Matyáš Lerch
Rychle konvergentní vyjádření některých limit

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 8 (1899), č. 36, 1–9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501526

Rychle konvergentní vyjádření některých limit.

Sdílí

M. Lerch,
professor na universitě ve Fribourgu švýcarském.

(Předloženo dne 20. května 1899.)

Ve článku IX. své rozpravy *Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených* *) uvedl jsem v souvislost s jistými řadami rychlé konvergence dva integrály, a sice

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned} 4\int_0^\infty \frac{e^{2\pi\sqrt{u+x^2}}\cos 2w\pi - 1}{e^{4\pi\sqrt{u+x^2}} - 2e^{2\pi\sqrt{u+x^2}}\cos 2w\pi + 1}\,\frac{dx}{\sqrt{u+x^2}} \\ = \log\frac{u}{4} + \psi(w,u), \end{aligned}\right.
$$

dále

$$
(2)\quad \chi(w,u) = \int_0^\infty \frac{e^{2\pi\sqrt{u+x^2}}\cos 2w\pi - 1}{e^{4\pi\sqrt{u+x^2}} - 2e^{2\pi\sqrt{u+x^2}}\cos 2w\pi + 1}\,\frac{x^2\,dx}{\sqrt{u+x^2}}.
$$

Souvislost ta záležela v invariantivní povaze výrazů, a v nejjednodušším případě zněla tak, že výraz

$$
\log\frac{c}{\Delta} + \psi\left(w_1, \frac{cu}{\Delta}\right)
$$

$$
+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_1+m)^2 + \frac{cu}{\Delta}}} \left(\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{c}(bw_1 + cw_2 + bm) + \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta}}} - 1} \right.
$$

$$
\left. + \frac{1}{e^{-\frac{2\pi i}{c}(bw_1 + cw_2 + bm) + \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta}}} - 1} \right)
$$

---

*) Rozprav II. třídy č. Akademie ročník IV., číslo 1., str. 35 a násl.

a pak výraz

$$\frac{8\pi\sqrt{\Delta}}{c}\chi\left(w_1, \frac{cu}{\Delta}\right)$$

$$-\log\prod_{m=-\infty}^{\infty}\left(1-e^{\frac{2\pi i}{c}(bw_1+cw_2+bm)-\frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta}}}\right)$$

$$.\left(1-e^{-\frac{2\pi i}{c}(bw_1+cw_2+bm)-\frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{c}\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{cu}{\Delta}}}\right)$$

zůstane ve své hodnotě nezměněn, vymění-li se litery a a c, a současně w_1 a w_2. Při tom a, b, c byly veličiny realné, a, c mimo to kladné, podobně výraz $\Delta = ac - b^2$.

Těchto vlastností využitkujeme nyní pro odvození vzorců sloužících k rychlému vypočtení hodnot integrálů ψ a χ. Položíme $b = 0$, takže bude $\Delta = ac$, a vypíšeme rovnice vyjadřující vlastnost právě vyslovenou; tak obdržíme vztah

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\log\frac{1}{a}+\psi\left(w_1,\frac{u}{a}\right)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{u}{a}}}\left(\frac{1}{e^{2w_2\pi i+2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{u}{a}}}-1}\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{e^{-2w_2\pi i+2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{u}{a}}}-1}\right)\\&=\log\frac{1}{c}+\psi\left(w_2,\frac{u}{c}\right)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(w_2+m)^2+\frac{u}{c}}}\left(\frac{1}{e^{2w_1\pi i+2\pi\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{(w_2+m)^2+\frac{u}{c}}}-1}\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{e^{-2w_1\pi i+2\pi\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{(w_2+m)^2+\frac{u}{c}}}-1}\right),\end{aligned}\right.$$

a dále

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}&8\pi\sqrt{\frac{a}{c}}\chi\left(w_1,\frac{u}{a}\right)\\&-\log\prod_{m=-\infty}^{\infty}\left(1-2e^{-2\pi\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{u}{a}}}\cos 2w_2\pi+e^{-4\pi\sqrt{\frac{a}{c}}\sqrt{(w_1+m)^2+\frac{u}{a}}}\right)\\&=8\pi\sqrt{\frac{c}{a}}\chi\left(w_2,\frac{u}{c}\right)\\&-\log\prod_{m=-\infty}^{\infty}\left(1-2e^{-2\pi\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{(w_2+m)^2+\frac{u}{c}}}\cos 2w_1\pi+e^{-4\pi\sqrt{\frac{c}{a}}\sqrt{(w_2+m)^2+\frac{u}{c}}}\right)\end{aligned}\right.$$

kteréžto rovnice řeší daný problém. Jest však důležito, aby pravá podstata vyšetřovaných výrazů vynikla, převésti integrály na tvar řad neb limit, třeba jen zvolna konvergentních.

O funkci $\psi(w, u)$ toho docíleno již v citované rozpravě, kde bylo dokázáno, že

$$\psi(w,u)=\lim_{n=\infty}\left(\sum_{\nu=-n}^{n}\frac{1}{\sqrt{(w+\nu)^2+u}}-2\log n\right). \tag{5}$$

Abychom podobnou otázku řešili pro druhý integrál, uveďme nejprvé oba integrály na jednodušší tvar tím způsobem, že zavedeme integrační proměnnou

$$t=\sqrt{x^2+u}, \text{ tedy } x=\sqrt{t^2-u},\quad dx=\frac{tdt}{\sqrt{t^2-u}}.$$

Tím způsobem obdržíme nejprvé

$$\psi(w,u)=\log\frac{4}{u}+4\int_{\sqrt{u}}^{\infty}\frac{e^{2\pi t}\cos 2w\pi-1}{e^{4\pi t}-2e^{2\pi t}\cos 2w\pi+1}\frac{dt}{\sqrt{t^2-u}}$$

čili přehledněji vyjádřeno

$$\psi(w,u)+\log\frac{u}{4}=2\int_{\sqrt{u}}^{\infty}\frac{\cos 2w\pi-e^{-2\pi t}}{\cos\text{hyp}\, 2\pi t-\cos 2w\pi}\cdot\frac{dt}{\sqrt{t^2-u}}. \tag{6}$$

Podobně

$$\chi(w,u)=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{u}}^{\infty}\frac{\cos 2w\pi-e^{-2\pi t}}{\cos\text{hyp}\, 2\pi t-\cos 2w\pi}\cdot\sqrt{t^2-u}\,dt. \tag{7}$$

Differencujeme-li výraz (7) vůči u, vyjde

$$-4\chi'(w,u)=\int_{\sqrt{u}}^{\infty}\frac{\cos 2w\pi-e^{-2\pi t}}{\cos\text{hyp}\, 2\pi t-\cos 2w\pi}\frac{dt}{\sqrt{t^2-u}},$$

kde psáno $\chi'(w,u)$ za $\frac{d\chi}{du}$. Porovnáme-li s (6), plyne

$$8\chi'(w,u)+\psi(w,u)+\log\frac{u}{4}=0,$$

takže vyjde

$$8\chi'(w,u)=2\log 2-\log u+\lim_{n=\infty}\left(2\log n-\sum_{\nu=-n}^{n}\frac{1}{\sqrt{(w+\nu)^2+u}}\right).$$

Integrujeme-li dle u v mezích z_0 a z, obdržíme

$$8\chi(w,z)-8\chi(w,z_0)=(1+2\log 2)(z-z_0)-z\log z+z_0\log z_0$$
$$+\lim_{n=\infty}\left(2(z-z_0)\log n-2\sum_{-n}^{n}\sqrt{(w+\nu)^2+z}+2\sum_{-n}^{n}\sqrt{(w+\nu)^2+z_0}\right)$$

čili

$$4\chi(w,z)-4\chi(w,z_0)=\left(\frac{1}{2}+\log 2\right)(z-z_0)-\frac{1}{2}z\log z+\frac{1}{2}z_0\log z_0$$
$$+\lim_{n=\infty}\left(z\log n-z_0\log n-\sum_{-n}^{n}\sqrt{(w+\nu)^2+z}+\sum_{-n}^{n}\sqrt{(w+\nu)^2+z_0}\right).$$

V tomto vzorci přejděme k mezím pro $z_0=0$, při čemž chceme předpokládati $0<w<1$; i obdržíme

$$4\chi(w,z)-4\chi(w,0)=\left(\frac{1}{2}+\log 2\right)z-\frac{1}{2}z\log z$$
$$+\lim_{n=\infty}\left(z\log n-\sum_{-n}^{n}\sqrt{(w+\nu)^2+z}+w+n(n+1)\right).$$

Při tom jsme užili okolností, že

$$\sqrt{(w+\nu)^2}=\begin{cases} w+\nu & \text{pro } \nu=0,1,\ldots-n \\ -\nu-w & \text{»} \quad \nu=-1,-2,\ldots-n \end{cases}$$

a tedy

$$\sum_{0}^{n}\sqrt{(w+\nu)^2}=(n+1)w+\frac{n(n+1)}{2},$$
$$\sum_{-n}^{-1}\sqrt{(w+\nu)^2}=-nw+\frac{n(n+1)}{2}$$

Hodnotu $\chi(w,0)$ určíme přímo z integrálu (7); a sice

$$\chi(w,0)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos 2w\pi-e^{-2\pi t}}{\cos\operatorname{hyp} 2\pi t-\cos 2w\pi}t\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{t}{e^{2t\pi+2w\pi i}-1}+\frac{t}{e^{2t\pi-2w\pi i}-1}\right)dt$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2nw\pi\int_0^\infty e^{-2nt\pi}t\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2 n w \pi}{4 n^2 \pi^2} = \frac{1}{4}\left(w^2 - w + \frac{1}{6}\right).$$

Vložíme-li tuto hodnotu

$$4 \chi (w, 0) = w^2 - w + \frac{1}{6} \tag{8}$$

do posledního vzorce, obdržíme

$$\left.\begin{aligned} & 4 \chi (w, z) = \left(\frac{1}{2} + \log 2\right) z - \frac{1}{2} z \log z + w^2 + \frac{1}{6} \\ & + \lim_{n = \infty} \left(z \log n + n^2 + n - \sum_{\nu = -n}^{n} \sqrt{(w + \nu)^2 + z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Píšeme-li v rovnici (3) $a u$ na místě u, a klademe-li $\frac{a}{c} = t^2$, obdržíme

$$\left.\begin{aligned} & \psi (w_1, u) - \psi (w_2, t^2 u) = \log t^2 \\ & - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_1 + m)^2 + u}} \frac{\cos 2 w_2 \pi - e^{-2 \pi t \sqrt{(w_1 + m)^2 + u}}}{\cos\operatorname{hyp}\left(2 \pi t \sqrt{(w_1 + m)^2 + u}\right) - \cos 2 w_2 \pi} \\ & + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_2 + m)^2 + t^2 u}} \frac{\cos 2 w_1 \pi - e^{-\frac{2\pi}{t} \sqrt{(w_2 + m)^2 + t^2 u}}}{\cos\operatorname{hyp}\left(\frac{2 \pi}{t} \sqrt{(w_2 + m)^2 + t^2 u}\right) - \cos 2 w_1 \pi}, \end{aligned}\right\} \tag{3*}$$

kterýžto vzorec poskytuje pohodlný prostředek k číselnému stanovení funkce $\psi (w, u)$, když se za w_2 a $t^2 u$ zvolí vhodné konstanty. V mnohých případech, jako na příklad při stanovení Riemannova potenciálu*)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2 m \beta - \alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2 m \beta + \alpha)^2}}\right),$$

stačí znáti rozdíly tvaru $\psi (w_1, u) - \psi (w_2, u)$, pro něž se obdrží ze vzorce (3*) rozvoj zvlášť rychle konvergentní, ano tu $t = 1$.**)

Podobným způsobem plyne z rovnice (4)

$$\left.\begin{aligned} & 8 \pi t \chi (w_1, u) - \frac{8 \pi}{t} \chi (w_2, t^2 u) \\ & = \log \prod_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1 - 2 e^{-2 \pi t \sqrt{(w_1 + m)^2 + u}} \cos 2 w_2 \pi + e^{-4 \pi t \sqrt{(w_1 + m)^2 + u}}}{1 - 2 e^{-\frac{2 \pi}{t} \sqrt{(w_2 + m)^2 + t^2 u}} \cos 2 w_1 \pi + e^{-\frac{4 \pi}{t} \sqrt{(w_2 + m)^2 + t^2 u}}}. \end{aligned}\right\} \tag{4*}$$

---

*) Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe (Poggendorffa Annalen der Physik u. Chemie, sv. 95; 1855, též v sebraných spisech R., druhé vyd. str. 57).

**) Jiné a přímé odvození z podobného pramene vyjde ve Věstníku (Theorie funkce gamma).

Volíme-li $t = 1$, a nahradíme-li výrazy χ jich hodnotami na základě vzorce (9) vyjádřenými, obdržíme

$$(10)\left\{\begin{aligned}&\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=-n}^{n}\left(\sqrt{(w_1+\nu)^2+u}-\sqrt{(w_2+\nu)^2+u}\right)\\&=w_1^{\,2}-w_2^{\,2}-\frac{1}{2\pi}\log\prod_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1-2e^{-2\pi\sqrt{(w_1+m)^2+u}}\cos 2w_2\pi+e^{-4\pi\sqrt{(w_1+m)^2+u}}}{1-2e^{-2\pi\sqrt{(w_2+m)^2+u}}\cos 2w_1\pi+e^{-4\pi\sqrt{(w_2+m)^2+u}}}\end{aligned}\right.$$

Abychom vypočetli limitu $(w = 0)$

$$4\chi(0,z)=\left(\frac{1}{2}+\log 2\right)z-\frac{1}{2}z\log z+\frac{1}{6}$$
$$+\lim_{n=\infty}\left(z\log n+n^2+n-\sum_{\nu=-n}^{n}\sqrt{\nu^2+z}\right)$$

aneb, což totéž jest, integrál

$$4\int_{\sqrt{z}}^{\infty}\frac{\sqrt{x^2-z}\,dx}{e^{2x\pi}-1},$$

potřebujeme znáti toliko konstantu

$$(11)\left\{\begin{aligned}A&=\frac{2}{3}+\log 2+\lim_{n=\infty}\left(n^2+n+\log n-\sum_{\nu=-n}^{n}\sqrt{\nu^2+1}\right)\\&=4\int_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{e^{2x\pi}-1}=0{,}399108\ldots\text{*)}\end{aligned}\right.$$

čili $A = 4\chi(0, 1)$. Podle rovnice (4*) pak obdržíme pro $u = 1$, $w_1 = w_2 = 0$

$$\chi(0,t^2)=\frac{1}{4}At^2-\frac{t}{4\pi}\log\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{-2\pi t\sqrt{m^2+1}}}{1-e^{-\frac{2\pi}{t}\sqrt{m^2+t^2}}}$$

čili

$$(12)\qquad 4\int_{t}^{\infty}\frac{\sqrt{x^2-t^2}}{e^{2x\pi}-1}dx=At^2-\frac{t}{\pi}\log P(t),$$

*) Opakování výpočtu obratnějším počtářem, disponujícím dobrými tabulkami, bylo by žádoucím.

kde psáno

$$(12^a) \qquad P(t) = \frac{1 - e^{-2\pi t}}{1 - e^{-2\pi}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1 - e^{-2\pi t \sqrt{m^2+1}}}{1 - e^{-2\pi \sqrt{1 + \frac{m^2}{t^2}}}} \right)^2 .$$

Poznamenání. Na různých místech, zejména pak v rozpravách Základové theorie Malmsténovských řad a Další studie v oboru Malmsténovských řad vytkl a zužitkoval jsem souvislosť funkce

$$R(w, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w + \nu)^s}$$

s theorií funkce gamma, jež vyjádřena rozvoji

$$R(w, s) = \frac{1}{s - 1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + A_1 (s - 1) + \ldots,$$

$$R(w, s) = \left(\frac{1}{2} - w \right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} s + \ldots .$$

Mám za svou povinnosť sděliti na tomto místě se čtenáři svých prací že tyto dvě věty základní byly již dříve známy, a sice obsažena prvá v publikaci pana Heřmana Kinkelina, professora na universitě Basilejské: »Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen, mit Anwendung auf die Zahlentheorie« (Programm der Gewerbeschule Basel 1861—1862)«, druhá věta pak zároveň s applikací na dovození řady Kummerovy přichází v rozpravě »Dr. Ernst Schröder, Eine Verallgemeinerung der Mac-Laurin'schen Summenformel nebst Beiträgen zur Kenntniss der Bernoullischen Function« (Zürich, Programm der Cantonsschule 1867).

Dodatek. Chceme ještě podati vysvětlení, jak lze docíliti číselné hodnoty konstanty A.

Jde nejprvé o limitu výrazu

$$B_n = n^2 + n + \log n - 1 - 2 \sum_{1}^{n} \sqrt{\nu^2 + 1},$$

jemuž udělíme tvar

$$B_n = n^2 + n + \log n - 1 - 2 \sum_{1}^{9} \sqrt{\nu^2 + 1} - 2 \sum_{10}^{n} \sqrt{\nu^2 + 1} .$$

Ježto dle věty binomialní

$$\sqrt{\nu^2 + 1} = \nu + \frac{1}{2\nu} - \frac{1}{2.4} \frac{1}{\nu^3} + \frac{1.3}{2.4.6} \frac{1}{\nu^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \frac{1}{\nu^7} \pm \ldots$$

obdržíme

$$\sum_{10}^{n}\sqrt{\nu^2+1}=\left(\frac{n^2+n}{2}-\frac{90}{2}\right)+\frac{1}{2}\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu}-\frac{1}{2}\sum_{1}^{9}\frac{1}{\nu}$$
$$-\frac{1}{8}\sum_{10}^{n}\frac{1}{\nu^3}+\frac{1}{16}\sum_{10}^{n}\frac{1}{\nu^5}-\frac{5}{128}\sum_{10}^{n}\frac{1}{\nu^7}\pm\ldots$$

dle čehož se jeví B_n ve tvaru

$$B_n=\left(\log n-\sum_{1}^{n}\frac{1}{\nu}\right)-1+90-2\sum_{1}^{9}\sqrt{\nu^2+1}+\sum_{1}^{9}\frac{1}{\nu}$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{10}^{n}\frac{1}{\nu^3}-\frac{1}{8}\sum_{10}^{n}\frac{1}{\nu^5}+\frac{5}{64}\sum_{10}^{n}\frac{1}{\nu^7}\mp\ldots$$

Přejdeme-li k limitě pro $n=\infty$ znamenajíce literou C konstantu Eulerovu

$$C=0{,}5772156649\ldots$$

a kladouce

$$R_s=\frac{1}{10^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{12^s}+\frac{1}{13^s}+\ldots,$$

obdržíme

$$(*)\qquad A=\frac{2}{3}+\log 2-C-1+90-2\sum_{1}^{9}\sqrt{\nu^2+1}+\sum_{1}^{9}\frac{1}{\nu}$$
$$+\frac{1}{4}R_3-\frac{1}{8}R_5+\frac{5}{64}R_7\mp\ldots$$

Veličiny R_3, R_5, R_7 lze stanoviti pomocí řady semikonvergentní pro funkci

$$R(a,s)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{(a+\mu)^s},$$

která zní (Rozpravy č. A. ročník III., číslo 28.)

$$R(a,s)=\frac{1}{(s-1)\,a^{s-1}}+\frac{1}{2\,a^s}+\frac{1}{12}\binom{s}{1}\frac{1}{a^{s+1}}-$$
$$-\frac{1}{30}\binom{s+2}{3}\frac{1}{a^{s+3}}+\frac{1}{84}\binom{s+4}{5}\frac{1}{a^{s+5}}-\ldots;$$

a sice bude zde

$$a=10,\; R(a,s)=R_s.$$

Podle tohoto vzorce jsme vypočetli

$$R_3 = 0{,}0055246692$$
$$R_5 = 0{,}0000304051$$
$$R_7 = 0{,}0000002215$$

Součty $\sum\limits_1^9 \frac{1}{\nu}$ a $\sum\limits_1^9 \sqrt{\nu^2+1}$ dlužno počítati přímo, což jest při celém výpočtu nejzdlouhavější.