Matyáš Lerch
Různé výsledky v theorii funkce gamma

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 5 (1896), č. 14, 1–37

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501491

Různé výsledky v theorii funkce gamma.

Sdílí **M. Lerch.**

Předloženo dne 28. února 1896.

I.

1. V poslední naší práci*) vyskytla se příležitosť k odvození vzorce

$$(1)\quad \int_0^1 \log\sin x\pi \,.\, e^{-2ux\pi i}\,dx$$
$$= -e^{-u\pi i}\frac{\sin u\pi}{2u\pi}\left[2\log 2 - 2\Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)} + \frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)}\right],$$

z něhož zde chceme vyložiti některé důsledky.

Nejprve mu udělme tvar poněkud přehlednější

$$(2)\quad -\int_0^1 \log\sin x\pi \,.\, e^{(1-2x)u\pi i}\,dx$$
$$= \frac{\sin u\pi}{u\pi}\left[\log 2 - \Gamma'(1) + \frac{1}{2u} + \frac{\pi}{2}\cot u\pi + \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right],$$

z něhož použitím substituce $1-x$ za x lze obdržeti vzorec následující

$$(2^a)\quad -\int_0^1 \log\sin x\pi \,.\, \cos(1-2x\pi)\,u\pi\,dx$$
$$= \frac{\sin u\pi}{u\pi}\left[\log 2 - \Gamma'(1) + \frac{1}{2u} - \frac{\pi}{2}\cot u\pi + \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right];$$

---

*) Sur la différentiation d'une classe de séries trigonométriques (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 3me série, tome XII, 1895). Před tím předložil p. Hermite akademii věd část dopisu obsahující hlavní kusy. Český výklad bude uveřejněn ve Věstníku.

dosadímeli sem $1 - 2x = 2z$, vyjde tvar

$$(2^b) \qquad -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log\cos z\pi \,.\, \cos 2uz\pi\, dz$$

$$= \frac{\sin u\pi}{u\pi}\left[\log 2 - \Gamma'(1) + \frac{1}{2u} + \frac{\pi}{2}\cot u\pi + \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right].$$

Tuto rovnici lze psáti

$$-2u\pi\int_0^{\frac{1}{2}} \log\cos z\pi \,.\, \cos 2uz\pi\, dz$$

$$= \sin u\pi\left[\log 2 - \Gamma'(1) + \frac{1}{2u} + \frac{\pi}{2}\cot u\pi + \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right];$$

přetvoříli se pak levá strana částečnou integrací, obdrží se vzorec

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &\pi\int_0^{\frac{1}{2}} (\sin u\pi - \sin 2uz\pi)\tan z\pi \,.\, dz - \frac{\sin u\pi}{2u} \\ &= \sin u\pi\left[\log 2 - \Gamma'(1) + \frac{\pi}{2}\cot u\pi + \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right]. \end{aligned}\right.$$

Na jeho základě chceme nanovo dokázati rovnici, kterou jsme dříve jiným způsobem vyvinuli na str. 55. naší rozpravy »*Další studie v oboru Malmsténovských řad*«.*)

Znamenámeli levou stranu $F(u)$ a k vůli pohodlí prvý člen na levé straně literami $f(u)$, bude existovati rozvoj trigonometrický

$$F(u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sin \nu u\pi\,,$$

platný za podmínky $0 < u < 1$, v němž součinitelé a_ν jsou dáni vzorcem

$$a_\nu = 2\int_0^1 F(u)\sin\nu u\pi\, du\,,$$

čili

$$a_\nu = 2\int_0^1 f(u)\sin\nu u\pi\, du - \int_0^1 \sin u\pi\sin\nu u\pi\,\frac{du}{u}.$$

O tyto součinitele a_ν nám právě běží. Tu máme nejprve

$$2\int_0^1 f(u)\sin\nu u\pi\, du = \int_0^{\frac{1}{2}}\tan z\pi\, dz\int_0^1 2\pi\sin\nu u\pi\,(\sin u\pi - \sin 2uz\pi)\, du\,,$$

*) Rozprav Č. Ak. II. třídy ročník III., číslo 28.

i chceme tento integrál stanoviti nejprve v případě $\nu > 1$. Tu bude

$$\int_0^1 2\pi \sin \nu u \pi \sin u \pi \, du = 0\,,$$

$$\int_0^1 2\pi \sin \nu u \pi \sin 2 u z \pi \, du = \frac{\sin(\nu - 2z)\pi}{\nu - 2z} - \frac{\sin(\nu + 2z)\pi}{\nu + 2z}\,,$$

takže nacházíme výraz

$$2\int_0^1 f(u) \sin \nu u \pi \, du = (-1)^\nu\, 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\nu + 2z} + \frac{1}{\nu - 2z}\right) \sin^2 z\pi \, dz\,,$$

jejž třeba ještě přetvořiti. Za tím účelem vložme sem za $\sin^2 z\pi$ hodnotu $\frac{1}{2}(1 - \cos 2z\pi)$, čímž náš výraz, uvažovaný integrál

$$J_\nu = 2 \int_0^1 f(u) \sin \nu u \pi \, du$$

vyjadřující, obdrží tvar

$$J_\nu = (-1)^\nu \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\nu + 2z} + \frac{1}{\nu - 2z}\right) dz - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\nu + 2z)_\pi \, dz}{\nu + 2z}$$

$$- \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(\nu - 2z)\pi}{\nu - 2z} \, dz\,.$$

První integrál má hodnotu

$$(-1)^\nu \frac{1}{2} \log \frac{\nu + 1}{\nu - 1}$$

a druhé dva přetvořme substitucemi $\nu + 2z = 2x$, resp. $\nu - 2z = 2x$, načež je spojme v jediný; i obdržíme tak

(a) $$J_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{2} \log \frac{\nu + 1}{\nu - 1} - \frac{1}{2} \int_{\nu - \frac{1}{2}}^{\nu + \frac{1}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x}\,.$$

I zbývá jen vhodným způsobem upraviti integrál

$$\int_0^1 \sin u\pi \sin \nu u \pi \frac{du}{u}\,,$$

aby se obdržela veličina a_ν ve tvaru zakončeném. K tomu cíli položme

(b) $$H_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 \sin u\pi \sin \nu u\pi \frac{du}{u}, \qquad \varepsilon > 0,$$

takže hledaný integrál splývá s krajní hodnotou

$$\lim_{\varepsilon=0} H_\varepsilon .$$

Patrně máme

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \cos(\nu-1)u\pi \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 \cos(\nu+1)u\pi \frac{du}{u},$$

a tyto integrály přetvořme substitucemi $(\nu-1)u = 2x$, resp. $(\nu+1)u = 2x$, čímž vzniknou tvary

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_{\frac{\nu-1}{2}\varepsilon}^{\frac{\nu-1}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\nu+1}{2}\varepsilon}^{\frac{\nu+1}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x}$$

známým způsobem možno tyto integrály sloučiti ve tvar

$$H_\varepsilon = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\nu-1}{2}}^{\frac{\nu+1}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\nu-1}{2}\varepsilon}^{\frac{\nu+1}{2}\varepsilon} \cos 2x\pi \frac{dx}{x},$$

v němž přechod ke krajní hodnotě $\varepsilon = 0$ je snadný. Neboť máme

$$\frac{\cos 2x\pi}{x} = \frac{1}{x} + \varphi(x),$$

kde $\varphi(x)$ jest ustavičně konečné, a dle toho bude

$$\int_{\frac{\nu-1}{2}\varepsilon}^{\frac{\nu+1}{2}\varepsilon} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} = \log\frac{\nu+1}{\nu-1} + \int_{\frac{\nu-1}{2}\varepsilon}^{\frac{\nu+1}{2}\varepsilon} \varphi(x)\,dx,$$

takže vychází

$$\lim_{\varepsilon=0} H_\varepsilon = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\nu-1}{2}}^{\frac{\nu+1}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\log\frac{\nu+1}{\nu-1},$$

čili

$$H_0 = \int_0^1 \sin u\pi \sin \nu u\pi \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\log\frac{\nu+1}{\nu-1} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\nu-1}{2}}^{\frac{\nu+1}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x}.$$

XIV.

Dosadímeli nyní do vzorce

$$a_\nu = J_\nu - H_0$$

hodnotu právě nalezenou za H_0 a výraz (a) za J_ν, obdržíme

$$a_\nu = \frac{(-1)^\nu - 1}{2} \log \frac{\nu + 1}{\nu - 1},$$

t. j. bude

$$a_{2n} = 0, \qquad a_{2n+1} = \log \frac{n}{n+1},$$

a náš rozvoj bude zníti

$$F(u) = a_1 \sin u\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1} \sin(2n+1)u\pi,$$

takže zbývá pouze ještě určiti konstantu a_1. K tomu cíli vložme sem $u = \frac{1}{2}$, a v rovnici tak získané

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n}{n+1}$$

vyjadřme $F(\frac{1}{2})$ pomocí pravé strany rovnice (3), jež dá

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \log 2 - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\log 2,$$

a zároveň vyčísleme řadu na pravé straně; vyčíslení její se podaří pomocí identity

$$\sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \log \frac{n}{n+1} = \sum_{\mu=1}^{m} \log \frac{2\mu}{2\mu+1} - \sum_{\mu=1}^{m} \log \frac{2\mu-1}{2\mu},$$

kterou lze psáti

$$\sum_{n=1}^{2m} (-1)^n \log \frac{n}{n+1} = \log \prod_{\mu=1}^{m} \frac{4\mu^2}{4\mu^2 - 1},$$

a z níž plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n}{n+1} = -\log \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4\mu^2}\right).$$

Nekonečný součin tento určí se podle vzorce

$$\sin u\pi = u\pi \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u^2}{\mu^2}\right)$$

a má hodnotu $\frac{2}{\pi}$, takže vychází

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{n}{n+1} = \log \frac{\pi}{2};$$

máme tedy $a_1 = -\log 2 - \log\frac{\pi}{2} = -\log\pi$, takže náš rozvoj bude konečně zníti

$$F(u) = -\log\pi \,.\, \sin u\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n}{n+1} \,.\, \sin(2n+1)u\pi\,, \qquad (0 < u < 1)\,,$$

a tak dokázáno prostředky počtu integralnímu nejvlastnějšími, že

$$(4)\quad \begin{cases} \textit{v mezích } 0 < u < 1 \textit{ existuje rozvoj} \\ \sin u\pi\left[\log 2\pi - \Gamma'(1) + \dfrac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right] + \dfrac{\pi}{2}\cos u\pi \\ \quad = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n}{n+1} \,.\, \sin(2n+1)u\pi\,. \end{cases}$$

2. Způsob vyčíslení konstanty a_1, který jsme právě vyložili, jest o něco rychlejší než způsob přímý, který tím ale nikterak nepozbývá zajímavosti. Podržímeli totéž označení $F(z)$ a $f(z)$ jako v předešlém odstavci, obdržíme nejprve pro integrál

$$J_1 = 2\int_0^1 f(u)\sin u\pi\,du$$

výraz

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\pi + \frac{\sin z\pi\cos z\pi}{z^2 - \frac{1}{4}}\right)\tan z\pi\,dz\,,$$

čili

$$J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\pi\tan z\pi + \frac{\sin^2 z\pi}{z^2 - \frac{1}{4}}\right)dz\,,$$

a bude třeba zavésti výraz

$$K_\xi = \int_0^{\xi} \left(\pi\tan z\pi + \frac{\sin^2 z\pi}{z^2 - \frac{1}{4}}\right)dz\,, \qquad 0 < \xi < \frac{1}{2}\,,$$

aby se vypočetl integrál

$$J_1 = \lim_{\xi = \frac{1}{2}} K_\xi\,.$$

Tu jest nejprve

$$\int_0^{\xi} \pi\tan z\pi\,dz = -\log\cos\xi\pi\,,$$

a výraz

$$\int_0^{\xi} \frac{\sin^2 z\pi}{z^2 - \frac{1}{4}}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{\xi} \frac{dz}{z^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\xi} \left(\frac{1}{\frac{1}{2} - z} + \frac{1}{\frac{1}{2} + z}\right)\cos 2z\pi\,dz$$

lze uvésti na tvar

$$\frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{2}-\xi}{\frac{1}{2}+\xi}-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}-\xi}^{\frac{1}{2}+\xi}\cos 2x\pi\,\frac{dx}{x},$$

takže nacházíme pro integrál K_ξ následující vyjádření

$$K_\xi=\frac{1}{2}\log\frac{\frac{1}{2}-\xi}{\frac{1}{2}+\xi}-\log\cos\xi\pi-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}-\xi}^{\frac{1}{2}+\xi}\cos 2x\pi\,\frac{dx}{x}.$$

Zde položme $\xi=\frac{1}{2}-\delta$, a upravme výraz jak následuje

$$K_{\frac{1}{2}-\delta}=-\log\frac{\sin\delta\pi}{\delta}-\frac{1}{2}\log(1-\delta)-\frac{1}{2}\log\delta-\frac{1}{2}\int\limits_{\delta}^{1-\delta}\cos 2x\pi\,\frac{dx}{x};$$

odtud je patrné, že bude

$$J_1=\lim_{\xi=\frac{1}{2}}K_\xi=-\log\pi-\frac{1}{2}\lim_{\delta=0}\left[\log\delta+\int\limits_{\delta}^{1}\cos 2x\pi\,\frac{dx}{x}\right].$$

Veličina a_1 dle toho je dána výrazem

$$a_1=-\log\pi-\frac{1}{2}\lim_{\delta=0}\left[\log\delta+\int\limits_{0}^{1}\cos 2x\pi\,\frac{dx}{x}\right]-\int\limits_{0}^{1}\sin^2 u\pi\,\frac{du}{u}.$$

Píšeli se poslední integrál ve tvaru

$$\lim_{\delta=0}\int\limits_{\delta}^{1}\sin^2 u\pi\,\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\lim_{\delta=0}\int\limits_{\delta}^{1}(1-\cos 2u\pi)\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\delta=0}\left[-\log\delta-\int\limits_{\delta}^{1}\cos 2u\pi\,\frac{du}{u}\right],$$

vychází bezprostředně výsledek

$$a_1=-\log\pi.$$

3. Vyjádřímeli součinitele trigonometrického rozvoje (4) jiným způsobem, vyskytnou se někdy zajímavé tvary integrální.

Hledejme na př. integrál

$$L_n=2\int\limits_{0}^{1}\sin u\pi\,\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\sin nu\pi\,du$$

tím způsobem, že jej pomocí výrazu

$$L_n=\int\limits_{0}^{1}\Big[\cos(n-1)u\pi-\cos(n+1)u\pi\Big]\,d\log\Gamma(u)$$

částečnou integrací uvedeme na tvar

$$L_n = (n-1)\pi \int_0^1 \log \Gamma(u) \sin (n-1) u\pi \, du$$

$$- (n+1)\pi \int_0^1 \log \Gamma(u) \sin (n+1) u\pi \, du \,;$$

znamenámeli

$$A_g = g\pi \int_0^1 \log \Gamma(u) \sin g u\pi \, du \,,$$

obdržíme

$$L_n = A_{n-1} - A_{n+1} \,,$$

a bude tedy potřebí znáti pouze integrály A_g. Ty se obdrží pomocí vzorce Cauchyova

$$\log \Gamma(u) = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{ux} - e^x}{e^x - 1} + e^x - u e^x \right) \frac{dx}{x}$$

výraz je zvláště jednoduchý v případě sudého g, *pro lichá* g pak bude

$$A_g = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{g^2\pi^2}{g^2\pi^2 + x^2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} + e^x - \frac{2e^x}{e^x - 1} \right) \frac{dx}{x} .$$

Dosadímeli v integrálu $x\pi$ za x, obdržíme výraz

$$\text{(5)} \qquad A_g - A_{g'} = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{x\pi} + 1}{e^{x\pi} - 1} \left(\frac{g^2}{g^2 + x} - \frac{g'^2}{g'^2 + x^2} \right) \frac{dx}{x}$$

Integrál tento podaří se vyčísliti pomocí vzorce

$$\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)} + \frac{1}{2u} = \log u - 2 \int_0^\infty \frac{x}{1 + x^2} \frac{dx}{e^{2ux\pi} - 1} \,,$$

jenž vznikne ze známého vzorce Binetova derivováním dle u. K tomu cíli upravme integrál (5) jak následuje

$$\int_0^\infty \left(\frac{g^2}{g^2 + x^2} - \frac{g'^2}{g'^2 + x^2} \right) \frac{dx}{x}$$

$$- 2 \int_0^\infty \frac{x \, dx}{(g^2 + x^2)(e^{2\pi} - 1)} + 2 \int_0^\infty \frac{x \, dx}{(g'^2 + x^2)(e^{2\pi} - 1)} .$$

Zavedemeli v posledních dvou integrálech gx, resp. $g'x$ jako integrační proměnné, a vyčíslímeli integrál první, obdržíme výraz

$$\left\{\log\frac{g}{2}-2\int_0^\infty\frac{x\,dx}{(1+x^2)(e^{gx\pi}-1)}\right\}$$

$$-\left\{\log\frac{g'}{2}-2\int_0^\infty\frac{x\,dx}{(1+x^2)(e^{g'x\pi}-1)}\right\},$$

jenž dle citovaného vzorce má hodnotu

$$A_g-A_{g'}=\left\{\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}g)}{\Gamma(\frac{1}{2}g)}+\frac{1}{g}\right\}-\left\{\frac{\Gamma'(\frac{1}{2}g')}{\Gamma(\frac{1}{2}g')}+\frac{1}{g'}\right\}.$$

Volímeli zde $g=2n-1$, $g'=2n+1$, vychází

$$L_{2n}=-\frac{4n}{4n^2-1},$$

o čemž se možno pomocí vzorce (4) přímo přesvědčiti.

Kdybychom podobným způsobem hledali integrál

$$2\int_0^1\sin^2 u\pi\,d\log\Gamma(u),$$

obdrželi bychom vzorec

$$\int_{-\infty}^0\left(e^{2x\pi}-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x}=\log 2\pi-\Gamma'(1),$$

na který již p. Hermite poukázal.*)

Nejjednodušší a přímé jeho odvození plyne ovšem pomocí identity

$$\int_0^\infty\left(e^{-2x\pi}-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x}=\lim_{s=0}\int_0^\infty\left(e^{-2x\pi}-\frac{1}{1+x^2}\right)x^{s-1}\,dx,$$

poněvadž tu při $s>0$

$$\int_0^\infty e^{-2x\pi}x^{s-1}\,dx=\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s},\qquad\int_0^\infty\frac{x^{s-1}}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2\sin\frac{s\pi}{2}}.$$

4. Vzorec (2^a) vybízí svojí formou ke studiu integrálu

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}\log\sin x\pi\,.\,\sin(1-2x)u\pi\,dx,$$

---

*) Rozprav Č. A. II. třídy ročník III., čís. 28.

jejž znamenejme $\Phi(u)$. Jeho vyčíslení podaří se použitím týchž pomůcek jako při integrálu (1). Pomocí vzorce

$$\log \sin x\pi = -\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx\pi}{n}, \qquad (0 < x < 1),$$

obdržíme nejprve

$$2\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} \log \sin x\pi \,.\, \sin (1-2x)\, u\pi \, dx = -\log 2 \,.\, \frac{1-\cos(1-2\delta)\,u\pi}{u\pi}$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{(-1)^n - \cos(u - 2u\delta + 2n\delta)\,\pi}{u-n}\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^n - \cos(u - 2u\delta - 2n\delta)\,\pi}{u+n}\right],$$

pokud δ značí kladnou realnou veličinu. V této rovnici pravá strana konverguje stejnoměrně vůči všem realným δ, a její limita pro $\delta = 0$ obdrží se pouhým dosazením hodnoty $\delta = 0$; máme tedy

$$2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \log \sin x\pi \,.\, \sin (1-2x)\, u\pi \, dx = \frac{\cos u\pi - 1}{u\pi} \log 2$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\cos u\pi - (-1)^n}{u-n} + \frac{\cos u\pi - (-1)^n}{u+n}\right].$$

Znamenámeli k vůli stručnosti

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

obdržíme

$$\Phi(u) = \frac{\cos u\pi - 1}{u\pi}\log 2 + \frac{\cos u\pi}{2u\pi}\left[\psi(1+u) + \psi(1-u) - 2\psi(1)\right]$$
$$-\frac{1}{2u\pi}\left[\frac{1}{2}\psi\left(1+\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi\left(1-\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1+u}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1-u}{2}\right) + \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi(1)\right]$$

Užijeli se tu rovnic

$$\frac{1}{2}\psi\left(1+\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi\left(1-\frac{u}{2}\right) = \frac{1}{u} + \frac{\pi}{2}\cot\frac{u\pi}{2} + \psi\left(\frac{u}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}\psi\left(\frac{1+u}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1-u}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\tan\frac{u\pi}{2} + \psi\left(\frac{1+u}{2}\right),$$

jakož i vztahu Legendreova

$$\psi(u) = \log 2 + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{u+1}{2}\right).$$

XIV.

obdržíme

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\int_0^{\frac{1}{2}} \log\sin x\pi \,.\, \sin(1-2x)u\pi\, dx + \frac{\sin^2\frac{u\pi}{2}}{u^2\pi} \\ & = -\frac{1}{u\pi}\Bigg[\sin^2\frac{u\pi}{2}\,\psi\left(\frac{u}{2}\right) - \cos^2\frac{u\pi}{2}\,\psi\left(\frac{u+1}{2}\right) \\ & \qquad + \Big(\Gamma'(1) - 2\log 2\Big)\cos u\pi + \frac{\pi}{2}\sin u\pi\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Pomocí substituce $1-2x=2z$ lze levé straně uděliti tvar

$$(6^{*})\qquad 2\int_0^{\frac{1}{2}} \log\cos z\pi \,.\, \sin 2zu\pi\, dz + \frac{\sin^2\frac{u\pi}{2}}{u^2\pi}.$$

Násobímeli tento výraz veličinou $-u\pi$ a přetvořímeli jej částečnou integrací, obdržíme

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & \pi\int_0^{\frac{1}{2}} (\cos 2zu\pi - \cos u\pi)\tan z\pi\, dz - \frac{\sin^2\frac{u\pi}{2}}{u} \\ & = \Big[\Gamma'(1) - 2\log 2\Big]\cos u\pi + \frac{\pi}{2}\sin u\pi \\ & \qquad + \sin^2\frac{u\pi}{2}\,\psi\left(\frac{u}{2}\right) - \cos^2\frac{u\pi}{2}\,\psi\left(\frac{u+1}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Znamenejme prvý člen levé strany $f(u)$, celou levou stranu pak $F(u)$ a stanovme koefficienty rozvoje trigonometrického

$$F(u) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cos\nu u\pi,$$

t. j. pokusme se o vyčíslení integrálů

$$c_\nu = 2\int_0^1 F(u)\cos\nu u\pi\, du.$$

Poněvadž $F(u) = f(u) - \dfrac{\sin^2\frac{u\pi}{2}}{u}$, bude nám nejprve stanoviti integrály

$$J_\nu = 2\int_0^1 f(u)\cos\nu u\pi\, du.$$

Užijemeli tvaru (7), obdržíme v případě $\nu > 1$ především

$$J_\nu = (-1)^\nu \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8z}{4z^2-\nu^2}\sin^2 z\pi\, dz,$$

kterýžto výraz lze uvésti na tvar

$$(-1)^\nu \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4z\,dz}{4z^2-\nu^2} - (-1)^\nu \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos 2z\pi}{2z-\nu}\,dz + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos 2z\pi}{2z+\nu}\,dz \right\},$$

a provedouli se u dvou posledních integrálů substituce $\nu - 2z = 2x$, resp. $\nu + 2z = 2x$, obdrží se

$$\text{(a)}\qquad J_\nu = \frac{(-1)^\nu}{2} \log \frac{\nu^2-1}{\nu^2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\nu-1}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu+1}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x}.$$

Zbývá ještě vyčísliti integrál

$$2 \int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{u\pi}{2}}{u} \cos \nu u\pi\,du;$$

ten pišme především ve tvaru

$$\int_0^1 \frac{2\cos \nu u\pi - \cos(\nu+1)u\pi - \cos(\nu-1)u\pi}{2u}\,du,$$

aneb což totéž jest

$$\lim_{\delta=0} \left[\int_\delta^1 \cos \nu u\pi \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int_\delta^1 \cos(\nu+1)u\pi \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int_\delta^1 \cos(\nu-1)u\pi \frac{du}{u} \right].$$

Substitucemi $\nu u = 2x$, $(\nu+1)u = 2x$, $(\nu-1)u = 2x$ vznikne odtud po krátké redukci

$$\lim_{\delta=0} \left[\frac{1}{2} \int_{\frac{\nu-1}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu+1}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \int_{\frac{\nu}{2}\delta}^{\frac{\nu+1}{2}\delta} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\nu-1}{2}\delta}^{\frac{\nu}{2}\delta} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} \right],$$

čímž dospíváme k výsledku

$$2 \int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{u\pi}{2}}{u} \cos \nu u\pi\,du$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{\nu^2-1}{\nu^2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\nu-1}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu+1}{2}} \cos 2x\pi \frac{dx}{x}.$$

XIV.

Dosadímeli do výrazu

$$c_\nu = J_\nu - 2\int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{u\pi}{2}}{u} \cos \nu u \pi \, du$$

hodnotu (a) za J_ν a nalezený právě výraz za druhý integrál, obdržíme

$$c_\nu = \frac{(-1)^\nu - 1}{2} \log \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2},$$

čili

$$c_{2n} = 0, \qquad c_{2n+1} = \log \frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)}$$

I zbývá jen určiti ještě c_0 a c_1. Pro první konstantu máme

$$c_0 = \int_0^1 f(u)\, du - \int_0^1 \frac{\sin^2 \frac{1}{2} u\pi}{u} du,$$

a poněvadž jak snadno shledáme

$$\int_0^1 f(u)\, du = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 z\pi}{z} dz,$$

vychází $c_0 = 0$, což ostatně také lze dokázati substitucí hodnoty $u = \frac{1}{2}$ do rovnice

$$F(u) = c_0 + c_1 \cos u\pi + c_3 \cos 3u\pi + c_5 \cos 5u\pi + \ldots$$

Řada tato konverguje absolutně a proto také stejnoměrně na místě $u = 0$ i obdržíme

$$F(o) = c_1 + c_3 + c_5 + \cdots,$$

a poněvadž $F(0) = 0$, vychází

$$c_1 = -\sum_1^\infty c_{2n+1} = \sum_{n=1}^\infty \log \frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2},$$

čili

$$c_1 = \log \prod_{n=1}^\infty \frac{1 + \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{2n})^2} = \log \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \log \frac{\pi}{4};$$

k témuž výsledku bychom ovšem také dospěli přímo.

Úvahami předešlými dokázán vzorec

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\Gamma'(1) - \log \pi\right] \cos u\pi + \frac{\pi}{2} \sin u\pi + \sin^2 \frac{u\pi}{2} \frac{\Gamma'(\frac{u}{2})}{\Gamma(\frac{u}{2})} \\ &\quad - \cos^2 \frac{u\pi}{2} \frac{\Gamma'(\frac{u+1}{2})}{\Gamma(\frac{u+1}{2})} = \sum_{n=1}^\infty \log \frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)} \cos(2n+1)u\pi, \end{aligned} \right.$$

platný za podmínky $0 \leqq u \leqq 1$.

Derivujemeli obě strany, obdržíme za podmínky $0 < u < 1$:

$$(9)\quad \begin{cases} \left[\log\frac{\pi}{2} - \Gamma'(1)\right]\sin u\pi + \frac{\pi}{2}\cos u\pi + \sin u\pi\,\psi(u) \\ \qquad + \frac{1}{2\pi}\sin^2\frac{u\pi}{2}\,\psi'\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{2\pi}\cos^2\frac{u\pi}{2}\,\psi'\left(\frac{u+1}{2}\right) \\ = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\log\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)u\pi \end{cases}$$

Pro $u = \frac{1}{2}$ výraz

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{u\pi}{2}\,\psi'\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos^2\frac{u\pi}{2}\,\psi'\left(\frac{u+1}{2}\right)$$

má hodnotu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)^2},$$

čili

$$(10)\qquad \sigma_2 = \sum_{\lambda}\frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}}{\lambda^2}, \qquad (\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$$

Volímeli tedy v rovnici (9) $u = \frac{1}{2}$, obdržíme vzhledem ke známé okolnosti $\psi(1) - \psi(\frac{1}{2}) = 2\log 2$:

$$(11)\qquad \log\frac{\pi}{8} + \frac{\sigma_2}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\log\frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{2n})^2}.$$

čímž pro neznámou dosud co do své arithmetické povahy konstantu σ_2 docíleno nového vyjádření.

Pravou stranu lze psáti také následujícím způsobem poněkud přehlednějším

$$\sum_{\lambda}(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}\lambda\log\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right), \qquad (\lambda = 3, 5, 7, \ldots)$$

II.

1. Vzorec (2^a) článku I. pišme

$$\Phi(u) = -\int_0^{\frac{1}{2}}\log\sin x\pi \,.\, \cos(1-2x)u\pi\,dx,$$

při čemž $\Phi(u)$ znamená výraz

$$(1)\qquad \Phi(u) = \frac{\sin u\pi}{2u\pi}\left[\log 2 - \Gamma'(1) + \frac{1}{2u} + \frac{\pi}{2}\cot u\pi + \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right].$$

Do integrálu $\Phi(u)$ vložme $\sin x\pi = z$, i obdržíme

$$-\pi\Phi(u) = \int_0^1 \cos(u\pi - 2u \operatorname{arc}\sin z)\frac{\log z}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

aneb rozvedemeli cosinus

$$-\pi\Phi(u) = \cos u\pi \int_0^1 \cos(2u \operatorname{arc}\sin z)\frac{\log z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$+\sin u\pi \int_0^1 \cos(2u \operatorname{arc}\sin z)\frac{\log z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Vzpomeňme nyní známých vzorců*)

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos(2u \operatorname{arc}\sin z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{G_\nu(u)}{(2\nu)!} z^{2\nu}, \\[2ex] \sin(2u \operatorname{arc}\sin z) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{H_\nu(u)}{(2\nu+1)!} z^{2\nu+1}, \end{cases}$$

ve kterých užito označení

$$(3)\qquad \begin{cases} G_\nu(u) = \prod\limits_\alpha (\alpha^2 - 4u^2), & (\alpha = 0, 2, 4, \ldots 2\nu - 2), \\[2ex] H_\nu(u) = 2u\prod\limits_\beta (\beta^2 - 4u^2), & (\beta = 1, 3, 5, \ldots 2\nu - 1), \end{cases}$$

a mimo to $G_0(u) = 1$, $H_0(u) = 2u$.

Vyjádřímeli funkce $\cos(2u \operatorname{arc}\sin z)$ a $\sin(2u \operatorname{arc}\sin z)$ vyskytující se v integrálech řadami (2), obdržíme

$$-\pi\Phi(u) = \cos u\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu G_\nu(u) + \sin u\pi \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu H_\nu(u),$$

ve kterémžto výraze znamenáno

$$A_\nu = \frac{1}{(2\nu)!}\int_0^1 \frac{z^{2\nu}\log z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad B_\nu = \frac{1}{(2\nu+1)!}\int_0^1 \frac{z^{2\nu+1}\log z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

---

*) Součinitelé těchto Maclaurinovských rozvojů stanoví se nejsnáze na základě differencialné rovnice

$$(1-z^2)y'' - zy' + 4u^2y = 0,$$

jíž hoví funkce $\sin(2u \operatorname{arc}\sin z)$ i $\cos(2u \operatorname{arc}\sin z)$.

Tyto integrály přetvořme substitucí $z^2 = x$, čímž vzniknou výrazy

$$A_\nu = \frac{1}{4(2\nu)!}\int_0^1 z^{\nu-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\log z\,dz,$$

$$B_\nu = \frac{1}{4(2\nu+1)!}\int_0^1 z^{\nu}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\log z\,dz,$$

které lze vyčísliti na základě vzorce

$$\int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\log z\,dz = \frac{\Gamma(s)\sqrt{\pi}}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}\left[\psi(s)-\psi(s+\tfrac{1}{2})\right],$$

v němž $\psi(s) = \dfrac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$, a jenž se obdrží ze vzorce Eulerova

$$\int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{\Gamma(s)\sqrt{\pi}}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}$$

derivováním. Tím způsobem docílíme výrazů uhlazenějších

$$A_\nu = -\frac{\pi}{4}\frac{\psi(\nu+1)-\psi(\nu+\frac{1}{2})}{(2.4.6\ldots 2\nu)^2}, \qquad B_\nu = -\frac{1}{2}\frac{\psi(\nu+\frac{3}{2})-\psi(\nu+1)}{(1.3.5\ldots 2\nu+1)^2},$$

takže hledaný náš rozvoj zní

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin u\pi}{u\pi}\left[\log 2-\Gamma'(1)+\frac{1}{2u}+\frac{\pi}{2}\cot u\pi+\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right]\\ &=\frac{1}{2}\cos u\pi\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\psi(\nu+1)-\psi(\nu+\frac{1}{2})}{(2.4.6\ldots 2\nu)^2}G_\nu(u)\\ &+\frac{\sin u\pi}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\psi(\nu+\frac{3}{2})-\psi(\nu+1)}{(1.3.5\ldots 2\nu+1)^2}H_\nu(u).\end{aligned}\right.$$

Konvergence obou řad na pravé straně není rychlejší než konvergence řady $\sum\frac{1}{n^3}$, a tedy může rozvoj tento míti cenu pouze theoretickou.

2. Podobného druhu rozvoje obdržíme ze vzorce

$$(5)\qquad \Gamma(s)\left[\zeta(s)-R(a,s)\right] = \int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{s-1}dx,$$

platného pro všecka komplexní s, jichž realná část je kladnou.

Ve vzorci tom symboly $\zeta(s)$ a $R(a, s)$ znamenají jednoznačné funkce definované prvky analytickými

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad R(a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s},$$

jež konvergují ovšem pouze při podmínce Real. $s > 1$.

Zavedemeli do integrálu (5) proměnnou $1 - x$ za x, přetvoří se v následující

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^{a-1}}{x} \left(\log \frac{1}{1-x}\right)^{s-1} dx.$$

Tento výraz lze rozvinouti v řadu, užijeli se binominalního rozvoje funkce $(1-x)^{a-1}$, jenž poskytne řadu

$$\frac{1-(1-x)^{a-1}}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{a-1}{n} x^{n-1};$$

řada tato konverguje i pro krajní hodnotu $x = 1$, jeli realná část veličiny a větší jedné. Za této supposice jest konvergence řady v celém oboru $(0 \ldots 1)$ stejnoměrna a integrál se obdrží integrováním všech členů řady; tak vznikne rovnice

$$\text{(a)} \qquad \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{a-1}}{x} \left(\log \frac{1}{1-x}\right)^{s-1} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{a-1}{n} \int_0^1 x^{n-1} \left(\log \frac{1}{1-x}\right)^{s-1} dx.$$

Rozvoj tento nabude významu, podařili se získati přehlednější zákon jeho součinitelů, t. j. dovedemeli v zakončené formě vyčísliti integrály

$$\text{(b)} \quad J_n = \int_0^1 x^{n-1} \left(\log \frac{1}{1-x}\right)^{s-1} dx = \int_0^1 (1-x)^{n-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx.$$

Poslední integrál lze také psáti

$$\text{(b')} \qquad J_n = \int_0^{\infty} (1 - e^{-x})^{n-1} e^{-x} x^{s-1} dx$$

Klademeli pak

$$f(u) = \int_0^{\infty} e^{-ux} x^{s-1} dx,$$

a definujemeli operaci Δ rovnicí

$$\Delta f(u) = f(u+1) - f(u),$$

obdržíme v našem případě

$$\Delta f(u) = -\int_0^\infty (1 - e^{-x}) e^{-ux} x^{s-1} \, dx \,,$$

$$\Delta^2 f(u) = +\int_0^\infty (1 - e^{-x})^2 e^{-ux} x^{s-1} \, dx \,,$$

a obecně

$$\Delta^r f(u) = (-1)^r \int_0^\infty (1 - e^{-x})^r e^{-ux} x^{s-1} \, dx \,.$$

A poněvadž v našem případě

$$f(u) = \frac{\Gamma(s)}{u^s} \,,$$

tedy

$$(-1)^r \int_0^\infty (1 - e^{-x})^r e^{-ux} x^{s-1} \, dx = \Gamma(s) \,.\, \Delta^r u^{-s} \,,$$

vychází dle (b^1)

$$(b^2) \qquad J_n = (-1)^{n-1} \Gamma(s) (\Delta^{n-1} x^{-s})_{x=1} \,.$$

Po dosazení této hodnoty za součinitele obecného členu v rozvoji (a) a po vyjádření levé strany jeho výrazem (5) obdrží řečený rozvoj tvar

$$(6) \qquad \zeta(s) - R(a, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a-1}{n} \,.\, (\Delta^{n-1} x^{-s})_{x=1} \,.$$

Pomocí výrazu

$$(6^a) \qquad (\Delta^{n-1} x^{-s})_{x=1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(s)} \int_0^1 (1 - x)^{n-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{s-1} dx \,,$$

plynoucího z (b) a (b^2), bude nám lze rozhodnouti o konvergenci řady (6) i v jiných případech, kdy realná část proměnné s není kladnou.

Nechť jest k číslo celistvé a kladné tak volené, aby realná část veličiny $s + k$ byla kladnou. Pak stačí uvážiti, že řada

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{a-1}{n} (1 - x)^{n-k-1}$$

konverguje stejnoměrně v oboru $(0 \ldots 1)$; násobíli se pak výrazem

$$(1 - x)^k \left(\log \frac{1}{x}\right)^s \,,$$

jehož integrál je konečný, bude dovoleno integrovati po členech, a obdrží se řada konvergentní, která splývá s řadou (6), byloli z ní vyloučeno prvých k

členů. Následovně *řada* (6) *konverguje pro všecky hodnoty proměnné* s. Jak řečeno, předpokládá se tu, že realná část veličiny a jest větší jedné.

Z rovnice (6) obdržíme zároveň rozvoj funkce $\zeta(s)$, klademeli $a = \frac{3}{2}$ a užijemeli rovnic

$$R(\tfrac{3}{2}, s) = R(\tfrac{1}{2}, s) - 2^s, \qquad R(\tfrac{1}{2}, s) = (2^s - 1)\,\zeta(s);$$

máme tak

$$(2^s - 2)\,\zeta(s) = 2^s - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (\Delta^{n-1} x^{-s})_{x=1}, \tag{7}$$

kterážto řada konverguje pro všecka s. Odtud vychází, že rozvoj mocninový

$$(2^s - 2)\,\zeta(s) = 2^s + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{C_k}{k!} s^k \tag{8}$$

má za součinitele C_k hodnotu

$$C_k = -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (\Delta^{n-1} \log^k x)_{x=1}$$

čili

$$C_k = -\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n-1}{\nu} \log^k (n-\nu).$$

Z rovnice (6) obdržíme rozvoje funkcí gamma, volímeli jednou $s = 1$ a kladmeli po druhé v derivaci $s = 0$. Neboť jest

$$\Big[\zeta(s) - R(a, s)\Big]_{s=0} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \Gamma'(1),$$

$$D_{s=0}\Big[\zeta(s) - R(a, s)\Big] = -\log \Gamma(a),$$

a tedy vychází vzhledem ke zřejmé okolnosti, že $\left(\Delta^{n-1} \frac{1}{x}\right)_{x=1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \Gamma'(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{a-1}{n}, \tag{9}$$

$$\log \Gamma(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a-1}{n} (\Delta^{n-1} \log x)_{x=1}. \tag{10}$$

III.

1. O funkci $\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}$ ukázal *Gauss*,*) že ji lze vyčísliti ve tvaru zakončeném, jakmile argument w má hodnotu racionalnou. Totéž lze ukázati týmiž

---

*) III. svazek sebraných spisů, str. 157. Český referát vyšel v Časopise pro pěst. math. a fys., sv. XXI., str. 166, z péra p. Ed. Weyra.

prostředky elementarnými o funkci

$$(1)\qquad \Phi(w, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{2\nu x \pi i}}{w+\nu}.$$

Položme za w racionalné zlomky $\frac{\sigma}{q}$ o jmenovateli q a utvořme součet

$$(2)\qquad S_k = \sum_{\sigma=1}^{q} e^{\frac{2\sigma\pi i}{q}(k+x)} \Phi\left(\frac{\sigma}{q}, x\right),$$

kde k je číslo celistvé. Nahradímeli jednotlivé výrazy Φ příslušnými řadami, vznikne tvar

$$S_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{q} \frac{q}{\sigma+q\nu} e^{\frac{2\pi i}{q}(\sigma k+\sigma x+q\nu x)}$$

V této řadě zaveďme summační příponu $n = \sigma + q\nu$, i vyjde tak

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q}{n} e^{\frac{2n\pi i}{q}(x+k)}$$

pro kteroužto řadu logarithmickou známe hodnotu

$$(3)\qquad S_k = -q \log\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{q}(x+k)}\right).$$

To předeslavše, uvažme, že výraz

$$\sum_{k=1}^{q} S_k e^{-\frac{2k\mu\pi i}{q}}$$

ve kterém μ značí jedno z čísel $1, 2, 3, \ldots q$, se velmi zjednoduší, nahradíli se v něm S_k výrazem (2). Neboť tak se obdrží nejprve

$$\sum_{k=1}^{q} S_k e^{-\frac{2k\mu\pi i}{q}} = \sum_{\sigma=1}^{q} e^{\frac{2\sigma x\pi i}{q}} \Phi\left(\frac{\sigma}{q}, x\right) \sum_{k=1}^{q} e^{\frac{2k\pi i}{q}(\sigma-\mu)},$$

a ježto součet

$$\sum_{k=1}^{q} e^{\frac{2k\pi i}{q}(\sigma-\mu)}$$

je vždy nullou mimo $\sigma = \mu$, ve kterémžto případě má pak hodnotu q, vychází

$$\sum_{k=1}^{q} S_k e^{-\frac{2k\mu\pi i}{q}} = q\, e^{\frac{2\mu x\pi i}{q}} \Phi\left(\frac{\mu}{q}, x\right).$$

Vyjádřímeli levou stranu pomocí vzorce (3), obdržíme hledaný výsledek

$$(4)\qquad e^{\frac{2\mu x\pi i}{q}} \Phi\left(\frac{\mu}{q}, x\right) = -\sum_{k=1}^{q} e^{-\frac{2k\mu\pi i}{q}} \log\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{q}(x+k)}\right),$$

ve kterémžto vzorci μ může míti hodnoty $1, 2, 3, \ldots q$.

XIV.

Transcendenta Φ, v níž první argument w je číslem racionalným, redukována tímto vzorcem na součet členů logarithmických, jichž násobitelé jsou odmocniny jednotky.

2. Z tohoto vzorce lze vyvinouti výsledek Gaussův; postup přímý jest nicméně jednodušší. Tak bychom obdrželi sledováním téhož postupu jako předešle nejprve rovnici

$$(5)\qquad \frac{\Gamma'\left(\frac{\mu}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{q}\right)} - \Gamma'(1) = \sum_{k=1}^{q-1}\left(e^{-\frac{2k\mu\pi i}{q}} - 1\right)\log\left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{q}}\right),$$

platnou pro $0 < \mu \leqq q$. V případě $\mu < q$ lze tento výraz upraviti jak následuje

$$(6)\qquad \frac{\Gamma'\left(\frac{\mu}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{q}\right)} - \Gamma'(1) = -q\log 2 - \frac{\pi}{2}\cot\frac{\mu\pi}{q}$$

$$- \sum_{k=1}^{q-1} 2\sin^2\frac{k\mu\pi}{q}\log\sin\frac{k\pi}{q},$$

aneb též, užijeli se rovnice

$$\prod_{k=1}^{q-1}\sin\frac{k\pi}{q} = \frac{q}{2^{q-1}},$$

$$(6^a)\qquad \frac{\Gamma'\left(\frac{\mu}{q}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{q}\right)} - \Gamma'(1) = -\log 2q - \frac{\pi}{2}\cot\frac{\mu\pi}{q} + \sum_{k=1}^{q-1}\cos\frac{2k\mu\pi}{q}\log\sin\frac{k\pi}{q}.$$

IV.

1. Mnohé vlastnosti útvarů v theorii funkce gamma se vyskytujících souvisejí s vlastnostmi nekonečné řady

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{x+m},$$

s níž jsme se při různých příležitostech byli setkali. Zde hodláme podati některá nová její vyjádření.

Vycházejme z integrálu

$$(1)\qquad J = \int_0^u \frac{u^{a-1} - x^{a-1}}{u - x}\,\frac{dx}{(1+x)^a},$$

v němž u jest kladná veličina realná, a veličina a má kladnou část realnou. Dosadímeli sem

$$\frac{x}{1+x} = z,$$

obdržíme výraz

$$J = \int\limits_0^{\frac{u}{1+u}} \frac{u^{a-1}(1-z)^{a-1} - z^{a-1}}{u-(u+1)z}\, dz\,,$$

a klademeli tu $\dfrac{u+1}{u} z = x$, vyjde

$$(2) \qquad J = \frac{u^{a-1}}{(u+1)^a} \int\limits_0^1 \frac{(u+1-ux)^{a-1} - x^{a-1}}{1-x}\, dx\,.$$

Jiný způsob vyjádření útvaru J se obdrží, jestliže po rozkladu

$$J = \frac{u^{a-1}}{(u+1)^a}\left[\int\limits_0^1 \frac{(u+1-ux)^{a-1}-1}{1-x}\, dx + \int\limits_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x}\, dx\right]$$

přetvoří se prvý člen substitucí $u+1-ux = t$; tak vznikne nejprve

$$(3) \qquad J = \frac{u^{a-1}}{(u+1)^a}\left[\int\limits_1^{u+1} \frac{t^{a-1}-1}{t-1}\, dt + \int\limits_0^1 \frac{t^{a-1}-1}{t-1}\, dt\right],$$

čili

$$(3^*) \qquad J = \frac{u^{a-1}}{(u+1)^a} \int\limits_0^{u+1} \frac{x^{a-1}-1}{x-1}\, dx\,.$$

2. Ve vzorci (3) druhý integrál v závorce má hodnotu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a+n-1}\right),$$

a prvý lze rozvinouti v řadu, užijeli se rozvoje

$$\frac{1}{t-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^n}\,;$$

takto se mu udělí tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_1^{u+1} (t^{a-n-1} - t^{-n})\, dt\,,$$

čili po provedení integrace

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(u+1)^{a-n}-1}{a-n} + \frac{(u+1)^{-n+1}-1}{n-1}\right] + \frac{(u+1)^{a-1}-1}{a-1} - \log(u+1)\,.$$

Tento výraz lze psáti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u+1)^{a-n}}{a-n} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u+1)^{-n}}{n} - \log(u+1) \right\}$$
$$- \frac{1}{a-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{a-n-1} \right);$$

výraz v závorce { } má hodnotu $-\log u$, a tedy ve vzorci (3) uzávorkovaný výraz lze psáti

$$(u+1)^a u^{1-a} J = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u+1)^{a-n}}{a-n} - \log u$$
$$+ \left[\frac{-1}{a-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{a-n-1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{a+n-1} \right) \right].$$

Veličina v závorce může býti psána

$$- \lim_{m=\infty} \sum_{n=-m-1}^{m-1} \frac{1}{a+n}$$

a má tedy hodnotu $-\pi \cot a\pi$; konečný výsledek tedy zní

$$(4) \qquad J = u^{a-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a-n} \left(\frac{1}{u+1} \right)^n - \frac{u^{a-1}}{(u+1)^a} (\log u + \pi \cot a\pi).$$

3. Jiný rozvoj integrálu J poskytne vzorec (1), nahradíli se v něm výraz

$$\frac{1}{(1+x)^a} \quad \text{řadou} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a}{\nu} x^\nu,$$

jejíž stejnoměrná konvergence vyžaduje, aby u bylo menší jedné. Tím způsobem obdržíme nejprve

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a}{\nu} \int_0^u \frac{u^{a-1} - x^{a-1}}{u-x} x^\nu \, dx;$$

integrál v obecném členu se vyskytující převede se substitucí $x = uz$ v následující

$$u^{a+\nu-1} \int_0^1 \frac{x^\nu - x^{a+\nu-1}}{1+x} dx,$$

jehož hodnota jest

$$u^{a+\nu-1} \left[\frac{\Gamma'(a+\nu)}{\Gamma(a+\nu)} - \frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \right].$$

Bude tudíž

$$(5) \qquad J = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-a}{\nu} \left[\frac{\Gamma'(a+\nu)}{\Gamma(a+\nu)} - \frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \right] u^{a+\nu-1},$$

kterýžto výsledek lze také psáti

$$(5^*) \quad J = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left[\frac{\Gamma'(a+\nu)}{\Gamma(a)} - \Gamma'(\nu+1) \binom{a+\nu-1}{\nu} \right] \frac{u^{a+\nu-1}}{\nu!} .$$

Odtud se obdrží forma nová, užijeli se vzorce

$$\Gamma'(a+\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a+\nu-1} \log x \, dx .$$

Neboť tu bude patrně řada

$$S = \sum_0^\infty (-1)^\nu \Gamma'(a+\nu) \frac{u^{a+\nu-1}}{\nu!}$$

míti hodnotu

$$S = u^{a-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \int_0^\infty e^{-x} \frac{(ux)^\nu}{\nu!} x^{a-1} \log x \, dx ,$$

aneb provedemeli sčítání za znamením integračním

$$S = u^{a-1} \int_0^\infty e^{-x-ux} x^{a-1} \log x \, dx .$$

Substitucí $x = \frac{z}{u+1}$ vychází z tohoto integrálu výraz

$$S = \frac{u^{a-1}}{(u+1)^a} \left[\int_0^\infty e^{-z} z^{a-1} \log z \, dz - \log(u+1) \int_0^\infty e^{-z} z^{a-1} dz \right],$$

čili

$$S = \frac{u^{a-1}}{(u+1)^a} \left[\Gamma'(a) - \log(u+1) \, . \, \Gamma(a) \right] .$$

Pomocí tohoto výsledku máme ze vzorce (5*)

$$(6) \quad J = \frac{u^{a-1}}{(u+1)^a} \left[\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \log(u+1) \right] - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \binom{-a}{\nu} u^{a+\nu-1} .$$

4. Porovnámeli tento výsledek se vzorcem (4), plyne

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a-n} \left(\frac{1}{u+1} \right)^n = \frac{1}{(u+1)^a} \left[\log \frac{u}{u+1} + \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \pi \cot a\pi \right]$$

$$- \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \binom{-a}{\nu} u^\nu$$

Píšemeli zde $a = 1 - x$, $u + 1 = \frac{1}{z}$, objeví se tvar elegantnější

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{m+x}}{m+x} = z^{x-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} \binom{x-1}{m} \left(\frac{1-z}{z}\right)^m - \log(1-z) - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \tag{7}$$

Ke konvergenci levé strany je nutno, aby $|z| < 1$, konvergence strany pravé vyžaduje $|1-z| < |z|$, takže máme *nutnou podmínku*

$$|z-1| < |z| < 1. \tag{7^a}$$

Ostatní podmínky, jež vyžadovalo odvození, mohou odpadnouti, ježto tu běží o funkce analytické.

Ve vzorci tomto kladme $z = e^{-2w\pi}$, kde w jest kladná veličina realná, menší než $\frac{\log 2}{2\pi}$. Pak budou konvergenční podmínky splněny a levá strana bude zníti

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-2w\pi(x+m)}}{x+m};$$

předpokládáli se pak $0 < x < 1$, bude lze ji dle vzorce (4) ve IV. článku naší rozpravy »Další studie v oboru Malmsténovských řad« vyjádřiti vzorcem

$$\Gamma'(1) - \log 2w\pi - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kx\pi i} \log \frac{w+ki}{ki},$$

kde v součtu Σ' dlužno vynechati člen $k=0$. Podle vzorce (7) musí tento výraz splynouti s veličinou

$$-\log(1 - e^{-2w\pi}) - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$
$$+ e^{2w\pi(1-x)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} \binom{x-1}{m} (e^{2w\pi} - 1)^m,$$

a tedy máme rovnici

$$\left\{\begin{aligned} &\Gamma'(1) + \log \frac{1 - e^{-2w\pi}}{2w\pi} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kx\pi i} \log \frac{w+ki}{ki} \\ &= e^{2w\pi(1-x)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} \binom{x-1}{m} (e^{2w\pi} - 1)^m. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

U rovnice té opět lze uvolniti podmínky existenční v ten způsob, že třeba toliko splniti nerovnosti $|e^{2w\pi} - 1| < 1$, Real. $w > 0$; první vyžaduje, aby bod w ležel uvnitř křivky, jejíž rovnice zní

$$e^{2\pi\xi} = 2\cos 2\eta\pi;$$

mimo to musí býti $0 < x < 1$.

Užijemeli známého vzorce

$$(9)\quad \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} = \Gamma'(1) + \psi_m\,, \qquad \psi_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\,,$$

vypadne z rovnice (8) konstanta $\Gamma'(1)$, poněvadž na pravé straně vyskytne se v součinu s veličinou

$$e^{2w(1-x)\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{x-1}{m} (e^{2w\pi} - 1)^m\,,$$

která se rovná jedné. Rovnici (8) lze tedy psáti

$$(8^*)\quad \left\{ \begin{aligned} &\log \frac{1-e^{-2w\pi}}{2w\pi} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kx\pi i} \log \frac{w+ki}{ki} \\ &= e^{2w\pi(1-x)} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \binom{x-1}{m} (e^{2w\pi} - 1)^m \end{aligned} \right.$$

5. Tento vzorec upravme vložením z za $2w\pi$, x za $1-x$, a výsledek

$$\log \frac{1-e^{-z}}{z} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kx\pi i} \log \frac{z-2k\pi i}{-2k\pi i} = e^{xz} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \binom{-x}{m} (e^z - 1)^m$$

differencujme n-kráte vůči z a kladme po té $z=0$. I obdržíme tak především

$$(a)\quad C_n + (n-1)! \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2kx\pi i}}{(2k\pi i)^n} = \sum_{m=1}^{n} \psi_m \binom{-x}{m} D^n_{z=0}\, e^{xz} (e^z - 1)^m\,,$$

kde položeno

$$C_n = D^n_{z=0} \log \frac{1-e^{-z}}{z}\,.$$

Zavedemeli opět rozdílový symbol Δ, definovaný rovnicí

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)\,,$$

obdržíme

$$e^{xz}(e^z - 1)^m = \Delta^m_x e^{xz}\,,$$

a tedy

$$D^n_z e^{xz}(e^z - 1)^m = \Delta^m_x (x^n e^{xz})\,,$$

a odtud

$$(b)\quad D^n_{z=0} e^{xz}(e^z - 1)^m = \Delta^m_x x^n$$

Pravá strana vzorcc (a) bude tedy zníti

$$\sum_{m=1}^{n} \psi_m \binom{-x}{m} \Delta^m_x x^n$$

Abychom vyjádřili levou stranu, vzpomeňme známé věty, že celistvá racionalná funkce $S_m(x)$, která pro všecka celistvá a kladná x splývá se součtem

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + (x-1)^m\,,$$

dána jest v intervallu $0 < x < 1$ rozvoji následujícími:

$$S_{2\mu-1}(x) + (-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{2\mu} = (-1)^{\mu-1}\,2\,(2\mu-1)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k x\pi}{(2k\pi)^{2\mu}},$$

$$S_{2\mu}(x) = (-1)^{\mu-1}\,2\,(2\mu)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2k x\pi}{(2k\pi)^{2\mu+1}};$$

při tom B_μ značí μ-té číslo Bernouilliovo. Znamenámeli tedy

$$\bar{S}_{2\mu}(x) = S_{2\mu}(x), \qquad \bar{S}_{2\mu-1}(x) = S_{2\mu-1}(x) + (-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{2\mu},$$

bude

$$(n-1)!\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\,\frac{e^{2kx\pi i}}{(2k\pi i)^n} = -\bar{S}_{n-1}(x),$$

a rovnice (a) poskytne

$$C_n - \bar{S}_{n-1}(x) = \sum_{m=1}^{n}\psi_m\binom{-x}{m}.\Delta^m x^n.$$

Pro $x = 0$ vymizí pravá strana, a tedy bude

$$C_n - \bar{S}_{n-1}(x) = -S_{n-1}(x),$$

takže vychází

$$S_{n-1}(x) = -\sum_{m=1}^{n}\psi_m.\binom{-x}{m}.\Delta^m x^n \tag{10}$$

V této rovnici klaďme $n = 2g + 1$, derivujme vůči x a po té klaďme $x = 0$; podle známé věty bude

$$D_{x=0}\,S_{2g}(x) = (-1)^{g-1}B_g,$$

a tedy máme pro čísla Bernouilliova výraz

$$B_g = (-1)^g\sum_{m=1}^{2g+1}(-1)^m\frac{1}{m}\psi_m.\Delta^m O^{2g+1}, \tag{11}$$

kde $\Delta^m O^n$ slouží za zkrácení symbolu $\Delta^m_{x=0}x^n$.

Ježto součinitel při z^n v mocninovém rozvoji funkce

$$e^{xz}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m.\binom{-x}{m}(e^z-1)^m$$

jest $-S_{n-1}(x)$, máme identitu

$$e^{xz}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_m\binom{-x}{m}(e^z-1)^m = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n(x)}{(n+1)!}z^{n+1},$$

kde $S_0(x)=x$; pravou stranu lze psáti

$$-\int_0^z \sum_n \frac{S_n(x)}{n!} z^n\, dz\,,$$

a má dle známého vzorce

$$\frac{e^{zx}-1}{e^z-1}=\sum_0^\infty \frac{S_n(x)}{n!} z^n$$

hodnotu

$$-\int_0^z \frac{e^{xz}-1}{e^z-1}\, dz\,;$$

máme tedy

$$\int_0^z \frac{e^{xz}-1}{e^z-1}\, dz = -e^{xz}\sum_{m=1}^\infty \psi_m\binom{-x}{m}(e^z-1)^m\,, \tag{12}$$

čili po substituci $e^z=t$

$$\int_1^t \frac{t^x-1}{t-1}\frac{dt}{t} = -t^x \sum_{m=1}^\infty \psi_m\binom{-x}{m}(t-1)^m\,. \tag{12*}$$

V.

Ze základního vzorce (4^a) na str. 53 rozpravy »Další studie v oboru Malmsténovských řad«, t. j. ze vzorce

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{e^{-2x\pi i(v+n)}}{v+n} = -\frac{\pi i}{2} - \log 2x\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i}\log\frac{x+k}{k} \tag{1}$$

(v němž čárka u znamení součtu znamená, že se má vynechati rušivý člen $k=0$, a podmínky znějí $0<v<1$, $0<x<1$) byla odvozena trigonometrická řada pro funkci $\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\sin v\pi$, jež verifikována v čl. I. přítomné rozpravy. Z téhož vzorce lze odvoditi ještě jiné specialní výsledky k funkci gamma se nesoucí. Volímeli na př. $x=\frac{1}{2}$, vychází

$$e^{-v\pi i}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{v+n} = -\frac{\pi i}{2} - \log\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i}\log\frac{2k+1}{2k}\,.$$

Řadu na levé straně lze psáti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{v+n} = \lim_{m=\infty} \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{v+2n} - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{v+1+2n} \right],$$

z kteréhožto tvaru vysvitá, že hodnota této řady jest

$$\frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})},$$

a tedy máme rovnici

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{2} e^{-v\pi i} \left[\frac{\Gamma'(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})} - \frac{\Gamma'(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \right] = -\frac{\pi i}{2} - \log \pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}$$

$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{2k+1}{2k}.$$

Porovnámeli v této rovnici části pomyslné, obdržíme vzorec

$$\text{(2)} \quad \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{2k+1}{2k-1} \sin 2kv\pi = \left[\frac{\Gamma'(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})} - \frac{\Gamma'(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \right] \sin v\pi,$$

platný za podmínky $0 < v < 1$.

Porovnámeli v rovnici (a) části realné, obdržíme nejprve

$$\frac{1}{2} \cos v\pi \left[\psi\left(\frac{v+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{v}{2}\right) \right] = -\log \pi + \Gamma'(1) - \psi(v)$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \cos 2kv\pi;$$

pomocí vzorce Legendreova $\psi(v) = \log 2 + \frac{1}{2} \psi\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{1}{2} \psi\left(\frac{v+1}{2}\right)$ vychází odtud

$$\text{(3)} \quad \sin^2 \frac{v\pi}{2} \frac{\Gamma'(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} + \cos^2 \frac{v\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma'(\frac{v+1}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})} = \Gamma'(1) - \log 2\pi$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \cos 2kv\pi.$$

Násobímeli rovnici (a) $e^{v\pi i}$ a porovnámeli části realné, obdržíme rovnici

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{v+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{v}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \sin v\pi + \left[\Gamma'(1) - \log \pi\right] \cos v\pi$$

$$- \cos v\pi \,.\, \psi(v) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\cos (2k+1) v\pi \,.\, \log \frac{2k+1}{2k} \right.$$

$$\left. + \cos (2k-1) v\pi \,.\, \log \frac{2k-1}{2k} \right].$$

Isolujeli se z řady člen $k = 1$ v druhé části, jehož hodnota zní $\cos v\pi \,.\, \log 2$, a užijemeli opětně vztahu Legendreova, obdržíme výsledek

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sin^2 \frac{v\pi}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} - \cos^2 \frac{v\pi}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)} + \frac{\pi}{2} \sin v\pi \\
&\quad + \left[\Gamma'(1) - \log \pi\right] \cos v\pi = - \sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) \cos (2k+1) v\pi \,.
\end{aligned}
\right.
$$

Sečtemeli výsledky (3) a (4), objeví se vzorec jednodušší, platný za podmínky $0 \leqq v \leqq 1$:

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2} \sin v\pi + 2 \sin^2 \frac{v\pi}{2} \left[\log \pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\right] \\
&\quad = - \log 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cos n v\pi \,.
\end{aligned}
\right.
$$

Naproti tomu poskytne odečtení výsledků (3) a (4) rovnici

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&- \frac{\pi}{2} \sin v\pi + 2 \cos^2 \frac{v\pi}{2} \left[\log \pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}\right] \\
&\quad = - \log 2 - \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \log \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) . \cos n v\pi \,.
\end{aligned}
\right.
$$

Dosadímeli do rovnice (5) $v = 2w$, do rovnice (6) $v = 2w - 1$, vychází, že řada

$$
- \log 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) . \cos 2nw\pi = \Phi(w)
$$

má součet

$$
\Phi(w) = \frac{\pi}{2} \sin 2w\pi + 2 \sin^2 w\pi \left[\log \pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}\right]
$$

$$
\text{pro} \quad 0 \leqq w \leqq \frac{1}{2},
$$

a

$$
\Phi(w) = \frac{\pi}{2} \sin 2w\pi + 2 \sin^2 w\pi \left[\log \pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}\right]
$$

$$
\text{pro} \quad \frac{1}{2} \leqq w \leqq 1 \,.
$$

Jinými slovy *v celém intervallu* $0 < w < 1$ *platí rozvoj:*

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2} \sin 2w\pi + 2 \sin^2 w\pi \left[\log \pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}\right] \\
&\quad = - \log 2 - \sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cos 2nw\pi
\end{aligned}
\right.
$$

Vzorec tento se obdrží také přímo z rovnice naší

$$(8)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sin(2k+1)v\pi \,.\, \log\frac{k}{k+1}$$
$$= \left[\log 2\pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right]\sin v\pi + \frac{\pi}{2}\cos v\pi\,,$$

násobíli se $2\sin v\pi$, a provedeli se v levo jednoduchá redukce, takže vzorec (7) nepodává vlastně nic nového; za to však jest jeho odvození jednodušší než u rovnice (8).

Vzorec (8) lze ostatně také odvoditi jako důsledek rovnice (a). Násobímeli totiž rovnici (a) výrazem $e^{v\pi i}$, a porovnámeli části pomyslné, plyne

$$0 = -\frac{\pi}{2}\cos v\pi - \left[\log\pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right]\sin v\pi$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sin(2k+1)v\pi \,.\, \log\frac{2k+1}{2k} - \sin(2k-1)v\pi \,.\, \log\frac{2k-1}{2k}\right],$$

a tu zbývá pouze z druhé části řady isolovati člen $k=1$, mající hodnotu $-\sin v\pi \,.\, \log 2$, aby se obdržela rovnice (8).

Užijemeli vzorce

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$$

pro $a = (n^2-1)\pi$, $b = n^2\pi$, obdržíme

$$-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-n^2x\pi}\,\frac{e^{x\pi}-1}{x}\,dx\,,$$

a tedy

$$-\sum_{n=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cos 2nw\pi$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\vartheta_3(w\,|\,ix) - 1 - 2e^{-x\pi}\cos 2w\pi\right]\frac{e^{x\pi}-1}{x}\,dx\,,$$

takže nacházíme vzorec

$$(9)\qquad \int_0^{\infty}\left[\vartheta_3(w\,|\,ix) - 1 - 2e^{-x\pi}\cos 2w\pi\right]\frac{e^{x\pi}-1}{x}\,dx$$
$$= 2\log 2 + \pi\sin 2w\pi + 4\sin^2 w\pi\left[\log\pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}\right].$$

Rozborem povahy funkce $\vartheta_3(w\,|\,ix)$ pro nekonečně malá x bychom shledali, že integrál (9) existuje pouze pro hodnoty w položené uvnitř čtverce, jehož vrcholy jsou 0, 1, $\frac{1+i}{2}$ a $\frac{1-i}{2}$ (a ovšem též uvnitř čtverců, jež vzniknou substitucemi $w \pm 1$, $w \pm 2$, $w \pm 3, \ldots$).

VI.

Z integrálu Cauchyova

$$\text{(1)} \qquad \log \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{e^{ax} - e^{x}}{e^{x} - 1} - (a-1)e^{x} \right] \frac{dx}{x}$$

obdržíme nový výraz, užijemeli variace integrační cesty, jaká se dle základní věty Cauchyovy o integraci v komplexním oboru připouští. Znamenejme za tím účelem

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{e^{ax} - e^{x}}{e^{x} - 1} - (a-1)e^{ax} \right],$$

a uvažujme integrál

$$J = \int f(x)\, dx,$$

vzatý podél obvodu rovnoběžníka, jehož vrcholy jsou $(-M, 0, Ni, -M + Ni)$, kde M je kladná veličina realná a $N = (2n+1)\pi$, při čemž n jest kladné číslo celistvé. Poněvadž strana $(0 \ldots Ni)$ obsahuje póly funkce $f(x)$, jež jsou vesměs tvaru $2k\pi i$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, dlužno se podél strany $(0 \ldots Ni)$ odchýliti od cesty přímočaré, a sice odchýlíme se dovnitř rovnoběžníka; ustanovíme, že cesta integrační odpovídající straně má se skládati z úseků přímočarých a z poloukruhů malého poloměru ε opsaných kol středů $2k\pi i$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ a obrácených dovnitř rovnoběžníka; poloukruh ten znamenejme (k, ε), takže zvolená část $(0 \ldots Ni)$ cesty integrační bude sestávati z přímočarých úseků tvaru $(2k\pi i + \varepsilon i \,..\, 2(k+1)\pi i - \varepsilon i)$ a z poloukruhů (k, ε) v následujícím pořádku:

$$(0 \ldots 2\pi i - \varepsilon i), (1, \varepsilon), (2\pi i + \varepsilon i \ldots 4\pi i - \varepsilon i), (2, \varepsilon),$$
$$(4\pi i + \varepsilon i \ldots 6\pi i - \varepsilon i), (3, \varepsilon), \,..\, (n, \varepsilon), (2n\pi i + \varepsilon i \ldots (2n+1)\pi i).$$

Integrál J podle toho skládá se z částí

$$\int_{-M}^{0} f(x)\, dx, \qquad \int_{Ni}^{-M+Ni} f(x)\, dx, \qquad \int_{-M+Ni}^{-M} f(x)\, dx,$$

dále z částí přímočarých, pocházejících ze složky $(0 \ldots Ni)$, jichž součet jest

$$\int_{0}^{2\pi i - \varepsilon i} f(x)\, dx + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{2k\pi i + \varepsilon i}^{(2k+2)\pi i - \varepsilon i} f(x)\, dx + \int_{2n\pi i + \varepsilon i}^{(2n+1)\pi i} f(x)\, dx,$$

a konečně z částí vypadajících na poloukruhy (k, ε).

Značíli x_0 pól funkce $f(x)$ a $R(x_0)$ příslušné residuum její, bude hodnota integrálu $\int f(x)\,dx$ vzatého podél půlkruhu bodu x_0 odpovídajícího obnášeti

$$-\pi i\, R(x_0) + (\varepsilon),$$

kde (ε) jest veličina, která zároveň s ε klesá pod každou mez. Pro pól $x_0 = 2k\pi i$ má však residuum $R(x_0)$ hodnotu

$$\frac{e^{2ka\pi i}-1}{2k\pi i},$$

a odtud vychází, že integrály vzaté podél poloukruhů (k, ε) dají dohromady výraz

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{2ka\pi i}-1}{2k} + (\varepsilon),$$

kde (ε) má význam podobný jako předešle.

Hodnota našeho integrálu tedy bude

$$J = \int_{-M}^{0} f(x)\,dx + \int_{Ni}^{-M+Ni} f(x)\,dx + \int_{-M+Ni}^{-M} f(x)\,dx$$

$$+\left[\int_{0}^{2\pi i-\varepsilon i} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{2k\pi i+\varepsilon i}^{(2k+2)\pi i-\varepsilon i} f(x)\,dx + \int_{2n\pi i+\varepsilon i}^{(2n+1)\pi i} f(x)\,dx\right] - \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{2ka\pi i}-1}{2k} + (\varepsilon).$$

Avšak integrál J rovná se nulle, poněvadž funkce $f(x)$ se uvnitř rovnoběžníka uvažovaného chová pravidelně.

Přejdemeli v rovnici poslední k limitě pro $\varepsilon = 0$, vyjde

$$0 = \int_{-M}^{0} f(x)\,dx - \int_{-M}^{0} f(x+Ni)\,dx - \int_{0}^{N} f(-M+iy)\,i\,dy$$

$$+\ \text{val. princ.}\int_{0}^{N} f(iy)\,i\,dy - \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{2ka\pi i}-1}{2k},$$

kde litery val. princ. značí, že dlužno z integrálu o sobě neexistujícího vzíti t. zv. *hlavní hodnotu* ve známém smyslu Cauchyovském (valeur principale).

V této rovnici přejděme k limitě pro $M = \infty$, i obdržíme

$$\text{(a)}\ \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x+Ni)\,dx - \text{val. princ.}\int_{0}^{N} f(iy)\,i\,dy + \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{2ka\pi i}-1}{2k}$$

První integrál v pravo

$$(b)\quad \int_{-\infty}^{0} f(x+Ni)\,dx = -\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^{ax+(2n+1)a\pi i}+e^{x}}{e^{x}+1} - (a-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x+(2n+1)\pi i}$$

pro nekonečně rostoucí n blíží se nulle, takže obdržíme

$$(c)\quad \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{2ka\pi i}-1}{2k} - \text{val. princ.}\int_{0}^{(2n+1)\pi} f(iy)\,i\,dy\right]$$

Volímeli za a kladnou realnou hodnotu, a porovnámeli části realné na obou stranách, nahradivše levou stranu její hodnotou $\log\Gamma(a)$, obdržíme

$$\log\Gamma(a) = \lim_{n=\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2ka\pi - 1}{2k} - \text{val. princ.}\int_{0}^{(2n+1)\pi}\left[\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y} - \frac{1}{2} - (a-1)\cos y\right]\frac{dy}{y}\right\}.$$

V posledním integrálu rozdělme cestu ve dvě části $(0\ldots\pi)$ a $(\pi\ldots 2n\pi+\pi)$, čímž obdrží hodnotu $A+B$, kde

$$A = \int_{0}^{\pi}\left[\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y} - \frac{1}{2} - (a-1)\cos y\right]\frac{dy}{y},$$

a

$$B = \text{val. princ.}\int_{\pi}^{(2n+1)\pi}\left[\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y} - \frac{1}{2} - (a-1)\cos y\right]\frac{dy}{y}$$

Poslední integrál lze psáti

$$B = \text{val. princ.}\int_{\pi}^{(2n+1)\pi}\left[\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y} - (a-1)\cos y\right]\frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\log(2n+1),$$

čímž výraz

$$\log\Gamma(a) = \lim_{n=\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos 2ka\pi - 1}{2k} - A - B\right\}$$

obdrží tvar

$$\log\Gamma(a) = -A - \text{val. princ.}\int_{\pi}^{\infty}\left[\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y} - (a-1)\cos y\right]\frac{dy}{y} + \lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{2}\log(2n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right\} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2ka\pi}{2k},$$

při čemž se předpokládá, že a není celistvé.

XIV.

Dosadímeli sem hodnotu

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{2}\log(2n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right\}=\frac{\log 2+\Gamma'(1)}{2},$$

máme

$$\log\Gamma(a)=\frac{1}{2}\Big(\log 2+\Gamma'(1)\Big)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2ka\pi}{2k}$$

$$-\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y}-\frac{1}{2}-(a-1)\cos y\right]\frac{dy}{y}$$

$$-\text{val. princ.}\int_{\pi}^{\infty}\left[\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y}-(a-1)\cos y\right]\frac{dy}{y}.$$

V případě $0<a<1$ jest však

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2ka\pi}{2k}=-\log\sqrt{\sin a\pi}-\frac{1}{2}\log 2,$$

a tedy

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}\log\Gamma(a)&=\frac{1}{2}\Gamma'(1)-\log\sqrt{\sin a\pi}\\&-\int_0^{\pi}\left[\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y}-\frac{1}{2}-(a-1)\cos y\right]\frac{dy}{y}\\&-\text{val. princ.}\int_{\pi}^{\infty}\left[\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y}-(a-1)\cos y\right]\frac{dy}{y}.\end{aligned}\right.$$

Dosadímeli sem zvláště $a=\frac{1}{2}$, vyjde

$$(3)\qquad \log\pi-\Gamma'(1)=\int_0^{\pi}(1-\cos y)\frac{dy}{y}-\text{val. princ.}\int_{\pi}^{\infty}\cos y\,\frac{dy}{y},$$

a odečtemeli poloviční hodnotu obou stran od příslušných stran rovnice předešlé, obdržíme

$$(4)\quad \log\left\{\Gamma(a)\sqrt{\frac{\sin a\pi}{\pi}}\right\}=\text{val. princ.}\int_0^{\infty}\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)\cos y-\frac{\sin(a-\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{1}{2}y}\right].$$

Při vzorcích (2) a (4) musí býti $0<a<1$.

Porovnámeli u (c) části pomyslné, obdržíme

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2ka\pi}{2k}=-\text{val. princ.}\int_0^{\infty}\left[\frac{\cos(a-\frac{1}{2})y-\cos\frac{1}{2}y}{2\sin\frac{1}{2}y}+(a-1)\sin ay\right]\frac{dy}{y}.$$

5*

Pro $0 < a < 1$ máme však

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2ka\pi}{k} = \pi\left(\frac{1}{2} - a\right),$$

$$\int_0^{\infty} \sin ay \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2},$$

a tedy plyne

$$\text{val. princ.} \int_0^{\infty} \frac{\cos(a - \frac{1}{2})y - \cos\frac{1}{2}y}{2\sin\frac{1}{2}y} \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{4}.$$

Máme tedy rovnici platnou za podmínek $0 < a < 1$:

$$\text{(5)} \qquad \text{val. princ.} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \,.\, \sin(1 - a)x}{\sin x} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

Volímeli zde $a = \frac{1}{2}$, obdržíme

$$\text{val. princ.} \int_0^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}$$

čili

$$\text{(6)} \qquad \text{val. princ.} \int_0^{\infty} \tan x\pi \,.\, \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Rozložímeli tento integrál v části

$$\sum_0^{\infty} \text{val. princ.} \int_k^{k+1} \tan x\pi \frac{dx}{x},$$

obdržíme

$$\text{val. princ.} \int_0^1 \tan x\pi \, dx \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

poněvadž

$$\text{val. princ.} \int_0^1 \tan x\pi \, dx = 0.$$

Následovně máme na místě (6)

$$\text{(6}^{\text{a}}\text{)} \qquad \text{val. princ.} \int_0^1 \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \tan x\pi \, dx = -\frac{\pi}{2};$$

výsledek ten lze přímo verifikovati takto: Znamenámeli

$$J = \text{val. princ.} \int_0^1 \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \tan x\pi\, dx,$$

obdržíme substitucí $1 - x$ za x

$$J = -\text{val. princ.} \int_0^1 \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} \operatorname{tg} x\pi\, dx;$$

sečtením obou tvarů vzhledem ke známé relaci

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = -\pi \cot x\pi$$

plyne

$$2J = -\pi \int_0^1 dx = -\pi, \quad \text{tedy} \quad J = -\frac{\pi}{2}.$$