots + \alpha_p^k) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\alpha_{p+1}^{-k} + \alpha_{p+2}^{-k} + \ldots + \alpha_n^{-k}), \end{aligned}\right\} \ldots (11)$$

[1]) V případu, že některé $\beta_r = 0$ nutno jest klásti místo β_r^0 číslo 1.

kdež

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(\varphi)\,\frac{e^{i\varphi}\,g'(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}\,d\varphi,$$

$$A_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(\varphi)\,e^{-ki\varphi}\,d\varphi, \quad B_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(\varphi)\,e^{ki\varphi}\,d\varphi.$$

Na tvaru funkce $H(z)$ jsou v rozvoji (11) závislá jedině čísla A_k a B_k.

Zvláštní skupinu křivek C vytvoří zde ony, pro něž všech n čísel α splňuje nerovninu $|\alpha| > 1$. Pak jest $r = 0$ a tedy podle (10a) také $p = 0$; jinak řečeno, jsou všechna α i β co do absolutní hodnoty větší než jedna. V druhém rozvoji (11) odpadne první součet a dostáváme

$$H(z) = A + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\,s_{-k}, \qquad (11a)$$

kdež

$$s_{-k} = \alpha_1^{-k} + \alpha_2^{-k} + \ldots \alpha_n^{-k}$$

jest součet $(-k)$-tých mocnin *všech* kořenů rovnice

$$f(\xi) - z\,g(\xi) = 0.$$

Jest tedy s_{-k} racionálná funkce veličiny z, která se dá vypočísti pomocí Newtonových rekurrentních formulí.

Užívání vzorců ukážeme opět na dvou zvláštních případech.

1. Ellipsa $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ dává

$$x + iy = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} = \frac{(a+b)\,e^{2i\varphi} + (a-b)}{2\,e^{i\varphi}},$$

$$g(\xi) \equiv 2\,\xi = 0; \quad f(\xi) - z\,g(\xi) \equiv (a+b)\,\xi^2 - 2\,z\,\xi + (a-b) = 0.$$

$$\beta_1 = 0, \quad p = 1 \quad \text{a tedy} \quad r = 1.$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - \eta^2}}{a+b}, \qquad (\eta^2 = a^2 - b^2).$$

Protože $r = 1$, jest jen jeden z kořenů α co do absolutní hodnoty větší než jedna pro všechna z ležící vně ellipsy. Klademe-li na př. $z = \infty$, shledáme $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \infty$ a tedy jest vždy $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| > 1$.

Funkce $H(z)$ analytická vně a na obvodě ellipsy má tedy rozvoj (11)

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{z - \sqrt{z^2 - \eta^2}}{a+b}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{a+b}{z + \sqrt{z^2 - \eta^2}}\right)^k,$$

$$A_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H\left(\frac{(a+b)\,e^{2i\varphi} + a - b}{2\,e^{i\varphi}}\right) e^{-ki\varphi}\,d\varphi,$$

$$B_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H\left(\frac{(a+b)\,e^{2i\varphi} + a - b}{2\,e^{i\varphi}}\right) e^{ki\varphi}\,d\varphi.$$

Protože však

$$\frac{z - \sqrt{z^2 - \eta^2}}{a + b} = \frac{a - b}{z + \sqrt{z^2 - \eta^2}},$$

můžeme také psáti

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k (a-b)^k + B_k (a+b)^k}{(z + \sqrt{z^2 - \eta^2})^k}.$$

Dvojznačná funkce

$$\xi(z) = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - \eta^2}}{a + b}$$

má dva rozdvojovací body pro $z = \eta$ a pro $z = -\eta$; bod $z = \infty$ není bodem rozdvojovacím.

Na příslušné Riemannově ploše probíhá tedy rozdvojovací řez od bodu $z = \eta$ k bodu $z = -\eta$ a může tedy býti veden celý uvnitř ellipsy. Z toho vyplývá, že obě větve funkce $\xi(z)$ jsou pro body ležící vně ellipsy jednoznačné a analytické.

Ellipsa redukuje se na kružnice pro $a = b$, $\eta = 0$, rozvoj pro $H(z)$ redukuje se pak na řadu Laurentovu

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{a}{z}\right)^k.$$

2. Racionálná *epicykloida* vznikne, když se valí kružnice o poloměru $\frac{a}{n}$ beze smýkání po vnějším obvodu pevné kružnice o poloměru a, jejíž střed jest v počátku souřadnic. Bod pohyblivé kružnice vytvoří pak v tom případě, že n jest celistvé číslo, racionálnou epicykloidu s parametrickou rovnicí:

$$x = \frac{a}{n}\Big((n+1)\cos\varphi - \cos(n+1)\varphi\Big)$$

$$y = \frac{a}{n}\Big(n+1)\sin\varphi - \sin(n+1)\varphi\Big).$$

Zde jest

$$x + iy = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} = \frac{a(n+1)e^{i\varphi} - a\,e^{(n+1)i\varphi}}{n}$$

$$g(\xi) \equiv n; \quad f(\xi) - z\,g(\xi) \equiv -a\,\xi^{n+1} + a(n+1)\,\xi - z\,n.$$

Kořen β neexistuje. Jest tedy $p = 0$, $r = 0$, z čehož vyplývá, že všechny kořeny rovnice $f(\xi) - z\,g(\xi)$ splňují nerovninu $|\alpha| > 1$ a že tedy můžeme užíti vzorce (11 a) pro rozvoj funkce $H(z)$ analytické všude vně epicykloidy i na jejím obvodě.

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\,s_{-k},$$

kdež s_{-k} určeno jest rekurrentními vzorci

$$s_0 = n + 1$$

$$s_{-k} = \left[\frac{n+1}{n}, \frac{a}{z}\right]^k, \quad (k \leq n)$$

$$s_{-k} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{a}{z} \cdot s_{-k+1} + \frac{a}{n \cdot z} s_{-k+n+1}.$$

Dále jest

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H\left(\frac{a(n+1)e^{i\varphi} - a e^{(n+1)i\varphi}}{n}\right) e^{ki\varphi} d\varphi.$$

Můžeme zde pozorovati podobný úkaz, jako při rozvoji (8) pro vnitřní problém hypocykloidy.

V rozvoji pro $H(z)$ souhlasí totiž prvních n členů s řadou Laurentovou, pro vnější problem kružnice. Pro nekonečné n splývá opět epicykloida s pevnou kružnicí o poloměru a, což zrcadlí se přesně v rozvoji, který přechází v řadu Laurentovu.

§ 3. Z důsledku k větě (*D*) v paragrafu prvním vyplývá, že pro každou funkci $F(z)$ analytickou uvnitř křivky C lze nalézti tolik od sebe se různících rozvojů typu (5), kolik různých parametrických rovnic má křivka C. Dokážeme nyní, že každá racionálná křivka algebraická má parametrických rovnic typu (1) neomezený počet.

Všimněme si nejdříve kružnice. Jest známo, že obor omezený jednotkovou kružnicí v rovině τ dá se vzájemně jednoznačně[1] a konformně zobraziti na obor omezený jednotkovou kružnicí roviny ζ pomocí funkce

$$\zeta = \frac{\tau + \varrho}{1 + \varrho\tau},$$

kdež komplexní konstanta ϱ hoví nerovnině $|\varrho| < 1$. Při tom odpovídá bodu 0 v rovině τ bod ϱ roviny ζ, body na obvodu kružnice τ obvodovým bodům kružnice ζ, vnitřní body v rovině τ vnitřním bodům v rovině ζ. Protože pak funkce zobrazující jest analytická i pro $1 \leq |\tau| < \frac{1}{\varrho}$, jest zobrazení toto konformní a vzájemně jednoznačné také v okolí celého obvodu jednotkové kružnice τ. Dosadíme-li nyní do zobrazující funkce $\tau = e^{i\varphi}$ a oddělíme-li reálnou a imaginárnou část, obdržíme pro kružnici v rovině ζ parametrickou rovnici typu (1). Takových rovnic bude počet neomezený, protože konstanta ϱ jest libovolná v mezích $0 \leq |\varrho| < 1$. Tím však nejsou nikterak všechny možnosti vyčerpány.

Podle toho, co jsme dosud uvážili, jest

$$\left|\frac{e^{i\varphi} + \varrho_1}{1 + \varrho_1 e^{i\varphi}}\right| = 1, \qquad \left|\frac{1 + \varrho_2 e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} + \varrho_2}\right| = 1,$$

[1]) ein-eindeutig.

pokud

$$|\varrho_1| < 1, \qquad |\varrho_2| < 1.$$

Tedy také racionálná funkce

$$\psi_1(\tau) = \frac{\tau + \varrho_1}{1 + \varrho_1 \tau} \cdot \frac{1 + \varrho_2 \tau}{\tau + \varrho_2}$$

splňuje rovnici

$$|\psi_1(e^{i\varphi})| = 1$$

pro každé reálné φ. Dále jest známo, že vzroste-li φ o 2π, vzroste amplituda[1]) komplexního čísla $e^{i\varphi} + \varrho_1$ o 2π, kdežto amplituda čísla $1 + \varrho_1 e^{i\varphi}$ se nezmění. Totéž platí pro $e^{i\varphi} + \varrho_2$ a $1 + \varrho_2 e^{i\varphi}$. Z toho všeho vyplývá, že celkový vzrůst amplitudy čísla $\psi_1(e^{i\varphi})$ při vzrůstu φ o 2π jest roven nulle. Právě tak jest tomu při součinu

$$\psi_2(e^{i\varphi}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{i\varphi} + \varrho_k}{1 + \varrho_k e^{i\varphi}} \cdot \frac{1 + \varrho_k' e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} + \varrho_k'},$$

kdež konstanty ϱ_k, ϱ_k' jsou všechny co do absolutní hodnoty menší než jedna. Dále jest také pro každé reálné φ splněno

$$|\psi_2(e^{i\varphi})| = 1.$$

Utvořme nyní funkci

$$\psi(\tau) = \frac{\tau + \varrho}{1 + \varrho\tau} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{\tau + \varrho_k}{1 + \varrho_k \tau} \cdot \frac{1 + \varrho_k' \tau}{\tau + \varrho_k'}, \qquad \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$|\varrho| < 1, \qquad |\varrho_k| < 1, \qquad |\varrho_k'| < 1.$$

Podle předcházejícího jest $|\psi(e^{i\varphi})| = 1$ pro každé reálné φ a amplituda čísla $\psi(e^{i\varphi})$ vzroste o 2π, vzroste-li φ o 2π. Probíhá-li tedy τ v rovině τ body obvodu jednotkové kružnice, probíhá ζ definované rovnicí

$$\zeta = \psi(\tau) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

body obvodu jednotkové kružnice v rovině ζ tak, že každému τ odpovídá jedno jediné ζ.

Proběhne-li τ celý obvod kružnice, proběhne také ζ v rovině své celý obvod kružnice.

Následkem toho můžeme v Cauchy-ho integralu pro funkci $F(z)$ analytickou uvnitř jednotkové kružnice

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(k)} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

dosaditi $\zeta = \psi(e^{i\varphi})$ a integrovati v mezích $\varphi = 0$ až $\varphi = 2\pi$. Při integraci podél jednotkové kružnice (k) nezáleží totiž na tom, jak probíháme body

[1]) Amplitudou komplexního čísla $a + ib = re^{i\psi}$ rozumíme reálné číslo ψ.

jejího obvodu. Tak na př. můžeme integrovati podél oblouku z bodu A do bodu B, zpět z bodu B do A a opět z A do B. Tento postup jest ekvivalentní s pouhou integrací z A do B. Podstatné jest jenom, aby integrační proměnná zachovávala absolutní hodnotu rovnou jedné a aby její amplituda vzrostla průběhem celé integrace proti počáteční hodnotě právě o 2π. To vše jest v našem případě splněno. Zcela podobně jest tomu při funkci $F(z)$ analytické uvnitř křivky C, definované rovnicí (1) nebo (1a).

V Cauchyho integralu pro tuto funkci

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(t)\, dt}{t - z}$$

dosadili jsme ve vzorci (2) $t = \dfrac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})}$.

Místo toho můžeme podle hořejších úvah psáti

$$t = \frac{f[\psi(e^{i\varphi})]}{g[\psi(e^{i\varphi})]} = \frac{f_3(e^{i\varphi})}{g_3(e^{i\varphi})}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

kdež $f_3(u)$, $g_3(u)$ jsou nesoudělné polynomy, a integrovati v mezích $\varphi = 0$ až $\varphi = 2\pi$.

Tak obdržíme pro $F(z)$ nový rozvoj stejného sice typu jako (5), avšak postupující podle jiných funkcí a mající jiné konstanty A_k, B_k.

Netřeba snad připomínati, že výraz

$$t = \frac{f_3(e^{i\varphi})}{g_3(e^{i\varphi})}$$

vede separací reálné a imaginárné části k nové parametrické rovnici pro křivku C.

Ježto pak rovnicí (12) definovali jsme neomezený počet funkcí $\psi(\tau)$, můžeme si sjednati prostřednictvím rovnice (14) neomezený počet rozvojů typu (5) pro jednu a touž funkci $F(z)$ analytickou uvnitř a na obvodě křivky C. Jak takové rozvoje od sebe se liší, ukážeme na nejjednodušší křivce C, totiž na kružnici $x^2 + y^2 = a^2$.

1. Kružnice uvažovaná má parametrickou rovnici

$$x = a \cos\varphi, \qquad y = a \sin\varphi;$$

$$x + iy = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} = \frac{a e^{i\varphi}}{1}.$$

Tedy jest

$$g(\xi) \equiv 1, \qquad \text{(kořeny } \beta \text{ neexistují, } p = 0)$$

$$f(\xi) - z\, g(\xi) \equiv a\, \xi - z = 0.$$

Protože $p = 0$, jest $r = 1$ a tedy pro

$$\alpha = \frac{z}{a}$$

platí $|\alpha| < 1$, což jest zde ostatně samozřejmé.

Rozvoj pro funkci $F(z)$ analytickou uvnitř a na obvodě kružnice jest tedy podle (5)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{z}{a}\right)^k, \qquad (15)$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a\, e^{i\varphi})\, e^{-ki\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{k!} F^{(k)}(o).$$

Jest to rozvoj Taylorův, který zde projevuje příslušnost svoji k nejjednodušší parametrické rovnici kružnice.

2. Pro touž kružnici můžeme však psáti místo

$$x + i\, y = a\, e^{i\varphi},$$

výraz

$$x + i\, y = a\, \psi(e^{i\varphi}).$$

Tedy na př.

$$x + i\, y = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} = \frac{a\,(e^{i\varphi} + \varrho)}{1 + \varrho\, e^{i\varphi}}, \qquad |\varrho| < 1.$$

Z toho plyne

$$g(\xi) \equiv 1 + \varrho\, \xi = 0,$$

$$f(\xi) - z\, g(\xi) \equiv (a - z\, \varrho)\, \xi + \varrho - z = 0.$$

Tedy jest

$$\beta = -\frac{1}{\varrho}, \qquad |\beta| > 1, \qquad p = 0, \qquad r = 1.$$

$$\alpha = \frac{z - \varrho}{a - \varrho\, z}, \qquad |\alpha| < 1.$$

Rozvoj (5) zde bude pro touž funkci $F(z)$, kterou jsme rozvinuli v předešlých řadcích,

$$F(z) = A + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \left(\frac{z - \varrho}{a - \varrho\, z}\right)^k, \qquad (16)$$

$$A = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} F\left(a\, \frac{e^{i\varphi} + \varrho}{1 + \varrho\, e^{i\varphi}}\right) \frac{\varrho\, .\, d\,(e^{i\varphi})}{1 + \varrho\, e^{i\varphi}},$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\left(a\, \frac{e^{i\varphi} + \varrho}{1 + \varrho\, e^{i\varphi}}\right) e^{-ki\varphi}\, d\varphi.$$

Koeficientům můžeme dáti jiný tvar. Protože

$$F\left(a\, \frac{z + \varrho}{1 + \varrho\, z}\right) \quad \text{a} \quad \frac{1}{1 + \varrho\, z}$$

jsou funkce analytické pro všechna z ležící uvnitř jednotkové kružnice, jest

$$A = 0,$$

$$A_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{d z^k} F\left(a \frac{z+\varrho}{1+\varrho z}\right)\right]_{z=0}.$$

Taylorova řada jeví se nám jako zvláštní případ rozvoje (16), vznikající položením

$$\varrho = 0.$$

3. Klaďme opět, jako předešle,

$$x + i y = a \psi (e^{i\varphi})$$

a dosaďme na př.

$$\psi (e^{i\varphi}) = e^{2i\varphi} \frac{1 + \varepsilon e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} + \varepsilon}, \qquad |\varepsilon| < 1.$$

Pak jest

$$x + i y = \frac{f(e^{i\varphi})}{g(e^{i\varphi})} = \frac{a e^{2i\varphi} + a \varepsilon e^{3i\varphi}}{e^{i\varphi} + \varepsilon},$$

$$g(\xi) \equiv \xi + \varepsilon = 0,$$

$$f(\xi) - z g(\xi) \equiv a \varepsilon \xi^3 + a \xi^2 - z \xi - z \varepsilon = 0.$$

Kořen rovnice $g(\xi) = 0$ jest zde $\beta = -\varepsilon$ a tedy $|\beta| < 1$, $p = 1$, $r = 2$. Budou tedy míti dva kořeny rovnice $f(\xi) - z g(\xi) = 0$ absolutní hodnotu menší než jedna pro všechna z ležící uvnitř kružnice. Třetí kořen bude míti absolutní hodnotu větší než jedna. Klademe-li ještě specielněji $\varepsilon = \frac{1}{3}$, obdržíme pro tyto kořeny:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\sqrt[3]{(z+a)(\sqrt{a} - i\sqrt{z})} + \sqrt[3]{(z+a)(\sqrt{a} + i\sqrt{z})}\right\} - 1,$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\gamma\sqrt[3]{(z+a)(\sqrt{a} - i\sqrt{z})} + \gamma^2\sqrt[3]{(z+a)(\sqrt{a} + i\sqrt{z})}\right\} - 1,$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\gamma^2\sqrt[3]{(z+a)(\sqrt{a} - i\sqrt{z})} + \gamma\sqrt[3]{(z+a)(\sqrt{a} + i\sqrt{z})}\right\} - 1,$$

$$\gamma = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Chceme-li určiti, které α má absolutní hodnotu menší než 1, stačí stanoviti to pro jediné z ležící uvnitř kružnice. Volme na př. $z = 0$. Pak jest

$$\alpha_1 = -3, \qquad \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Jest tedy pro všechna z splňující nerovninu

$$|z| < a, \qquad |\alpha_1| > 1, \qquad |\alpha_2| < 1, \qquad |\alpha_3| < 1.$$

Rozvoj (5) pro funkci $F(z)$ analytickou uvnitř a na obvodu kružnice, kterou jsme již rozvinuli ve tvaru (15) a (16), jest zde tedy

$$F(z) = A + \sum_{k=0}^{\infty} A_k (\alpha_2^k + \alpha_3^k) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \alpha_1^{-k}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$A = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{a\,e^{3i\varphi} + 3\,a\,e^{2i\varphi}}{1 + 3\,e^{i\varphi}}\right)\frac{3\,e^{i\varphi}\,d\,\varphi}{1 + 3\,e^{i\varphi}},$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{a\,e^{3i\varphi} + 3\,a\,e^{2i\varphi}}{1 + 3\,e^{i\varphi}}\right)e^{-ki\varphi}\,d\,\varphi,$$

$$B_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{a\,e^{3i\varphi} + 3\,a\,e^{2i\varphi}}{1 + 3\,e^{i\varphi}}\right)e^{ki\varphi}\,d\,\varphi.$$

Rozvětvovací body kořenů $\alpha_1(z)$, $\alpha_2(z)$, $\alpha_3(z)$ jsou zde patrně: $z = 0$, $z = -a$, $z = \infty$. Rozvětvovací řez příslušné Riemannovy plochy může tedy jíti po ose x-ové z bodu 0 do bodu $-a$, odtud pak do nekonečna. Uvnitř kružnice leží část řezu z bodu 0 do bodu $-a$. Na této části řezu vyměňují se kořeny $\alpha_2(z)$ a $\alpha_3(z)$. Funkce $\alpha_2^k(z) + \alpha_3^k(z)$ zůstává tedy jednoznačnou pro všechna z ležící uvnitř kružnice. Podobně jest tomu s funkcí $\alpha_1^{-k}(z)$.

II. Obecný obor jednoduše souvislý.

§ 1. Budiž K konečný obor jednoduše souvislý vymezený v rovině komplexní proměnné z. Úkolem naším jest nalézti pomocí příslušného Cauchyho integrálu rozvoj nebo více rozvojů pro funkci $F(z)$ analytickou jak v oboru K tak i na hranicích jeho.

O tom, čím jest hranice prostoru K tvořena, není při tom nic řečeno. To však by nám znemožnilo rozřešiti problém pomocí prostředků, které nám nynější stav funkční theorie dává k disposici.

Abychom k cíli dospěli, musíme si dříve fixovati hranici prostoru K pomocí nějaké křivky, jejíž rovnici bychom dovedli sestrojiti. K tomu užijeme poznatku, na který upozornil W. Osgood v Annals of Math. Ser. II. Vol. 14, p. 144.

Věta ta zní: Ať jest hranice oboru K jakkoliv utvářena, dá se vždy sestrojiti regulární a uzavřená křivka analytická C, která se k hranicím prostoru K z vnějšku (nebo z vnitřku) tak těsně přimyká, jak jen chceme. Větu tu sestrojil jmenovaný autor k jinému účelu, my ji však použijeme k řešení našeho problému následujícím způsobem.

O funkci $F(z)$ jsme předpokládali, že jest analytickou i na hranici prostoru K, což můžeme vyložiti také tak, že jest analytickou v jistém po případě velmi úzkém proužku, lemujícím *zevně* hranici oboru K. Podle citované věty Osgoodovy můžeme nyní sestrojiti příslušnou analytickou křivku C tak, že celá probíhá v onom úzkém proužku. Funkce $F(z)$ bude tedy analytickou pro všechny vnitřní i obvodové body křivky C. Dejme tomu, že dovedeme nyní sestrojiti nějaký rozvoj funkce $F(z)$ platný pro všechny vnitřní body křivky C. Protože všechny body oboru K leží uvnitř křivky C, bude rozvoj jmenovaný platiti také pro všechny body oboru K, což právě bylo naším cílem.

Celý problém se tedy redukuje na vyhledání rozvojů pro funkce analytické uvnitř a na obvodu regulární uzavřené křivky *analytické* C, omezující obor jednoduše souvislý.

Vyjdeme ze známé věty o konformním zobrazování: Obor omezený křivkou C v rovině z dá se vzájemně jednoznačně a konformně zobraziti na obor omezený jednotkovou kružnicí v rovině ζ. Zobrazení toto jest také na hranicích vzájemně jednoznačné, spojité a konformní.[1]) Zobrazení dáno jest funkcí

$$z = f(\zeta), \qquad\qquad (1)$$

kdež $f(\zeta)$ jest funkce analytická uvnitř i na obvodu jednotkové kružnice. Ježto tato funkce jest analytická i na obvodě jednotkové kružnice, bude analytickou také v jistém po případě velmi úzkém proužku lemujícím *zevně* jednotkovou kružnici. Dá se tedy vždy sestrojiti kružnice soustředná s jednotkovou, jejíž poloměr jest o něco větší než jedna, která však přece probíhá úplně uvnitř onoho proužku. Z toho plyne, že $f(\zeta)$ lze rozvinouti v řadu

$$f(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \ldots, \qquad\qquad (2)$$

jejíž poloměr konvergence jest o něco větší než jedna.

Dosadíme-li nyní do rovnice (1) $\zeta = e^{i\varphi}$ a separujeme-li na levo i na pravo reálnou a imaginárnou část, obdržíme pro křivku C parametrickou rovnici

$$x = f_1(e^{i\varphi}), \qquad y = f_2(e^{i\varphi}), \qquad\qquad (3)$$

která jest úplně analogická rovnici (1) v oddílu I. Můžeme tedy opět očekávati, že nás povede prostřednictvím Cauchy-ho integrálu k nějakému rozvoji pro funkci $F(z)$ analytickou uvnitř a na obvodě křivky C. Pišme tedy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(t)\,dt}{t - z},$$

dosaďme $t = f(e^{i\varphi})$ a integrujme v mezích $o \leq \varphi \leq 2\pi$. Tedy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} F[f(e^{i\varphi})] \frac{e^{i\varphi} f'(e^{i\varphi})}{f(e^{i\varphi}) - z}\, d\varphi. \qquad\qquad (4)$$

Všimněme si nyní funkce $\zeta \,.\, f'(\zeta)$ a funkce $f(\zeta) - z$. Obě jsou patrně analytické pro všechna ζ ležící uvnitř a na obvodě jednotkové kružnice. Položme si nyní otázku, pro které ζ stává se rozdíl $f(\zeta) - z$ rovným nulle.

[1]) Viz n. př. Osgood l. c. p. 682.

Z rovnice (1) a z předcházející věty usuzujeme, že jest to možné jenom pro jediné ζ položené uvnitř jednotkové kružnice. Označme toto ζ písmenou ζ_0 a opišme kružnici se středem v počátku procházející bodem ζ_0. Tato kružnice a konvergenční kružnice řady (2) definují nám jisté mezikruží, v němž jest funkce $(f(\zeta) - z)$ analytickou a od nully různou. Z toho vyplývá, že podíl

$$\frac{\zeta \cdot f'(\zeta)}{f(\zeta) - z}$$

jest pro všechna ζ ležící v jmenovaném mezikruží funkcí analytickou a že se dá tedy rozvinouti v řadu Laurentovu

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \zeta^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Protože jednotková kružnice roviny ζ leží celá uvnitř uvažovaného mezikruží, konverguje řada (5) také pro $\zeta = e^{i\varphi}$ a to jak známo stejnoměrně a absolutně pro všechna reálná φ. Dosadíme-li tedy řadu (5) do rovnice (4) a integrujeme-li člen za členem obdržíme pro $F(z)$, rozvoj

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} A_k b_k(z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F[f(e^{i\varphi})] e^{ki\varphi} d\varphi.$$

Při tom jsou, jak z rozvoje (5) vyplývá, $b_k(z)$ jisté funkce veličiny z určené integrály

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{f'(e^{i\varphi})}{f(e^{i\varphi}) - z} \cdot e^{(-k+1)i\varphi} d\varphi. \quad \ldots\ldots \quad (6a)$$

Tyto funkce jsou tedy nezávislé na tvaru funkce $F(z)$.

Rozvoj (6) tvoří analogon rozvoje (5) v oddílu I. Tento možno jest dokonce v mnohých případech určiti jakožto specielní případ rozvoje onoho; nikoliv však vždy. Racionálná křivka algebraická, která tvořila podklad úvah oddílu I., nemusí býti totiž vždy regulární křivkou analytickou, která nesmí míti hrotů. Abychom uvedli určitý příklad, vzpomeňme si na racionálné epicykloidy a hypocykloidy, které mají hroty.

Uvážíme-li nyní celý postup, jímž jsme si zjednali rozvoj (6), objeví se nám tento rozvoj jako důsledek rovnice (1) anebo parametrické rovnice křivky C dané vzorcem (3). Kdybychom dovedli si zjednati jinou parametrickou rovnici, dostali bychom patrně pro funkci $F(z)$ jiný rozvoj typu (6). Použijeme k tomu opět jak v odstavci I. funkce $\psi(\tau)$ definované tam rovnicí (12):

$$\psi(\tau) = \frac{\tau + \varrho}{1 + \varrho\tau} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{\tau + \varrho_k}{1 + \varrho_k \tau} \cdot \frac{1 + \varrho_k' \tau}{\tau + \varrho_k'} \cdot \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

§ 2. Funkce $\psi(\tau)$ jest analytická v okolí jednotkové kružnice roviny τ. Značí-li totiž ε největší z absolutních hodnot čísel $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ a η největší z absolutních hodnot čísel $\varrho_1', \varrho_2', \dots \varrho_n'$, jest $\psi(\tau)$ analytické pro všechna τ splňující nerovninu $\frac{1}{\varepsilon} > |\tau| > \eta$, to jest pro všechna τ uzavřená v mezikruží, jehož jeden poloměr (η) jest menší než jedna a druhý $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ větší než jedna. Dále víme, že ζ definované rovnicí

$$\zeta = \psi(\tau) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (7a)$$

probíhá ve své rovině jednotkovou kružnici, probíhá-li ji τ ve své rovině. Protože pak $\psi(\tau)$ jest spojitou funkcí v mezikruží shora definovaném, buďou odpovídati bodům τ, ležícím v okolí jednotkové kružnice, body ζ ležící rovněž v okolí jednotkové kružnice. To znamená:

Uzavřeme-li τ do velmi úzkého mezikruží, v jehož vnitřku probíhá jednotková kružnice, budou všechna těmto τ odpovídající $\zeta = \psi(\tau)$ vyplňovati jistý obor (k) v rovině ζ, jenž se dá opět celý uzavříti v jistém úzkém mezikruží, obsahujícím jednotkovou kružnici ζ. Je-li nyní $G(\zeta)$ funkce analytická v tomto mezikruží, jest jistě analytickou i v oboru (k). Protože pak funkce analytická jiné analytické funkce jest opět analytickou, jest $G[\psi(\tau)]$ analytickou funkcí veličiny τ pro všechna τ ležící v příslušném mezikruží.

Mezikruží roviny ζ může býti učiněno následkem spojitosti funkce $\psi(\tau)$ vhodnou volbou mezikruží τ libovolně úzkým. Z toho vyplývá věta:

Je-li $G(\zeta)$ funkce analytická v okolí všech bodů jednotkové kružnice roviny ζ, dá se vždy sestrojiti v rovině τ mezikruží, obsahující uvnitř jednotkovou kružnici tak, že funkce $G[\psi(\tau)]$ jest analytická v tomto mezikruží. $\dots (E)$

Z důvodů, které jsme podrobně vyložili v 3. paragrafu oddílu I., můžeme Cauchy-ho integrál pro funkci $F(z)$ psáti ve tvaru

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi=0}^{2\pi} F[\psi(e^{i\varphi})] \frac{f'[\psi(e^{i\varphi})] \cdot \psi'(e^{i\varphi})}{f[\psi(e^{i\varphi})] - z} \, d(e^{i\varphi}). \quad \dots (8)$$

O funkci $\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - z}$ jsme dokázali již dříve, že jest analytickou v jistém okolí jednotkové kružnice ζ. Podle věty (E) jest tedy $\frac{f'[\psi(\tau)]}{f[\psi(\tau)] - z}$ analytická funkce veličiny τ v jistém okolí jednotkové kružnice roviny τ. Rovněž funkce $\tau \cdot \psi'(\tau)$ bude analytickou v jistém okolí jednotkové kružnice a to ve stejném jako $\psi(\tau)$.

Okolí jednotkové kružnice příslušné funkci $\frac{f'[\psi(\tau)]}{f[\psi(\tau)] - z}$ kombinováno s okolím příslušným funkci $\tau \cdot \psi'(\tau)$ dává opět jisté okolí jednotkové kružnice v rovně τ, v němž jest analytickou funkce

$$R(\tau) = \frac{\tau \,.\, f'[\psi(\tau)] \,.\, \psi'(\tau)}{f[\psi(\tau)] - z}.$$

Můžeme tedy $R(\tau)$ v příslušném mezikruží pro τ rozvinouti v řadu Laurentovu

$$R(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \,.\, \tau^k, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

kdež

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{f'[\psi(e^{i\varphi})]\, \psi'(e^{i\varphi})}{f[\psi(e^{i\varphi})] - z}\, e^{(-k+1)i\varphi}\, d\varphi. \quad \ldots\ldots (9a)$$

Řada (9) jest platnou i pro $\tau = e^{i\varphi}$. Tak získáváme následkem integrálu (8) pro $F(z)$ rozvoj

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \,.\, b_k(z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

kdež

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\Big[f\,[\psi(e^{i\varphi})]\Big]\, e^{ki\varphi}\, d\varphi.$$

Rozvojů tohoto typu můžeme sestrojiti pro jednu a touž funkci $F(z)$ analytickou uvnitř a na obvodě téže křivky C neomezený počet, protože právě funkcí $\psi(\tau)$ existuje neomezený počet. Rozvoj (6) jest zvláštním případem rozvoje (10), z něhož vznikne, položíme-li $\psi.(e^{i\varphi}) = e^{i\varphi}$.

K rozvojům (10) jsme dospěli, vyšedše z konformního zobrazení vnitřku křivky C na vnitřek jednotkové kružnice daného zobrazující funkcí (1). Místo této funkce mohli jsme zvoliti také každou jinou, zobrazující okolí jednotkové kružnice v rovině ζ na okolí křivky C v rovině z vzájemně jednoznačně a konformně tak, že body obvodové obou křivek si vzájemně jednoznačně odpovídají. Z těchto funkcí, mimo onu danou rovnicí (1), jest známa ještě následující. Podle nauky o konformním zobrazování dá se vždy vnějšek jednotkové kružnice zobraziti na vnějšek křivky C funkcí

$$z = g(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{k=1} C_k\, \zeta^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

vzájemně jednoznačně a konformně tak, že body obvodové obou křivek si vzájemně jednoznačně odpovídají a zobrazení jest konformní i v okolí obou křivek.

Řada (11) má vnitřní poloměr konvergence o něco menší než jedna. Tato funkce $g(\zeta)$ může tedy v rozvoji (10) nastoupiti místo funkce $f(\zeta)$.

Rozvoj pro problém *vnější*, jak jsme ho definovali na počátku paragrafu 2. v oddílu I., formálně se nijak neliší od rozvoje (10). Je-li totiž $H(z)$ funkce podobně definovaná jako v oddílu I. § 2., bude patrně

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k\, b_k(z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$B_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H\left[f\left[\psi\left(e^{i\varphi}\right)\right]\right] e^{k i \varphi}\, d\varphi.$$

Při tom jest opět jako při (10)

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'\left[\psi\left(e^{i\varphi}\right)\right]\psi'\left(e^{i\varphi}\right)}{f\left[\psi\left(e^{i\varphi}\right)\right] - z}\, e^{(-k+1)i\varphi}\, d\varphi. \quad \ldots\ldots (12a)$$

Na prvý pohled překvapuje, že funkce $F(z)$ analytická uvnitř křivky C a funkce $H(z)$ analytická vně křivky C dají se rozvinouti v rozvoje (10) a (12), pokračující zdánlivě podle týchž funkcí $b_k(z)$. Nesmíme však zapomenouti, že ve vzorci (9a) značí z vnitřní bod křivky C, kdežto ve vzorci (12a) vnější bod. Abychom si onu různost blíže objasnili, zvolme na př. místo křivky C jednotkovou kružnici. Pak jest $f(\zeta) = \zeta$; dále volme co nejjednodušeji $\psi(\tau) = \tau$. Tak obdržíme pro $b_k(z)$ integrál

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-k i \varphi}\, d\left(e^{i\varphi}\right)}{e^{i\varphi} - z}.$$

Místo toho můžeme patrně psáti

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t^{-k}\, dt}{t - z},$$

kdež integrace vztahuje se k jednotkové kružnici c. Budiž nyní jako v (9a) $|z| < 1$. Pak jest

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t^{-k}\, dt}{t - z} = \begin{cases} z^{-k} & \text{pro } k \leqq 0, \\ 0 & \text{pro } k > 0. \end{cases}$$

Je-li však jako ve (12a) $|z| > 1$, bude

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t^{-k}\, dt}{t - z} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \leqq 0, \\ -z^{-k} & \text{pro } k > 0. \end{cases}$$

Pro $|z| > 1$ dostáváme tedy řadu Laurentovu a pro $|z| < 1$ řadu Taylorovu.

Z toho plyne, že vzorce (9a) a (12a), které jsou formálně stejné, definují přece každý jinou funkcí veličiny z.

Rovnice (9a) může býti také psána ve tvaru

$$b_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'\left[\psi(t)\right]\psi'(t)\,.\,t^{-k}\, dt}{f\left[\psi(t)\right] - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_C S(t, z)\, dt,$$

kdež integrace vztahuje se k jednotkové kružnici v rovině t a funkce $S(t, z)$ jest spojitou funkcí obou neodvislých proměnných t a z, zůstává-li jen t na kružnici c a z uvnitř křivky C. Mimo to jest patrně $S(t, z)$ pro libovolné t na kružnici c, považováno jsouc za funkci jenom proměnné z, funkcí analytickou pro všechna z ležící uvnitř C. Z toho vyplývá,[1]) že $b_k(z)$ jest funkcí analytickou pro všechna z ležící uvnitř křivky C.

Právě tak se dokáže, že také (12a) definuje funkci analytickou pro všechna z, ležící vně křivky C.

Výsledek můžeme shrnouti ve větu:

> Funkce $F(z)$ analytická všude uvnitř a na obvodě uzavřené, regulární křivky analytické C dá se rozvinouti v rozvoj tvaru (10), kdež funkce $b_k(z)$, analytické pro vnitřní body křivky C, jsou závislé jedině na tvaru této křivky, nikterak však na funkci $F(z)$.
>
> Touto jsou určovány jen koeficienty A_k. Rozvojů takových existuje pro jednu a touž funkci $F(z)$ a pro jednu a touž křivku C neomezený počet. .. (F)
>
> Podobná věta platí pro funkci $H(z)$ analytickou všude vně i na obvodě křivky C. Příslušné funkce $b_k(z)$ jsou při tom určovány formálně stejnými vzorci jako shora.

§ 3. Hleďme nyní určiti, který nejjednodušší tvar mohou pro danou křivku C přijmouti funkce $b_k(z)$. Funkce ty definovány jsou rozvojem (9) nebo integrálem (9a). Z obojího vidíme, že nejjednodušší tvar můžeme očekávati při volbě $\psi(\tau) = \tau$. Pak jest

$$R(\tau) = \frac{\tau f'(\tau)}{f(\tau) - z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \cdot \tau^k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Z rovnice (1) víme, že každému τ ležícímu uvnitř jednotkové kružnice odpovídá jisté $z = f(\tau)$ ležící uvnitř křivky C v rovině z.

V rovnici (13) vyskytující se rozdíl $f(\tau) - z$ bude tedy od nully různým pro všechna τ splňující nerovninu $\tau \leqq 1$, pokud jen z představuje bod ležící *vně* křivky C. Z dřívějšího víme, že $\tau f'(\tau)$ a rovněž $f(\tau) - z$ jsou analytické funkce veličiny τ, pro všechna τ ležící uvnitř nebo na obvodě jednotkové kružnice. Z toho a z předešlého vyplývá, že jest pro táž τ také analytickou funkce $R(\tau)$; Laurentova řada (13) se tedy redukuje v tom případě na řadu Taylorovu, to jest

$$\frac{\tau f'(\tau)}{f(\tau) - \tau} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z) \cdot \tau^k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$[b_{-k}(z) = 0].$$

Položíme-li sem místo $f(\tau)$ rozvoj (2), znásobíme-li obě strany rovnice rozdílem $f(\tau) - z$ a porovnáme-li na obou stranách koefficienty stejných mocnin τ, obdržíme pro $b_k(z)$ rekurrentní formule:

$$b_0 = 0,$$

$$b_k \cdot (a_0 - z) + b_{k-1} a_1 + b_{k-2} a_2 + \ldots + b_1 \cdot a_{k-1} - k \cdot a^k = 0. \ldots \quad (15)$$

[1]) Osgood l. c. p. 307. 7. Satz.

Jest tedy

$$b_1(z) = \frac{a_1}{a_0 - z}; \quad b_2(z) = \frac{2\,a_2}{a_0 - z} - \frac{a_1^2}{(a_0 - z)^2};$$
$$b_3(z) = \frac{3\,a_3}{a_0 - z} - \frac{3\,a_1\,a_2}{(a_0 - z)^2} + \frac{a_1^3}{(a_0 - z)^3}, \quad \text{atd.}$$

Vidíme, že $b_k(z)$ jest polynom k-tého stupně veličiny $(a_0 - z)^{-1}$. Připomeneme-li si, že jsme předpokládali z ležící vně křivky C, usoudíme:

Každá funkce $H(z)$ má rozvoj tvaru

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, b_k(z), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

kdež $b_k(z)$ jsou určeny rovnicemi (15) a

$$A_k = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H\,[f\,(e^{i\varphi})]\, e^{k\,i\,\varphi}\, d\,\varphi.$$

Všimněme si ještě, že rekurrentní vzorce (15) jsou identické s Newtonovými vzorci pro součet k-tých mocnin všech kořenů algebraické rovnice.

Podobný jednoduchý rozvoj pro funkci $F(z$ analytickou uvnitř křivky C obdržíme, užijeme-li místo zobrazení daného rovnicí (1) zobrazení pomocí funkce (11).

Funkce $b_k(z)$ budou zde definovány opět rovnicí obdobnou rovnici (13)

$$R(\tau) = \frac{\tau\, g'(\tau)}{g(\tau) - z} = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} b_k(z)\,.\,\tau^k. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Podle definice jsou obě funkce $\tau\,.\,g'(\tau)$ a $[g(\tau) - z]$ analytické pro všechna τ ležící vně a na obvodě kružnice jednotkové. Druhá z těchto funkcí není pro žádné takové τ rovna nulle, leží-li z *uvnitř* křivky C. Jest tedy také $R(\tau)$ analytické v onom oboru.

Mimo to jest patrně podle (11)

$$\lim_{\tau=\infty} R(\tau) = 1$$

a tedy

$$\frac{\tau\, g'(\tau)}{g(\tau) - z} = 1 + \sum_{k=-1}^{k=-\infty} b_k(z)\,.\,\tau^k.$$

Dosadíme-li sem za $g(\tau)$ rozvoj (11), násobíme-li obě strany rovnice rozdílem $g(\tau) - z$, obdržíme pro $b_k(z)$ rekurrentní formule:

$$b_0(z) = 1$$

$$b_{-k}\,.\,c_1 + b_{-k+1}\,.\,(c_0 - z) + b_{-k+2}\,c_{-1} + b_{-k+3}\,c_{-2} + \ldots + $$
$$+ b_{-1}\,c_{-k+2} + b\,.\,c_{-k+1} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Jest tedy

$$b_{-1}(z) = \frac{z - c_0}{c_1}, \quad b_{-2}(z) = \frac{(z - c_0)^2}{c_1^2} - \frac{2\,c_{-1}}{c_1},$$

$$b_{-3}(z) = \frac{(z - c_0)^3}{c_1^3} - \frac{3\,c_{-1}(z - c_0)}{c_1^2} - \frac{3\,c_{-2}}{c_1}, \quad \text{atd.}$$

$b_{-k}(z)$ jest patrně polynom k-tého stupně veličiny $(z - c_0)$. Rekurrentní formule (18) jsou opět identické s Newtonovými.

Tak získali jsme pro funkci $F(z)$ analytickou uvnitř a na obvodě křivky C rozvoj polynomický

$$F(z) = \sum_{k=0}^{-\infty} A_k\, b_k(z), \qquad \text{(19)}$$

kdež $b_k(z)$ určeno jest formulemi (18) a

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\,[g\,(c_{i\varphi})]\, e^{k i \varphi}\, d\,\varphi.$$

Rozvoj (19) jest identickým s rozvojem Faberovým.[1])
Vidíme tedy:

Nejjednodušším z rozvojů typu (10) platných pro funkci $F(z)$ jest Faberův polynomický rozvoj (19).

Nejjednodušším z rozvojů typu (12) platných pro funkci $H(z)$ jest rozvoj (16) pokračující podle jistých polynomů veličiny $(z - a_0)^{-1}$, kdež a_0 značí jistý bod, ležící uvnitř křivky C. . . (G)

Rozvoj (16) možno tedy považovati za jistý protějšek k rozvoji Faberovu.

Pohlédneme-li nyní zpět na všechny vývody odstavce II., seznáme, že nejobecnější rozvoje (10) a (12), ke kterým jsme dospěli, vyplynuly z rovnice

$$\left.\begin{aligned} z &= f\,[\psi(\tau)] \\ \text{anebo} \quad z &= g\,[\psi(\tau)]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(20)}$$

Obě tyto rovnice zobrazují nám okolí jednotkové kružnice v rovině τ na okolí křivky C v rovině z tak, že bodům jednotkové kružnice odpovídají body křivky C. Při tom odpovídá sice každému τ jedno jediné z avšak každému z může odpovídati několik τ. Není tedy zobrazení toto vždy *vzájemně* jednoznačné. Nemůžeme nikterak tvrditi, že rovnice (20) vyčerpávají všechna možná zobrazení toho druhu. Existují pravděpodobně ještě jiná taková zobrazení. Označíme-li však kterékoliv z nich rovnicí

$$z = h(\tau) \qquad \text{(21)}$$

[1]) M. Faber l. c.

dojdeme vždy k rozvoji typu (6), (10) nebo (12), kdež nahradí se jenom funkce $f(u)$ funkcí $h(u)$.

Rovněž funkce $\psi(\tau)$ definovaná rovnicí (7) není jediná, která splňuje příslušné požadavky. Označíme-li na př. $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$ dvě funkce definované rovnicí (7), poznáme snadno, že všechny požadavky kladené na funkci $\psi(\tau)$ v paragrafu třetím v oddílu I. a v paragrafu druhém oddílu II. splňuje také funkce $\psi_1[\psi_2(\tau)]$. Tak bychom mohli pokračovati v konstrukci příslušných funkcí do nekonečna. Snad tím způsobem opět nevyčerpáme všechny funkce typu $\psi(\tau)$. Možná, že existují ještě jiné. Označme $\chi(\tau)$ jednu z nich. Sestrojíme-li místo (21) zobrazující funkci

$$z = h[\chi(\tau)] = h_1(\tau) \qquad \text{(22)}$$

seznáme, že $h_1(\tau)$ jest téhož typu jako $h(\tau)$.

Víme totiž, že $z = h(\zeta)$ zobrazuje okolí jednotkové kružnice v rovině ζ na okolí křivky C v rovině z tak, že body kružnice odpovídají bodům křivky. Dále víme, že $\zeta = \chi(\tau)$ zobrazuje okolí jednotkové kružnice v rovině τ na okolí jednotkové kružnice v rovině ζ známým způsobem. Zobrazuje tedy funkce $z = h_1(\tau)$ okolí jednotkové kružnice v rovině τ na okolí křivky C v rovině z tím způsobem, jaký jsme požadovali pro funkci (21). Konečný úsudek lze tedy vysloviti takto: Každá funkce $(F\, z)$ dá se rozvinouti v rozvoj (6), kdež však jsme nahradili funkci $f(u)$ funkcí $h(u)$.

III. Obor mnohonásobně souvislý.

Řešení vnitřního a vnějšího problému pro obor jednoduše souvislý, omezený analytickou křivkou C zahrnuje v sobě také řešení problému pro obor mnohonásobně souvislý omezený několika Osgoodovými křivkami C, vzájemně se neprotínajícími.

Proberme blíže obor dvojnásobně souvislý, omezený vně křivkou C_1 a uvnitř křivkou C_2. Funkce $F(z)$ analytická v tomto oboru i na obvodu obou křivek dá se psáti ve tvaru Cauchy-ho integrálu

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{F(t_1)\, d t_1}{t_1 - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{F(t_2)\, d t_2}{t_2 - z} \qquad \text{(1)}$$

První z těchso integrálů můžeme rozvinouti v rozvoj typu (10) a druhý v rozvoj typu (12) oddílu II. Tak obdržíme neomezený počet rozvojů tvaru

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\, b_k^{(1)}(z) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k\, b_k^{(2)}(z) \qquad \text{(2)}$$

Nejjednodušší získáme, zvolíme-li místo první řady rozvoj Faberův (19) a místo druhé řady rozvoj (16) odd. II. Dostaneme

$$F(z) = A_0 + A_1 \frac{z - c_0}{c_1} + A_2 \left[\frac{(z - c_0)^2}{c_1^2} - \frac{2 c_{-1}}{c_1}\right] +$$
$$+ A_3 \left[\frac{(z - c_0)^3}{c_1^3} - \frac{3 c_{-1} (z - c_0)}{c_1^2} - \frac{3 c_{-2}}{c_1}\right] + \ldots + B_1 \frac{a_1}{z - a^0} +$$
$$+ B_2 \left[\frac{a_1^2}{(z - a_0)^2} + \frac{2 a_2}{z - a_0}\right] + B_3 . \left[\frac{a_1^3}{(z - a_0)^3} + \frac{3 a_1 a_2}{(z - a_0)^2} + \frac{3 a_3}{z - a_0}\right] + \ldots, \ldots \quad (3)$$

kdež konstanty c_1, c_0, c_{-1}, c_{-2}, atd. jsou závislé jedině na tvaru křivky C_1, konstanty a_0, a_1, a_2, atd. na tvaru křivky C_2, kdežto koefficienty A_k, B_k jsou určovány tvarem funkce $F(z)$.

Rozvoj (3) jest sevšeobecněním řady Laurentovy pro mezikruží, na kterou se redukuje při

$$a_0 = c_0, \quad a_2 = a_3 = a_4 = \ldots\ldots = 0; \quad c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = \ldots\ldots = 0.$$

Z příkladu toho vyplývá, jak nutno postupovati v případě obecném. Funkce $F(z)$ analytická v oboru n-násobně souvislém, omezeném křivkami C_1, C_2, ... C_n, vyjádří se integrálem Cauchy-ho:

$$2 \pi i . F(z) = \pm \int_{C_1} \frac{F(t_1)\, d t_1}{t_1 - z} \pm \int_{C_2} \frac{F(t_2)\, d t_2}{t_2 - z} \pm \ldots \pm \int_{C_n} \frac{F(t_n)\, d t_n}{t_n - z}.$$

Jednotlivé integrály se pak rozvinou v řady typu (10) nebo (12). Rozvojů jest neomezený počet, z nichž nejjednodušší zase jest ten, který vznikne užitím řad typu (19) po případě (16).