Matyáš Lerch

Über eine Formel aus der Théorie der Gammafunction

Monatsch. Math. Phys. 8 (1897), 187–192

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501506

Über eine Formel aus der Theorie der Gammafunction.

Von **M. Lerch** in Freiburg (Schweiz).

Die mir von Herrn Hermite gestellte Aufgabe, die Differentiation der Kummer'schen Reihe für $\log \Gamma(a)$ auszuführen, habe ich in einem böhmischen Aufsatze, welcher die Nr. 28 des III. Jahrgangs [1]) der Abhandlungen der böhmischen Kaiser Franz Josef-Akademie ausmacht, dadurch gelöst, dass ich aus der unter den Bedingungen $0 < x < 1$, $0 < v < 1$ stattfindenden Relation

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi i(v+n)}}{v+n} = \\ = -\log 2\pi x + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \frac{\pi i}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{x+k}{k},$$

in welcher in der Summe rechts das sinnstörende Glied $k = 0$ auszuschließen ist, durch eine nicht gerade einfache Betrachtung den Schluss folgerte, dass der Ausdruck

$$\left[\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \Gamma'(1)\right](e^{2v\pi i} - 1) + \left(\log 2\pi + \frac{\pi i}{2}\right) e^{2v\pi i} + \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{(2k+2)v\pi i} \log \frac{k+1}{k}, \qquad (k = 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

in den Grenzen $0 < v < 1$ von v nicht abhängt, und denselben durch Annahme von $v = \frac{1}{2}$ bestimmte.

Das auf diesem Wege gewonnene Resultat kann nun, wie ich neulich bemerkt habe, aus der Relation (1) einfach dadurch

[1]) Eine französische Übersetzung der diese Frage betreffenden Stelle ist kürzlich im Bulletin International derselben Akademie vom Jahre 1895 erschienen.

abgeleitet werden, dass man in derselben $x = \frac{1}{2}$ setzt, beiderseits mit $e^{v\pi i}$ multipliciert und in der so resultierenden Gleichung

$$
(a) \qquad \begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{v+n} + e^{v\pi i}\left[\log \pi - \Gamma'(1) + \frac{\pi i}{2} + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right] = \\
&= -\sum_k{}' e^{(2k+1)v\pi i} \log \frac{2k+1}{k}, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)
\end{aligned}
$$

die imaginären Theile gleichsetzt. Dadurch folgt nämlich zunächst

$$
\begin{aligned}
&\sin v\pi \left[\log \pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right] + \frac{\pi}{2} \cos v\pi = \\
&= -\sum_k{}' \sin(2k+1)v\pi \,.\, \log \frac{2k+1}{2k}, \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite kann offenbar in der Form

$$
-\sum_{k=1}^{\infty} \sin(2k+1)v\pi \,.\, \log \frac{2k+1}{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sin(2k-1)v\pi \,.\, \log \frac{2k-1}{2k}
$$

geschrieben werden, und wenn man vom zweiten Theile das Glied $k = 1$ abtrennt, dessen Wert $-\sin v\pi \,.\, \log 2$ lautet, so lässt sich der Rest mit der ersten Reihe vereinigen und es folgt das Resultat

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
&\sin v\pi \left[\log 2\pi - \Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right] + \frac{\pi}{2} \cos v\pi = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k}{k+1} \cdot \sin(2k+1)v\pi.
\end{aligned}
$$

Versucht man, aus dieser Formel die Kummer'sche Entwickelung durch Integration abzuleiten, so wird man durch eine leicht sich bietende Verallgemeinerung zur Lösung der Differentiationsfrage einer ganzen Classe von trigonometrischen Reihen, bei welchen die gewöhnliche Regel nicht anwendbar ist, geführt.

Diesbezügliche Resultate sind in einem meiner Briefe an Herrn Hermite (Comptes Rendus, Herbst 1894) und im letzten (XII, 1895) Bande der Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure publiciert, und ich begnüge mich bloß eines derselben herzusetzen:

Ist

$$
f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi, \quad (0 < x < 1),
$$

eine convergente Reihe, so wird die Ableitung $f'(x)$ ihrer Summe durch die Formel

$$f'(x)\cdot\frac{\sin x\pi}{\pi}=-c_1\sin x\pi+\sum_{\nu=1}^{\infty}(c_\nu-c_{\nu+1})\sin(2\nu+1)x\pi$$

bestimmt, falls nur die Reihe rechts in der Umgebung der betrachteten Stelle gleichmäßig convergiert und die zur Convergenz von $f(x)$ nothwendige Bedingung $\lim\limits_{n=\infty}\frac{c_n}{n}=0$ erfüllt ist. —

Multipliciert man die beiden Seiten von (2) mit $2\sin v\pi$, so folgt zunächst

$$2\sin^2 v\pi\left[\log 2\pi-\Gamma'(1)+\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right]+\frac{\pi}{2}\sin 2v\pi=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k}{k+1}\left[\cos 2kv\pi-\cos(2k+2)v\pi\right];$$

die rechte Seite kann nun wie folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k}{k+1}\cos 2kv\pi-\sum_{k=2}^{\infty}\log\frac{k-1}{k}\cos 2kv\pi$$

geschrieben werden, und nach Abtrennung des ersten Gliedes im ersten Theile ergibt sich der Ausdruck

$$-\log 2\cdot\cos 2v\pi+\sum_{k=2}^{\infty}\log\frac{k^2}{k^2-1}\cos 2kv\pi,$$

und wir erhalten somit folgende Darstellung

$$\log 2+\frac{\pi}{2}\sin 2v\pi+2\sin^2 v\pi\left[\log\pi-\Gamma'(1)+\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right]=$$
$$=-\sum_{k=2}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\cos 2kv\pi, \tag{3}$$

welche unter der Bedingung $0\leqq v\leqq 1$ gültig ist, während die Gleichung (2) die Bedingung $0<v<1$ erfordert.

Dies vorausgeschickt, benutzen wir die aus Elementen bekannte Formel

$$\int_0^\infty\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}\,dx=\log\frac{b}{a},$$

um die Darstellung

$$-\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\int\limits_0^\infty e^{-k^2 x\pi}\,\frac{e^{x\pi}-1}{x}\,dx$$

zu erschließen. Aus derselben ergibt sich, wenn man von der sonst ohne Weiteres nicht selbstverständlichen Identität

$$\sum_{k=2}^{\infty}\cos 2kv\pi\cdot\int\limits_0^\infty e^{-k^2x\pi}\,\frac{e^{x\pi}-1}{x}\,dx=$$

$$=\int\limits_0^\infty\frac{e^{x\pi}-1}{x}\,dx\sum_{k=2}^{\infty}\cos 2kv\pi\cdot e^{-k^2x\pi}$$

Gebrauch macht, folgende Gleichung

$$\int\limits_0^\infty[\vartheta_3(v\,|\,ix)-1-2\cos 2v\pi e^{-\pi x}]\,\frac{e^{x\pi}-1}{x}\,dx= \tag{4}$$

$$=2\log 2+\pi\sin 2v\pi+4\sin^2 v\pi\left[\log\pi-\Gamma'(1)+\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\right].$$

Diese Darstellung ist unter der Voraussetzung eines reellen und echt gebrochenen positiven v abgeleitet worden; es handelt sich darum, sich von deren Giltigkeit für complexe v zu überzeugen und das Existenzgebiet dieser Darstellung festzustellen.

Zu dem Zwecke betrachten wir die Function unter dem Integralzeichen. Weil dieselbe innerhalb des Integrationsgebietes überall endlich und stetig verläuft, so braucht man nur ihr Verhalten in der Nähe der Stelle $x=0$ und für unendlich große x zu untersuchen.

Für unendlich große x ist der Integrand bei allen complexen v eine unendlich kleine Größe und zwar in einem zur Integrierbarkeit hinreichenden Grade. Somit ist für die Existenz des Integrals (4) lediglich das Verhalten des Integrands für unendlich kleine x maßgebend und entscheidend. Der Wertverlauf der betrachteten Function für unendlich kleine Argumente wird am deutlichsten durch die Transformationsformel

$$\vartheta_3(v\,|\,ix)=\sqrt{\frac{1}{x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{x}(v+n)^2} \tag{b}$$

zu Tage treten. Es werde die Gesammtheit der Quadrate, welche aus dem Fundamentalgebiet $\left(0, \frac{1-i}{2}, 1, \frac{1+i}{2}\right)$ durch Verschiebungen um ganzzahlige Strecken in der Richtung der reellen Axe entstehen, kurz als Gebiet $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Alsdann ist leicht zu sehen, dass wenn der die Größe v darstellende Punkt außerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ gelegen ist, immer eine endliche Anzahl von Gliedern der Reihe (b) [auch auf der rechten Seite] für $x=0$ unendlich groß werden, u. zw. in einem Grade, dass die Function nicht mehr integrabel wird. Findet sich dagegen der Punkt v innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$, so bleiben alle Glieder von (b) für $x=0$ unendlich klein und das Integral existiert.

Das Integral (4) existiert somit nur für diejenigen Punkte v, welche innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ gelegen sind; weil aber dieses Gebiet aus lauter getrennt liegenden Quadraten besteht, so dass ein stetiger Übergang unter ihnen nicht vorhanden ist, so wird die Gültigkeit der Formel (4) auf dasjenige dieser Quadrate gebunden, welches die Strecke $0<v<1$ enthält, d. h. auf das Fundamentalgebiet.

„Somit besteht die Formel (4) nur solange v innerhalb des durch die Ecken $0, \frac{1-i}{2}, 1, \frac{1+i}{2}$ bestimmten Quadrats verläuft."

Es werde nun v reell und zwar $0<v<1$ angenommen, und der Ausdruck auf der rechten Seite von (4) mit $\Phi(v)$ bezeichnet. Ist alsdann n eine positive ganze Zahl, so ergibt sich mit Hilfe der Gleichung (4)

$$\frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\Phi\left(\frac{v+\alpha}{n}\right)=\int_0^{\infty}\left[\vartheta_3(v\,|\,n^2 i x)-1\right]\frac{e^{x\pi}-1}{x}\,dx,$$

und „es folgt hieraus, dass das Integral

$$G(v,\gamma)=\int_0^{\infty}\left[\vartheta_3(v\,|\,ix)-1\right]\frac{e^{\gamma x\pi}-1}{x}\,dx \tag{5}$$

sich immer auf Gammafunctionen zurückführen lässt, wenn das Argument γ reciproker Wert einer Quadratzahl ist"; und zwar wird der betreffende Ausdruck im Falle $\gamma=\frac{1}{n^2}$ der folgende sein:

$$\frac{1}{n}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\Phi\left(\frac{v+\alpha}{n}\right).$$

Differentiiert man zweimal den Ausdruck (5) nach v, so folgt

$$G''(v,\gamma)=\int_0^\infty \vartheta_3''(v\,|\,ix)\,\frac{e^{\gamma\pi x}-1}{x}\,dx,$$

und wenn man die Gleichung

$$\vartheta_3''(v\,|\,ix)=4\,\frac{\partial}{\partial x}\,\vartheta_3(v\,|\,ix)$$

benutzt und theilweise integriert,

$$G''(v,\gamma)=4\,\Big|_0^\infty\,[\vartheta_3(v\,|\,ix)-1]\,\frac{e^{\gamma x\pi}-1}{x}\;-$$

$$-\,4\int_0^\infty[\vartheta_3(v\,|\,ix)-1]\,d\,\frac{e^{\gamma x\pi}-1}{x},$$

d. h.

$$G''(v,\gamma)=-\,4\gamma\pi-4\int_0^\infty[\vartheta_3(v\,|\,ix)-1]\,d\,\frac{e^{\gamma x\pi}-1}{x}.$$