

Jürgen Eichhorn

Yang-Mills-Theorie über offenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

In: Zdeněk Frolík and Vladimír Souček and Jiří Vinárek (eds.): Proceedings of the Winter School "Geometry and Physics". Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1985. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Supplemento No. 9. pp. [61]–72.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/701390>

Terms of use:

© Circolo Matematico di Palermo, 1985

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

YANG-MILLS-THEORIE ÜBER OFFENEN RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN

Jürgen Eichhorn

1. Einleitung

In den letzten 7 Jahren wurden in einer Fülle von Arbeiten differentialgeometrische Methoden und solche aus der algebraischen Geometrie auf die Theorie der Yang-Mills-Felder angewendet. Grundsätzliche Voraussetzung hierbei war, daß die unterliegende 4-dimensionale Mannigfaltigkeit kompakt oder der \mathbb{R}^4 war. Für offene $M^4 \neq \mathbb{R}^4$ fallen wesentliche Säulen des angewendeten Begriffsapparates weg. Eine Vielzahl von Schwierigkeiten tritt auf. Die vorliegende Arbeit ist die erste einer Serie von Arbeiten, die der Yang-Mills-Theorie auf offenen Mannigfaltigkeiten gewidmet sind. Sie hat zum großen Teil einführenden Charakter. Im §2 werden die bekannten Begriffe der Yang-Mills-Theorie zusammengestellt und Topologien eingeführt, die der Offenheit von M Rechnung tragen. Der §3 ist der 4-dimensionalen Theorie gewidmet. Als besonders interessantes Phänomen ergeben sich L_2 -charakteristische Zahlen. Satz 3.6 schließlich ist ein sehr einfacher Satz über die Isolation flacher Yang-Mills-Felder, der unmittelbar aus Abschätzungen von Min-Oo und Dodziuk folgt.

2. Der Raum der Zusammenhänge über offenen Mannigfaltigkeiten

Seien G eine kompakte Liegruppe mit der Liealgebra \mathfrak{g} ,

$\rho: G \rightarrow O_N$ eine treue Darstellung, (M^n, g) eine glatte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $P = P(M, G)$ ein G -Hauptfaserbündel. Ein Bündelatlas $\{(U_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)\}_\alpha$, $\mathcal{L}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times G$,

$\mathcal{L}_\alpha(u) = (\pi(u), h_\alpha(u))$, definiert lokale Schnitte

$\mathcal{L}_\alpha: U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$, $\mathcal{L}_\alpha(x) = u \cdot h_\alpha(u)^{-1}$, $u \in \pi^{-1}(x)$, und Übergangsfunktionen $\psi_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ durch $\psi_{\alpha\beta}(x) = h_\alpha(u)h_\beta(u)^{-1}$, $u \in \pi^{-1}(x)$. Zu P sind vermöge $\text{Ad}: G \rightarrow G$, $\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$,

$\rho: G \rightarrow O_N \in GL(\mathbb{R}^N)$ die Bündel $G_P = P \times_G G$, $\mathfrak{g}_P = P \times_G \mathfrak{g}$, $F = P \times_G \mathbb{R}^N$, $O_F = P \times_G O_N$, $\mathcal{L}_O = P \times_G \mathcal{L}_O$ assoziiert. Man hat Einbettungen $i_1: G_P \rightarrow O_F$, $i_2: \mathfrak{g}_P \rightarrow \mathcal{L}_O$. Sei $G_E = \text{im } i_1$, $\mathfrak{g}_E = \text{im } i_2$.

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

Dann gilt natürlich $G_P \cong G_F$, $\mathfrak{g}_P \cong \mathfrak{g}_F$. Ein Bündelautomorphismus $f: P \rightarrow P$ über id_M , $f(ua) = f(u)a$, $a \in G$, heißt Fichtransformation. Die Menge aller Fichtransformationen bildet eine Gruppe, die Fichgruppe $\mathcal{L} = \mathcal{L}_P \cdot \mathcal{L}_P$ kann mit den Schnitten $C^\infty(G_P)$ identifiziert werden. Entsprechend wird definiert $\mathcal{L}_F = C^\infty(G_F) \cong \mathcal{L}_P \cdot f \in \mathcal{L}_P$ definiert lokal Funktionen $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow G$ durch $f(\phi_\alpha(x)) = \phi_\alpha(x) \cdot f_\alpha(x)$. Sei $x_0 \in M$ fixiert. \mathcal{L}_P enthält die Gruppe $\mathcal{L}_{P, x_0} = \{g \in \mathcal{L}_P \mid g(x_0) = \text{id}_{\pi^{-1}(x_0)}\}$ als Normalteiler, und es gilt $\mathcal{L}_P / \mathcal{L}_{P, x_0} \cong G$. Die reduzierte Fichgruppe $\overline{\mathcal{L}}_P$ wird definiert durch $\overline{\mathcal{L}}_P = \mathcal{L}_P / Z(\mathcal{L}_P)$, wobei $Z(\mathcal{L}_P)$ das Zentrum von \mathcal{L}_P bezeichnet. $\mathfrak{g}_P = C^\infty(\mathfrak{g}_P) \cong C^\infty(\mathfrak{g}_F) = \mathfrak{g}_E$ bildet eine Liealgebra. \mathfrak{g}_{P, x_0} wird definiert durch $\mathfrak{g}_{P, x_0} = \{\xi \in \mathfrak{g}_P \mid \xi(x_0) = 0\} \cong \mathfrak{g}_{E, x_0}$. Die Faser von $\mathfrak{g}_E \cong \mathfrak{g}_P$ über x besteht aus schiefssymmetrischen Endomorphismen von F_x , und man hat ein kanonisches Skalarprodukt (\cdot, \cdot) vermöge $(A, B) = \frac{1}{2} \text{tr}(A^t \circ B)$. Dies erfüllt die Ungleichung $\| [A, B] \| = \sqrt{2} \|A\| \|B\|$. Wie üblich bezeichne für ein Vektorbündel F über M $\Omega^p(F)$ den Vektorraum der p -Formen auf M mit Werten in F . Insbesondere ist $\Omega^0(F) = C^\infty(F)$.

Ein Zusammenhang für P bzw. F ist gegeben durch jedes der nachfolgenden Objekte,

1. durch ein Feld horizontaler Teilräume $H_u \subset T_u P$, $H_{ua} = (R_a)^* H_u$,
2. durch eine Zusammenhangsform $\omega: TP \rightarrow \mathfrak{g}$, $(R_a)^* \omega = \text{ad}(a^{-1}) \omega$,
3. durch ein Feld horizontaler Teilräume in TF ,
4. durch eine kovariante Ableitung $\nabla^\omega: \Omega^0(F) \rightarrow \Omega^1(F)$.

\mathcal{E}_P bzw. \mathcal{E}_F bezeichne die Menge der Zusammenhänge auf P bzw. F . Sei Θ die kanonische Form auf G . Lokal erhält man mit

$$\begin{aligned} \omega_\alpha &= \phi_\alpha^* \omega, \quad \Theta_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}^* \Theta \quad \text{durch Differentiation von} \\ \phi_\beta(x) &= \phi_\alpha(x) \cdot \psi_{\alpha\beta}(x) \\ \omega_\beta &= \phi_\beta^* \omega = \text{ad}(\psi_{\alpha\beta}(x)^{-1}) \omega_\alpha + \Theta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\text{und} \quad \omega = \text{ad}(h_\alpha^{-1}) \pi^* \omega_\alpha + h_\alpha^* \Theta. \tag{2.2}$$

\mathcal{L}_P wirkt auf \mathcal{E}_P vermöge $\omega \cdot g := g^* \omega$. g definiert lokal Abbildungen $g_\alpha: U_\alpha \rightarrow G$ durch $g(\phi_\alpha(x)) = \phi_\alpha(x) \cdot g_\alpha(x)$. In lokalen Koordinaten gilt $\phi_\alpha^*(\omega \cdot g) = \phi_\alpha^*(g^* \omega) = (g \phi_\alpha)^* \omega = (\phi_\alpha g_\alpha)^* \omega = \text{ad}(g_\alpha^{-1}) \omega_\alpha + g_\alpha \Theta$, also

$$(\omega \cdot g)_\alpha = \text{ad}(g_\alpha^{-1}) \omega_\alpha + g_\alpha \Theta. \tag{2.3}$$

$$\mathcal{L}_E \text{ wirkt auf } \mathcal{E}_E \text{ vermöge} \\ \nabla(\omega \cdot g) = g^{-1} \nabla^\omega \omega \cdot g. \tag{2.4}$$

Jede kovariante Ableitung ∇^ω auf E induziert eine kovariante Ableitung ∇^ω auf \mathfrak{g}_E . Für $\mathcal{Y} \in \Omega^0(\mathfrak{g}_E)$ wird definiert

$$\nabla^\omega \mathcal{Y} = [\nabla^\omega, \mathcal{Y}]$$

d.h. für $\mathcal{Y} \in \Omega^0(E)$ $(\nabla^\omega \mathcal{Y})(\phi) = \nabla^\omega(\mathcal{Y}(\phi)) - \mathcal{Y}(\nabla^\omega \phi)$.

Wir bezeichnen i.f. wegen der eindeutigen Beziehung die kovariante Ableitung ∇^ω auch als einen Zusammenhang. Sind ω, ω' Zusammenhänge auf \mathcal{G}_F , so gilt

$$\nabla^\omega - \nabla^{\omega'} = [\omega - \omega', \cdot]. \quad (2.5)$$

Für ein Vektorbündel F induziert ein Zusammenhang $\nabla^\omega: \Omega^0(F) \rightarrow \Omega^1(F)$ Differentiale $d^\omega: \Omega^p(F) \rightarrow \Omega^{p+1}(F)$ vermöge

$$d^\omega(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^p \alpha \otimes \nabla^\omega s \quad (2.6)$$

und linearer Fortsetzung. Für $p=0$ gilt $d^\omega = \nabla^\omega$. Die Krümmungs-2-Form $R^\omega = d^\omega d^\omega = d^\omega \nabla^\omega \in \Omega^2(\text{End } F)$ erfüllt die Gleichung $R^\omega_{X,Y}(s) = (d^\omega \nabla^\omega s)_{X,Y} = [\nabla^\omega_X, \nabla^\omega_Y]s - \nabla^\omega_{[X,Y]}s$, wobei $\nabla^\omega_X s = (\nabla s)(X)$ ist. ω ist flach, falls $R^\omega = 0$, d.h. $d^\omega d^\omega = 0$ ist.

Das nächste Ziel ist die Einführung geeigneter Topologien in $\mathcal{G}_F, \mathcal{G}_E, \mathcal{G}_P, \mathcal{G}_F, \mathcal{L}_P, \mathcal{L}_E$. Dazu betrachten wir die Liealgebra $\mathfrak{M}(N, \mathbb{R})$ aller N -reihigen quadratischen reellen Matrizen. Aus den Darstellungen $\mathfrak{g}: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{o}_N, \mathfrak{g}_E: \mathfrak{G}_E \rightarrow \mathfrak{o}_N \subset \mathfrak{M}(N, \mathbb{R})$ erhält man $\mathfrak{G}_E, \mathfrak{G}_F \subseteq \mathfrak{E}_M = \mathfrak{P} \times_{\mathfrak{G}} \mathfrak{M}(N, \mathbb{R}), \mathfrak{G}_E \subset C^\infty(\mathfrak{E}_M), \mathfrak{G}_F \subset C^\infty(\mathfrak{E}_M)$. Eine Topologie auf $\mathfrak{A} := C^\infty(\mathfrak{E}_M)$ induziert eine solche auf $\mathcal{G}_F, \mathfrak{G}_F$. Wir fixieren von nun ab eine lokal endliche Überdeckung $\{(U_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)\}_\alpha$ von M^n durch Bündelkarten und Karten $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}_\alpha$ für M^n . Ist $l = (l_1, \dots, l_n)$ ein Multiindex, so sind die Ausdrücke $D^l(\chi_\alpha(f-g)\chi_\alpha^{-1}), \int_{U_\alpha} \sum_{|l| \leq k} |D^l(\chi_\alpha(f-g)\chi_\alpha^{-1})|^2 d\text{vol} = \|f-g\|_{\alpha,k}^2$ für $f, g \in \mathfrak{A}$ wohldefiniert. Hierbei ist $|f-g|^2 = (f-g, f-g) = \frac{1}{2} \text{tr}((f-g)^t \cdot (f-g))$ und $d\text{vol}$ die durch die Riemannsche Metrik definierte Volumenform. Wir setzen jetzt für $f \in \mathfrak{A}, \varepsilon > 0, k \in \mathbb{Z}_+$

$$U_{\varepsilon,k}(f) = \{g \in \mathfrak{A} \mid (\sum_{\alpha} \|f-g\|_{\alpha,k}^2)^{1/2} < \varepsilon\}. \quad (2.7)$$

Das System aller $U_{\varepsilon,k}(f), \varepsilon > 0, f \in \mathfrak{A}$, definiert dann eine lokal metrisierbare Topologie auf \mathfrak{A} . $\mathcal{G}_F, \mathfrak{G}_F$ werden für jedes $k \geq 0$ mit der Spurtopologie versehen, und wir erhalten Räume $\mathcal{G}_{E,k}, \mathfrak{G}_{F,k}$. Wegen der Isomorphie $\mathcal{G}_E \cong \mathcal{G}_P, \mathfrak{G}_F \cong \mathfrak{G}_P$ werden $\mathcal{G}_P, \mathfrak{G}_P$ entsprechend topologisiert. Die Räume $\mathcal{G}_{E,k}, \mathfrak{G}_{F,k}$ sind nicht vollständig. Die Vervollständigungen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_{E,k}^k$ usw.. $\mathcal{G}_{E,0}$ enthält als Untergruppe alle Eichtransformationen mit kompaktem Träger, wobei für $f \in \mathcal{G}_F$ der Träger definiert ist durch $\text{supp } f = \text{cl} \{x \in M \mid \pi^{-1}(x) = \text{id } \pi^{-1}(x)\}$. Allerdings ist die Abschließung dieser Untergruppe nicht notwendig gleich $\mathcal{G}_{E,0}^0$. Hierfür konstruiert man sehr einfach geometrische Beispiele $P(M, G), M$ offen.

$\Omega_0^p(F)$ seien die Formen mit kompaktem Träger. $\Omega_0^p(F)$ besitzt ein natürliches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_M (\varphi, \psi)_x d\text{vol}_x, \quad (2.8)$$

wobei $(\mathcal{Y}, \Psi)_X = \sum_{i_1, \dots, i_p} (\mathcal{Y}_{e_{i_1}, \dots, e_{i_p}}, \Psi_{e_{i_1}, \dots, e_{i_p}})$ und e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis in $T_x M$ ist. Diese Definition stimmt für $\mathcal{Y} = \alpha \otimes s, \Psi = \beta \otimes s'$ mit

$$\langle \mathcal{Y}, \Psi \rangle = \int_M (s, s') \alpha \wedge * \beta \tag{2.9}$$

überein. Man kann auch mit (2.9) starten und allgemein durch lineare Fortsetzung definieren. Für $F = \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_P$ erhält man dann

$$\langle \alpha \otimes s, \beta \otimes s' \rangle = \frac{1}{2} \int_M \text{tr}(s^t \cdot s') \alpha \wedge * \beta \tag{2.10}$$

Sei $\omega \hat{=} \nabla^\omega$ ein Zusammenhang. Der zu $d^\omega : \Omega_o^p(\mathcal{O}_F) \rightarrow \Omega_o^{p+1}(\mathcal{O}_F)$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ adjungierte Operator werde mit δ^ω bezeichnet, $\langle d^\omega \mathcal{Y}, \Psi \rangle = \langle \mathcal{Y}, \delta^\omega \Psi \rangle, \mathcal{Y} \in \Omega_o^p(\mathcal{O}_F), \Psi \in \Omega_o^{p+1}(\mathcal{O}_F)$. $\Omega_o^p(\mathcal{O}_F)$ wird vermöge (2.10) und linearer Fortsetzung Prähilbertraum mit

$\|\mathcal{Y}\|_o^2 = \|\mathcal{Y}\|^2 = \langle \mathcal{Y}, \mathcal{Y} \rangle$. Die Vervollständigung werde mit $\Omega^{p,o}(\mathcal{O}_E)$ bezeichnet. $\Omega^{p,o}(\mathcal{O}_E)$ ist der Hilbertraum aller meßbaren quadratintegrierbaren p -Formen mit Werten in \mathcal{O}_E . Versieht man $\Lambda^{p, T^*M} \otimes \mathcal{O}_F$ mit dem aus dem Levi-Civita-Zusammenhang und dem von ∇^ω herrührenden Produktzusammenhang, der wieder mit ∇^ω bezeichnet werde, so gilt

$$(d^\omega \mathcal{Y})_{X_0, \dots, X_p} = \sum_{k=0}^p (-1)^k (\nabla_{X_k}^\omega \mathcal{Y})_{X_0, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_p},$$

$$(\delta^\omega \mathcal{Y})_{X_1, \dots, X_{p-1}} = - \sum_{j=1}^n (\nabla_{e_j}^\omega \mathcal{Y})_{e_j, X_1, \dots, X_{p-1}}.$$

Hierbei ist e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis in $T_x M$.

$\Delta^\omega = d^\omega \delta^\omega + \delta^\omega d^\omega : \Omega_o^p(\mathcal{O}_E) \rightarrow \Omega_o^p(\mathcal{O}_E)$ heißt der zu ω gehörige Laplaceoperator. Sei S eine Menge von Polynomen in d^ω und δ^ω , z.B. $S = \{d^\omega\}, S = \{\delta^\omega\}, S = \{d^\omega \delta^\omega + \delta^\omega d^\omega\} = \{\Delta^\omega\}$ oder $S = \{(\Delta^\omega)^0, (\Delta^\omega)^1, \dots, (\Delta^\omega)^k\}$. Dann definieren wir $\Omega_S^p(\mathcal{O}_F, \omega) = \{\mathcal{Y} \in \Omega^{p,o}(\mathcal{O}_F) \cap \Omega^p(\mathcal{O}_E) \mid \|\mathcal{Y}\|_o^2 = \langle D \mathcal{Y}, D \mathcal{Y} \rangle < \infty \text{ für jedes } D \in S\}$,

$\Omega^{p,S}(\mathcal{O}_F, \omega) =$ Abschließung von $\Omega_S^p(\mathcal{O}_F, \omega)$ bezüglich der Norm

$$\|\mathcal{Y}\|_S^2 = \|\mathcal{Y}\|_o^2 + \sum_{D \in S} \|D \mathcal{Y}\|_o^2,$$

$\Omega^{p,S}(\mathcal{O}_F, \omega) =$ Abschließung von $\Omega_o^p(\mathcal{O}_E)$ in $\Omega^{p,S}(\mathcal{O}_F, \omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_S$. Im Fall geschlossener Mannigfaltigkeiten gilt für $\omega, \omega' \in \Omega^{p,S}(\mathcal{O}_F, \omega) = \Omega^{p,S}(\mathcal{O}_F, \omega')$. Für offene Mannigfaltigkeiten ist dies i.a. falsch.

Jetzt können wir $\mathcal{L}_P \cong \mathcal{L}_E$ mit einer geeigneten Topologie versehen. Seien $\omega \in \mathcal{L}_P, \varepsilon > 0$. Dann definieren wir

$$U_{\varepsilon,0}(\omega) = \left\{ \omega' \in \mathcal{L}_P \mid \omega - \omega' \in \Omega^{1,0}(\mathcal{O}_E), \|\omega - \omega'\|_o < \varepsilon \right\}.$$

Das System aller $U_{\varepsilon,0}(\omega), \omega \in \mathcal{L}_P, \varepsilon > 0$, erzeugt eine wohlbe-

stimmte lokal metrisierbare Topologie auf \mathcal{C}_P . Der entstehende Raum werde mit $\mathcal{C}_{P,0}$ bezeichnet. $\mathcal{C}_{P,0}$ ist nicht vollständig. \mathcal{C}_P^0 sei die Vervollständigung.

Lemma 2.1. Seien $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_P, \omega - \omega' \in \Omega^{1,0}(\mathfrak{g}_E) \cap \Omega^1(\mathfrak{g}_F)$.

a. Es ist $\eta \in \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$ genau dann, wenn $\eta \in \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_F, \omega')$.

b. Es ist $\eta \in \Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$ genau dann, wenn $\eta \in \Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_F, \omega')$.

Beweis. a. Sei $\eta \in \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$. Dann gilt gemäß (2.5), (2.6)

$$\|d^{\omega'} \eta\| \leq \| (d^{\omega'} - d^{\omega}) \eta \| + \| d^{\omega} \eta \| = \| [\omega' - \omega, \eta] \| + \| d^{\omega} \eta \| = C \|\omega - \omega'\| \|\eta\| + \|d^{\omega} \eta\| < \infty. \text{ Vertauschung von } \omega \text{ und } \omega' \text{ ergibt die andere Beweisrichtung.}$$

b. Aus $\eta \in \Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$ folgt

$$\|s^{\omega'} \eta\| \leq \| (s^{\omega'} - s^{\omega}) \eta \| + \| s^{\omega} \eta \| = \| * (d^{\omega'} - d^{\omega}) * \eta \| + \| s^{\omega} \eta \| = \| [\omega' - \omega, * \eta] \| + \| s^{\omega} \eta \| \leq C' \|\omega' - \omega\| \|\eta\| + \|s^{\omega} \eta\| < \infty. \text{ Die andere Beweisrichtung erhält man wieder durch Vertauschung von } \omega \text{ und } \omega'. \square$$

Folgerung 2.2. Es gilt für $\omega - \omega' \in \Omega^{1,0}(\mathfrak{g}_F)$

$$\Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) = \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega'), \quad \Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) = \Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_E, \omega'),$$

$$\Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) = \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_F, \omega'), \quad \Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) =$$

$\Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_F, \omega')$. Letzteres gilt im Sinne der Äquivalenz von Banachräumen. \square

Definition. Ein topologischer Raum T heißt lokal affin, falls zu jedem $x \in T$ eine Umgebung $U(x)$ und ein Vektorraum V_x existieren, so daß $U(x)$ ein affiner Raum mit V_x als Vektorraum ist und alle V_x isomorph sind (nicht notwendig kanonisch).

Seien $\omega \in \mathcal{C}_P, \epsilon > 0$ gegeben. Dann wird definiert

$$U_{\epsilon, \{d\}}(\omega) = \{ \omega' \in \mathcal{C}_P \mid \omega - \omega' \in \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) \text{ und } \|\omega - \omega'\|_{\{d\}} < \epsilon \},$$

$$U_{\epsilon, \{s\}}(\omega) = \{ \omega' \in \mathcal{C}_P \mid \omega - \omega' \in \Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_E, \omega) \text{ und } \|\omega - \omega'\|_{\{s\}} < \epsilon \},$$

allgemeiner

$$U_{\epsilon, S}(\omega) = \{ \omega' \in \mathcal{C}_P \mid \omega - \omega' \in \Omega^1_S(\mathfrak{g}_E, \omega) \text{ und } \|\omega - \omega'\|_S < \epsilon \}.$$

Satz 2.3. Alle $U_{\epsilon, S}(\omega), \omega \in \mathcal{C}_P, \epsilon > 0$, erzeugen auf \mathcal{C}_P eine lokal metrisierbare Topologie. Sei \mathcal{C}_P^0 die Vervollständigung des entsprechenden Raumes $\mathcal{C}_{P,S}$. Dann sind $\mathcal{C}_P^{\{d\}}$ und $\mathcal{C}_P^{\{s\}}$ lokal affine Räume.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus 2.1. Zum Beweis der 2. Behauptung setzt man $U(\omega) = \omega + \Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$ bzw. $U(\omega) = \omega + \Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_E, \omega)$. Alle $\Omega^{1,\{d\}}(\mathfrak{g}_E, \omega), \omega \in \mathcal{C}_P$, sind als separable unendlichdimensionale Hilberträume isomorph. Entsprechendes gilt für die $\Omega^{1,\{s\}}(\mathfrak{g}_E, \omega), \omega \in \mathcal{C}_P. \square$

Damit ist eine erste Strukturaussage über den Raum der Zusammenhänge gewonnen. Für spätere Anwendungen sind die nachfolgenden einfachen Lemmata von großer Bedeutung.

Lemma 2.4. Seien (M^n, g) vollständig, $\omega \in \mathcal{C}_P$. Dann gilt für jedes $\mathcal{F} \in D_{\overline{d^\omega}} = \Omega^{p, \{d\}}(\mathcal{O}_E, \omega)$, $\Psi \in D_{\overline{\sigma^\omega}} = \Omega^{p+1, \{\sigma\}}(\mathcal{O}_E, \omega)$

$$\langle \overline{d^\omega} \mathcal{F}, \Psi \rangle = \langle \mathcal{F}, \overline{\sigma^\omega} \Psi \rangle. \quad (2.11)$$

Beweis. Der Beweis verläuft wie für gewöhnliche Formen und sei der Vollständigkeit halber angegeben. Zu jedem $x_0 \in M$ existiert eine Familie $\{\lambda_R\}_R$ Lipschitz-stetiger Funktionen $\lambda_R: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften.

- a. $\text{supp } \lambda_R \subset B_{2R}(x_0)$,
- b. $0 \leq \lambda_R \leq 1$,
- c. $\lambda_R|_{B_R(x_0)} = 1$,
- d. $\lim_{R \rightarrow \infty} \lambda_R = 1$,
- e. $|\overline{d \lambda_R}| < \frac{c}{R}$ fast überall, c unabhängig von R .

Sicher gilt für die Einschränkung d_0^ω bzw. σ_0^ω von d^ω bzw. σ^ω auf Formen mit kompaktem Träger

$$\langle d_0^\omega \mathcal{F}, \Psi \rangle = \langle \mathcal{F}, \sigma_0^\omega \Psi \rangle, \quad (2.12)$$

denn aus $\mathcal{F}_\nu \rightarrow \mathcal{F}$, $d_0^\omega \mathcal{F}_\nu \rightarrow d_0^\omega \mathcal{F}$, $\Psi_\nu \rightarrow \Psi$, $\sigma_0^\omega \Psi_\nu \rightarrow \sigma_0^\omega \Psi$, $\langle d_0^\omega \mathcal{F}_\nu, \Psi_\nu \rangle = \langle \mathcal{F}_\nu, \sigma_0^\omega \Psi_\nu \rangle$ und der Stetigkeit des Skalarproduktes folgt gerade (2.12). Man hat also nur $\overline{d_0^\omega} = \overline{d^\omega}$, $\overline{\sigma_0^\omega} = \overline{\sigma^\omega}$ zu zeigen. Klar ist $\overline{d_0^\omega} \subseteq \overline{d^\omega}$. Zu zeigen ist $\overline{d^\omega} \subseteq \overline{d_0^\omega}$. Sei $\mathcal{F} \in D_{\overline{d^\omega}}$, $\mathcal{F} = \lim \mathcal{F}_\nu$. Es gilt auch $\mathcal{F} = \lim \lambda_\nu \mathcal{F}_\nu: \|\mathcal{F} - \lambda_\nu \mathcal{F}_\nu\| \leq \|\mathcal{F} - \lambda_\nu \mathcal{F}\| + \|\mathcal{F} - \mathcal{F}_\nu\| \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$. Ferner gilt $\|d^\omega \mathcal{F}_\nu - d^\omega(\lambda_\nu \mathcal{F}_\nu)\| = \|d^\omega \mathcal{F}_\nu - (d^\omega \lambda_\nu) \wedge \mathcal{F}_\nu - \lambda_\nu d^\omega \mathcal{F}_\nu\| \leq |1 - \lambda_\nu| \|d^\omega \mathcal{F}_\nu\| + \frac{c}{\nu} \|\mathcal{F}_\nu\| \rightarrow 0$. Mit der allgemeingültigen Tatsache $\overline{d_0^\omega} = \sigma^{**}$, $\overline{d^\omega} = \sigma_0^{**}$ und der eben bewiesenen Gleichung $\overline{d_0^\omega} = \overline{d^\omega}$ erhalten wir $\overline{d_0^\omega}^{**} = \sigma^{**} = \overline{\sigma^\omega}$, $\overline{d^\omega}^{**} = \sigma_0^{**} = \overline{\sigma^\omega}$. \square

Folgerung 2.5. Sind (M^n, g) vollständig, $\omega \in \mathcal{C}_P$, $\mathcal{F}, \Psi \in D_{\overline{\Delta^\omega}}$, so gilt

$$\langle \overline{\Delta^\omega} \mathcal{F}, \Psi \rangle = \langle \overline{d^\omega} \mathcal{F}, \overline{d^\omega} \Psi \rangle + \langle \overline{\sigma^\omega} \mathcal{F}, \overline{\sigma^\omega} \Psi \rangle. \quad (2.13)$$

Lemma 2.6. Seien (M^n, g) vollständig, $\omega \in \mathcal{C}_P$. Dann ist $\overline{\Delta^\omega}$ auf $\Omega_0^p(\mathcal{O}_E)$ wesentlich selbstadjungiert.

Beweis. Wir benutzen wie in [7] folgende Tatsache. Seien X ein Hilbertraum, $A: D_A \rightarrow X$ abgeschlossen, $A \geq 0$, symmetrisch, $\overline{D_A} = X$. Dann ist $A = A^*$ genau dann, wenn in D_A keine Eigenvektoren zu einem negativen Eigenwert existieren. Dies wenden wir auf $\overline{\Delta^\omega}$ an und haben zu zeigen, daß aus $\overline{\Delta^\omega} \mathcal{F} = \mu \mathcal{F}$, $\mu < 0$, $\mathcal{F} \in \Omega^{p,0}(\mathcal{O}_E)$ folgt $\mathcal{F} = 0$. Angenommen, es existiere ein $\mu < 0$, $\mathcal{F} \in \Omega^{p,0}(\mathcal{O}_E)$ mit $\overline{\Delta^\omega} \mathcal{F} = \mu \mathcal{F}$. Dann gilt gemäß Folgerung 2.5 $\mu \langle \lambda_R^2 \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle = \langle \lambda_R^2 \mathcal{F}, \overline{\Delta^\omega} \mathcal{F} \rangle = \langle d^\omega(\lambda_R^2 \mathcal{F}), d^\omega \mathcal{F} \rangle + \langle \sigma^\omega(\lambda_R^2 \mathcal{F}), \sigma^\omega \mathcal{F} \rangle = \lambda_R \langle d^\omega \mathcal{F}, d^\omega \mathcal{F} \rangle + \lambda_R^2 \langle \sigma^\omega \mathcal{F}, \sigma^\omega \mathcal{F} \rangle + 2 \langle \lambda_R d^\omega \lambda_R \mathcal{F}, d^\omega \mathcal{F} \rangle -$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \langle \mathcal{F}, \lambda_R d^\omega \lambda_R \wedge \sigma^\omega \mathcal{F} \rangle. \text{ Hieraus folgt } (\|\lambda_R d^\omega \mathcal{F}\|^2 + \|\lambda_R \sigma^\omega \mathcal{F}\|^2) \\
 & \leq 2 | \langle \lambda_R d^\omega \lambda_R \wedge \mathcal{F}, d^\omega \mathcal{F} \rangle + \langle \mathcal{F}, \lambda_R d^\omega \lambda_R \wedge \sigma^\omega \mathcal{F} \rangle | \leq \\
 & \leq 2 \frac{c}{R} \|\mathcal{F}\| (\|\lambda_R d^\omega \mathcal{F}\| + \|\lambda_R \sigma^\omega \mathcal{F}\|). \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung $a^2 + b^2 \leq c(|a| + |b|)$ impliziert $|a| + |b| \leq 2c$.

Dies angewendet auf (2.14) ergibt

$$\|\lambda_R d^\omega \mathcal{F}\| + \|\lambda_R \sigma^\omega \mathcal{F}\| \leq \frac{4c}{R} \|\mathcal{F}\|. \tag{2.15}$$

Nimmt man auf beiden Seiten von (2.15) $\lim_{R \rightarrow \infty}$, so erhält man $d^\omega \mathcal{F} = 0 = \sigma^\omega \mathcal{F}$, $\Delta^\omega \mathcal{F} = 0$, $\mathcal{F} = \mu^{-1} \Delta^\omega \mathcal{F} = 0$, also $\mathcal{F} = 0$, da \mathcal{F} eine C^∞ -Form sein muß. \square

Seien ω ein Zusammenhang auf P , $\nabla^\omega: \Omega^0(\mathfrak{g}_E) \rightarrow \Omega^1(\mathfrak{g}_E)$ die zugehörige kovariante Ableitung und R^ω die Krümmungsform. Dann wird das Yang-Mills-Funktional $\mathcal{Y}_M(\)$ definiert durch

$$\mathcal{Y}_M(\omega) := \frac{1}{2} \int_M |R^\omega|^2 \, d\text{vol} = \frac{1}{2} \int_M R^\omega \wedge * R^\omega. \tag{2.16}$$

$\mathcal{Y}_M(\)$ ist also nur für ω mit quadratintegrierbarer Krümmung definiert. Sei $\mathcal{C}_{P,f}^{(d)}$ die Menge dieser Zusammenhänge.

Lemma 2.7. a. $\mathcal{Y}_M(\)$ ist invariant, operiert also auf $\mathcal{C}_{P,f}^{(d)}$.
 b. $\mathcal{C}_{P,f}^{(d)}$ ist ein offener lokal affiner Unterraum von $\mathcal{C}_P^{(d)}$ mit $\Omega^{1,d}(\mathfrak{g}_E)$ als Vektorraum.

Beweis. Für $g \in \mathcal{G}_P$ gilt $R^{(\omega \cdot g)} = g^{-1} \cdot R^\omega \cdot g$, also
$$\int_M |R^{(\omega \cdot g)}|^2 \, d\text{vol} = \int_M |R^\omega|^2 \, d\text{vol}. \tag{2.17}$$

Ist $g \in \mathcal{G}_P$ und $(g_\nu) \rightarrow g$ eine gegen g konvergente Folge aus \mathcal{G}_P , so ist gemäß (2.17) $\int_M |R^{(\omega \cdot g_\nu)}|^2 \, d\text{vol} = \text{const}$, also gleich $\int_M |R^\omega|^2 \, d\text{vol}$.

b. Seien $\omega \in \mathcal{C}_{P,f}^{(d)}$, $U(\omega) = \omega + \Omega^{1,(d)}(\mathfrak{g}_E, \omega)$. Dann gilt für $\omega' \in U$, $\omega - \omega' = \eta$, $R^{\omega'} = R^\omega + d^\omega \eta + \frac{1}{2} [\eta, \eta]$. Hieraus folgt $|R^{\omega'}|^2 = |R^\omega|^2 + |d^\omega \eta|^2 + \frac{1}{4} |[\eta, \eta]|^2 + 2 \langle d^\omega \eta, R^\omega \rangle + \langle d^\omega \eta, [\eta, \eta] \rangle + \langle R^\omega, [\eta, \eta] \rangle$. (2.18)

Aus den Voraussetzungen $R^\omega, \eta, d^\omega \eta$ quadratintegrierbar folgt die Integrierbarkeit der rechten Seite von (2.18) und die Quadratintegrierbarkeit von $R^{\omega'}$. \square

Definition. $\omega \in \mathcal{C}_{P,f}^{(d)}$ heißt Yang-Mills-Zusammenhang, falls ω ein kritischer Punkt von $\mathcal{Y}_M(\)$ ist.

Satz 2.8. Seien (M^n, g) vollständig, $\omega \in \mathcal{C}_{P,f}^{(d)}$ und $R^\omega \in \Omega^{2,(\mathfrak{g})}, \Delta^\omega(\mathfrak{g}_E, \omega)$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig.

- a. ω ist Yang-Mills-Zusammenhang.
- b. $\int_M R^\omega = 0$.
- c. $\Delta^\omega R^\omega = 0$.

Beweis. Sei ω_t eine differenzierbare Kurve von Zusammenhängen in $\mathcal{C}_{P,f}$ mit $\omega_0 = \omega$ und $\eta_t = \omega_t - \omega$,

$\beta = \frac{d}{dt} \eta|_{t=0} \in \Omega^1, \{d\}(\mathfrak{g}_F, \omega)$. Dann gilt $R^{\omega_t} = R^\omega + d^\omega \eta_t + \frac{1}{2}[\eta_t, \eta_t]$, $\frac{d}{dt} \int_M \mathcal{M}(\omega_t)|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_M \frac{d}{dt} |R^{\omega_t}|^2|_{t=0} d\text{vol} = \int_M \left(\frac{d}{dt} R^{\omega_t}, R^{\omega_t} \right)|_{t=0} d\text{vol} = \int_M (d^\omega \beta, R^\omega) d\text{vol} = \langle d^\omega \beta, R^\omega \rangle = \langle \beta, \mathfrak{S}^\omega R^\omega \rangle$. Hieraus folgt die Gleichwertigkeit von a. und b.. In der letzten Gleichung wurde Lemma 2.4 wesentlich benutzt. Wegen der Bianchiidentität $d^\omega R^\omega = 0$ sind andererseits die Bedingungen $\mathfrak{S}^\omega R^\omega = 0$ und $\Delta^\omega R^\omega = 0$ gleichwertig. \square

Folgerung 2.9. Seien $\omega \in \mathcal{C}_{p,f}^{\{d\}}$, Δ^ω der Laplaceoperator auf den 2-Formen, $\mathfrak{L}(\Delta^\omega)$ das Spektrum und $\inf \mathfrak{L}(\Delta^\omega) > 0$. Dann ist ω kein Yang-Mills-Zusammenhang. \square

3. Die 4-dimensionale Theorie

Auf 4-dimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeiten definiert die orthogonale Involution $*$: $\Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$ eine Zerlegung in die (± 1) -Eigenräume, $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$, $\Lambda^2_+ \perp \Lambda^2_-$.

Der Riemannsche Krümmungstensor R ist als Bündelmorphismus $\Lambda^2 \rightarrow \Lambda^2$ aufzufassen. W sei der Weylsche konforme Krümmungstensor. Die Zerlegung $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ induziert eine Zerlegung $W = W_+ + W_-$. τ bezeichne die skalare Krümmung und B den spurfreien Riccitenor.

Satz 3.1. $R: \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_- \rightarrow \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ ist ein selbstadjungierter Endomorphismus und besitzt eine Zerlegung ([4])

$$R = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix} + \frac{\tau}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

(M^4, g) heißt selbstdual bzw. antiselbstdual, falls $W_- = 0$ bzw. $W_+ = 0$ ist. $M^4 = S^2(\lambda) \times H^2(-\lambda)$ ist ein Beispiel einer selbstdualen offenen vollständigen Mannigfaltigkeit.

Eine entsprechende Zerlegung wird von $*$ auch auf $\Lambda^2 \otimes \mathfrak{g}_F$ und somit auf $\Omega^2(\mathfrak{g}_F)$ erzeugt, $\Omega^2(\mathfrak{g}_F) = \Omega^2_+(\mathfrak{g}_F) \oplus \Omega^2_-(\mathfrak{g}_F)$. Insbesondere wird für einen Zusammenhang ω der Krümmungstensor R^ω in einen selbstdualen Anteil R^ω_+ und einen antiselbstdualen Anteil R^ω_- zerlegt, $R^\omega = R^\omega_+ + R^\omega_-$. Der Zusammenhang ω heißt selbstdual bzw. antiselbstdual, falls $R^\omega_- = 0$ bzw. $R^\omega_+ = 0$ ist. Aus der Orthogonalität der Zerlegung folgt $|R^\omega|^2 d\text{vol} = R^\omega \wedge * R^\omega = (|R^\omega_+|^2 + |R^\omega_-|^2) d\text{vol}$.

Satz 3.2. Ist $\omega \in \mathcal{C}_{p,f}^{\{d\}}$ selbstdual oder antiselbstdual, so ist ω ein Yang-Mills-Zusammenhang.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus $R^\omega = R^\omega_\pm$, $*R^\omega_\pm = \pm R^\omega$, Satz 2.8 und der Bianchiidentität. \square

Sei $\omega \in \mathcal{C}_{p,f} \subset \mathcal{C}_p$. Dann definiert gemäß der Chern-Weil-Konstruk-

tion $R^\omega \wedge R^\omega$ die 1. Pontrjaginklasse von \mathcal{O}_F . Die Klasse von $R^\omega \wedge R^\omega$ ist also unabhängig von ω , sondern durch \mathcal{O}_F , d.h. durch P allein bestimmt. Wegen $R^\omega \wedge R^\omega = (|R^{\omega_+}|^2 - |R^{\omega_-}|^2) d\text{vol}$ und $\int_M (|R^{\omega_+}|^2 + |R^{\omega_-}|^2) d\text{vol} < \infty$ existiert $\int_M R^\omega \wedge R^\omega$. Ist M^4 kompakt, so ist $p_1(\mathcal{O}_F) = \frac{1}{4\pi^2} \int_M R^\omega \wedge R^\omega$ gerade die 1. Pontrjagin-zahl von \mathcal{O}_E und somit von ω unabhängig. Im Falle einer offenen vollständigen M^4 ist diese Frage, d.h. die Unabhängigkeit von $p_1(\mathcal{O}_F, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_M R^\omega \wedge R^\omega$ von ω , noch offen. Wir geben eine partielle Antwort. Seien dazu ${}^1\Omega^p = {}^1\Omega^p(M) = \{\varphi \in \Omega^p | \int_M |\varphi|^2 d\text{vol} < \infty, \int_M |d\varphi|^2 d\text{vol} < \infty\}$ und ${}^1\Omega^p$ die Vervollständigung bezüglich der Norm ${}^1\|\varphi\| = \int_M |\varphi|^2 d\text{vol} + \int_M |d\varphi|^2 d\text{vol}$. Die Kohomologie des Komplexes

$$0 \rightarrow {}^1\Omega^0 \xrightarrow{\alpha} {}^1\Omega^1 \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} {}^1\Omega^p \xrightarrow{\alpha} {}^1\Omega^{p+1} \xrightarrow{\alpha} \dots \xrightarrow{\alpha} {}^1\Omega^n \xrightarrow{\alpha} 0$$

heißt L_1 -Kohomologie $H_1^*(M)$ von M^n , $H_1^p(M) := \ker(d: {}^1\Omega^p \rightarrow {}^1\Omega^{p+1}) / \text{im}(d: {}^1\Omega^{p-1} \rightarrow {}^1\Omega^p)$. Entsprechend definiert man die reduzierte L_1 -Kohomologie $\bar{H}_1^p(M)$ von M^n , indem man die Quotientenbildung nach $\text{im}(d: {}^1\Omega^{p-1} \rightarrow {}^1\Omega^p)$ vornimmt. $H_1^*(M)$ und $\bar{H}_1^*(M)$ sind Invarianten von (M^n, g) .

Satz 3.4. Seien (M^4, g) vollständig, $\omega, \omega' \in \mathcal{C}_{P,F}^{1,2}$ und $R^\omega \wedge R^\omega, R^{\omega'} \wedge R^{\omega'}$ Elemente ein und derselben Kohomologiekategorie in $H_1^*(M^4)$.

Dann gilt $p_1(\mathcal{O}_F, \omega) = p_1(\mathcal{O}_F, \omega')$, d.h. $p_1(\mathcal{O}_F, \omega)$ ist eine Invariante der Kohomologiekategorie von $R^\omega \wedge R^\omega$ in $H_1^*(M)$.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $R^{\omega'} \wedge R^{\omega'} - R^\omega \wedge R^\omega = d\varphi, \varphi \in {}^1\Omega^3$.

Entsprechend einem fundamentalen Resultat von Gaffney ([5]) gilt für $\varphi \in {}^1\Omega^{n-1}, (M^n, g)$ vollständig, $\int_M d\varphi = 0$, woraus die Behauptung folgt. \square

Korollar 3.5. Sei (M^4, g) vollständig. Dann gilt für jeden Zusammenhang $\omega \in \mathcal{C}_{P,F}^{1,2}$ $4\pi^2 |p_1(\mathcal{O}_E, \omega)| \leq \mathcal{Y}_M(\omega)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn ω selbstdual ist. Insbesondere ist

$$\inf_{\omega \in \mathcal{C}_{P,F}^{1,2}} |p_1(\mathcal{O}_F, \omega)|$$

eine untere Schranke für das Yang-Mills-Funktional. \square

Bemerkung. Es wäre wünschenswert, $R^{\omega'} \wedge R^{\omega'} \sim R^\omega \wedge R^\omega$ in $H_1^*(M)$ durch Bedingungen an ω, ω' zu charakterisieren. Dies ist gegenwärtig nur zur Hälfte gelungen. Sei $\omega' \in U(\omega) = \omega + \Omega^{1,1}(\mathcal{O}_E, \omega)$.

Dann gilt

$$d\varphi = R^{\omega'} \wedge R^{\omega'} - R^\omega \wedge R^\omega = d^\omega \eta \wedge d^\omega \eta + \frac{1}{4} [\eta, \eta] \wedge [\eta, \eta] + 2R^\omega \wedge d^\omega \eta + R^\omega \wedge [\eta, \eta] + d^\omega \eta \wedge [\eta, \eta]. \quad (3.2)$$

Jeder Summand der rechten Seite von (3.2) ist aber absolut integrierbar, denn für $\psi_1, \psi_2 \in \Omega^{2,0}(\mathcal{O}_E)$ gilt $\int |\psi_1 \wedge \psi_2| d\text{vol} = \int |\psi_1 \wedge * \psi_2| d\text{vol} = \int |(\psi_1, * \psi_2)| d\text{vol} \leq \|\psi_1\| \|\psi_2\| =$

$= \|\Psi_1\| \|\Psi_2\|$. Damit ist $d\mathcal{F}$ absolut integrierbar. Es ist aber nicht klar, daß ein absolut integrierbares \mathcal{F}' existiert mit $d\mathcal{F} = d\mathcal{F}'$. Ein solches \mathcal{F}' wäre dann $\in^1 \Omega^3$.

L_2 -charakteristische Klassen und Zahlen werden ausführlich in einer späteren Arbeit studiert.

Als interessante Frage stellt sich die Frage nach der Existenz bzw. Nichtexistenz von Yang-Mills-Zusammenhängen. Hierfür werde abschließend ein Spezialfall studiert.

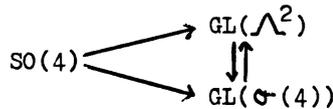
Seien U Definitionsbereich einer Bündelkarte, s_i lokale Schnitte, $\alpha \in \Omega^2(\mathfrak{o}_F)$. Die Weitzenboeckformel ([1], Seite 354)

$$\Delta^\omega \alpha = -(\nabla^\omega)^* \nabla^\omega \alpha + \frac{1}{3} \tau \cdot \alpha - W(\alpha) - [R^\omega, \alpha]$$

wird in einer Karte mit $R^\omega(s_i) = \sum_j R_{ij}^\omega \otimes s_j$ wie folgt geschrieben

$$\begin{aligned} (\Delta^\omega \alpha)_{i_1 i_2} = & -((\nabla^\omega)^* \nabla^\omega \alpha)_{i_1 i_2} + \frac{1}{3} \tau \alpha_{i_1 i_2} - W(\alpha)_{i_1 i_2} - \\ & - R_{i_1 i}^\omega \alpha^i_{i_2} - R_{i_2 i}^\omega \alpha^i_{i_1}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Indexsenkung $\mathfrak{o}(4) \rightarrow \Lambda^2$, $\beta^i_j \rightarrow \beta_{ij}$, ist eine Äquivalenz der adjungierten Darstellung $SO(4) \rightarrow GL(\mathfrak{o}(4))$ und der Tensorarstellung $SO(4) \rightarrow GL(\Lambda^2)$, d.h. man hat ein kommutatives Diagramm



und eine Isomorphie $\Lambda^2 \rightarrow \mathfrak{o}(4)$, $(u \wedge v)(w) = (u, w)v - (v, w)u$. Der Zerlegung $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ in invariante Teilräume entspricht eine Zerlegung $\mathfrak{o}(4) = \mathfrak{o}_+ \oplus \mathfrak{o}_-$, die invariant unter der adjungierten Darstellung ist. Auf der Ebene der Lieschen Algebren bedeutet dies $[\mathfrak{o}(4), \mathfrak{o}_\pm] \subset \mathfrak{o}_\pm$, $[\mathfrak{o}_+, \mathfrak{o}_-] = 0$, $[\mathfrak{o}_\pm, \mathfrak{o}_\pm] \subset \mathfrak{o}_\pm$. Insbesondere erhalten wir

$$[R^\omega_\pm, \alpha_\mp] = 0. \tag{3.4}$$

Die orthogonale Zerlegung $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ induziert eine Zerlegung $\Delta^\omega = \Delta^\omega_+ + \Delta^\omega_-$, $\Delta^\omega_\pm : \Omega^2_\pm(\mathfrak{o}_F, \omega) \rightarrow \Omega^{2,0}_\pm(\mathfrak{o}_F)$. $\alpha = \alpha_+ + \alpha_- \in \Omega^2(\mathfrak{o}_F, \omega)$ ist harmonisch genau dann, wenn α_+ und α_- harmonisch sind (im L_2 -Sinn).

Eine geringfügige Variation der Abschätzungen in [2], [6] ergibt folgenden

Satz 3.6. Seien $\omega \in \mathcal{L}_{P,f}(M^4, g)$ offen, vollständig und lokal konform eben. Gilt $\frac{2}{3} - \frac{2}{\beta} |R_+^\omega| \geq 0$, $\frac{2}{3} - \frac{2}{\beta} |R_-^\omega| \geq 0$ und das Ungleichheitszeichen in einem Punkt, so ist ω entweder ein flacher

oder kein Yang-Mills-Zusammenhang.

Beweis. Aus (M^4, g) lokal konform eben folgt $W = 0$. Sei

$\alpha \in \Omega^2, \{\Delta\}(g_E, \omega)$, $\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$, $\lambda = \lambda_R$ wie in §2.
 $b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 \leq \frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3)^2$, $|[X, Y]| \leq |X| \cdot |Y|$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$ ergeben für die punktweise Norm

$$|[\alpha_{\pm}, \lambda^2 \alpha_{\pm}]| \leq \frac{2}{3} |\lambda \alpha_{\pm}|^2 \tag{3.5}$$

und gemäß (3.4)

$$\begin{aligned} |(R_{\pm}^{\omega}, \alpha_{\pm}), \lambda^2 \alpha_{\pm}| &= |(R_{\pm}^{\omega}, [\alpha_{\pm}, \lambda^2 \alpha_{\pm}])| \leq \\ &\leq \frac{2}{3} |R_{\pm}^{\omega}| |\lambda \alpha_{\pm}|^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Mit $\int_M \Delta^{\omega} |\lambda^2 \alpha_{\pm}|^2 dvol = 0$ und

$$\begin{aligned} \int_M (\nabla^{\omega} \alpha_{\pm}, \nabla^{\omega} \lambda^2 \alpha_{\pm}) dvol &= \|\nabla^{\omega} (\lambda \alpha_{\pm})\|^2 - \|d\lambda \otimes \alpha_{\pm}\|^2 \geq \\ &\geq \|\nabla^{\omega} (\lambda \alpha_{\pm})\|^2 - \frac{c^2}{R^2} \int_{B_{2R} \setminus B_R} |\alpha_{\pm}|^2 dvol \end{aligned}$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\pm}^{\omega} \alpha_{\pm}, \lambda^2 \alpha_{\pm} \rangle &= \|\nabla^{\omega} (\lambda \alpha_{\pm})\|^2 - \frac{c^2}{R^2} \int_{B_{2R} \setminus B_R} |\alpha_{\pm}|^2 dvol + \\ &+ \int_M \left(\frac{7}{6} - \frac{2}{3} |R_{\pm}^{\omega}| \right) |\lambda \alpha_{\pm}|^2 dvol. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Die Anwendung von $\lim_{R \rightarrow \infty}$ in (3.7) und die Voraussetzungen ergeben entweder $\Delta_{+}^{\omega} \alpha_{+} \neq 0$ und $\Delta_{-}^{\omega} \alpha_{-} \neq 0$ oder $\alpha = 0$, woraus für $\alpha = R^{\omega}$ die Behauptung folgt. \square

Weiteren Existenzkriterien, L_2 -charakteristischen Zahlen und der Klassifikation von Yang-Mills-Feldern, die außerhalb eines Kompaktums eben sind, ist die Arbeit [3] gewidmet.

LITERATUR

[1] BLFFKFR D.D., BOOS B. "Topology and Analysis", Universitext, New York 1985.
 [2] DODZIUK J., MIN-00 "An L_2 -isolation theorem for Yang-Mills fields over complete manifolds", Compositio Mathematica, 47 /1982/, 165-169.
 [3] FICHHORN J. "Gauge theory over open manifolds", ersch. in Lecture notes in mathematics, Proc. Conf. Diff. Geom. Penisco-

1a 1985.

- [4] FRIEDRICH T. "Self duality of Riemannian manifolds and connections", Teubner-Texte zur Mathematik 34/1981/, 56-104.
- [5] GAFFNEY M. "A special Stokes' theorem for complete Riemannian manifolds", Ann. of Math., /60/1954/, 140-145.
- [6] MIN -OO "An L_2 -isolation theorem for Yang-Mills fields", Compositio Mathematica, /47/1982/, 153-163.
- [7] STRICHARTZ R.S. "Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold", J. of Funct. Analysis, /52/1983/, 48-79.

JÜRGEN EICHHORN
DDR-2200 GREIFSWALD
SEKTION MATHEMATIK
JAHNSTRASSE 15a