Matyáš Lerch

Remarque sur la série de Fourier

Bull. Sci. Math., II. Sér. 24 (1900), 102–112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501541

Science nouvelle que l'auteur a, sinon créée, du moins fondée à nouveau, développée dans un enchaînement rigoureux et exposée dans un ordre systématique. D'une part, la Logique des relations est définitivement constituée sous la forme d'une Science mathématique, et dotée d'une méthode purement analytique. D'autre part, l'Algèbre des relations rejoint et enveloppe les branches proprement logiques des Mathématiques (théories des ensembles, des substitutions, des fonctions). Elle comble donc la lacune qui existait entre la Logique et la Mathématique; elle retrouve et justifie les fondements logiques de celle-ci, et elle en fait une branche ou un prolongement de la Logique elle-même. Elle rattache les principes propres des Mathématiques aux lois générales de la pensée, et contribue ainsi à réaliser l'unité philosophique de la Science.

LOUIS COUTURAT.

MÉLANGES.

REMARQUE SUR LA SÉRIE DE FOURIER;

PAR M. LERCH.

1. Soit $f(x)$ une fonction finie et intégrable dans l'intervalle de zéro à un, et développable par la série de Fourier

$$(1)\qquad f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos 2\nu x\pi + b_\nu \sin 2\nu x\pi).$$

En introduisant les quantités a_ν et b_ν avec des indices négatifs par les équations $a_{-\nu} = a_\nu$, $b_{-\nu} = -b_\nu$, $b_0 = 0$, cette formule pourra s'écrire comme il suit

$$(1^a)\qquad f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{n} c_\nu e^{2\nu x\pi i}, \qquad \text{où} \qquad c_\nu = \frac{a_\nu - b_\nu i}{2}.$$

Il n'en résulte pas que ce résultat puisse s'écrire de la manière suivante :

$$(2)\qquad f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}, \qquad (0 < x < 1);$$

car l'existence de cette série implique la convergence des deux suivantes :

$$\sum_{0}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i}, \qquad \sum_{-\infty}^{-1} c_\nu e^{2\nu x\pi i};$$

la partie réelle de la première revient, à une constante près, à la moitié de la série (1), mais elle présente aussi une partie imaginaire

$$(3)\qquad \frac{i}{2}\sum_{0}^{\infty}(a_\nu \sin 2\nu x\pi - b_\nu \cos 2\nu x\pi)$$

qui est étrangère à la série de Fourier et dont il n'est jamais question dans les recherches de la convergence de la série (1).

La série (2), dont les coefficients sont donnés par la formule

$$(4)\qquad c_\nu = \int_0^1 f(z)\, e^{-2\nu z\pi i}\, dz,$$

est donc une chose de nouveau, différente de la série de Fourier, et on peut l'appeler la *série de Laurent* relative à des fonctions d'une variable réelle. Nous verrons que l'existence de la série de Laurent impose à la fonction $f(x)$ des conditions plus spéciales que celle de la série de Fourier, de sorte que, logiquement, il faut admettre l'existence de fonctions développables par la série de Fourier et non plus par la série de Laurent; il serait du plus haut intérêt de posséder des exemples de telles fonctions. Mais si la série de Laurent converge, ses parties imaginaires se détruisent, et elle devient égale à la série de Fourier.

Pour établir la convergence de la série (2), dont les coefficients sont donnés par la formule (4), il suffit d'établir la convergence de la série suivante :

$$\sum_{0}^{\infty} c_\nu e^{2\nu x\pi i},$$

car, à une constante près, le reste est une quantité conjuguée de celle-ci.

Considérons à cet effet l'expression

$$(5)\qquad S_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{2\nu x\pi i},$$

on trouve

$$(5^a)\quad \left\{ \begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)\frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi + \sin(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz \\ &+ \frac{i}{2}\int_0^1 f(z)\frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi - \cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz. \end{aligned} \right.$$

La limite de la partie réelle du second membre pour n infini a été l'objet de recherches importantes, mais à notre connaissance l'étude de la partie imaginaire n'a pas été abordée jusqu'ici.

Je veux d'abord établir que cette partie imaginaire n'aura une limite que lorsque la fonction $f(z)$ sera continue au point x. Soit, en effet, $x = c$ une quantité contenue entre zéro et un, et prenons pour $f(z)$ la valeur zéro, lorsque $0 < z < c$, et la valeur un lorsque $c < z < 1$. Alors l'intégrale qui multiplie $\frac{i}{2}$ dans notre formule deviendra

$$\int_c^1 \frac{\cos(2n+1)(z-c)\pi - \cos(z-c)\pi}{\sin(z-c)\pi}\,dz = \int_0^{1-c} \frac{\cos(2n+1)z\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz$$

et l'identité facile à vérifier

$$\frac{\cos(2n+1)z\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi} = -2\sum_{\nu=1}^{n} \sin 2\nu z\pi$$

donne

$$\int_0^a \frac{\cos(2n+1)z\pi - \cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\cos 2\nu a\pi - 1}{\nu\pi},$$

quantité qui, pour $n = \infty$, tend vers moins infini.

2. Posons maintenant, pour abréger le langage,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} T &= \int_0^1 f(z)\frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz,\\ U &= \int_0^1 f(z)\frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi-\cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz,\end{aligned}\right.$$

et commençons par évaluer ces intégrales dans le cas de $f(x)=1$. Dans ce cas la formule (2) subsiste, car on a $c_0=1$, $c_\nu=0$ pour $\nu \gtrless 0$, et en séparant dans la formule (5^a) les parties réelles des parties imaginaires, il s'ensuit

$$\int_0^1 \frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi+\sin(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz=2,$$

$$\int_0^1 \frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi-\cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz=0,$$

d'où l'on a

$$(6^a)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz=1,\\ &\int_0^1 \frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi-\cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi}\,dz=0.\end{aligned}\right.$$

Écrivons maintenant les formules (6) sous la forme

$$(6^*)\quad \left\{\begin{aligned} T &= \int_{-x}^{1-x} f(x+z)\frac{\sin(2n+1)z\pi}{\sin z\pi}\,dz,\\ U &= \int_{-x}^{1-x} f(x+z)\frac{\cos(2n+1)z\pi-\cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz,\end{aligned}\right.$$

posons $f(x+z)-f(x)=\varphi(z)$ et employons les formules (6^a); il vient

$$(7)\qquad T=\overline{T}+f(x),\qquad U=\overline{U},$$

en posant pour abréger

$$(7^a)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{T} &= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\sin(2n+1)z\pi}{\sin z\pi}\,dz,\\ \overline{U} &= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\cos(2n+1)z\pi-\cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz.\end{aligned}\right.$$

Si la fonction $f(z)$ était continue au point x, la fonction $\varphi(z)$ sera continue au point $z=0$ et y aura la valeur nulle.

J'écrirai maintenant w au lieu de $2n+1$, et je ferai usage de la circonstance que l'on a

$$\frac{1}{\sin z\pi} = \frac{1}{z\pi} + \mathfrak{P}(z),$$

en désignant par $\mathfrak{P}(z)$ une fonction qui reste finie et continue dans chaque intervalle de la forme $(-1+\varepsilon\ldots 1-\varepsilon)$; on a évidemment

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{U}} &= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\cos wz\pi - 1}{\sin z\pi}\,dz + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{1-\cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz \\
&= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\cos wz\pi - 1}{z\pi}\,dz + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)(\cos wz\pi - 1)\,\mathfrak{P}(z)\,dz \\
&\qquad + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{1-\cos z\pi}{\sin z\pi}\,dz,
\end{aligned}$$

de sorte que nos équations (7^a) deviennent

$$(7^b)\quad \left\{\begin{aligned}
\overline{\mathrm{T}} &= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\sin wz\pi}{z\pi}\,dz + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\,\mathfrak{P}(z)\sin wz\pi\,dz, \\
\overline{\mathrm{U}} &= \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{\cos wz\pi - 1}{z\pi}\,dz + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\left(\frac{1}{z\pi} - \cot z\pi\right)dz \\
&\qquad + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\,\mathfrak{P}(z)\cos wz\pi\,dz.
\end{aligned}\right.$$

Pour trouver les limites de ces expressions pour w infini, nous allons considérer d'abord les quantités

$$(8)\qquad \mathrm{X} = \int_0^a \varphi(z)\frac{\sin wz\pi}{z}\,dz,\qquad \mathrm{Y} = \int_0^a \varphi(z)\frac{\cos wz\pi - 1}{z}\,dz,$$

sous l'hypothèse de $0 < a < 1$ et que $\varphi(z)$ soit finie et intégrable entre zéro et a, et que l'on ait $\lim\limits_{z=0}\varphi(z)=0$; en même temps nous nous libérons de l'hypothèse que w soit de la forme particulière $2n+1$, en admettant que w tende vers l'infini positif d'une manière quelconque.

Après avoir mis ces intégrales sous la forme

$$(8^a)\quad X=\int_0^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,\qquad Y=\int_0^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi-1}{z}\,dz,$$

je représenterai par n un entier positif tel que la différence $aw-n-\frac{1}{2}$ soit positive et inférieure à une limite constante, puis par m un entier positif fixe. En observant que les intégrales

$$\int_0^{m}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,\qquad \int_n^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,$$

$$\int_0^{m+\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi-1}{z}\,dz,\qquad \int_{n+\frac{1}{2}}^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi-1}{z}\,dz$$

tendent vers zéro pour w infini, il s'ensuit que l'on pourra remplacer les quantités X et Y par les suivantes :

$$(8^b)\quad X_1=\int_m^{n}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,\qquad Y_0=\int_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi-1}{z}\,dz,$$

et en posant

$$(8^c)\qquad Z=\int_{m+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{\cos z\pi}{z}\,dz,$$

et puis

$$(8^d)\qquad I=\int_r^{aw}\varphi\left(\frac{z}{w}\right)\frac{dz}{z}=\int_{\frac{r}{w}}^{a}\varphi(z)\,\frac{dz}{z},$$

où r signifie une constante positive, il est clair que la quantité Y_0 aura la même limite que la quantité

$$(8^e)\qquad Y_1=Z-I.$$

L'intégrale Z pouvant s'écrire

$$(8^{c'})\qquad Z=-\int_m^{n}\varphi\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z+\frac{1}{2}}\,dz,$$

on peut la mettre sous la forme

$$Z = -\int_m^n \varphi\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz + \frac{1}{2}\int_m^n \varphi\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}\,dz.$$

A cause de la convergence *absolue* de l'intégrale

$$\int_m^\infty \frac{\sin z\pi}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}\,dz$$

et à cause de l'hypothèse $\lim \varphi\left(\frac{z}{w}\right) = 0$ pour $w = \infty$, on aura

$$\lim \int_m^n \varphi\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}\,dz = 0,$$

et l'intégrale Z pourra être remplacée par la suivante :

$$Z_1 = -\int_m^n \varphi\left(\frac{z+\frac{1}{2}}{w}\right)\frac{\sin z\pi}{z}\,dz,$$

qui donne

$$(9)\qquad X_1 + Z_1 = \int_m^n \left[\varphi\left(\frac{z}{w}\right) - \varphi\left(\frac{z}{w} + \frac{1}{2w}\right)\right]\frac{\sin z\pi}{z}\,dz;$$

cette intégrale a évidemment la même limite pour w infini que la suivante :

$$(9^a)\qquad A = \int_0^a \left[\varphi(z) - \varphi\left(z + \frac{1}{2w}\right)\right]\frac{\sin wz\pi}{z}\,dz.$$

Dans beaucoup de cas on peut conclure de l'une ou l'autre des deux formules (9) et (9^a) que l'on a

$$\lim_{w=\infty}(X_1 + Z_1) = 0.$$

Supposons, par exemple, que la fonction $\varphi(t)$ soit continue entre zéro et a inclusivement les limites, et représentons par $\Delta\varphi(t)$ la quantité $\varphi\left(t + \frac{1}{2w}\right) - \varphi(t)$; l'intégrale (9) sera inférieure en valeur absolue à la quantité

$$\int_m^n \left| \Delta\varphi\left(\frac{z}{w}\right) \right| \frac{dz}{z} \leq \delta \log \frac{n}{m},$$

supposé que δ représente le maximum de $|\Delta\varphi(t)|$.

Or, puisque $\lim \frac{n}{w} = 1$, on aura

$$\lim_{w=\infty} \delta \log \frac{n}{m} = 0,$$

si la différence $\Delta\varphi(t)$ remplit la condition

$$\lim_{w=\infty} \Delta\varphi(t) \log w = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\lim_{\Delta t=0} [\Delta\varphi(t) \log \Delta t] = 0.$$

Observons que la convergence de la série de Fourier exige que l'on ait

$$\lim_{w=\infty} X_1 = 0,$$

et si l'intégrale (9) doit tendre vers zéro, on devrait donc avoir en même temps

$$\lim_{w=\infty} Z_1 = 0,$$

et la quantité Y_1 ne pourrait avoir une limite déterminée que si l'intégrale J, donnée par la formule (8^d), tend vers une limite finie. Or l'existence de la limite

$$\lim_{w=\infty} \int_{\frac{r}{w}}^{a} \varphi(z) \frac{dz}{z}$$

suppose que la fonction $\frac{\varphi(z)}{z}$ soit intégrable à partir du point $z = 0$.

Cette circonstance vérifie ce que nous avons annoncé, à savoir que la convergence de la série de Fourier a lieu sous beaucoup moins de restrictions que celle de la série de Laurent.

Supposons maintenant que l'intégrale

$$(10) \qquad \int_0^{a'} \varphi(z) \frac{dz}{z} \qquad (a' \leq a)$$

soit finie et déterminée, et revenons sur les intégrales X_1 et Z.

En employant l'identité

$$\int_m^n = \sum_m^{n-1} \int_\nu^{\nu+1}$$

et en changeant, dans le terme général du deuxième membre, z en $\nu + z$, il vient, d'après (8^b),

$$X_1 = \int_0^1 \sin z\pi\, dz \sum_{\nu=m}^{n-1} (-1)^\nu \frac{\varphi\left(\frac{z+\nu}{w}\right)}{z+\nu},$$

ce que l'on peut écrire

$$X_1 = \int_0^1 \sin z\pi\, dz \left[\frac{1}{w} \sum_{\frac{m}{2} \leqq \mu < \frac{n}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{z+2\mu}{w}\right)}{\frac{z+2\mu}{w}} - \frac{1}{w} \sum_{\frac{m}{2} < \mu \leqq \frac{n}{2}} \frac{\varphi\left(\frac{z+2\mu-1}{w}\right)}{\frac{z+2\mu-1}{w}} \right].$$

Chacune des deux sommes dont se compose la parenthèse est la valeur approximative de l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int_0^a \frac{\varphi(z)}{z}\, dz,$$

d'où il suit que l'on a

$$\lim X_1 = 0 \qquad \text{pour} \qquad w = \infty.$$

On prouve de la même manière que $\lim Z = 0$ et que, par conséquent,

$$\lim Y_1 = -\int_0^a \varphi(z) \frac{dz}{z}.$$

En changeant, dans ce qui précède, $\varphi(z)$ en $z\varphi(z)\mathfrak{P}(z)$, on voit tout de suite que l'on a

$$\lim \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\mathfrak{P}(z) \sin wz\pi\, dz = 0,$$

$$\lim \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\mathfrak{P}(z) \cos wz\pi\, dz = 0,$$

et les équations (7^b) nous fourniront les résultats

$$\lim \overline{T} = 0, \qquad \lim \overline{U} = -\int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\frac{dz}{z\pi} + \int_{-x}^{1-x} \varphi(z)\left(\frac{1}{z\pi} - \cot z\pi\right) dz,$$

ou bien

$$\lim \overline{U} = -\int_{-x}^{1-x} \varphi(z) \cot z\pi \, dz,$$

où l'on a introduit l'hypothèse qu'aussi la fonction $\frac{\varphi(-z)}{z}$ soit intégrable à partir du point $z = 0$.

On a, par conséquent, d'après les formules (6) et (7),

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 f(z) \frac{\sin(2n+1)(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi} dz = f(x), \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{n=\infty} \int_0^1 f(z) \frac{\cos(2n+1)(z-x)\pi - \cos(z-x)\pi}{\sin(z-x)\pi} dz \\ &\quad = -\int_0^1 [f(z) - f(x)] \cot(z-x)\pi \, dz. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction finie et intégrable dans l'intervalle (0, ..., 1), *et supposons que dans certains points x cette fonction soit continue de telle mesure que les deux fonctions*

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t}, \qquad \frac{f(x-t) - f(x)}{t}$$

soient intégrables à partir de la valeur de $t = 0$; alors, en posant

$$c_\nu = \int_0^1 f(z)\, e^{-2\nu z\pi i}\, dz,$$

la série

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu\, e^{2\nu x\pi i} \qquad (0 < x < 1)$$

correspondant à ces valeurs-là de x sera convergente et aura pour somme $f(x)$, et la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, e^{2\nu x\pi i},$$

qui n'en contient que la moitié de termes, aura pour valeur l'expression

$$\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}f(x) - \frac{i}{2}\int_0^1 [f(z) - f(x)] \cot(z-x)\pi\, dz.$$

Ce théorème subsiste aussi pour $x = 0$, si les deux quantités $f(0)$ et $f(1)$ sont égales, et si les deux fonctions

$$\frac{f(t)-f(0)}{t}, \quad \frac{f(1-t)-f(0)}{t}$$

sont intégrables à partir de $t = 0$. On peut l'employer pour mettre certaines séries sous forme d'intégrales définies.