Miloš Kössler

Nový rozvoj pro Riemannovu funkci prvočíselnou

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 25 (1916), No. 26, 23 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501281

Nový rozvoj pro Riemannovu funkci prvočíselnou.

Napsal

Miloš Kössler.

Předloženo dne 19. dubna 1916.

ÚVOD.

Značí-li $\pi(x)$ počet prvočísel menších než x a položíme-li

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \ldots,$$

jest podle Riemanna

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s \log \zeta(s)}{s}\, ds,\quad b \geqq 1. \qquad \ldots(A)$$

Riemann a všichni jeho následovníci prováděli výpočet prvočíselné funkce $f(x)$ takto. Především hledají a nalézají rozvoj pro $\log \zeta(s)$ platný v *celé* rovině komplexní proměnné s a tento rozvoj dosazují do integrálu (A), čímž konečně získávají výraz [1])

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\varrho}\left[Li(x^{\varrho_1}) + Li(x^{\varrho_2})\right] + \int_x^{\infty} \frac{dy}{y(y^2-1)\log y} - \log 2$$

Výraz tento obsahuje komplexní čísla ϱ_1, ϱ_2, jichž jest neomezený počet a která představují nullové body zétafunkce. Výsledek tento, pocházející od Riemanna, byl během řady let přesně dokázán. Dalším úkolem jest nalézti skutečně ony komplexní kořeny zétafunkce. Ačkoliv v poslední době byly v tomto směru učiněny pozoruhodné pokroky, přece nepodařilo se dosud úlohu v plné všeobecnosti rozřešiti.

[1]) Viz na př. E. Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. p. 361.

Následující jednoduchá úvaha ukazuje, že tento historický postup počtu není jediným možným a že také není úplně ekonomickým, protože vychází z rozvoje platného pro $\log \zeta(s)$ v *celé* rovině, což není nutným.

K dosažení Riemannem vytčeného cíle, to jest k vyčíslení integrálu (A), stačilo by znáti takový rozvoj pro $\log \zeta(s)$, který platí jen v *okolí* integrační cesty a nikoliv v celé rovině. Protože pak integrační cesta probíhá v oné půlrovině, která neobsahuje nullových bodů zétafunkce, bude rozvoj onen, podaří-li se ho sestrojiti, na těchto nullových bodech nezávislý.

K rozvoji takovému vedeni jsme následujícím myšlenkovým pochodem. Funkce $\zeta(s)$ jest analytickou pro všechna s, jichž reálná část $R(s)$ jest větší než jedna. V téže části roviny nemá $\zeta(s)$ ani nullových bodů ani polů. Jest tedy $\log \zeta(s)$ v této půlrovině funkcí analytickou. Každý rozvoj platný pro funkci analytickou v dané půlrovině bude tedy platným také pro funkci $\log \zeta(s)$. Rozvojů takových jest neomezený počet; po delším zkoušení objevila se nejvýhodnější řada Langrangeova pokračující podle mocnin zlomku $\frac{s-a}{s}$.

Úvaha tato, provedená na funkci $\zeta(s)$, přirozeně se přenáší na obecnou řadu Dirichletovu. Proto provedeny jsou v předloženém pojednání výpočty platné pro tuto řadu na prvém místě v oddílu prvním. Hlavní výsledky tohoto oddílu obsaženy jsou ve vzorcích (2), (5) a (7). Oddíl druhý tvoří applikace nalezených obecných formulí na specielní případ Dirichletovy řady, to jest na funkci $\log \zeta(s)$. Dospíváme zejména ke vzorci (10) a k formuli (11), která umožňuje aspoň theoreticky vypočísti Riemannovu funkci prvočíselnou pomocí absolutně konvergující řady beze znalosti nullových bodů funkce zéta.

Dále jest připojen ještě jiný rozvoj pro funkci $f(x)$, jehož konvergence však není dokázána. Za to vede k jednoduchému výsledku pro počet prvočísel $\pi(x)$ (vzorec 14). Oddíl třetí konečně obsahuje několik důkazů, které nebyly pojaty do textu prvních dvou oddílů z toho důvodu, aby logická stavba celé rozpravy nebyla porušována častým a obšírným odbočováním.

V Praze v únoru 1916.

I. Obecné formule pro řady Dirichletovy.

Funkce komplexní proměnné s budiž definována Dirichletovou řadou

$$D(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k^s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Dále nechť jest pro jisté reálné $\alpha > o$ řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k^\alpha}$$

konvergentní. Pak konverguje Dirichletova řada (1) pro všechna s, jichž reálná část $R(s) \geqq \alpha$ absolutně a stejnoměrně a definuje v půlrovině jmenované analytickou funkci proměnné s.[1]) Značí-li nyní x libovolné a kladné číslo větší než jedna, platí o koeficientech řady (1) vzorec

$$f(x, r) = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{n=1}^{[x]} b_n \log^{r-1}\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s}{s^r} D(s)\, ds, \ldots \quad (2)$$

kdež b jest libovolné reálné číslo kladné větší nebo rovné číslu α.

Důkaz této formule pro $r = 2$ proveden jest v citovaném díle Landauově p. 180 a násl., pro $r = 1$ na str. 346 a násl. Methoda tam užitá při $r = 2$ dá se téměř beze změny přenésti na důkaz obecné formule (2), pokud $r \geqq 2$.[2])

Abychom mohli vyčísliti integrál na pravé straně vzorce (2), nemusíme hledati pro funkci $D(s)$ vyjádření platné v celé rovině; protože integrační cesta běží úplně v půlrovině $R(s) \geqq \alpha$, vystačíme také takovým rozvojem pro $D(s)$, který jest konvergentním jenom v této půlrovině. Hledaný rozvoj poskytne nám Lagrange-ova řada postupující podle mocnin funkce $\frac{s-a}{s}$, kdež a jest konstanta tak volená, že $R\left(\frac{a}{2}\right) > \alpha$

$$\frac{D(s)}{s^2} = \sum_{k=o}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{s-a}{s}\right)^k,$$
$$\alpha_0 = \frac{D(a)}{a^2}, \quad \alpha_k = \frac{a}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left\{ s^{k-3} D(s) \right\}_{s=a}. \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

K závorce připojená rovnice značí, že *po* provedené derivaci má se dosaditi $s = a$. Pokládáme-li tedy hodnotu funkce $D(s)$ a všech jejích derivací v bodě $s = a$ za známou, můžeme rovněž koeficienty α_k pokládati za známé. Řada (3) jest absolutně a stejnoměrně konvergentní v každé konečné části půlroviny $R(s) > \frac{a}{2}$; tedy také podél každé části integrační

---

[1]) Landau l. c. p. 157.
[2]) Viz odstavec III., 1.

cesty ve vzorci (2), zvolíme-li ovšem $b > \frac{a}{2}$.[1]) Proto jest dovoleno řadu onu integrovati člen za členem,[2]) avšak protože integrační meze jsou nekonečné, jest třeba potom dodatečně zjistiti, zda integrací vzniklá řada konverguje. Ze vzorce (2) obdržíme

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s (s-a)^k}{s^{r+k-2}} \, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Omezíme-li se na případy $r \geqq 4$, můžeme místo jednotlivých integrálů psáti[3])

$$J_k^{(r)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s (s-a)^k}{s^{r+k-2}} \, ds = \frac{1}{(k+r-3)!} \frac{d^{k+r-3}}{ds^{k+r-3}} \left\{ x^s (s-a)^k \right\}_{s=0} \quad (4a)$$

Tak na př. pro $r = 4$ vypočteme první tři funkce

$$J_0(x) = \log x, \quad J_1(x) = \log x + \frac{a}{2} \log^2 x,$$

$$J_2(x) = \log x - a \log^2 x + \frac{a^2}{6} \log^3 x, \text{ atd.}$$

Získali jsme tedy konečně rozvoj

$$\left.\begin{aligned} f(x, r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k J_k^{(r)}(x), \\ \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left\{ s^{k-3} D(s) \right\}_{s=a} \\ J_k^{(r)}(x) &= \frac{1}{(k+r-3)!} \frac{d^{k+r-3}}{ds^{k+r-3}} \left\{ x^s . (s-a)^k \right\}_{s=0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (5)$$

Jest hodno povšimnutí, že koeficienty α_k jsou závislé jedině na tvaru funkce $D(s)$ a nezávislé na x, kdežto funkce $J_k(x)$ závisí jen na tomto nikterak však na oné funkci $D(s)$. Dá se dokázati (oddíl III. 3), že řada (5) jest pro $r \geqq 4$ absolutně konvergentní a dále, že jest také stejnoměrně konvergentní v každém konečném a reálném intervallu $1 \leqq \lambda_1 \leqq x \leqq \lambda_2$.

Omezení platnosti formulí (5) na $r \geqq 4$ zdá se býti jistou vadou. Tento nedostatek však není nikterak podstatným, protože, známe-li řadu pro $f(x, 4)$, můžeme snadno vypočísti $f(x, 3)$, $f(x, 2)$ a zejména i $f(x, 1)$ tímto způsobem:

Podle vzorce (2) jest:

$$6 f(x, 4) = \sum_{n=1}^{[x]} b_n (\log x - \log n)^3 = \log^3 x . S_0 - 3 \log^2 x . S_1 + 3 \log x . S_2 - S_3.$$

---

[1]) Viz odstavec III., 2.

[2]) Viz na př. N. Nielsen: Elemente der Funktionentheorie p. 173, III. a p. 264.

[3]) Viz odstavec III., 2.

kdež

$$S_k = \sum_{n=1}^{[x]} b_n \log^k n\,.$$

Značí-li nyní ξ libovolné číslo intervallu $[x] \leqq \xi < [x]+1$, bude vzhledem k vztahu

$$[\xi] = [x],$$

$$6\, f(\xi, 4) = \log^3 \xi \,.\, S_0 - 3 \log^2 \xi \,.\, S_1 + 3 \log \xi \,.\, S_2 - S_3\,.$$

Zvolíme-li tedy postupně tři čísla taková

$$\xi = x_1,\; \xi = x_2,\; \xi = x_3,$$

obdržíme systém lineárných rovnic pro veličiny S_k.

$$\left.\begin{array}{c} S_0 \log^3 x - 3\, S_1 \log^2 x + 3\, S_2 \log x - S_3 = f(x, 4) \\ S_0 \log^3 x_k - 3\, S_1 \log^2 x_k + 3\, S_2 \log x_k - S_3 = f(x_k, 4)\,. \\ (k = 1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Determinant Δ tohoto systému jest typu Vandermondova a různí se tedy od nully, pokud čísla $x\, x_1\, x_2\, x_3$ jsou od sebe různá. Snadno se vypočte

$$\Delta = 9 \log \frac{x}{x_1} \,.\, \log \frac{x}{x_2} \,.\, \log \frac{x}{x_3} \,.\, \log \frac{x_1}{x_2} \,.\, \log \frac{x_1}{x_3} \,.\, \log \frac{x_2}{x_3}\,,$$

$$S_0 = 6 \,.\, \left\{ \frac{f(x, 4)}{\log \frac{x}{x_1} \,.\, \log \frac{x}{x_2} \,.\, \log \frac{x}{x_3}} + \frac{f(x_1, 4)}{\log \frac{x_1}{x} \,.\, \log \frac{x_1}{x_2} \,.\, \log \frac{x_1}{x_3}} + \right.$$

$$\left. + \frac{f(x_2, 4)}{\log \frac{x_2}{x} \,.\, \log \frac{x_2}{x_1} \,.\, \log \frac{x_2}{x_3}} + \frac{f(x_3, 4)}{\log \frac{x_3}{x} \,.\, \log \frac{x_3}{x_2} \,.\, \log \frac{x_3}{x_1}} \right\} \ldots (6a)$$

Podobné výrazy platí pro S_1, S_2, S_3.

Čísla x_1, x_2, x_3 se dají k danému x vždy snadno určiti. Zvolme zcela obecně $x_3 = x + \varepsilon$, kdež ε jest libovolný zlomek pravý splňující nerovninu

$$x + \varepsilon < [x] + 1$$

a interpolujme mezi daná čísla x a $x + \varepsilon$ na př. dva členy geometrické řady. Tak obdržíme

$$x = x,\; x_1 = \sqrt[3]{x^2 (x + \varepsilon)},\; x_2 = \sqrt[3]{x (x + \varepsilon)^2},\; x_3 = x + \varepsilon,$$

$$S_0 = \frac{27}{(\log (x + \varepsilon) - \log x)^3} \left\{ f(x + \varepsilon, 4) - 3\, f(\sqrt[3]{(x + \varepsilon)^2 \,.\, x},\, 4) + \right.$$

$$\left. + \;3\, f \sqrt[3]{(x + \varepsilon)\, x,^2}\, 4) - f(x, 4) \right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6b)$$

Není-li x číslo celistvé, můžeme také klásti, jak snadná úvaha ukazuje ve vzorci (6_b) místo x číslo $[x]$ a místo $x + \varepsilon$ číslo x, takže vzorec pak neobsahuje libovolný zlomek ε. Tak jsme vypočetli vzorec pro S_0, které podle definice jest rovno součtu prvních $[x]$ koeficientů Dirichletovy řady (1), čili funkci $f(x, 1)$. Kombinujeme-li nyní vzorec (6_b) s formulemi (5), obdržíme

$$\left.\begin{aligned} f(x, 1) &= \sum_{n=1}^{[x]} b_n = \frac{27}{\log^3 \frac{x+\varepsilon}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar{J}_k(x), \\ \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d s^k} \left\{ s^{k-3} D(s) \right\}_{s=a}, \\ \bar{J}_k(x) &= \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{d s^{k+1}} \left\{ (s-a)^k . \left(\sqrt[3]{(x+\varepsilon)^s} - \sqrt[3]{x^s} \right)^3 \right\}_{s=0} \end{aligned}\right\} \dots\dots (7)$$

Tato řada pro $f(x, 1)$ jest absolutně konvergentní, protože vznikla sečtením čtyř absolutně konvergentních řad tvaru (5). Vzorec obsahuje libovolný zlomek ε; *není* však dovoleno klásti $\lim \varepsilon = 0$ a vyhledanou limitu příslušnou pro

$$\frac{1}{\log^3 \frac{x+\varepsilon}{x}} \bar{J}_k(x)$$

dosaditi do jednotlivých členů řady (7). Postup tento jest totiž zastřenou derivací řady podle čísla x, která by byla dovolena jenom v tom případě, kdyby tím vzniklá nová řada byla opět konvergentní, což našimi prostředky prokázati nedovedeme.

Čistě formálně můžeme odvoditi pro součet koeficientů $f(x, 1)$ ještě jiný rozvoj. Do integrálu (2)

$$f(x, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s}{s} D(s)\, d s$$

dosadíme řadu Lagrangeovu obdobnou řadě (3)

$$\left.\begin{aligned} D(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(\frac{s-a}{s} \right)^k, \\ \beta_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d s^k} \left\{ s^{k-1} D(s) \right\}_{s=a} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

Rozvoj tento jest rovněž v příslušné půlrovině abs. konvergentním a v každé konečné části oné půlroviny také stejnoměrně konvergentní. Tak získáme

$$\left.\begin{aligned} f(x, 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k L_k(x), \\ L_k(x) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d s^k} \left\{ x^s (s-a)^k \right\}_{s=0} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

Ačkoliv konvergence této řady jest také velice pravděpodobnou, nemáme prostředků k přesnému důkazu. Methoda užitá při důkazu konvergence řady (5) (oddíl III. 3) zde selhává. Uvádím tento neúplný výsledek jen pro zajímavou applikaci, kterou připouští při prvočíselné funkci Riemannově. Obraťme se nyní k vyšetřování specielní řady Dirichletovy

$$D(s) = \log \zeta(s).$$

11. Důsledky pro Riemannovu funkci prvočíselnou.

Prvočíselná funkce Riemannova, definovaná v úvodě vzorcem (A), jest patrně zvláštním případem vzorce (2). Vyplývá z něho dosazením $D(s) = \log \zeta(s)$, $r = 1$. Jest známo, že $\log \zeta(s)$ dá se rozvinouti v řadu Dirichletovu, která absolutně konverguje v půlrovině určené nerovninou $R(s) > \alpha > 1$.[1]) Vzorce (5) dávají

$$\left.\begin{aligned} f(x, 4) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k J_k(x), \\ \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d s^k} \left\{ s^{k-3} \log \zeta(s) \right\}_{s=a} \\ J_k(x) &= \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{d s^{k+1}} \left\{ x^s (s-a)^k \right\}_{s=0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (10)$$

Jest tedy na př.

$$\alpha_0 = \frac{\log \zeta(a)}{a^2}, \quad \alpha_1 = \frac{\zeta'(a)}{a\,\zeta(a)} - \frac{2 \log \zeta(a)}{a^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{\zeta''(a)}{2\,\zeta(a)} - \frac{\zeta'^2(a)}{2\,\zeta^2(a)} - \frac{\zeta'(a)}{a\,\zeta(a)} + \frac{\log \zeta(a)}{a^2}, \text{ atd.}$$

$$J_0(x) = \log x, \quad J_1(x) = \log x - \frac{a \log^2 x}{2},$$

$$J_2(x) = \log x - a \log^2 x + \frac{a^2}{6} \log^3 x; \text{ atd.}$$

Funkce $J_k(x)$ se nejpohodlněji počítají pomocí rekurrentní formule

$$(k+1) J_k(x) - (2k - a \log x) J_{k-1}(x) + (k-1) J_{k-2}(x) = 0 \; \ldots (10a)$$

Odvoditi se dá takto:

Z differenciálního výrazu pro $J_k(x)$ vyplývá

$$(k+1) J\;(x) - k J_{k-1}(x) = \frac{\log x}{k!} \frac{d^k}{d s^k} \left\{ x^s (s-a)^k \right\}_{s=0}$$

$$k J_{k-1}(x) - (k-1) J_{k-2}(x) = \frac{\log x}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d s^{k-1}} \left\{ x^s (s-a)^{k-1} \right\}_{s+0}.$$

[1]) Landau l. c. p. 127, 128.

Odečtením obou výrazů

$$(k+1)J_k - 2kJ_{k-1} + (k-1)J_{k-2} = \frac{\log^2 x}{k!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left\{x^s(s-a)^k\right\}_{s=0} \qquad (10b)$$

Dále jest patrně

$$\frac{d_k}{d\,s_k}\left\{(s-a)^k x^s\right\} = \frac{d^{k-1}}{d\,s^{k-1}}\left\{k(s-a)^{k-1}x^s + (s-a)^k \log x\, x^s\right\} =$$

$$= k\frac{d^{k-1}}{d\,s^{k-1}}\left\{x_s(s-a)^{k-1}\right\} + \log x \frac{d^{k-1}}{d\,s^{k-L}}\left\{x^s(s-a)^k\right\}.$$

Použijeme-li nyní vzorce pro k-tou derivaci součinu

$$\frac{d^k}{d\,s^k}(u\,.\,v) = u^{(k)}.\,v + \binom{k}{1}u^{(k-1)}.\,v^{(1)} + \binom{k}{2}u^{(k-2)}v^{(2)} + \ldots + u\,.\,v^{(k)}$$

na funkce $u = (s-a)^{k-1}\,.\,x^s$, $v = (s-a)$, obdržíme

$$\frac{d^k}{d\,s^k}\left\{(s-a)^k.x^s\right\} = (s-a)\frac{d^k}{d\,s^k}\left\{(s-a)^{k-1}x^s\right\} + k\frac{d^{k-1}}{d\,s^{k-1}}\left\{(s-a)^{k-1}x^s\right\}.$$

Porovnání tohoto výsledku s předešlým vede k rovnici

$$\log x \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left\{(s-a)^k x^s\right\} = (s-a)\frac{d^k}{d\,s^k}\left\{(s-a)^{k-1}x^s\right\}.$$

Násobíme-li obě strany číslem $\frac{\log x}{k!}$ a dosadíme-li po provedené derivaci $s = o$, obdržíme

$$\frac{\log^2 x}{k!}\frac{d^{k-1}}{d\,s^{k-1}}\left\{(s-a)^k x^s\right\}_{s=o} = -\frac{a\log x}{k!}\frac{d^k}{d\,s^k}\left\{(s-a)^{k-1}x^s\right\}_{s=o} = -a\log x J_{k-1}$$

Dosadíme-li tento výsledek do vzorce (10b), obdržíme konečně rekurrentní formuli (10a).

Číslo a ve vzorci (10) jest vázáno na jedinou podmínku $R\left(\frac{a}{2}\right) > 1$. Můžeme tedy na př. voliti $a = 4$. Pak jest

$$\zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\zeta'(4) = -\left(\frac{\log 2}{2^4} + \frac{\log 3}{3^4} + \frac{\log 4}{4^4} + \ldots\right)$$

$$\zeta''(4) = \frac{\log^2 2}{2^4} + \frac{\log^2 3}{3^4} + \ldots, \text{atd.}$$

Součty těchto řad — mimo první — sice neznáme v ukončeném tvaru, avšak dovedeme je numericky s libovolnou přesností určiti, takže koeficienty α_k v rozvoji (10) můžeme pokládati za čísla známá. Rozvoj tento určuje funkci $f(x, 4)$ příslušnou k Dirichletově řadě pro log $\zeta(s)$. Podle vzorců (7) obdržíme pak příslušnou funkci $f(x, 1)$, která v našem případě jest identickou s Riemannovou funkcí prvočíselnou $f(x)$, ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= \frac{27}{\log^3 \frac{x+\varepsilon}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar{J}_k(x), \\
\bar{J}_k(x) &= \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{d s^{k+1}} \left\{ (s-a)^k . \left(\sqrt[3]{(x+\varepsilon)^s} - \sqrt[3]{x^s} \right)^3 \right\}_{s=0}
\end{aligned}\right\}(11)$$

nebo

$$\bar{J}_k(x) = J_k(x+\varepsilon) - 3 J_k\left(\sqrt[3]{(x+\varepsilon)^2 . x}\right) + 3 J_k\left(\sqrt[3]{(x+\varepsilon)\, x^2}\right) - J_k(x),$$

kdež α_k a $J_k(x)$ jest definováno vzorci (10).

Jak již v úvodě bylo naznačeno, jest vzorec (11) pozoruhodný tím, že umožňuje aspoň theoreticky výpočet Riemannovy funkce prvočíselné pomocí absolutně konvergující řady beze znalosti nullových bodů funkce $\zeta(s)$. Ze vzorců (10) a (11) jest patrno, že vše, co k výpočtu musíme znáti, jsou pouze hodnoty funkce $\zeta(s)$ a všech jejích derivací v bodě $s = a$. Mimo to nemusíme o funkci $\zeta(s)$ věděti nic jiného, než že jest $\log \zeta(s)$ rozvinutelno v absolutně konvergující řadu Dirichletovu pro všechna s, jichž $R(s) \geqq \alpha > 1$, kterýž poznatek jest zcela triviální.

Jiným směrem pozoruhodný, při tom však nezaručený, důsledek vyplývá z formule (9). Dosadíme-li tam $D(s) = \log \zeta(s)$, dostaneme

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k L(x), \\
\beta_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d s^k} \left\{ s^{k-1} \log \zeta(s) \right\}_{s=a}, \\
L_k(x) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d s^k} \left\{ x^s (s-a)^k \right\}_{s=0}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Abychom měli názor, jak rozvoj ten vlastně vypadá, vypočteme první tři členy.

$$\beta_0 = \log \zeta(a),\ \beta_1 = \frac{a\, \zeta'(a)}{\zeta(a)},\ \beta_2 = \frac{2a\, \zeta'(a) + a^2 \zeta''(a)}{2 \zeta(a)} - \frac{a^2 \zeta'^2(a)}{2 \zeta^2(a)};$$

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = 1 - a \log x,\ L_2(x) = 1 - 2a \log x + \frac{a^2}{2} \log^2 x.$$

Do rozvoje (12) můžeme dokonce vpraviti i obvyklé užití integrállogarithmu. Dá se totiž pomocí integrálu

$$Li(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\log(s-1) \,.\, x^s}{s} d s$$

a použitím rozvoje

$$\log(s-1) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left(\frac{s-a}{s} \right)^k$$

$$\lambda_0 = \log(a-1);\ \lambda_k = \frac{1}{k} + \frac{(-1)^{k-1}}{k(a-1)^{k-1}}$$

odvoditi řada

$$Li(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k L_k(x),$$

což odečteno od řady (12) dává

$$f(x) = Li(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta_k + \lambda_k) L_k(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Ve vzorci (12) jest patrně funkce $L_k(x)$ polynomem k-tého stupně v proměnné $\log x$. Na tomto základě můžeme, ovšem opět jen zcela formálně, odvoditi podobný rozvoj přímo pro funkci $\pi(x)$, to jest pro počet prvočísel menších než x. Obrátíme-li totiž rovnici (A) pomocí formule Möbiusovy,[1]) obdržíme

$$\pi(x) = \frac{\mu(1)}{1} f(x) + \frac{\mu(2)}{2} f(x^{1/2}) + \frac{\mu(3)}{3} f(x^{1/3}) + \ldots .$$

Dosadíme-li sem za $f\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$ rozvoj (12), obdržíme zcela formálně

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k . \left\{ \frac{\mu(1)}{1} L_k(x) + \frac{\mu(2)}{2} L_k(x^{1/2}) + \frac{\mu(3)}{3} L_k(x^{1/3}) + \ldots \right\}.$$

Označíme-li závorku na pravé straně znakem $M_k(x)$, mohu psáti

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k M_k(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Při tom jest patrně

$$M_0(x) = \frac{\mu(1)}{1} + \frac{\mu(2)}{2} + \frac{\mu(3)}{3} + \ldots,$$

$$M_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} - a \log x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2},$$

$$M_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} - 2a \log x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} + \frac{a^2}{2} \log^2 x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^3}, \text{ atd.}$$

Aneb užijeme-li známých vztahů[2])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

$$M_0(x) = 0,\ M_1(x) = -a \frac{\log x}{\zeta(2)};\ M_2(x) = -2a \frac{\log x}{\zeta(2)} + \frac{a^2}{2} \frac{\log^2 x}{\zeta(3)};\ \text{atd.}$$

Vidíme tedy, že $M_k(x)$ jest opět polynom k-tého stupně veličiny $\log x$,

[1]) Landau l. c. p. 577, 580.
[2]) Landau l. c. p. 568 a 576.

který vznikne z polynomu $L_k(x)$ vynecháním prostého členu a dosazením veličin $\frac{log^k x}{\zeta(k+1)}$ místo veličin $log^k x$.

Vzorec (14) pro počet prvočísel menších než x vyznačuje se tedy tím, že již neobsahuje čísel $\mu(k)$, čehož při použití Riemannovy formule uvedené v úvodu nelze docíliti.

Konvergence řad (9), (12), (13) a (14) není zaručena. Uvádím zde tyto výsledky jenom proto, abych umožnil povolanějším pokusiti se o jejich přesný důkaz. Abych zamezil nedorozumění, připomínám současně, že všechny ostatní vzorce tohoto pojednání jsou v něm také přesně odůvodněny a konvergence příslušných řad dokázána.

III. Důkazy.

§ 1. *Důkaz vzorce* (2).

Všimněme si především integrálu

$$J(w, T) = \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{e^{ws}}{s^r} d\,s, \quad r \geqq 2,\ T > b,$$

a rozeznávejme dva případy.

1. Budiž $w \leqq 0$. Užijeme Cauchyho věty integrální na obor ohraničený z leva úsečkou omezenou body $b - iT$, $b + iT$ a z prava půlkružnicí c, mající úsečku jmenovanou průměrem. Poloměr této půlkružnice jest patrně T. Protože funkce $\frac{e^{ws}}{s^r}$ jest v tomto oboru analytickou, bude

$$J(w, T) = \int_c \frac{e^{ws}}{s^r} d\,s,$$

kdež křivkový integrál vztahuje se k naší půlkružnici a vzat jest ze zdola nahoru. Délka integrační cesty jest πT a při tom jest stále

$$\left|\frac{e^{ws}}{s^r}\right| < \frac{e^{bw}}{T^r}.$$

Jest tedy

$$\left|J(w, T)\right| < \frac{\pi e^{bw}}{T^{r-1}}, \quad J(w, \infty) = 0.$$

2. Budiž $w > 0$. Omezíme li obor integrační touž úsečkou jaho dříve, půlkružnici si však myslíme vedenu na levo od této úsečky. Protože poloměr jest větší než b, leží uvnitř oboru takto omezeného bod $s = 0$, který jest polem funkce $\frac{e^{ws}}{s^r}$. Příslušné residuum jest $\frac{w^{r-1}}{(r-1)!}$. Podle Cauchyho integrální věty jest tedy

$$J(w, T) - 2\pi i \frac{w^{r-1}}{(r-1)!} = \int_c \frac{e^{ws}}{s^r} d s.$$

Délka integrační cesty jest opět πT a při tom

$$\left|\frac{e^{ws}}{s^r}\right| < \frac{e^{wb}}{(T-b)^r}.$$

Z toho plyne

$$\left|J(w, T) - 2\pi i \frac{w^{r-1}}{(r-1)!}\right| < \frac{\pi e^{wb}}{(T-b)^{r-1}},$$

$$J(w, \infty) = 2\pi i \frac{w^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Na tomto základu dají se nerovniny pro $|J(w), T|$ ještě přesněji určiti. Pro každé $w \gtreqless 0$ jest totiž

$$\left|\int_{b+iT}^{b+i\infty} \frac{e^{ws}}{s^r} d s\right| \leqq \int_T^{\infty} \frac{e^{bw}}{t^r} d t = \frac{(r-1)\, e^{bw}}{T^{r-1}},$$

$$\left|\int_{b-i\infty}^{b-iT} \frac{e^{ws}}{s^r} d s\right| \leqq \int_{-\infty}^{-T} \frac{e^{bw}}{t^r} d t = \frac{(r-1)\, e^{bw}}{T^{r-1}}$$

a tedy

$$\left|J(w, \infty) - J(w, T)\right| \leqq \frac{2\,(r-1)\, e^{bw}}{T^{r-1}},$$

čili

$$\left|J(w, T)\right| \leqq \frac{2\,(r-1)\, e^{bw}}{T^{r-1}}, \text{ pro } w \leqq 0,$$

$$\left|J(w, T) - 2\pi i \frac{w^{r-1}}{(r-1)!}\right| \leqq \frac{2\,(r-1)\, e^{bw}}{T^{r-1}} \text{ pro } w > 0.$$

Substitucí $w = \log y$ obdržíme vzorce platné pro reálné a kladné y, jakož i reálnou hodnotu jeho logarithmu

$$\left.\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s\, d s}{s^r}\right| < \frac{(r-1)\, y^b}{T^{r-1}} \text{ pro } 0 < y \leqq 1, \\ &\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s\, d s}{s^r} - \frac{\log^{r-1} y}{(r-1)!}\right| < \frac{(r-1)\, y^b}{T^{r-1}} \text{ pro } y \geqq 1. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (a)$$

Konverguje-li T k nekonečnému číslu, obdržíme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^s\, d s}{s^r} \left.\begin{aligned} &= 0 && \text{pro } 0 < y \leqq 1, \\ &= \frac{\log^{r-1} y}{(r-1)!} && \text{pro } y \geqq 1. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (b)$$

Opírajíce se o tyto výsledky, provedeme nyní důkaz formule (2).

Nechť značí x libovolné kladné číslo větší než jedna. Řada (1) násobená zlomkem $\frac{x}{s^r}$

$$\frac{x^s}{s^r} D(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^s b_k}{s^r k^s}$$

jest stejnoměrně konvergentní podél přímky dané vzorcem $b + it$, $-T \leqq t \leqq T$, kdež $T > 0$.

Podél této přímky jest totiž

$$\left| \frac{x^s b_k}{s^r k^s} \right| = \frac{x^b}{(b^2 + t^2)^{\frac{r}{2}}} \cdot \frac{|b_k|}{k^b}.$$

Integraci řady podél naší přímkové dráhy jest tedy dovoleno provésti na jednotlivých členech, čímž obdržíme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s}{s^r} D(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s b_k}{s^r k^s}\, ds.$$

Užijeme-li vzorce (a) pro $y = \frac{x}{k}$, získáme

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s ds}{k^s s^r} - \frac{(\log x - \log k)^{r-1}}{(r-1)!} \right| < \frac{(r-1)\, x^b}{T^{r-1} k^b}$$

pro $k = 1, 2, 3, \ldots, [x]$ a za druhé

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s ds}{k^s s^r} \right| < \frac{(r-1)\, x^b}{T^{r-1} k^b} \quad \text{pro}$$

$$k = [x] + 1, [x] + 2, \ldots.$$

Násobíme-li každou z těchto nerovnin hodnotou $|b_k|$ a sečteme-li, obdržíme

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s}{s^r} D(s)\, ds - \sum_{k=1}^{[x]} \frac{b_k (\log x - \log k)^{r-1}}{(r-1)!} \right| < \frac{(r-1)\, x^b}{T^{r-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k^b}.$$

Pro $\lim T = \infty$ konverguje pravá strana k nulle — pokud ovšem $r \geqq 2$ — čímž jest vzorec (2) dokázán.

§ 2. *Důkaz řady* (3).

Mysleme si rovinu komplexní proměnné s rozdělenou na dvě poloviny přímkou rovnoběžnou s osou imaginární. Přímka rozdělující budiž vedena na pravo od osy imaginární ve vzdálenosti $\frac{a}{2}$. Dále budiž K jednoduše souvislý obor ležící úplně na pravo od přímky dělící a funkce $f(s)$ analytická v oboru K. Funkce tato dá se rozvinouti v řadu Lagrange-ovu

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{s-a}{s} \right)^k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

platnou v celém oboru K.

Podle známých pravidel o tvoření řad Lagrange-ových definuje totiž řada (c) funkci $f(s)$ v oné části roviny, která jest společná oboru K a jinému oboru K_1, určenému následujícím počtem.

Funkce

$$\varphi(s) = \frac{s-a}{s}$$

má jediný nullový bod $s_0 = a$. Funkce

$$\varphi'(s) = \frac{a}{s^2}$$

má rovněž jediný nullový bod $S_0 = \infty$. Při tom jest

$$\left|\varphi(S_0)\right| = \left|\frac{S_0 - a}{S_0}\right| = 1.$$

Obor K_1, v němž řada (c) jest konvergentní, určen jest pak podmínkou

$$|\varphi(s)| < |\varphi(S_0)| \quad \text{čili}$$

$$\left|\frac{s-a}{s}\right| < 1.$$

Nerovnina tato splněna jest pro všechna s, jichž reálná část $R(s) > \frac{a}{2}$, jinak řečeno v celé půlrovině ležící na pravo od přímky dělící. Protože pak jsme předpokládali, že obor K leží cely v této půlrovině, jest rovnice (c) platnou pro celý obor K. Je-li funkce $f(s)$ analytickou v celé půlrovině uvažované, jest také v každé konečné části této půlroviny platným rozvoj (c). Poněvadž pak řada jest v podstatě své řadou potenční, konverguje v každé konečné části naší půlroviny absolutně a stejnoměrně.[1]) Při tom ovšem nevíme nic o konvergenci na dělící přímce a v bodě nekonečném $s = \infty$.

Koeficienty α_k určeny jsou vztahy

$$\alpha_0 = f(a)\,; \quad \alpha_k = \frac{1}{k!}\frac{d^{k-1}}{d s^{k-1}}\Big\{s^k f'(s)\Big\}_{s=a}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

kdež připojenáro vnice značí, že po provedené derivaci má se dosaditi $s = a$.

Abychom mohli v následujícím paragrafu dokázati absolutní konvergenci řady (5), musíme vzorce pro α_k transformovati a nalézti horní mez pro $|\alpha_k|$.

Užijeme-li identity

$$\frac{d}{ds}\Big(s^k f(s)\Big) = s^k f'(s) + k\, s^{k-1} f(s),$$

---

[1]) Viz na př. Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie I. B. 2. Aufl. p. 335.

obdržíme

$$\frac{d^k}{d\,s^k}\Big(s^k f(s)\Big) = \frac{d^{k-1}}{d\,s^{k-1}}\Big(s^k f'(s)\Big) + k\,\frac{d^{k-1}}{d\,s^{k-1}}\Big(s^{k-1} f(s)\Big).$$

Za druhé užijeme vzorce

$$\frac{d^k}{d\,s^k}(u\,.\,v) = u^{(k)}\,.\,v + \binom{k}{1} u^{(k-1)}\,.\,v^{(1)} + \binom{k}{2} u^{(k-2)}\,.\,v^{(2)} + \ldots\ldots$$

na funkce

$$u = s^{k-1}\,.\,f(s), \quad v = s.$$

$$\frac{d^k}{d\,s^k}\Big(s^k\,.\,f(s)\Big) = s\,.\,\frac{d^k}{d\,s^k}\Big(s^{k-1} f(s)\Big) + k\,\frac{d^{k-1}}{d\,s^{k-1}}\Big(s^{k-1} f(s)\Big).$$

Porovnáme-li tento výsledek s předešlým, vidíme

$$\frac{d^{k-1}}{d\,s^{k-1}}\Big(s^k f'(s)\Big) = s\,\frac{d^k}{d\,s^k}\Big(s^{k-1} f(s)\Big).$$

Podle (d) jest tedy

$$\alpha_k = \frac{a}{k!}\,\frac{d^k}{d\,s^k}\Big\{s^{k-1} f(s)\Big\}_{s=a},$$

jak uvedeno jest ve formulích (3).

Místo tohoto výrazu zavedeme křivkový integrál.

Podle věty Cauchyho jest totiž

$$\frac{1}{k!}\,F^{(k)}(z) = \frac{1}{2\,\pi\,i}\int\limits_C \frac{F(t)\,d\,t}{(t-z)^{k+1}},$$

kdež $F(t)$ jest funkce analytická uvnitř jednoduché uzavřené integrační křivky C a bod z leží uvnitř oboru integračního.

Jest tedy

$$\alpha_k = \frac{a}{2\,\pi\,i}\int\limits_C \frac{f(t)\,t^{k-1}\,.\,d\,t}{(t-a)^{k+1}}.$$

Při tom nesmí uzavřená křivka C vystoupiti z oboru, v němž $f(t)$ jest analytické a musí objímati bod a.

Obraťme se k vyhledání horní meze pro $|\alpha_k|$.

Podobně jako při důkazu vzorce (2) mysleme si v rovině komplexní proměnné t úsečku ohraničenou body $\frac{a}{2} - i\,T$, $\frac{a}{2} + i\,T$ a půlkružnici c nad touto úsečkou jakožto průměrem na pravo vedenou. Učiníme-li $T > \frac{a}{2}$, bude ležeti bod $t = a$ uvnitř takto omezeného oboru. Zvolíme-li úsečku a půlkružnici za cestu integrační C a klademe-li

$$f(t) = \frac{D(t)}{t^2}, \quad \text{bude}$$

$$\alpha_k = \frac{a}{2\pi i} \int_{\frac{a}{2}+iT}^{\frac{a}{2}-iT} \frac{D(t)}{(t-a)^4} \cdot \left(\frac{t}{t-a}\right)^{k-3} dt +$$

$$+ \frac{a}{2\pi i} \int_c \frac{D(t)}{(t-a)^4} \left(\frac{t}{t-a}\right)^{k-3} dt,$$

$$\left| \alpha_k + \frac{a}{2\pi i} \int_{\frac{a}{2}-iT}^{\frac{a}{2}+iT} \right| = \frac{a}{2\pi} \left| \int_c \right|.$$

Uvažme nyní, že pro kterýkoliv bod půlkružnice c jest

$$| D(t) | \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k^{\frac{a}{2}}} = B_1$$

a za druhé, jak jednoduchý náčrtek nás poučí

$$| t | \leqq T + \frac{a}{2}, \quad | t - a | \geqq T - \frac{a}{2} \quad \text{čili}$$

$$\left| \frac{t}{t-a} \right| \leqq \frac{T + \frac{a}{2}}{T - \frac{a}{2}}, \quad \left| \frac{1}{(t-a)^4} \right| \leqq \frac{1}{\left(T - \frac{a}{2}\right)^4}.$$

Integrační cesta podél půlkružnice c má délku $\pi . T$. Jest tedy

$$\left| \alpha_k + \frac{a}{2\pi i} \int_{\frac{a}{2}-iT}^{\frac{a}{2}+iT} \right| = \frac{a}{2\pi} \left| \int_c \right| \leqq \frac{\pi T . B_1 \left(T + \frac{a}{2}\right)^{k-3}}{\left(T - \frac{a}{2}\right)^4 . \left(T - \frac{a}{2}\right)^{k-3}}.$$

Pro $\lim T = \infty$ jest tedy

$$\alpha_k = -\frac{a}{2\pi i} \int_{\frac{a}{2}-i\infty}^{\frac{a}{2}+i\infty} \frac{D(t)}{(t-a)^4} \left(\frac{t}{t-a}\right)^{k-3} dt.$$

Sem dosadíme

$$t = \frac{a}{2} + i\tau.$$

$$\alpha_k = -\frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D\left(\frac{a}{2} + i\tau\right)}{\left(\frac{a^2}{4} + \tau^2\right)^2} e^{(2k-2)\, i \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{a}} . d\tau.$$

Rozvedeme

$$D\left(\frac{a}{2} + i\tau\right) = F_1(\tau) + i F_2(\tau),$$

kdež

$$F_1(\tau) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q \cos(\tau \log q)}{q^{\frac{a}{2}}}; \quad F_2(\tau) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q \sin(\tau \log q)}{q^{\frac{a}{2}}};$$

patrně jest

$$F_1(-\tau) = F_1(\tau); \quad F_2(-\tau) = -F_2(\tau) \quad \text{a tedy}$$

$$\alpha_k = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2(\tau) \sin\left\{(2k-2) \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{a}\right\}}{\left(\frac{a^2}{4} + \tau^2\right)^2} d\tau$$

$$- \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_1(\tau) \cos\left\{(2k-2) \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{a}\right\}}{\left(\frac{a^2}{4} + \tau^2\right)^2} d\tau,$$

čili

$$\alpha_k = \frac{16a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_2(\tau) \sin\{\} d\tau}{(a^2 + 4\tau^2)^2} - \frac{16a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_1(\tau) \cos\{\} d\tau}{(a^2 + 4\tau^2)^2}.$$

Absolutní hodnota obou funkcí $F_1(\tau)$, $F_2(\tau)$ jest pro kterékoliv τ v mezích integračních vždy menší než

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{|b_q|}{q^{\frac{a}{2}}}$$

a tedy oba integrály ve výrazu pro α_k mají význam.

Dále jest

$$\int \frac{4a \cos\left\{(2k-2) \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{a}\right\} d\tau}{a^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{k-1} \sin\left\{(2k-2) \operatorname{arctg} \frac{2\tau}{a}\right\},$$

$$\int \frac{4a \sin\{\} d\tau}{a^2 + 4\tau^2} = -\frac{1}{k-1} \cos\{\}$$

a tedy integrací per partes

$$H_1 = \frac{16a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_1(\tau) \cos\{\} d\tau}{(a^2 + 4\tau^2) \cdot (a^2 + 4\tau^2)} =$$

$$= -\frac{4}{\pi(k-1)} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{F_1(\tau)}{a^2 + 4\tau^2}\right] \sin\{\} d\tau,$$

$$H_2 = \frac{16\,a}{\pi} \int_0^\infty \frac{F_2(\tau)\, sin\,\{\}\, d\,\tau}{(a^2 + 4\,\tau^2)\,(a^2 + 4\,\tau^2)} =$$

$$= \frac{4}{\pi\,(k-1)} \int_0^\infty \frac{d}{d\,\tau} \left[\frac{F_2(\tau)}{a^2 + 4\,\tau^2}\right] cos\,\{\}\, d\,\tau,$$

čili

$$H_1 = -\frac{4}{\pi\,(k-1)} \int_0^\infty \frac{F_1'(\tau)\, sin\,\{\}\, d\,\tau}{a^2 + 4\,\tau^2} + \frac{32}{\pi\,(k-1)} \int_0^\infty \frac{\tau\,.\,F_1(\tau)\, sin\,\{\}\, d\,\tau}{a^2 + 4\,\tau^2},$$

$$H_2 = \frac{4}{\pi\,(k-1)} \int_0^\infty \frac{F_2'(\tau)\, cos\,\{\}\, d\,\tau}{a^2 + 4\,\tau^2} - \frac{32}{\pi\,(k-1)} \int_0^\infty \frac{\tau\,.\,F_2(\tau)\, cos\,\{\}\, d\,\tau}{a^2 + 4\,\tau^2}.$$

Uvážíme-li nyní, že jsme zvolili $\frac{a}{2} > \alpha$, a že tedy obě řady

$$A_1 = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{log\, q\, |b_q|}{q^{\frac{a}{2}}}, \qquad B_1 = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{|b_q|}{q^{\frac{a}{2}}}$$

jsou konvergentní, obdržíme

$$|H_1| < \frac{4\,.\,A_1}{\pi\,(k-1)} \int_0^\infty \frac{d\,\tau}{a^2 + 4\,\tau^2} + \frac{4\,B_1}{\pi\,(k-1)} \int_0^\infty \frac{8\,\tau\, d\,\tau}{(a^2 + 4\,\tau^2)^2},$$

čili

$$|H_1| < \frac{A_1}{a\,(k-1)} + \frac{4\,B_1}{\pi\, a^2\,(k-1)}.$$

Zcela obdobně jest také

$$|H_2| < \frac{A_1}{a\,(k-1)} + \frac{4\,B_1}{\pi\, a^2\,(k-1)}.$$

Z toho vyplývá konečně horní mez pro $|\alpha_k|$

$$|\alpha_k| < |H_1| + |H_2| < \frac{M}{k-1}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

kdež

$$M = \frac{2}{a}\left(A_1 + \frac{4\,B_1}{\pi\, a}\right).$$

§ 3. *Důkaz konvergence řady* (5).

Pro koeficienty α_k řady (5) jsme horní mez právě odvodili. Musíme vyšetřiti ještě vzorce pro $J_k^{(r)}(x)$ a určiti také pro tyto funkce horní mez.

Funkce $J_k^{(r)}(x)$ jest definována původně pouze integrálem (4*a*)

$$J_k^{(r)}(x) = \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{b - i\infty}^{b + i\infty} \frac{x^s\,(s-a)^k\, d\,s}{s^{r+k-2}}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Musíme především dokázati, že integrál tento má význam a jest roven differenciálnímu výrazu udanému ve vzorci (4*a*) nebo (5).

Zvolme opět v rovině komplexní proměnné s úsečku omezenou body $b - iT$, $b + iT$ a půlkružnici c, sestrojenou nad úsečkou jakožto průměrem na levo. Zvolíme-li $T > b$, bude obor takto omezený obsahovati bod $s = 0$.

Hledejme nyní hodnotu integrálu

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s (s-a)^k\, ds}{s^{k+r-2}} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c} \frac{x^s (s-a)^k\, ds}{s^{k+r-2}},$$

kdež křivkový integrál $\int\limits_c$ vztahuje se k půlkružnici a vzat jest se shora dolů. Podle Cauchyho věty integrální jest

$$J = \frac{1}{(k+r-3)!}\frac{d^{k+r-3}}{d s^{k+r-3}}\left\{x^s (s-a)^k\right\}_{s=0},$$

neboť funkce $x^s (s-a)^k$ jest v oboru omezeném úsečkou a půlkružnicí analytickou.

Dále jest

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-iT}^{b+iT} - J\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_c\right|.$$

Na půlkružnici c jest

$$s = b + T\,.\,e^{i\varphi}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

Tedy

$$|x^s| < x^b, \quad |s-a| \leqq T + |b-a|; \quad |s| \geqq T - b;$$

z toho plyne

$$\left|\frac{s-a}{s}\right| < \frac{T + |b-a|}{T-b}.$$

Integrační cesta podél půlkružnice má délku πT.

Jest tedy

$$\left|\int\limits_c\right| \leqq \frac{\pi T\,.\,x^b (T + |b-a|)^k}{(T-b)^{r-2}\,.\,(T-b)^k}.$$

Jestliže jest nyní, jak jsme předpokládali, $r \geqq 4$, bude pro $\lim T = \infty$

$$\left|\int\limits_c\right| = 0,$$

čili

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s (s-a)^k\, ds}{s^{k+r-2}} = J = \frac{1}{(k+r-3)!}\frac{d^{k+r-3}}{d s^{k+r-3}}\left\{x^s (s-a)^k\right\}_{s=0}.$$

Při výpočtu integrálu (f), který jsme právě provedli, jest patrně b *libovolné* kladné číslo. Jest tedy integrál na b nezávislý. Abychom nyní mohli vypočísti horní mez pro $J_k^r(x)$, zvolme v integrálu (f) číslo $b = \frac{a}{2}$ a pišme místo $J_k^r(x)$ prostě J.

Zavedeme-li $s = \frac{a}{2} + i\tau$, obdržíme

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{\frac{a}{2}} e^{i\tau \log x}}{\left(\frac{a}{2} + i\tau\right)^{r-2}} \left(\frac{i\tau - \frac{a}{2}}{i\tau + \frac{a}{2}}\right)^k d\tau.$$

Separací části reálné a imaginárné obdržíme po krátké redukci

$$J = \frac{4x^{\frac{a}{2}}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\left\{\tau \log x - (2k + r - 2)\, arctg \frac{2\tau}{a}\right\} d\tau}{(a^2 + 4\tau^2)^{\frac{r-2}{2}}}.$$

Rozdělme integrál na dvě části

$$J_1 = \frac{4x^{\frac{a}{2}}}{\pi} \int_0^{\sqrt[4]{2k+r-2}} \quad ; \qquad J_2 = \frac{4x^{\frac{a}{2}}}{\pi} \int_{\sqrt[4]{2k+r-2}}^\infty .$$

Patrně jest

$$|J_2| > \frac{4x^{\frac{a}{2}}}{\pi} \int_{\sqrt[4]{2k+r-2}}^\infty \frac{d\tau}{(a^2 + 4\tau^2)^{\frac{r-2}{2}}} < \frac{4x^{\frac{a}{2}}}{\pi} \int_{\sqrt[4]{2k+r-2}}^\infty \frac{d\tau}{a^2 + 4\tau^2},$$

neboť $r \geqq 4$ a tedy

$$|J_2| < \frac{x^{\frac{a}{2}} . a}{\pi \sqrt[4]{2k + r - 2}}.$$

Podobně určíme mez pro $|J_1|$. Podle druhé věty o střední hodnotě jest, jestliže $0 < \Theta \leqq 1$

$$J_1 = \frac{4x^{\frac{a}{2}}}{\pi a^{r-2}} \int^{\Theta \sqrt[4]{2k+r-2}} \cos\left\{(2k + r - 2)\, arcgt \frac{2\tau}{a} - \tau \log x\right\} d\tau.$$

Do integrálu na pravé straně zavedeme novou integrační proměnnou

$$u = (2k + r - 2)\, arctg \frac{2\tau}{a} - \tau \log x ,$$

což jest dovoleno, pokud k jest dosti veliké, jak vyplývá z následující úvahy:

$$\frac{d\,u}{d\,\tau} = \frac{2\,(2\,k + r - 2)}{a\left(1 + \dfrac{4\,\tau^2}{a^2}\right)} - \log x\,;$$

výraz tento nabývá nejmenší hodnoty v integračních mezích pro mez horní $\tau = \Theta\sqrt[4]{2\,k + r - 2}$. Jest to

$$\frac{2\,(2\,k + r - 2)\,.\,a}{a^2 + 4\,\Theta^2\,\sqrt{2\,k + r - 2}} - \log x > \frac{a\,(2\,k + r - 2)}{4\sqrt{2\,k + r - 2}} - \log x =$$

$$\frac{a}{4}\sqrt{2\,k + r - 2} - \log x, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

pokud ovšem volíme k tak veliké, že platí nerovnina

$$a^2 - 4\,.\,\sqrt{2\,k + r - 2}\,.$$

Z toho vyplývá, že podrobíme-li k ještě druhé nerovnině

$$\frac{a}{4}\,\sqrt{2\,k + r - 2} > \log x\,,$$

bude v mezích integračních stále

$$\frac{d\,u}{d\,\tau} > 0.$$

Jest tedy u v uvažovaných mezích monotonně vzrůstající funkcí proměnné τ a přirozeně také inversní funkce $\tau = f\,(u)$ vzrůstá monotonně, pokud u roste v mezích

$$0, \left\{(2\,k + r - 2)\,\operatorname{arctg}\frac{2\,\Theta\sqrt[4]{2\,k + r - 2}}{a} - \Theta\sqrt[4]{2\,k + r - 2}\,.\,\log x.\right\}$$

Jest tedy, označíme-li poslední závorku písmenem ξ,

$$J_1 = \frac{4\,x^{\frac{a}{2}}}{\pi\,a^{r-2}}\int_0^{\xi}\frac{\cos u\,d\,u}{\dfrac{2\,(2\,k + r - 2)\,a}{a^2 + 4\,f^2\,(u)} - \log x}\,.$$

Jmenovatel v integr. intervallu monotonně ubývá. Jest tedy opět podle druhé věty o střední hodnotě

$$J_1 = \frac{4\,x^{\frac{a}{2}}}{\pi\,a^{r-2}\,.\left\{\dfrac{2\,(2\,k + r - 2)\,a}{a^2 + 4\,\Theta^2\,\sqrt{2\,k + r - 2}} - \log x\right\}}\,.\int_0^{\Theta_1\,.\,\xi}\cos u\,d\,u$$

aneb užijeme-li nerovniny (g)

$$|\,J_1\,| \leqq \frac{16\,x^{\frac{a}{2}}}{\pi\,a^{r-2}\,(a\,\sqrt{2\,k + r - 2} - 4\,\log x)}\,.$$

Omezme číslo k další nerovninou

$$\frac{a}{2}\sqrt{2k+r-2} > 4 \log x;$$

z toho vyplývá

$$|J_1| < \frac{32\, x^{\frac{a}{2}}}{\pi\, a^{r-1}\sqrt{2k+r-2}}.$$

Vzpomeneme-li nyní na vztahy

$$J = J_1 + J_2,$$
$$|J| \leqq |J_1| + |J_2|$$

obdržíme horní mez pro $|J|$

$$|J| < \frac{32\, x^{\frac{a}{2}}}{\pi\, a^{r-1}\sqrt{2k+r-2}} + \frac{x^{\frac{a}{2}}\,.\,a}{\pi \sqrt[4]{2k+r-2}}.$$

Připustíme-li pro číslo k ještě další nerovninu

$$\frac{32\, x^{\frac{a}{2}}}{\pi\, a^{r-1}\sqrt{2k+r-2}} < \frac{x^{\frac{a}{2}}\, a}{\pi\sqrt[4]{2k+r-2}},$$

získáme konečně

$$\left|J^{(r)}_{(k)}(x)\right| < \frac{2\, a\, x^{\frac{a}{2}}}{\pi \sqrt[4]{2k+r-2}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (h)$$

Během počtu zavedli jsme pro k následující nerovniny

$$2k+r-2 > \frac{a^4}{16},\quad 2k+r-2 > \frac{16 \log^2 x}{a^2},\quad 2k+r-2 > \frac{64 \log^2 x}{a^2},$$
$$2k+r-2 > \frac{32^4}{a^{4(r-2)}},$$

z nichž druhá jest důsledkem třetí. Označíme-li nyní největší z čísel

$$\frac{a^4}{16},\quad \frac{64 \log^2 x}{a^2},\quad \frac{32^4}{a^{4(r-2)}}$$

výrazem $2\lambda + r - 2$ a bude-li k splňovati nerovninu

$$k > \lambda,$$

budou také splněny všechny nerovniny, kterými jsme k během počtu zatížili. Pod tou podmínkou tedy platí také vzorec (h).

Z tohoto vzorce a z formule (e) není již nijak nesnadno dokázati absolutní a stejnoměrnou konvergenci řady (5).

Jest totiž

$$\left|\alpha_k J^{(r)}_k(x)\right| < \frac{2\, M\, a\, x^{\frac{a}{2}}}{\pi\,(k-1)\sqrt[4]{2k+r-2}},$$

pokud

$$k > \lambda.$$

Protože pak $r \geqq 4$, jest také

$$2k + r - 2 > 2k - 2$$

a tedy

$$\left| \alpha_k J_k^{(r)}(x) \right| < \frac{C}{(k-1)^{\frac{5}{4}}},$$

kdež na k nezávislá konstanta

$$C = \frac{2^{\frac{3}{4}} M a x^{\frac{a}{2}}}{\pi}.$$

Protože tedy členy řady (5) mají od jistého konečného $n > \lambda$ počínaje stále absolutní hodnotu menší než stejnolehlé členy absolutně konvergující řady

$$C \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^{\frac{5}{2}}},$$

konverguje také řada (5) absolutně.

Omezíme-li se na jistý konečný intervall pro x

$$1 \leqq x \leqq X,$$

bude patrně podle vzorce (h)

$$\left| J_k^{(r)}(x) \right| \leqq \left| J_k^{(r)}(X) \right| \leqq \frac{2 a X^{\frac{a}{2}}}{\pi \sqrt[4]{2k + r - 2}}$$

a tedy obdržíme podobně jako dříve

$$\left| \alpha_k \,.\, J_k^{(r)}(x) \right| < \frac{C_1}{(k-1)^{\frac{5}{2}}},$$

kdež

$$C_1 = \frac{2^{\frac{3}{4}} M a X^{\frac{a}{2}}}{\pi}$$

jest konstanta nezávislá na hodnotě x. Rovněž číslo λ zvolíme tak, aby $2\lambda + r - 2$ značilo největší z čísel

$$\frac{a^4}{16},\quad \frac{64 l og^2 X}{a^2},\quad \frac{32^4}{a^{4(r-2)}},$$

čímž stane se λ rovněž na x nezávislým.

Podle věty Weierstrassovy[1]) konverguje tedy řada (5) v každém konečném intervallu

$$1 \leqq x < X$$

nejen absolutně, ale i stejnoměrně.

---

[1]) Viz n. př. Osgood l. c. p. 96.