Matyáš Lerch

Theorie funkce gamma. [I.]

Věstník Čes. Akademie cís. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze 2 (1893), 237–247

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501768

Theorie funkce gamma.

Napsal *M. Lerch.*

K nižším funkcím transcendentním druží se přirozeně funkce gamma, která, ač nevyniká bohatými vztahy, jakými se honosí funkce periodické, přec má svoji zajímavost theoretickou i důležitost praktickou, vyskytujíc se jak v problémech mathematické fysiky, tak v některých otázkách theorie čísel. Konečně integrální počet zabývá se z velké části výhradně těmito funkcemi.

Je známo, že můžeme pomocí funkcí elementarných vyčísliti hodnoty všech řad tvaru

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)\,,$$

kde $R(n)$ značí racionalný úkon proměnné n, tedy výraz tvaru

$$R(n) = \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots + a_\alpha n^\alpha}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \ldots + b_\beta n^\beta}\,,$$

kde konstanty $a_0, a_1, \ldots a_\alpha$, $b_0, b_1, \ldots b_\beta$ nezávisí na n.

Pro veliká n jest $R(n) = \frac{a_\alpha}{b_\beta} n^{\alpha-\beta}(1+\varepsilon_n)$, kde ε_n je malé, a má-li tedy řada konvergovati, musí býti $\alpha - \beta < -1$, tedy $\alpha \leq \beta - 2$.

Funkci $R(n)$ možno rozložiti v t. zv. částečné zlomky, a sice tak, aby tato funkce rovnala se součtu z výrazu

$$\frac{A_1}{w_1 - n} + \frac{A_2}{w_2 - n} + \ldots + \frac{A_k}{w_k - n}\,,$$

kde

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_k = 0\,,$$

a z konečného počtu výrazů tvaru

$$\frac{B}{(w-n)^\gamma}\,, \qquad \gamma > 1\,.$$

Následkem toho bude řada S rovna součtu z řady

$$S_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_1}{w_1 - n} + \frac{A_2}{w_2 - n} + \ldots + \frac{A_k}{w_k - n}\right)$$

a z konečného počtu řad tvaru

$$B \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(w-n)^\gamma}, \qquad \gamma > 1 .$$

Avšak z okolnosti, že $A_1 + A_2 + \ldots + A_k = 0$, plyne, že můžeme řadu S_0 psáti

$$S_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_1 \left(\frac{1}{w_2 - n} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right) + A_2 \left(\frac{1}{w_2 - n} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right) \right.$$

$$\left. + \ldots + A_k \left(\frac{1}{w_k - n} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right) \right\},$$

aneb též takto

$$S_0 = A_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{w_1 - n} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right) + A_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{w_2 - n} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right)$$

$$+ \ldots + A_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{w_k - n} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right),$$

tak že máme tím řadu S rozloženu v konečný počet řad jednoho z obou tvarů

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{w-n} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right) = \pi \cot w\pi ,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(w-n)^\gamma} = \frac{(-1)^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!} D_w^{\gamma-1} \pi \cot w\pi ,$$

kde symbol $D^{\gamma-1}$ značí $(\gamma - 1)$-ní derivaci.

Naskytá se přirozeně otázka, jakými výrazy lze vyjádřiti součet řady

$$S^* = \sum_{n=0}^{\infty} R(n) ,$$

která se skládá jen z polovičního počtu členů řady S. Tu je z předeslaných úvah zřejmo, že možno řadu S^* rozložiti v konečný počet řad jednoho z tvarů

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w-n} + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w-n)^\gamma}, \qquad \gamma > 1 .$$

Píšeme-li v prvém typu $-w$ za w, a změníme-li znamení celého součtu, obdržíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w+n} - \frac{1}{n - \frac{1}{2}} \right) .$$

Místo této řady stačí uvažovati součet

$$f(w) = \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{w+n} - \frac{1}{n} \right), \tag{1}$$

jenž se od ní liší pouze o konstantu číselnou, která nás nezajímá.

Znalost vlastností řady (1) a jejích derivací postačí úplně k seznání vlastností řad S^*; bude pak řada (1) a útvary s ní související předmětem následujících úvah.

Řada (1) má patrnou analogii s funkcí $\pi \cot w\pi$, a můžeme ji jako tuto pokládati za logarithmickou derivaci funkce stále konečné; klademe-li totiž

$$g(w) = w \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{n}\right) e^{-\frac{w}{n}},$$

bude

$$f(w) = \frac{g'(w)}{g(w)}.$$

Okolnost ta vězí v absolutní konvergenci součinu $g(w)$, jež plyne z rozvoje

$$\left(1 + \frac{w}{n}\right) e^{-\frac{w}{n}} = \left(1 + \frac{w}{n}\right)\left(1 - \frac{w}{n} + \frac{1}{1.2}\frac{w^2}{n^2} - \frac{1}{1.2.3}\frac{w^3}{n^3} + \dots\right);$$

provedeme-li totiž v pravo násobení, zbude řada tvaru

$$.1 + \left(\alpha \frac{w^2}{n^2} + \alpha' \frac{w^3}{n^3} + \dots\right),$$

a lze snadně ukázati, že uzávorkovaný výraz je absolutně menší než $\frac{4|w|^2}{n^2}$, jakmile jest n větší než $2|w|$.[1] Píšeme-li tedy obecného činitele součinu $g(w)$ ve tvaru $1 + u_n$, bude pro dosti veliká n platiti nerovnost $|u_n| < \frac{4|w^2|}{n^2}$, z níž plyne, že řada $\sum |u_n|$ a tedy také součin $\prod(1 + u_n)$ absolutně konvergují.[2]

Ze stejných důvodů jako $g(w)$ konverguje také součin

$$G(w) = w \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{w}{n}}{(1 + \frac{1}{n})^w}, \tag{2}$$

neboť obecný činitel

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-w}\left(1 + \frac{w}{n}\right)$$

opět bude (dle binomické věty) tvaru $1 + u_n$, kde $\sum u_n$ absolutně konverguje.

Součin $G(w)$ nachází se v jednoduché souvislosti se součinem $g(w)$; neb jich podíl

$$G(w) : g(w) = \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{w}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-w} = \lim_{m=\infty} \prod_{n=1}^{m-1} e^{\frac{w}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-w}$$

možno psáti ve tvaru

$$e^{w \lim\limits_{m=\infty} \Sigma \left[\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]} = e^{Cw}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots m-1),$$

kde položeno

$$C = \lim_{m=\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \left[\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right],$$

---

[1]) Symbolem $|w|$ značíme vždy t. zv. absolutní hodnotu (modul) veličiny w; na příklad $|2 + 3i| = \sqrt{13}$.

[2]) Není zde na místě, provésti do detailu všecky tyto začátečnické úvahy, obsažené v každém poněkud lepším spise o theorii funkcí.

čili

$$C = \lim_{m=\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} - \log m\right].$$

Tato veličina sluje konstantou Eulerovou aneb Mascheroniovou. Máme pak $G(w) = g(w)\, e^{Cw}$ aneb

$$(2^a) \qquad G(w) = e^{Cw} \cdot w \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{w}{n}\right) e^{-\frac{w}{n}}.$$

Byla to reciproká hodnota funkce $G(w)$, která se vyskytla v historii, a sice byla zavedena Eulerem, kterýžto veleduch objevil také četné její vztahy k počtu integrálnímu. Legendre, jemuž po Eulerovi náleží největší zásluha o rozkvět theorie těchto veličin, zavedl označení $\Gamma(w)$ za $\frac{1}{G(w)}$; budeme tedy psáti

$$(2^*) \qquad \Gamma(w) = \frac{1}{w} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^w}{1 + \frac{w}{n}}.$$

Eulerova definice, kteráž byla Gaussem přejata, liší se formálně od této; abychom ji obdrželi, pišme

$$\Gamma(w) = \frac{1}{w} \lim_{n=\infty} \prod_{r=1}^{n-1} \frac{\left(1 + \frac{1}{r}\right)^w}{1 + \frac{w}{r}},$$

čili

$$\Gamma(w) = \frac{1}{w} \lim_{n=\infty} \prod_{r=1}^{n-1} \left(\frac{r}{w+r} \cdot \frac{(r+1)^w}{r^w}\right),$$

anebo konečně

$$(2^b) \qquad \Gamma(w) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n^w}{w(w+1)(w+2)\ldots(w+n-1)}.$$

Gauss užíval označení $\Pi(w-1)$ za $\Gamma(w)$, které však z dobrých příčin došlo menšího rozšíření.

Z řady (2^*) i z limity (2^b) plyne bezprostředně $\Gamma(1) = 1$; abychom stanovili Γ pro celistvá w, hledejme hodnotu

$$\Gamma(w+1) = \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n^{w+1}}{(w+1)(w+2)\ldots(w+n)}$$

$$= w \lim_{n=\infty} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n \cdot (n+1)^w}{w \cdot (w+1)(w+2)\ldots(w+n)} \cdot \frac{n^w}{(n+1)^w}\right) = w\,\Gamma(w),$$

tak že nacházíme tím prvou základní vlastnost funkce $\Gamma(w)$, t. j. vztah

$$(3) \qquad \Gamma(w+1) = w\,\Gamma(w),$$

a z něho bezprostředně

$$(3^a) \qquad \Gamma(w+k) = w(w+1)(w+2)\ldots(w+k-1) \cdot \Gamma(w);$$

pro $w = 1$ plyne odtud

$$\Gamma(k+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k = k!,$$

t. j. funkce $\Gamma(w)$ interpoluje faktoriellu $(w-1)!$ definovanou pro celistvá kladná w.

Ze vzorce (3^a) máme

$$\frac{1}{w(w+1)(w+2)\dots(w+n-1)}=\frac{\Gamma(w)}{\Gamma(w+n)}$$

a tedy možno rovnici (2^b) psáti

$$(2^c)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\Gamma(w+n)}{(n-1)!}\,n^{-w}=1\,.$$

V theorii funkcí důležitou úlohu mají t. zv. charakteristické vlastnosti funkcí, které tyto úplně definují, aniž záležejí v nějakém jich způsobu approximace. Hledajíc takovýchto vlastností charakteristických, hledí se analysis přiblížiti vědám popisným, kteréž individua v přírodě se vyskytující určují na základě jistých znaků. Veliká cena řečených výsledků, jež nejsou dosud nikterak četné, vězí nejen v eleganci, jež se tím zavádí do úvah analytických, které jimi rázem pozbývají unavujícího vlivu početních detailů a razí cestu myšlénce na úkor mnohdy zbytečných formalismů, ale cena funkcionalných vlastností charakteristických spočívá hlavně v tom, že ony jsou to především, jež podporují invenci, jak toho theorie funkcí elliptických podává velkolepé doklady. Budeme také v průběhu úvah těchto se snažiti, bychom pro jednotlivé útvary poskytli vlastnosti charakteristické, pokud toho připouští materiál málo ohebný.

První charakteristickou vlastnost funkce $\Gamma(w)$ vyjadřuje soustava rovnic (2^c), (3^a). Platí totiž věta:

Každá funkce $f(w)$, která má vlastnosti vyjádřené rovnicemi

$$f(w+1)=w\,f(w)\,,\qquad \lim_{n=\infty}\frac{f(w+n)}{(n-1)!}\,n^{-w}=1\,,$$

jest identická s funkcí $\Gamma(w)$.

Na důkaz stačí uvésti, že z prvé vlastnosti plyne

$$f(w+n)=w(w+1)\dots(w+n-1)\,.\,f(w)\,,$$

tak že druhá rovnice poskytne

$$\lim_{n=\infty}\frac{f(w+n)}{(n-1)!}\,n^{-w}=\lim_{n=\infty}\frac{w(w+1)\dots(w+n-1)}{(n-1)!\,n^w}\,.\,f(w)=1\,,$$

tedy

$$f(w)=\lim_{n=\infty}\frac{(n-1)!\,n^w}{w(w+1)\dots(w+n-1)}=\Gamma(w)\,,$$

jak tvrzeno.

Tato věta však není jediná, která funkci Γ charakterisuje; má naopak význam dosti podřízený, poněvadž klade pro chování se funkce Γ proti nekonečně rostoucí proměnné podmínku příliš podrobnou. Za tím účelem prozkoumáme analytické vlastnosti funkce $\Gamma(w)$.

Z definice (2^*) neb (2^b) plyne bezprostředně:

Funkce $\Gamma(w)$ nikde nezmizí, jest jednoznačnou v celé rovině, tak že reciproká její hodnota $G(w)$ jest celistvou funkcí transcendentní. Funkce $\Gamma(w)$ nemá jiných míst zvláštních kromě nekonečné řady polů stupně prvního, a sice jsou tyto poly

$$w=0\,,-1\,,-2\,,-3\,,-4\,,\dots$$

Značí-li $-k$ záporné číslo celistvé nebo nullu, bude patrně dle (2^b) výraz

$$(w+k)\,\Gamma(w) = \lim_{n=\infty} \frac{(n-1)!\,n^w}{w(w+1)\dots(w+k-1).(w+k+1)\dots(w+n-1)}$$

míti pro $w = -k$ hodnotu konečnou a obdržíme ji pomocí rovnice (3^c), t. j.

$$(w+k)\,\Gamma(w) = \frac{1}{w(w+1)(w+2)\dots(w+k-1)}\cdot\Gamma(w+k+1),$$

která pro $w = -k$ poskytne

$$\lim_{w=-k}(w+k)\,\Gamma(w) = \frac{(-1)^k}{k!}\cdot\Gamma(1) = \frac{(-1)^k}{k!},$$

z čehož plyne, že v okolí polu $w = -k$ funkci $\Gamma(w)$ možno vyjádřiti řadou tvaru

$$\Gamma(w) = \frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{w+k} + a_0 + a_1(w+k) + a_2(w+k)^2 + \dots$$

2. Toto předeslavše, přihlédněme ještě, jak se chová funkce $\Gamma(w)$ pro komplexní hodnoty $w = \xi + i\eta$, kde ξ náleží mezeře $(0\dots1)$ a η je kladná neb záporná veliká hodnota. Dle vzorce (2^a) bude pak absolutní hodnota funkce $\Gamma(w)$

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\xi+i\eta)}\right| = e^{C\xi}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\prod_{\nu=1}^{\infty}\sqrt{\left(1+\frac{\xi}{\nu}\right)^2+\frac{\eta^2}{\nu^2}}\;e^{-\frac{\xi}{\nu}}$$

čili

$$\frac{1}{|\Gamma(\xi+i\eta)|} = e^{C\xi}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi}{\nu}\right)e^{-\frac{\xi}{\nu}}\prod_{\nu=1}^{\infty}\sqrt{1+\frac{\eta^2}{(\xi+\nu)^2}}$$

aneb, což totéž jest,

$$\frac{1}{|\Gamma(\xi+i\eta)|} = \frac{1}{\Gamma(\xi+1)}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\eta^2}{(\xi+\nu)^2}\right)}.$$

Avšak součin

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\eta^2}{(\xi+\nu)^2}\right)$$

leží (poněvadž $0 \leq \xi < 1$) mezi veličinami

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\eta^2}{\nu^2}\right) \text{ a } \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\eta^2}{(\nu+1)^2}\right).$$

Prvá má hodnotu $\dfrac{e^{\eta\pi}-e^{-\eta\pi}}{2\eta\pi}$, druhá $\dfrac{e^{\eta\pi}-e^{-\eta\pi}}{2\eta\pi}\;\dfrac{1}{1+\eta^2}$, z čehož

vychází, že prostá hodnota funkce $\Gamma(\xi+i\eta)$ je tvaru

$$(4)\qquad |\Gamma(\xi+i\eta)| = \frac{\Gamma(\xi+1)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\sqrt{\frac{2\eta\pi}{e^{\eta\pi}-e^{-\eta\pi}}}\cdot q(\eta),$$

kde

$$1 < \varphi(\eta) < \sqrt{1+\eta^2},$$

předpokládajíc ovšem $0 \leqq \xi \leqq 1$.

Pomocí tohoto výsledku dokážeme větu:

Je-li $F(w)$ jednoznačná funkce analytická, která nemá jiných míst zvláštních kromě polů stupně prvního $w = 0, -1, -2, -3, \ldots$, a má vlastnost vyjádřenou rovnicí

$$F(w+1) = w\,F(w);$$

platí-li mimo to pro dosti veliká η a pro $0 \leqq \xi \leqq 1$ nerovnost

(a) $$|F(\xi + i\eta)| \leqq A\,|\xi + i\eta|^p\, e^{\alpha\pi|\eta|},$$

kde A, p jsou libovolné kladné konstanty, α kladná konstanta menší než $\frac{3}{2}$: pak bude

$$\frac{F(w)}{\Gamma(w)} = \text{konst.}$$

Důkaz. Ze supposice první plyne, že podíl

$$f(w) = \frac{F(w)}{\Gamma(w)}$$

je celistvá funkce, která hoví podmínce $f(w+1) = f(w)$, t. j. má periodu 1; takovou funkci možno dle věty Laurentovy rozvinouti v řadu stále konvergentní

(b) $$f(w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu\, e^{2\nu w\pi i}.$$

Z nerovnosti (a) a ze (4) pak plyne pro $w = \xi + i\eta$

$$|f(w)| \leqq \frac{A\,(\xi^2+\eta^2)^{\frac{p+1}{2}}}{\Gamma(\xi+1)\,\varphi(\eta)} \cdot e^{\alpha\pi|\eta|} \sqrt{\frac{e^{\eta\pi} - e^{-\eta\pi}}{2\eta\pi}};$$

avšak

$$\sqrt{\frac{e^{\eta\pi} - e^{-\eta\pi}}{2\eta\pi}} = \frac{e^{\frac{1}{2}\pi|\eta|}}{\sqrt{2\pi|\eta|}}(1-\varepsilon),$$

kde ε je malé pro veliká $|\eta|$; máme tedy

$$|f(w)| \leqq A' \frac{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{p+1}{2}}}{\sqrt{|\eta|}} e^{(\alpha+\frac{1}{2})\pi|\eta|},$$

a poněvadž dle supposice $\alpha < \frac{3}{2}$, bude lze učiniti součin

$$e^{-2|\eta|\pi}|f(w)| \leqq A' \frac{(\xi^2+\eta^2)^{\frac{p+1}{2}}}{\sqrt{|\eta|}} e^{-(\frac{3}{2}-\alpha)\pi|\eta|}$$

tak malým jak libo, zvětší-li se dostatečnou měrou η. Je-li předepsána veličina δ, můžeme tedy nalézti hodnotu $\eta_1 > 0$ tak velikou, aby

$$e^{-2\pi\eta_1}|f(\xi \pm i\eta_1)| < \delta \ . \tag{c}$$

V řadě (b) pro $w = \xi + i\eta$ mají součinitelé hodnoty hovící nerovnostem (dle známé věty Cauchy-ovy)

$$|A_\nu| \leq \frac{g}{|e^{2\nu w\pi i}|} = \frac{g}{e^{-2\nu\eta\pi}} \ ,$$

značí-li g největší prostou hodnotu, jíž funkce $f(w)$ nabude při proměnném $\xi = (0 \ldots 1)$ a při stálém η. Zejména bude tedy pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ a $\eta = -\eta_1$

$$|A_n| < \frac{g_1}{e^{2n\eta_1\pi}} \ , \quad \text{kde} \quad g_1 < \delta e^{2\pi\eta_1} \ ,$$

dále pro $\eta = +\eta_1$

$$|A_{-n}| < \frac{g_1}{e^{2n\eta_1\pi}} \ .$$

Pravé strany těchto nerovností jsou menší než δ, t. j. bude $|A_n| < \delta$, $|A_{-n}| < \delta$, a poněvadž δ byla veličina libovolně předepsaná, mohou tyto nerovnosti býti splněny jediné pro $A_n = 0$, $A_{-n} = 0$; z řady (b) vypadnou tedy veškery koefficienty mimo A_0, a zbývá

$$f(w) = \frac{F(w)}{\Gamma(w)} = A_0 \ ,$$

jak tvrzeno.

Tato charakteristická vlastnost funkce Γ je mnohem způsobilejší k applikacím nežli ona, o níž byla řeč na konci odstavce předešlého. Je patrno, že místo $0 \leq \xi \leq 1$ mohli jsme v theorému uvažovati hodnoty ξ intervallu $k < \xi < k + 1$, kde k je libovolná kladná veličina.

Jakožto applikaci vyšetřujme funkci

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{a+2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{a+n-1}{n}\right) = f(a) \ ;$$

patrně bude

$$f(a+1) = \frac{a}{n}\cdot f(a) \ ;$$

funkce $n^a f(a) = F(a)$ tedy hoví rovnici

$$F(a+1) = a\,F(a) \ ;$$

tato funkce je dále jednoznačná a nemá jiných míst zvláštních mimo poly stupně prvního $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$

Abychom zde mohli applikovati větu (4), musíme tuto poněkud zobecniti; budou totiž některé argumenty $\frac{a+\nu}{n}$ míti realnou část větší než 1, je-li $a = \xi + i\eta$, $0 \leq \xi \leq 1$; proto uvažme, že pro $1 < \xi \leq 2$ bude

$$\Gamma(\xi + i\eta) = (\xi - 1 + i\eta)\,\Gamma(\xi - 1 + i\eta)$$

a tedy (4) obdrží tvar

$$|\Gamma(\xi + i\eta)| = \Gamma(\xi)\sqrt{\frac{2\eta\pi}{e^{\eta\pi} - e^{-\eta\pi}}}\,\varphi(\eta) \ . \tag{4a}$$

Dle toho bude

$$|F(\xi+i\eta)| = n^{\xi}\,\Phi(\xi)\left(\frac{2\eta\pi}{e^{\frac{\eta\pi}{n}}-e^{-\frac{\eta\pi}{n}}}\right)^{\frac{n}{2}}\Phi_1(\eta),$$

kde $\Phi(\xi)$ je nezávislé na η a konečné pro $0 \leqq \xi \leqq 1$, a

$$\Phi_1(\eta) < \varphi(\eta)^n < (1+\eta^2)^{\frac{n}{2}};$$

z toho plyne, že pro veliká η bude $F(\xi+i\eta)$ velmi malé, čímž podmínka (a) charakteristického theorému splněna. Bude tedy $\dfrac{F(w)}{\Gamma(w)} = A_0$, t. j.

$$(\alpha)\quad n^a\,\Gamma\left(\frac{a}{n}\right)\Gamma\left(\frac{a+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{a+2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{a+n-1}{n}\right) = A_0\,\Gamma(a),$$

kde zbývá pouze určiti konstantu A_0. To se podaří pomocí základního vzorce Eulerova

$$(5)\qquad \Gamma(w)\,\Gamma(1-w) = \frac{\pi}{\sin w\pi},$$

jenž se obdrží přímo z definice (2^b) takto:

$$\Gamma(w)\,\Gamma(1-w)$$

$$= \lim_{n=\infty} \cdot \frac{1.2.3\ldots n.n^{w}}{w(w+1)\ldots(w+n)} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{1.2.3\ldots n.n^{-w}}{(1-w)(2-w)\ldots(n-w)}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{(1.2.3\ldots n)^2}{w(1-w^2)(4-w^2)(9-w^2)\ldots(n^2-w^2)},$$

anebo konečně

$$\Gamma(w)\,\Gamma(1-w) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{w\left(1-\frac{w^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{w^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{w^2}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{w^2}{n^2}\right)},$$

a pravá strana má dle známého vzorce hodnotu $\dfrac{\pi}{\sin w\pi}$.

Abychom nyní obdrželi konstantu A_0, volme $a=1$, čímž vznikne

$$n\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = A_0;$$

odtud

$$A_0^2 = n^2\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right),$$

tedy dle (5)

$$A_0^2 = n^2 \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}} \cdots \frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Součin $\prod\limits_{\nu=1}^{n-1} \sin\dfrac{\nu\pi}{n}$ obdržíme, vyjádříme-li jeho činitele výrazem

$$\sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{1}{2i}\,e^{\frac{\nu\pi i}{n}}\left(1-e^{-\frac{2\nu\pi i}{n}}\right),$$

ve tvaru

$$\frac{1}{(2i)^{n-1}} e^{(n-1)\frac{\pi i}{2}} \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2\nu\pi}{n}}\right);$$

poněvadž pak

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \left(z - e^{-\frac{2\nu\pi}{n}}\right) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1,$$

máme

$$\prod \sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot n,$$

tedy $A_0^2 = n \cdot (2\pi)^{n-1}$, a poněvadž A_0 je kladné,

$$A_0 = n^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}};$$

dosazením této hodnoty nacházíme pak vzorec Legendreův

$$\Gamma\left(\frac{a}{n}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{a+2}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{a+n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-a} \Gamma(a) \tag{6}$$

anebo též, píšeme-li na za a:

$$\Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(a + \frac{2}{n}\right) \ldots \Gamma\left(a + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-na} \Gamma(na). \tag{6*}$$

Legendre podal tento vzorec v případě $n = 2$, v případě obecném pak vyjádřil jej v druhé logarithmické derivaci; před tím byl již Euler podal hodnotu součinu

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right),$$

kterého je třeba k důkazu; konečně Gauss prvý napsal vzorec v této formě. Budeme jej citovati jakožto transformační vzorec Legendreův.

Vyložené zde Eulerovo odvození hodnoty konstanty A_0 je dosti složité. Proto podáme zde odvození vlastní, které je spojeno s menším napjetím pozornosti a je přehlednější.

Logarithmujme rovnici (α), abychom obdrželi

$$a \log n + \sum_{\nu=0}^{n-1} \log \Gamma\left(\frac{a+\nu}{n}\right) = \log A_0 + \log \Gamma(a);$$

integrujme dle a v mezích $(0 \ldots 1)$, a bude

$$\frac{1}{2} \log n + \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_0^1 \log \Gamma\left(\frac{a+\nu}{n}\right) da - \int_0^1 \log \Gamma(a)\, da = \log A_0$$

Avšak substitucí $\frac{a+\nu}{n} = x$ máme

$$\int_0^1 \log \Gamma\left(\frac{a+\nu}{n}\right) da = n \int_{\frac{\nu}{n}}^{\frac{\nu+1}{n}} \log \Gamma(x)\, dx\,,$$

a tedy

$$\log A_0 = \frac{1}{2} \log n + n \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{\frac{\nu}{n}}^{\frac{\nu+1}{n}} \log \Gamma(x)\, dx - \int_0^1 \log \Gamma(a)\, da\,,$$

aneb jinak psáno

$$(\beta) \qquad \log A_0 = \frac{1}{2} \log n + (n-1) \int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx\,.$$

Integrál tento snadně se vyčíslí v případě $n = 2$. Tu je totiž

$$A_0 = 2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

a z rovnice (5) plyne pro $w = \frac{1}{2}$ patrně $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$, tedy $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

tak že pro $n = 2$ bude $A_0 = 2\sqrt{\pi}$, a nacházíme tak

$$\log(2\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2} \log 2 + \int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx\,,$$

což dává důležitý výsledek

$$(7) \qquad \int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx = \log \sqrt{2\pi}\,,$$

který vložíce do (β) obdržíme

$$\log A_0 = \frac{1}{2} \log n + \left(\frac{n-1}{2}\right) \log 2\pi\,,$$

a tedy

$$A_0 = n^{\frac{1}{2}} \,.\, (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,,$$

jako svrchu.

(Pokračování.)