Matyáš Lerch

Sur une série qui se présente dans la théorie du logarithme intégral

Batt. G. 45 (1907), 88–92

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501583

# SUR UNE SÉRIE QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE DU LOGARITHME INTÉGRAL

PAR

M. LERCH à Brunn (Moravia).

---

Dans un mémoire publié par l' Académie de Prague [1] j' ai démontré la la formule

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m+x}}{m+x} = z^{x-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)}\binom{x-1}{m}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{m} - \log(1-z) - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

où il suffit de supposer $|z| < 1$, $|1-z| < |z|$. En observant que

$$z^{x-1}\sum\binom{x-1}{m}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{m} = 1,$$

on pourra écrire

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m+x}}{m+x} = z^{x-1}\sum_{m=1}^{\infty} s_m\binom{x-1}{m}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{m} - \log(1-z) - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \Gamma'(1), \tag{1}$$

$$\left(s_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right).$$

Le premier membre n'est convergent que si $|z| < 1$, tandis que la série au deuxième membre converge lorsque la partie réelle de $z$ surpasse $\frac{1}{2}$. Le lecteur voit aisément comment il faut fixer la puissance $z^x$ et le logarithme pour que le deuxième membre soit le juste prolongement du premier. Je me borne à envisager les variables réelles $z$, très approchées de 1, et plus petites que 1.

---

[1] Tome V, n. 14 des Rozpravy; 1896.

Lorsque $z$ tend vers un, on voit que la limite de la quantité

$$\text{(2)} \qquad \log(1-z)+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m+x}}{m+x}$$

sera déterminée et n'est autre chose que

$$\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\,.$$

Mais j'attribue plus d'intérêt à la circonstance que la formule permet de calculer la quantité (2) lorsque $z$ prend une valeur fixe, plus petite que un et très près de un.

Si l'on fait varier $x$ et $z$ simultanément en faisant $z=1-\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ devient infiniment petit pour $x$ infiniment grand sous l'hypothèse que le produit $x\varphi(x)$ tende vers une limite finie $a$, on aura

$$\lim_{x=\infty}\binom{x-1}{m}\left(\frac{1-z}{z}\right)^m=\lim_{x=\infty}\left\{\frac{1}{m\,!}\,x^m\,\varphi(x)^m\right\}=\frac{a^m}{m!}\,,$$

$$\lim_{x=\infty} z^{x-1}=\lim_{x=\infty} e^{x\log(1-\varphi(x))}=e^{-a}\,,$$

$$\lim_{x=\infty}\left[\log x-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right]=0\,,$$

et il s'ensuit

$$\text{(3)} \qquad \lim_{x=\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[1-\varphi(x)]^{m+x}}{m+x}=e^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}s_m\frac{a^m}{m\,!}-C-\log a\,,$$

où $C=-\Gamma'(1)$ est la constante d'Euler.

En prenant $\varphi(x)=\dfrac{a}{x}$, $x=n$ entier, on aura la formule signalée récemment par M. Nielsen [1], car le deuxième membre de l'équation (3) n'est autre chose que

$$\text{(3')} \qquad -li\,e^{-a}.$$

Si dans la formule (1) on fait $x=n+1$, $n$ désignant un entier, on aura

$$\text{(4)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n}\frac{z^\nu}{\nu}=s_n-z^n\sum_{m=1}^{n}s_m\binom{n}{m}\left(\frac{1-z}{z}\right)^m,$$

[1] Giornale, vol. XLIV, p. 15.

formule qui a lieu quel que soit $z$, mais qui permet d'obtenir aisément la valeur approchée du premier membre lorsque $z$ est très approché de 1.

Remarquons que la fonction

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m+x}}{m+x}$$

donne encore

$$\int_a^{a+1} f(x)dx = -\, li(z^a)$$

et que la formule (3) peut s'obtenir directement, lorsque on fait

$$1-\varphi(x)=e^{-\frac{u}{x}};$$

en écrivant $\frac{1}{x}=h$, le premier membre de (3) devient

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{me^{-u(1+mh)}}{1+mh}, \qquad \lim h=0,$$

et cette quantité a pour limite l' intégrale

$$\int_0^{\infty} dt\,\frac{e^{-u(t+1)}}{t+1}=-\,li(e^{-u}).$$

Supprimant le facteur $z^c$, la série (1) devient

$$S=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m+x}.$$

Lorsque $z$ est négatif et approché de $-1$, on pourra faire usage de la formule d' E u l e r

$$c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\ldots=c_1\frac{z}{1-z}+\Delta c_1\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\Delta^2c_1\cdot\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\ldots$$

qui donne

$$\sum_0^{\infty}\frac{z^m}{m+x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-z}-\frac{1}{x(x+1)}\frac{z}{(1-z)^2}$$

$$+\frac{1\cdot 2}{x(x+1)(x+2)}\frac{z^2}{(1-z)^3}-\frac{1\cdot2\cdot3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}\frac{z^3}{(1-z)^4}$$

$$+\ldots.$$

formule commode, lorsque $x$ est positif et assez grand, pourvu que $|z|<|1-z|$. La limite pour $z=-1$ donnera une formule connue de la théorie de la fonction gamma.

Dans l'identité (4) je pose maintenant $z=1+\varphi(n)$, $\varphi(n)$ désignant une fonction telle que

$$\lim_{n-\infty} n\varphi(n)=a\,;$$

j'obtiens

$$\lim_{n-\infty}\left\{\sum_{\nu-1}^{n}\frac{[1+\varphi(n)]^{\nu}}{\nu}-\log n\right\}$$

(5)

$$=\mathrm{C}-e^{a}\sum_{m-1}^{\infty}(-1)^{m}s_{m}\frac{a^{m}}{m\,!}=li(e^{a})-\log a\,,$$

et en particulier pour $\varphi(n)=\dfrac{a}{n}$,

$$\text{(5')}\qquad \lim_{n-\infty}\left\{\sum_{\nu-1}^{n}\frac{\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{\nu}}{\nu}-\log n\right\}=li\,e^{a}-\log a.$$

En revenant sur la formule (1), je divise par $z^{x-1}$ et je différentie par rapport à $x$ en faisant $x=1$ ; j'obtiens ainsi les formules dont la première concerne la fonction dilogarithmique de **Landen**:

$$\text{(6)}\qquad \sum_{1}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu^{2}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{s_{m}}{m}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{m}-\log z\log(1-z)+\frac{\pi^{2}}{6},$$

$$\text{(7)}\quad \sum_{1}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu^{3}}=\sum_{2}^{\infty}\frac{s_{m}s_{m-1}}{m}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{m}-\frac{1}{2}(\log z)^{2}\log(1-z)+\frac{\pi^{2}}{6}\log z+\zeta\,(3).$$

En prenant la dérivée dans la dernière équation et comparant avec (6), il vient

$$\sum_{2}^{\infty}s_{m}s_{m-1}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{m-1}\frac{1}{z}-\sum_{1}^{\infty}\frac{s_{m}}{m}\left(\frac{z-1}{z}\right)^{m}+\frac{1}{2}\,\frac{zl^{2}z}{1-z}=0.$$

Dans cette identité je fais $z = \frac{1}{1+x}$; elle devient

$$\frac{1}{2}\log^2(1+x) = (1+x)\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m s_m s_{m-1} x^m + \sum_{1}^{\infty}(-1)^m \frac{s_m}{m} x^{m+1};$$

en observant que

$$s_m s_{m-1} - s_m s_{m+1} + \frac{s_m}{m} = -\frac{s_m}{m+1},$$

nous aurons enfin la formule bien connue

$$[\log(1+x)]^2 = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{s_m}{m+1}x^{m+1}.$$

Ainsi l' équation (1), tout en étant de nature complétement élémentaire, est liée aux fonctions de catégories différentes, comme logarithme intégral, fonction gamma et la trascendante dilogarithmique.

Pour des valeurs rationnelles de $x$ la fonction

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m+x}}{m+x}$$

s'exprime à l'aide des trascendantes logarithmiques, sous forme finie.

Le développement demi-convergent ([1])

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-mu-z}}{(mu+z)^s} = \frac{1}{u}Q(1-s, z) + \frac{1}{2z^s}e^{-z} + \frac{1}{z^s}e^{-z}\sum_{\nu=1,2,3,\ldots}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{(2\nu)!}u^{2\nu-1}\,G(z, s)_\nu,$$

dans lequel $G(z, s)_\nu$ sont certains polynomes, donne naissance à une formule analogue à (3), que je m'abstiends de signaler, puisque j'envisage un développement pour solution plus avancé que toute formule en limites qui s'en tire immédiatement.

---

([1]) *Journal de Crelle*, T. 130, p. 64. Pour le cas particulier de $s = 1$ cf. l' *Intermédiaire*, T. VIII, Question 2155; 1901.