Miloš Kössler
Eine neue Reihe für die Riemannsche Primzahlfunktion

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1917, 9-12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501283

Eine neue Reihe für die Riemannsche Primzahlfunktion.*)

Von

MILOŠ KÖSSLER

in Prag.

(Vorgelegt am 19. April 1916.)

Bezeichnen wir mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen, welche kleiner sind als x, so ist die Riemannsche Primzahlfunktion durch die Gleichung

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \dots$$

definiert. Nach Riemann ist

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s \log \zeta(s)\, ds}{s}, \; b \geqq 1.$$

Die bekannte Riemannsche Primzahlformel

$$f(x) = Li(x) - \sum_{\varrho}\left[Li\left(x^{\varrho_1}\right) + Li\left(\;^{\varrho_2}\right)\right] + \int\limits_{x}^{\infty} \frac{dy}{y\,(y^2-1)\log y} - \log 2$$

wird aus der vorhergehenden Integraldarstellung dadurch gewonnen, daß man für $\log \zeta(s)$ eine in der *ganzen* Ebene gültige Entwickelung einsetzt. Die in dieser Formel vorkommenden komplexen Nullstellen der Funktion $\zeta(s)$ sind heutzutage noch nicht alle bestimmt.

Zur Berechnung des Integrals brauchen wir aber die Nullstellen gar nicht zu kennen; es genügt uns dazu vollkommen eine solche Reihe für $\log \zeta(s)$, welche nicht in der ganzen Ebene, sondern nur in der Um-

---

*) Nový rozvoj pro Riemannovu funkci prvočíselnou. Rozpravy České Akademie císařské Frant. Josefa. XV. 26. 1916.

gebung des Integralweges gleichmäßig konvergiert. Eine solche Entwickelung kann wirklich mit Hilfe der Lagrangeschen Reihe nach den Potenzen von $\frac{s-a}{s}$ konstruiert werden.

Die Berechnungen werden zuerst allgemeiner auf der Dirichletschen Reihe

$$D(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k^s}$$

durchgeführt. Erstens bekommen wir die Integraldarstellung

$$f(x, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s}{s^r} D(s)\, d\, s = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{k=1}^{[x]} b_k (\log x - \log k)^{r-1}. \quad \ldots (1)$$

Weiter wird die Formel

$$\left.\begin{aligned} \frac{D(s)}{s^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{s-a}{s}\right)^k, \\ \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d\, a^k} \{a^{k-3} D(a)\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

bewiesen, wobei a eine beliebige, in der Konvergenzhalbebene der Dirichletschen Reihe liegende, Konstante bezeichnet.

Wenn wir uns vorläufig auf den Fall $r \geqq 4$ beschränken, so entfließt daraus

$$\left.\begin{aligned} f(x, r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k J_k^{(r)}(x), \\ \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d\, a^k} \{a^{k-3} D(a)\}, \\ J_k^{(r)}(x) &= \frac{1}{(k+r-3)!} \frac{d^{k+r-3}}{d\, s^{k+r-3}} \{x^s (s-a)^k\}_{s=0}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Diese Reihe ist absolut und in jedem endlichen Intervalle auch gleichmäßig konvergent.

Um jetzt auch den Fall $4 > r \geqq 1$ zu erledigen, setzen wir in die Formel für $f(\xi, 4)$ nacheinander $\xi = x + \varepsilon$, $\xi = \sqrt[3]{(x+\varepsilon)^2 x}$, $\xi = \sqrt[3]{(x+\varepsilon)\, x^2}$, $\xi = x$ und berechnen aus dem so entstandenen Systeme von linearen Gleichungen die Summen

$$S_k = \sum_{n=1}^{[x]} b_n \log^k n, \; (k = 0, 1, 2, 3.)$$

So ist z. B.

$$\left.\begin{aligned} f(x,1) &= \sum_{k=1}^{[x]} b_k = \frac{27}{\log^3 \frac{x+\varepsilon}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar{J}_k(x), \\ \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d a^k} \{a^{k-3} D(a)\}, \\ \bar{J}_k(x) &= \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}}{d s^{k+1}} \left\{(s-a)^k . \left(\sqrt[3]{(x+\varepsilon)^s} - \sqrt[3]{x^s}\right)^3\right\}_{s=0} . \end{aligned}\right\} \quad ..(4)$$

Die Zahl ε ist eine beliebige auf die Ungleichung

$$[x] + 1 > x + \varepsilon$$

gebundene reelle Konstante.

Wenn wir diese allgemeinen Resultate auf den speziellen Fall

$$D(s) = \log \zeta(s)$$

benützen, so bekommen wir endlich mittels der letzten Formel eine Reihe für die Riemannsche Primzahlfunktion

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{27}{\log^3 \frac{x+\varepsilon}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \bar{J}_k(x), \\ \alpha_k &= \frac{a}{k!} \frac{d^k}{d a^k} \{a^{k-3} \log \zeta(a)\} ; \end{aligned}\right\} \quad ....(5)$$

dabei kann $\bar{J}_k(x)$ anstatt durch den vorhergehenden Differentialquotienten auch durch diese Gleichungen definiert werden:

$$\left.\begin{aligned} \bar{J}_k(x) &= J_k(x+\varepsilon) - 3 J_k\left(\sqrt[3]{(x+\varepsilon)^2 . x}\right) + 3 J_k\left(\sqrt[3]{(x+\varepsilon)\, x^2}\right) - J_k(x), \\ (k+1) J_k(x) &= (2k - a \log x) J_{k-1}(x) - (k-1) J_{k-2}(x) ; \\ J_0(x) &= \log x, \; J_1(x) = \log x - \frac{a}{2} \log^2 x. \end{aligned}\right\} (5a)$$

Diese Reihe konvergiert absolut und ist von den Nullstellen der Zetafunktion vollkommen unabhängig. Alles, was wir von dieser Funktion wissen müssen, läßt sich in den folgenden Satz zusammenfassen. Erstens setzen wir die triviale Erkenntnis voraus, daß die Funktion $\log \zeta(s)$ sich in eine Dirichletsche Reihe entwickeln läßt, welche in der Halbebene $R(s) > 1$ konvergiert, und zweitens halten wir die Werte von $\zeta(a)$, $\zeta'(a)$, $\zeta''(a)$ u. s. w. für bekannt, wobei a eine Konstante bedeutet, welche der Bedingung $R\left(\frac{a}{2}\right) > 1$ entspricht.

Durch die angedeutete Methode können noch andere Entwickelungen für die Funktionen $f(x)$ und $\pi(x)$ erreicht werden, von welchen ich da ohne Beweis der Konvergenz die folgenden aufschreibe:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k L_k(x), \\ \beta_k &= \frac{a}{k!} \frac{d_k}{d a^k} \{a^{k-1} \log \zeta(a)\}, \\ L_k(x) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d s_k} \{x^s (s-a)^k\}_{s=0}; \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (6)$$

daraus ergibt sich durch einfache Überlegungen

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k M_k(x). \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$

Die Funktionen $M_k(x)$ werden am einfachsten durch die symbolische Formel definiert

$$\left.\begin{aligned} M_k(x) &= \nu \,.\, L_k(x^\nu), \\ \nu^1 &= 0;\ \nu^k = \frac{1}{\zeta(k)},\ k = 2, 3, \dots \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (7a)$$

Also z. B.

$$M_0(x) = \emptyset,\ M_1(x) = -a \frac{\log x}{\zeta(2)};\ M_2(x) = -2a \frac{\log x}{\zeta(2)} + \frac{a^2}{2} \frac{\log^2 x}{\zeta(3)}.$$

Diese Reihe für $\pi(x)$ enthält nicht mehr die gewissermaßen auf die Kenntnis der Primzahlen gebundenen Moebiusschen Faktoren $\mu(k)$, was mittels der Riemannschen Formel nicht erreicht werden kann.

Der Gleichung (6) können wir auch die folgende Form geben:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= Li(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta_k + \lambda_k) L_k(x), \\ \lambda_k &= \frac{1}{k} + \frac{(-1)^{k-1}}{k(a-1)^{k-1}}. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (8)$$

Wie gewöhnlich, bezeichnet dabei $Li(x)$ den Integrallogarithmus.