Matyáš Lerch

Nová analogie řady theta a některé zvláštní hypergeometrické řady Heineovy

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 3 (1894), 8. 5, 1–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501784

Nová analogie řady theta a některé zvláštní hypergeometrické řady Heineovy.

Napsal **M. Lerch.**

Věnováno za přijetí do České Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění.

Předloženo dne 15. prosince 1893.

---

1. Buďte q, $\mathfrak{q}$ dvě veličiny, jichž absolutní hodnoty jsou menší jedné, a uvažujme funkci $f(x, \xi; q, \mathfrak{q})$ proměnných x, ξ danou nekonečnou řadou

$$(1)\quad \begin{cases} f(x,\xi;q,\mathfrak{q}) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n^2} x^{2n} (1+\mathfrak{q}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^3\xi^2)(1+\mathfrak{q}^5\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{2n-1}\xi^2) \\ \qquad + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{q^{n^2} x^{-2n}}{(1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-3}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-5}\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{-2n+1}\xi^2)}, \end{cases}$$

t. j. řadou

$$\begin{aligned} 1 + q x^2 (1+\mathfrak{q}\xi^2) &+ q^4 x^4 (1+\mathfrak{q}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^3\xi^2) \\ &+ q^9 x^6 (1+\mathfrak{q}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^3\xi^2)(1+\mathfrak{q}^5\xi^2) + \dots \\ &+ \frac{q x^{-2}}{1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2} + \frac{q^4 x^{-4}}{(1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-3}\xi^2)} \\ &+ \frac{q^9 x^{-6}}{(1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-3}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-5}\xi^2)} + \dots \end{aligned}$$

První základní vlastnosť této funkce obdržíme, píšemeli v prvé části řady $n+1$, v druhé $n-1$ za n, a dělímeli na $q x^2 (1+\mathfrak{q}\xi^2)$; tím vznikne

$$\begin{aligned} \frac{f(x,\xi)}{q x^2 (1+\mathfrak{q}\xi^2)} = \frac{1}{q x^2 (1+\mathfrak{q}\xi^2)} + 1 \\ + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (q x)^{2n} (1+\mathfrak{q}^3\xi^2)(1+\mathfrak{q}^5\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{2n+1}\xi^2) \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q^{n^2} (q x)^{-2n}}{(1+\mathfrak{q}^1\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathfrak{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathfrak{q}^{-2n+3}\xi^2)}. \end{aligned}$$

Prvý člen pravé strany možno považovati za člen posledního součtu a sice přísluší k hodnotě indexu $n = 1$.

Pravá strana tedy splývá s řadou $f(qx, \mathrm{q}\xi)$ a máme tedy jakožto prvou základní vlastnosť funkce f vztah

(2) $$f(qx, \mathrm{q}\xi) = \frac{1}{qx^2(1+\mathrm{q}\xi^2)} f(x, \xi) \,.$$

Druhou základní vlastnosť funkce f obdržíme způsobem následujícím. V obecném členu prvého součtu pišme $n+1$ za n, čímž člen tento obdrží tvar

$$q^{n^2}(qx)^{2n} \,.\, qx^2(1+\mathrm{q}\xi^2)\dots(1+\mathrm{q}^{2n-1}\xi^2)\,.\,(1+\mathrm{q}^{2n+1}\xi^2)\,;$$

proveďme násobení posledním činitelem $1+\mathrm{q}^{2n+1}\xi^2$, i obdržíme tak

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} x^{2n}(1+\mathrm{q}\xi^2)(1+\mathrm{q}^3\xi^2)\dots(1+\mathrm{q}^{2n-1}\xi^2)$$

$$= qx^2 + qx^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(qx)^{2n}(1+\mathrm{q}\xi^2)(1+\mathrm{q}^3\xi^2)\dots(1+\mathrm{q}^{2n-1}\xi^2)$$

$$+ q\mathrm{q}x^2\xi^2 + q\mathrm{q}x^2\xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(q\mathrm{q}x)^{2n}(1+\mathrm{q}\xi^2)(1+\mathrm{q}^3\xi^2)\dots(1+\mathrm{q}^{2n-1}\xi^2)$$

V druhém součtu pak pišme $n-1$ za n a u vzniklém tak členu obecném

$$\frac{q^{n^2}(qx)^{-2n}\,.\,qx^2}{(1+\mathrm{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathrm{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathrm{q}^{-2n+1}\xi^2)}(1+\mathrm{q}^{-2n+1}\xi^2)$$

proveďme násobení činitelem $1+\mathrm{q}^{-2n+1}\xi^2$. Tím vzejde

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}x^{-2n}}{(1+q^{-1}\xi^2)(1+\mathrm{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathrm{q}^{-2n+1}\xi^2)}$$

$$= qx^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}(qx)^{-2n}}{(1+\mathrm{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathrm{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathrm{q}^{-2n+1}\xi^2)}$$

$$+ q\mathrm{q}x^2\xi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}(q\mathrm{q}x)^{-2n}}{(1+\mathrm{q}^{-1}\xi^2)(1+\mathrm{q}^{-3}\xi^2)\dots(1+\mathrm{q}^{-2n+1}\xi^2)}$$

a spojením obou výsledků nacházíme vztah

(3) $$f(x, \xi) = qx^2 f(qx, \xi) + q\mathrm{q}x^2\xi^2 f(q\mathrm{q}x, \xi)$$

Podle vzorce (2) možno levou stranu nahraditi výrazem

$$qx^2(1+\mathrm{q}\xi^2) f(qx, \mathrm{q}\xi)\,;$$

odtud plyne

$$f(qx, \xi) + \mathrm{q}\xi^2 f(q\mathrm{q}x, \xi) = (1+\mathrm{q}\xi^2) f(qx, \mathrm{q}\xi)$$

aneb, píšemeli x místo qx,

(3*) $$f(x, \mathrm{q}\xi) = \frac{f(x,\xi) + \mathrm{q}\xi^2 f(\mathrm{q}x, \xi)}{1+\mathrm{q}\xi^2}\,.$$

Funkce $f(x, \xi)$ má vůči proměnné x pouze dvě místa zvláštní, a sice $x = 0$ a $x = \infty$; vůči ξ má mimo to póly $\xi^2 = -\mathfrak{q}, -\mathfrak{q}^3, -\mathfrak{q}^5, \ldots$; abychom je odstranili, násobme ji funkcí

$$(4) \qquad \Pi(\xi, \mathfrak{q}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mathfrak{q}^{2n-1}}{\xi^2}\right) = \left(1 + \frac{\mathfrak{q}}{\xi^2}\right)\left(1 + \frac{\mathfrak{q}^3}{\xi^2}\right)\left(1 + \frac{\mathfrak{q}^5}{\xi^2}\right)$$

a znamenejme

$$(5) \qquad \varphi(x, \xi; q, \mathfrak{q}) = \Pi(\xi, \mathfrak{q}) \, . \, f(x, \xi; q, \mathfrak{q})$$

Funkce Π hoví patrně rovnici

$$(6) \qquad \Pi(\mathfrak{q}\xi, \mathfrak{q}) = \left(1 + \frac{1}{\mathfrak{q}\xi^2}\right) \Pi(\xi, \mathfrak{q}) ;$$

pomocí této relace obdržíme z rovnic (2) a (3ᵃ) základní vztahy

$$(2^*) \qquad \varphi(qx, \mathfrak{q}\xi) = \frac{1}{q\,\mathfrak{q}\,x^2\xi^2} \varphi(x, \xi),$$

$$(3^*) \qquad \varphi(x, \mathfrak{q}\xi) - \varphi(\mathfrak{q}x, \xi) = \frac{1}{\mathfrak{q}\xi^2} \varphi(x, \xi)$$

Charakteristické vlastnosti funkce $\varphi(x, \xi)$ jsou:

1. $\varphi(x, \xi)$ *jest jednoznačná analytická funkce proměnných* x, ξ, *která má jen místa zvláštní* $x = 0$ *a* $x = \infty$, *pak* $\xi = 0$ *a* $\xi = \infty$, *takže se v okolí všech míst* (x, ξ), *u nichž* $|x| > 0$, $|\xi| > 0$, *chová pravidelně; a mimo to*

2. *hoví* $\varphi(x, \xi)$ *základním rovnicím* (2*) *a* (3*) *a jest sudou.*

Z prvé vlastnosti plyne, že lze funkci φ vyjádřiti řadou stále konvergentní

$$\varphi(x, \xi) = \sum_{m,n} A_{m,n} \xi^{2m} x^{2n}, \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

A tu je z definice funkce φ patrno, že

3. *stálý člen* $A_{0,0}$ *mocninového rozvoje funkce* $\varphi(x, \xi)$ *rovná se* 1.

Vlastnostmi 1., 2. a 3. jest funkce $\varphi(x, \xi)$ úplně dána; neboť možno z nich vyvoditi její výraz, t. j. určiti koefficienty $A_{m,n}$. Rovnice (2*) a (3*) poskytnou totiž

$$\sum A_{m,n} \mathfrak{q}^{2m+1} q^{2n+1} \xi^{2m+2} x^{2n+2} = \sum A_{m,n} \xi^{2m} x^{2n},$$

$$\sum A_{m,n} (\mathfrak{q}^{2m+1} - \mathfrak{q}^{2n+1}) \xi^{2m+2} x^{2n} = \sum A_{m,n} \xi^{2m} x^{2n},$$

porovnáním koefficientů máme odtud vztahy

$$(\alpha) \qquad A_{m,n} \mathfrak{q}^{2m+1} q^{2n+1} = A_{m+1,n+1},$$

$$(\beta) \qquad A_{m,n} (\mathfrak{q}^{2m+1} - \mathfrak{q}^{2n+1}) = A_{m+1,n}.$$

Klademeli v rovnici (β) po řadě $m = n, n+1, n+2, \ldots$, obdržíme $A_{n+1,n} = 0$, $A_{n+2,n} = 0$, $A_{n+3,n} = 0, \ldots$, takže bude vždy $A_{m,n} = 0$, jeli $m > n$.

Jeli však $m < n$, položme do (β) za m hodnoty $m, m+1, m+2, \ldots$ $n-1$ a znásobme výsledky; i obdržíme

$$A_{m,n}(\mathfrak{q}^{2m+1}-\mathfrak{q}^{2n+1})(\mathfrak{q}^{2m+3}-\mathfrak{q}^{2n+1})\ldots(\mathfrak{q}^{2n-1}-\mathfrak{q}^{2n+1}) = A_{n,n}$$

a zbývá jen určiti $A_{n,n}$. Tu nám poskytne rovnice (α) vztah

$$(\alpha') \qquad A_{n,n}(\mathfrak{q}\,q)^{2n+1} = A_{n+1,n+1};$$

odtud shledáme, že bude

$$A_{n,n} = A_{0,0}(q\,\mathfrak{q})^{n^2} = (q\,\mathfrak{q})^{n^2},$$

ježto dle supposice $A_{0,0} = 1$.

Máme tedy

$$A_{n,n} = (q\,\mathfrak{q})^{n^2}, \qquad A_{m,n} = 0 \quad \text{pro } m > n,$$

a pro $m < n$

$$A_{m,n} = \frac{(q\,\mathfrak{q})^{n^2}}{(\mathfrak{q}^{2n-1}-\mathfrak{q}^{2n+1})(\mathfrak{q}^{2n-3}-\mathfrak{q}^{2n+1})(\mathfrak{q}^{2n-5}-\mathfrak{q}^{2n+1})\ldots(\mathfrak{q}^{2m+1}-\mathfrak{q}^{2n+1})}$$

čili

$$A_{m,n} = \frac{q^{n^2}\mathfrak{q}^{m^2}}{(1-\mathfrak{q}^2)(1-\mathfrak{q}^4)(1-\mathfrak{q}^6)\ldots(1-\mathfrak{q}^{2n-2m})}$$

následovně máme pro funkci φ výraz

$$(7) \qquad \varphi(x,\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}\mathfrak{q}^{n^2}x^{2n}\xi^{2n} + \sum_{m<n} \frac{q^{n^2}\mathfrak{q}^{m^2}x^{2n}\xi^{2m}}{(1-\mathfrak{q}^2)(1-\mathfrak{q}^4)\ldots(1-\mathfrak{q}^{2n-2m})},$$

čili, píšemeli $n - m = \nu$,

$$(7^*) \qquad \varphi(x,\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}\mathfrak{q}^{m^2}(x\xi)^{2m} + \sum_{m,\nu} \frac{q^{(m+\nu)^2}\mathfrak{q}^{m^2}x^{2m+2\nu}\xi^{2m}}{(1-\mathfrak{q}^2)(1-\mathfrak{q}^4)(1-\mathfrak{q}^6)\ldots(1-\mathfrak{q}^{2\nu})},$$

$$\left(\begin{matrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\ \nu = 1, 2, 3, 4, \end{matrix}\right)$$

2. Buďtež nyní τ_1, τ_2 veličiny komplexní o kladné části pomyslné a w_1, w_2 neodvisle proměnné; klademeli

$$q = e^{\tau_1\pi i}, \quad \mathfrak{q} = e^{\tau_2\pi i}, \quad x = e^{w_1\pi i}, \quad \xi = e^{w_2\pi i},$$

přejde funkce φ v celistvou funkci transcendentní proměnných w_1, w_2

$$(8) \qquad \varphi(e^{w_1\pi i}, e^{w_2\pi i}; e^{\tau_1\pi i}, e^{\tau_2\pi i}) = \Phi(w_1, w_2 \;\; \tau_1, \tau_2),$$

která hoví podmínkám

$$(9) \qquad \begin{cases} \Phi(w_1+1, w_2) = \Phi(w_1, w_2+1) = \Phi(w_1, w_2), \\ \Phi(w_1+\tau_1, w_2+\tau_2) = e^{-\pi i(2w_1+2w_2+\tau_1+\tau_2)}\Phi(w_1, w_2), \\ \Phi(w_1, w_2+\tau_2) - \Phi(w_1+\tau_2, w_2) = e^{-\pi i(2w_2+\tau_2)}\Phi(w_1, w_2), \end{cases}$$

jež plynou z rovnic (2^*) a (3^*).

Vložímeli do rovnice (7) a provedemeli součet vůči m, obdržíme

$$(10)\quad \Phi(w_1, w_2 \mid \tau_1, \tau_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{e^{\pi i(\nu^2\tau_1 + 2\nu w_1)}\,\vartheta_3(w_1 + w_2 + \nu\tau_1 \mid \tau_1 + \tau_2)}{\prod\limits_{a=1}^{\nu}(1 - e^{2a\tau_1\pi i})},$$

při čemž má symbol $\prod\limits_{a=1}^{\nu}$ přejíti v 1, jeli $\nu = 0$.

Klademeli za τ_2 násobky veličiny τ_1, přejde Φ ve funkce theta vyšších řádů; kladme zvláště $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, $w_1 = v_1 + u$, $w_2 = v_2 + u$, pak bude

$$\Phi(v_1 + u, v_2 + u \mid \tau, \tau) = F(u)$$

celistvá funkce proměnné u, jež hoví podmínkám

$$F(u+1) = F(u), \quad F(u+\tau) = e^{-2\pi i(v_1 + v_2 + 2u + \tau)}\,F(u),$$

z čehož plyne, že $F\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right)$ je funkcí theta řádu 2 a známky 00, takže existují konstanty A, B, tak aby

$$F(u) = A\,\vartheta_1^2\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2} \,\Big|\, \tau\right) + B\,\vartheta_2^2\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2} \,\Big|\, \tau\right)$$

Abychom tyto konstanty určili, položme jednou $u = -\frac{v_1 + v_2}{2}$ po druhé $\frac{1 - v_1 - v_2}{2}$, čímž obdržíme

$$F\left(\frac{1 - v_1 - v_2}{2}\right) = A\,\vartheta_2^2,$$

$$F\left(-\frac{v_1 + v_2}{2}\right) = B\,\vartheta_2^2,$$

kde psáno jako ve všech našich publikacích ϑ_2 místo $\vartheta_2(0 \mid \tau)$; zbývá tedy určiti veličiny

$$F\left(\frac{1 - v_1 - v_2}{2}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2} + \frac{v_1 - v_2}{2}, \frac{1}{2} + \frac{v_2 - v_1}{2}\right),$$

$$F\left(-\frac{v_1 + v_2}{2}\right) = \Phi\left(\frac{v_1 - v_2}{2}, \frac{v_2 - v_1}{2}\right),$$

při čemž parametry τ_1, τ_2 funkce Φ mají společnou hodnotu τ. Výrazy tyto jsou tvaru

$$\Phi(z, -z),$$

a tato veličina má dle (10) hodnotu

$$\Phi(z, -z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu^2} e^{2\nu z\pi i}\,\vartheta_3(\nu\tau \mid 2\tau)}{(1 - q^2)(1 - q^4)\ldots(1 - q^{2\nu})}, \quad (q = e^{\tau\pi i}).$$

Jeli ν sudé, bude

$$\vartheta_3(\nu\tau \mid 2\tau) = q^{-\frac{1}{2}\nu^2}\,\vartheta_3(0 \mid 2\tau);$$

jeli však ν liché $= 2\mu + 1$, bude

$$\vartheta_3(\nu\tau \mid 2\tau) = \vartheta_3(\tau + 2\mu\tau \mid 2\tau) = q^{-2\mu^2}\,\vartheta_3(\tau \mid 2\tau) = q^{-2\mu^2 - \frac{1}{2}}\,\vartheta_2(0 \mid 2\tau);$$

máme tedy

$$\Phi(z, -z) = \vartheta_3(0 \mid 2\tau) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q^{2\mu^2} e^{4\mu z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{4\mu})}$$

$$+ \vartheta_2(0 \mid 2\tau) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q^{2\mu^2+4\mu+\frac{1}{2}} e^{(4\mu+2) z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{4\mu+2})}.$$

Znamenámeli tedy

$$(11)\begin{cases} \psi_0(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q^{2\mu^2} e^{4\mu z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-q^{4\mu})} = 1 + \frac{q^2 e^{4z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^4)} + \ldots, \\ \psi_1(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{q^{2\mu^2+4\mu+\frac{1}{2}} e^{(4\mu+2) z\pi i}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-q^{4\mu+2})} = \frac{q^{\frac{1}{2}} e^{2z\pi i}}{1-q^2} + . \end{cases}$$

bude

$$(12)\qquad \Phi(z, -z \mid \tau, \tau) = \vartheta_3(0 \mid 2\tau)\, \psi_0(z) + \vartheta_2(0 \mid 2\tau)\, \psi_1(z).$$

Naše konstanty A, B budou dle toho dány rovnicemi

$$A\,\vartheta_2{}^2 = \vartheta_3(0 \mid 2\tau)\, \psi_0\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right) - \vartheta_2(0 \mid 2\tau)\, \psi_1\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right),$$

$$B\,\vartheta_2{}^2 = \vartheta_3(0 \mid 2\tau)\, \psi_0\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right) + \vartheta_2(0 \mid 2\tau)\, \psi_1\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right),$$

a tudíž máme výsledek

$$(13)\begin{cases} \vartheta_2{}^2\, \Phi(v_1 + u, v_2 + u \mid \tau, \tau) \\ = \left\{\vartheta_3(0 \mid 2\tau)\, \psi_0\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right) - \vartheta_2(0 \mid 2\tau)\, \psi_1\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right)\right\} \vartheta_1{}^2\left(u + \frac{v_1 - v_2}{2} \,\middle|\, \tau\right) \\ + \left\{\vartheta_3(0 \mid 2\tau)\, \psi_0\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right) + \vartheta_2(0 \mid 2\tau)\, \psi_1\left(\frac{v_1 - v_2}{2}\right)\right\} \vartheta_2{}^2\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2} \,\middle|\, \tau\right). \end{cases}$$

Klademeli zde $v_1 = v_2 = 0$, vznikne

$$(13^a)\begin{cases} \vartheta_2{}^2\, \Phi(u, u \mid \tau, \tau) = \left[\psi_0\, \vartheta_3(0 \mid 2\tau) - \psi_1\, \vartheta_2(0 \mid 2\tau)\right] \vartheta_1{}^2(u \mid \tau) \\ \qquad + \left[\psi_0\, \vartheta_3(0 \mid 2\tau) + \psi_1\, \vartheta_2(0 \mid 2\tau)\right] \vartheta_2{}^2(u \mid \tau), \end{cases}$$

při čemž znamenáno ψ_0, ψ_1 místo $\psi_0(0)$, $\psi_1(0)$. Tím ukázáno, že lze součin výrazů

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1} e^{-2nu\pi i}),$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} e^{2nu\pi i} (1 + q e^{2u\pi i})(1 + q^3 e^{2u\pi i}) \ldots (1 + q^{2n-1} e^{2u\pi i})$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2} e^{-2nu\pi i}}{(1 + q^{-1} e^{2u\pi i})(1 + q^{-3} e^{2u\pi i}) \ldots (1 + q^{-2n+1} e^{2u\pi i})}$$

vyjádřiti transcendentami elliptickými.

V.

3. Do kategorie uvažovaných výrazů spadají také ony, jež vyskytují se v theorii Heineovy obecnější řady hypergeometrické. Vyložíme zde některé zvláštní výsledky, k nimž jsme byli vedeni opětným studiem svojí práce o Schendelově zobecnění řady Taylorovy, uveřejněné v prvém ročníku Věstníka, ponechávajíce si na vhodnou příležitosť podrobiti hlubšímu studiu tento důležitý druh veličin, mathematickým úvahám dosud tak málo přístupný.

a) Buď q opětně menší jedné ve své hodnotě absolutní a hledejme, za příčinou jasnosti výkladu, známý jinak rozvoj mocninový funkce

$$f(x) = \prod_{a=0}^{\infty} \frac{1+q^a v x}{1+q^a x} ;$$

tato hoví rovnici

$$(\alpha) \qquad f(x) = \frac{1+vx}{1+x} f(qx)$$

a dá se pro dosti malá x vyjádřiti řadou tvaru

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu ,$$

a o hodnoty koefficientů A_ν této řady nám právě běží. Za tím účelem skytá nám vztah (α)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu = \frac{1+vx}{1+x} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu q^\nu x^\nu$$

vynásobímeli v levo $1+x$, a rovněž v pravo, vznikne

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (A_\nu + A_{\nu+1}) x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(A_\nu + \frac{v}{q} A_{\nu-1}\right) q^\nu x^\nu$$

tedy

$$A_\nu + A_{\nu-1} = \left(A_\nu + \frac{v}{q} A_{\nu-1}\right) q^\nu$$

čili

$$A_\nu = -\frac{1-q^{\nu-1}v}{1-q^\nu} A_{\nu-1} ;$$

píšemeli zde za ν hodnoty $1, 2, \ldots \nu$, vznikne vzhledem k okolnosti patrné, že $A_0 = 1$, vzorec

$$A_\nu = (-1)^\nu \prod_{a=1}^{\nu} \frac{1-q^{a-1}v}{1-q^a} ,$$

tedy

$$A_0 = 1 , \qquad A_1 = -\frac{1-v}{1-q} , \qquad A_2 = \frac{(1-v)(1-qv)}{(1-q)(1-q^2)} , \ldots$$

Tím dokázána důležitá věta

$$\text{(a)}\quad \left\{\begin{aligned}\prod_{a=0}^{\infty}\frac{1+q^a v x}{1+q^a x} &= 1-\frac{1-v}{1-q}x+\frac{(1-v)(1-qv)}{(1-q)(1-q^2)}x^2\\ &\quad -\frac{(1-v)(1-qv)(1-q^2v)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}x^3+\ldots,\end{aligned}\right.$$

při čemž lze pravou stranu symbolicky psáti

$$\text{(a}'\text{)}\qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-v)(1-qv)\ldots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}x^n$$

Klademeli v (a) za v nullu, vznikne

$$\text{(b)}\quad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{\prod\limits_{a=0}^{\infty}(1+q^a x)} &= 1-\frac{x}{1-q}+\frac{x^2}{(1-q)(1-q^2)}-\frac{x^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\ldots\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)};\end{aligned}\right.$$

píšemeli dále v (a) u místo vx, a položímeli po té $x=0$, obdržíme

$$\text{(c)}\quad \left\{\begin{aligned}\prod_{a=0}^{\infty}(1+q^a u) &= 1+\frac{u}{1-q}+\frac{q^1u^2}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^3u^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\ldots\\ &\quad +\frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}u^n}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots(1-q^n)}+\ldots\end{aligned}\right.$$

Řady (a) a (b) konvergují pouze v případě $x<1$, kdežto řada (c) je konvergentní pro všecka u.

Na místě (a) pišme vzorec rovnomocný

$$\text{(a}''\text{)}\quad \prod_{a=0}^{\infty}\frac{1-q^a v x}{1-q^a x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-v)(1-qv)\ldots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}x^n,$$

a položme na okamžik

$$\begin{aligned}V&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-v)(1-qv)\ldots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{n-1})(1-q^n)^s}x^n\\ &=\frac{1-v}{(1-q)^s}x+\frac{(1-v)(1-qv)}{(1-q)(1-q^2)^s}x^2+\frac{(1-v)(1-qv)(1-q^2v)}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)^s}x^3+\ldots\end{aligned}$$

Užijemeli zde věty binomické

$$\frac{1}{(1-q^n)^s}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu q^{n\nu}\binom{-s}{\nu},$$

vznikne

$$V=\sum_{n,\nu}\frac{(1-v)(1-qv)\ldots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{n-1})}(-1)^\nu(q^\nu x)^n\binom{-s}{\nu},$$

V.

tedy

$$V=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{-s}{\nu}S_{\nu},$$

kde položeno

$$S_{\nu}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-v)(1-qv)\dots(1-q^{n-1}v)}{(1-q)(1-q^{2})\dots(1-q^{n-1})}(q^{\nu}x)^{n}$$
$$=(1-v)q^{\nu}x+\frac{(1-v)(1-qv)}{1-q}(q^{\nu}x)^{2}+\dots,$$

takže patrně

$$S_{\nu}=(1-v)q^{\nu}x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-qv)\dots(1-q^{n}v)}{(1-q)\dots(1-q^{n})}(q^{\nu}x)^{n}\right];$$

závorku lze obdržeti pomocí vzorce (a″), i bude

$$S_{\nu}=(1-v)q^{\nu}x\prod_{a=0}^{\infty}\frac{1-q^{a+\nu+1}vx}{1-q^{a+\nu}x};$$

pravou stranu lze psáti

$$(1-v)q^{\nu}x\,.\prod_{\mu=\nu}^{\infty}\frac{1-q^{\mu+1}vx}{1-q^{\mu}x},$$

a tedy bude

$$S_{\nu}=(1-v)\prod_{\mu=0}^{\infty}\frac{1-q^{\mu+1}vx}{1-q^{\mu}x}\,.\left(q^{\nu}x\prod_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{1-q^{\mu}x}{1-q^{\mu+1}x}\right),$$

kde výraz v závorce ( ) má hodnotu x, jeli $\nu=0$.

Dosazením nalezeného výrazu pro S_{ν} do řady V vznikne

$$V=(1-v)x\,.\prod_{\mu=0}^{\infty}\frac{1-q^{\mu+1}vx}{1-q^{\mu}x}$$
$$\times\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\binom{-s}{\nu}q^{\nu}\frac{(1-x)(1-qx)\dots(1-q^{\nu-1}x)}{(1-qvx)(1-q^{2}vx)\dots(1-q^{\nu}vx)}\right\}$$

Píšemeli zde $\dfrac{v}{q}$ za v, máme vztah

$$\text{(d)}\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{(1-q)^{s}}+\frac{1-v}{(1-q)(1-q^{2})^{s}}x+\frac{(1-v)(1-qv)}{(1-q)(1-q^{2})(1-q^{3})^{s}}x^{2}\\&+\frac{(1-v)(1-qv)(1-q^{2}v)}{(1-q)(1-q^{2})(1-q^{3})(1-q^{4})^{s}}x^{3}+\dots\\&=\frac{(1-vx)(1-qvx)(1-q^{2}vx)(1-q^{3}vx)\dots}{(1-x)(1-qx)(1-q^{2}x)(1-q^{3}x)\dots}\\&\times\left[1+\binom{s}{1}q\frac{1-x}{1-vx}+\binom{s+1}{2}q^{2}\frac{(1-x)(1-qx)}{(1-vx)(1-qvx)}\right.\\&\left.+\binom{s+2}{3}q^{3}\frac{(1-x)(1-qx)(1-q^{2}x)}{(1-vx)(1-qvx)(1-q^{2}vx)}+\dots\right]\end{aligned}\right.$$

Zde opět kladme $v=0$, abychom měli zvláštní případ

$$
\text{(e)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{1}{(1-q)^s}+\dfrac{x}{(1-q)(1-q^2)^s}+\dfrac{x^2}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)^s} \\
\qquad +\dfrac{x^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)^s}+\dots \\
=\dfrac{1+\binom{s}{1}q(1-x)+\binom{s+1}{2}q^2(1-x)(1-qx)+\binom{s+2}{3}q^3(1-x)(1-qx)(1-q^2x)+\dots}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\dots}
\end{cases}
$$

Mimo to pišme v (d) $vx=u$ a po té kladme $x=0$, čímž vznikne

$$
\text{(f)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{1}{(1-q)^s}-\dfrac{u}{(1-q)(1-q^2)^s}+\dfrac{q^1u^2}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)^s}-\dots \\
\qquad +\dfrac{(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}u^n}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)(1-q^{n+1})^s}+\dots \\
=(1-u)(1-qu)(1-q^2u)(1-q^3u)\dots \\
\qquad \times\left[1+\binom{s}{1}\dfrac{q}{1-u}+\binom{s+1}{2}\dfrac{q^2}{(1-u)(1-qu)}\right. \\
\qquad \left.+\binom{s+2}{3}\dfrac{q^3}{(1-u)(1-qu)(1-q^2u)}+\dots\right]
\end{cases}
$$

Abychom uvedli další důsledek vzorce (d), differencujme vůči v a kladme po té $v=1$; i obdržíme tak identitu

$$
\text{(g)}\quad
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^\nu x}{1-q^\nu x}=(1-q)^s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1-q^n)(1-q^{n+1})^s} \\
\qquad \displaystyle +(1-q)^s\sum_{n=1}^{\infty}\binom{s+n-1}{n}q^n\sum_{\varkappa=0}^{n-1}\frac{q^\varkappa x}{1-q^\varkappa x},
\end{cases}
$$

z níž specialisováním hodnot s a x lze obdržeti množství výrazů pro řadu Lambertovu.