Jürgen Eichhorn

L_2-Kohomologie und approximationen des Laplaceoperators

In: Zdeněk Frolík (ed.): Proceedings of the 12th Winter School on Abstract Analysis, Section of Topology. Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1984. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Supplemento No. 6. pp. 107–120.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/701832

Jürgen Eichhorn

1. Einleitung

Für offene, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten beschränkter Geometrie ist der Hodge-de Rham-Isomorphismus in der L_2-Kategorie inzwischen eine wohlbekannte Tatsache ([3] , [4] , [7]). Wesentlich bei der Formulierung und dem Beweis dieses Satzes ist die Verwendung der reduzierten L_2-Kohomologie $\bar{H}_2^p$, in der die L_2-Kozyklen nach der Abschließung $\bar{B}_2^p$ der Koränder faktorisiert werden. Die Frage nach der Isomorphie der de Rham-Abbildung für die nichtreduzierte L_2-Kohomologie ist dagegen noch weitgehend offen. Wir studieren in dieser Arbeit einige wesentliche Unterschiede zwischen $\bar{H}_2^p = Z_2^p/\bar{B}_2^p$ und $H_2^p = Z_2^p/B_2^p$, geben Beispiele für die topologische Relevanz von H_2^p und geben schließlich eine einfache spektraltheoretische Bedingung für die Gültigkeit der Isomorphie an. Eine wichtige Folgerung aus diesen Untersuchungen ist die Nichtexistenz von L_2-harmonischen 0- und n-Formen auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Geometrie. Ferner diskutieren wir Spektralwerte $\neq 0$.

2. Analytische und kombinatorische L_2-Kohomologie

Wir betrachten im folgenden orientierte, offene, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M^n,g). Es sei $\Lambda^p = \Lambda^p(M) = C^\infty(\Lambda^p T^*M)$ bzw. $\Lambda_0^p = \Lambda_0^p(M) = C_0^\infty(\Lambda^p T^*M)$ der Vektorraum aller glatten p-Formen bzw. p-Formen mit kompaktem Träger auf M^n. Λ_0^p wird vermöge $\langle\ ,\ \rangle$, $\langle \omega, \omega' \rangle = \int \omega \wedge * \omega' = \int (\omega, \omega')_x \, dvol$ Prähilbertraum. $\Lambda^{p,0}$ bezeichne den Vektorraum aller meßbaren p-Formen ω, für die $\int \omega \wedge * \omega < \infty$ ist. Dann liegt Λ_0^p dicht in $\Lambda^{p,0}$, und $\Lambda^{p,0}$ ist die Vervollständigung von Λ_0^p bezüglich $\| \ \|_0^2$, $\|\omega\|_0^2 = \langle \omega, \omega \rangle$.

This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

$\Delta = \Delta_p = d\delta + \delta d = d_{p-1}\delta_p + \delta_{p+1}d_p : \Lambda^p \longrightarrow \Lambda^p$ bzeichne den Laplaceoperator auf den p-Formen. Sei S eine Menge von Polynomen in d und δ, z.B. $S = \{d\}$, $S = \{\delta\}$, $S = \{d\delta + \delta d\} = \{\Delta\}$ oder $S = \{\Delta^0, \Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^k\}$. Dann definieren wir

$$\Lambda^p_S = \{\omega \in \Lambda^{p,0} \cap \Lambda^p \mid \|D\omega\|^2_0 = \int D\omega \wedge * D\omega < \infty \text{ für alle } D \in S\},$$

$\Lambda^{p,S}$ = Abschließung von Λ^p_S bezüglich der Norm

$$\|\omega\|^2_S = \|\omega\|^2_0 + \sum_{D \in S} \|D\omega\|^2_0,$$

$\mathring{\Lambda}^{p,S}$ = Abschließung von Λ^p_0 in $\Lambda^{p,S}$ bezüglich der Norm $\| \;\|_S$. Wir setzen ferner fest

$$\Lambda^{p,k} = \Lambda^{p,\{\Delta^0, \Delta^1, \ldots, \Delta^k\}}.$$

Ist $S = \emptyset$, so gilt $\| \;\|_\emptyset = \| \;\|_0$, $\Lambda^{p,\emptyset} = \Lambda^{p,0} = \mathring{\Lambda}^{p,0}$. Man hat folgende Inklusionen $\Lambda^p \supset \Lambda^p_S \supset \Lambda^p_0$,
$\Lambda^{p,0} \supseteq \Lambda^{p,S} \supseteq \mathring{\Lambda}^{p,S}$, $\Lambda^{p,S} \supset \Lambda^p_S$, $\mathring{\Lambda}^{p,S} \supset \Lambda^p_0$.
Für vollständiges (M^n,g) ist Δ auf Λ^p_0 wesentlich selbstadjungiert, d.h. $\bar{\Delta}$, $D_{\bar{\Delta}} = \Lambda^{p,1}$, ist selbstadjungiert. Ferner stimmen $\{\omega \in \Lambda^p \cap \Lambda^{p,0} \mid \Delta\omega = 0\}$ und $\mathcal{H}^p = \{\omega \mid d\omega = \delta\omega = 0$ im Distributionensinne $\}$ überein.
Als analytische L_2-Kohomologie $H^p_2(M,d)$ von (M^n,g) definieren wir die Kohomologie des Komplexes

$$\cdots \longrightarrow \Lambda^p_{\{d\}} \longrightarrow \Lambda^{p+1}_{\{d\}} \longrightarrow \cdots,$$

$H^p_2(M,d) := \ker(d: \Lambda^p_{\{d\}} \to \Lambda^{p+1}_{\{d\}})/\mathrm{im}(d: \Lambda^{p-1}_{\{d\}} \to \Lambda^p_{\{d\}}) = \ker d_p/\mathrm{im} d$ $= \ker d_p/\mathrm{im}\, d_{p-1}$.
Eine scheinbar andere Variante erhält man durch Betrachtung von $H^p_2(M,\bar{d}) := \ker \bar{d}_p/\mathrm{im}\, \bar{d}_{p-1}$.
<u>Satz 2.1.</u> Die Inklusion $\Lambda^*_{\{d\}} \longrightarrow \Lambda^{*,\{d\}}$ induziert einen Isomorphismus $i_* : H_2(M,d) \longrightarrow H_2(M,\bar{d})$ ([11]). □
Als reduzierte analytische L_2-Kohomologie definieren wir

$$\bar{H}^p_2(M,\bar{d}) := \ker \bar{d}_p/\overline{\mathrm{im}\, \bar{d}_{p-1}}$$

und allgemeiner

$$\bar{H}_2^{p,k}(M,d) = Z^{p,k}/\overline{B^{p,k}}^{\Lambda^{p,k}},$$

wobei $Z^{p,k} = \{\omega \in \Lambda^{p,k} \mid d\omega = 0\}$, $B^{p,k} = d\Lambda^{p-1,k+1}$.

<u>Satz 2.2.</u> Sei (M^n,g) vollständig. Dann sind die Räume $\bar{H}_2^{p,k}$ unabhängig von k. Für jedes $k \geq 1$, $0 \leq p \leq n$, läßt $Z^{p,k}$ eine orthogonale Zerlegung

$$Z^{p,k} = \mathcal{H}^p \oplus \overline{B^{p,k}}$$

zu. Ist $k = 0$, so gilt

$$Z^{p,o} = \mathcal{H}^p \oplus \bar{B}^p,$$

wobei $B^p = \{\omega \in \Lambda^{p,o} \mid$ Es existiert ein $\eta \in \Lambda^{p-1,o}$ mit $\omega = d\eta\}$. Wir verweisen bezüglich des Beweises auf [3], [4]. □

Wegen der Vielfalt dieser Definitionen stellt sich sofort die Frage nach den gegenseitigen Beziehungen oder gar nach dem Übereinstimmen. Zunächst hat man eine natürliche Surjektion

$$j: H_2^p(M,\bar{d}) \longrightarrow \bar{H}_2^p(M,\bar{d}),\ j(\omega + \operatorname{im} \bar{d}_{p-1}) = \omega + \overline{\operatorname{im} \bar{d}_{p-1}}$$

und einen Morphismus

$$h: \mathcal{H}^p(M) \longrightarrow H_2^p(M,\bar{d}),\ h(\omega) = \omega + \operatorname{im} \bar{d}_{p-1}.$$

Wir sagen, in (M^n,g) gilt das starke Hodge-Theorem, falls h ein Isomorphismus ist. Ohne Beweis geben wir die folgenden beiden sehr einfachen Lemmata an.

<u>Lemma 2.3.</u> h ist injektiv, falls der Stokessche Satz im L_2-Sinne gilt, d.h. $\langle \bar{d}\varphi, \omega\rangle = \langle \varphi, \bar{\delta}\omega\rangle$ für alle $\varphi \in \Lambda^{p-1,\{d\}^2}$, $\omega \in \Lambda^{p,\{\delta\}}$. Insbesondere ist h also injektiv für vollständige Mannigfaltigkeiten. □

<u>Lemma 2.4.</u> h ist surjektiv genau dann, wenn im $\bar{d}_{p-1}$ abgeschlossen ist. □

Als Schlußfolgerung für die Gültigkeit des starken Hodge-Theorems ergibt sich

<u>Satz 2.4!</u> Das starke Hodge-Theorem gilt genau dann, wenn

$$\operatorname{im} \bar{d}_{p-1} = \overline{d_{p-1} \Lambda_0^{p-1}} . \square$$

Zusammen mit Satz 2.2 erhalten wir

Satz 2.5. Sei (M^n, g) vollständig. Dann sind $\mathcal{H}^p(M)$, $\bar{H}_2^p(M,\bar{d})$ und $\bar{H}_2^{p,k}(M,d)$ für alle $k \geq 0$ kanonisch L_2-isomorph, und $h^p: \mathcal{H}^p(M) \longrightarrow H_2^p(M,\bar{d})$ ist eine Injektion. $\square$

Um die rein kombinatorische L_2-Kohomologie einführen zu können, stellen wir einige Grundbegriffe der Theorie gleichmäßig lokal endlicher Komplexe zusammen.

Seien K ein n-dimensionaler lokal endlicher simplizialer Komplex und $\sigma^q \in K$. $I(\sigma^q)$ bezeichne die Anzahl aller (q+1)-Simplexe $\tau^{q+1} \in K$ mit $\sigma^q < \tau^{q+1}$. K ist gleichmäßig lokal endlich in der Dimension q, falls $\sup_{\sigma^q \in K} I(\sigma^q) = I_q(K) < \infty$.

K ist gleichmäßig lokal endlich (abgekürzt g.l.e.), falls $I_q(K) < \infty$, $q = 0, \dots, n$. K ist g.l.e. genau dann, wenn $I_0(K) < \infty$ ist. Sei K g.l.e.. Dann wird definiert

$C_2^p(K) = \left\{ \sum_{\sigma^p \in K} f_\sigma \sigma \;\middle|\; \sum_\sigma f_\sigma^2 < \infty \right\}$ und $d: C_2^p \longrightarrow C_2^{p+1}$,

$d\left(\sum_{\sigma^p \in K} f_\sigma \sigma \right) = \sum_{\tau^{p+1} \in K} \left(\sum_{\sigma^p < \tau^{p+1}} [\tau : \sigma] f_\sigma \right) \tau$. d ist die lineare Fortsetzung des üblichen simplizialen Korandes $d\sigma^p = \sum_{\tau^{p+1} > \sigma^p} [\tau : \sigma] \tau$. Man zeigt leicht, daß aus der g.l. Endlichkeit die Beschränktheit von $d: C_2^p \longrightarrow C_2^{p+1}$ folgt. C_2^p wird Hilbertraum durch $\langle f, g \rangle = \sum_\sigma f_\sigma g_\sigma$. Es wird definiert $Z_2^p(K) = \ker(d: C_2^p \longrightarrow C_2^{p+1})$, $B_2^p(K) = \operatorname{im}(d: C_2^{p-1} \longrightarrow C_2^p)$, $H_2^p(K) = Z_2^p/B_2^p$, $\bar{H}_2^p(K) = Z_2^p/\bar{B}_2^p$. Sei d^* adjungiert zu d bezüglich $\langle \, , \rangle$ und $\Delta^c = dd^* + d^* d$. d^* ist der übliche Rand. Man definiert $C_{p,2} = C_2^p$, $H_{p,2}(K) = \ker d_p / \operatorname{im} d_{p+1} = Z_{p,2}/B_{p,2}$, $\bar{H}_2^p(K) = Z_{p,2}/\bar{B}_{p,2}$ und $\mathcal{H}^p(K) = \ker \Delta_p^c$. Dabei wurde festgesetzt $(d_p)^* = d_{p+1}$.

Lemma 2.6. Es ist $f \in \mathcal{H}^p(K)$ genau dann, wenn $df = d^* f = 0$. Es existieren direkte orthogonale Zerlegungen

$$C_2^p(K) = \overline{dC_2^{p-1}} \oplus \overline{d^* C_2^{p+1}} \oplus \mathcal{H}^p(K), \quad Z_2^p = \mathcal{H}^p(K) \oplus \overline{dC_2^{p-1}},$$

$$Z_{p,2} = \mathcal{H}^p(K) \oplus \overline{d^* C_2^{p+1}} . \square$$

<u>Folgerung 2.7.</u> $\bar{H}^p_2(K) \cong \mathcal{H}^p(K) \cong \bar{H}_{p,2}(K)$. □

Man definiert allgemeiner L_2-Kettenkomplexe, L_2-Kettenabbildungen u.s.w..

Für geometrisch-topologische Zwecke empfiehlt es sich, mit der L_2-Homologie zu arbeiten, da Homologie im Vergleich zur Kohomologie geometrisch besser einzusehen ist. Wir wollen nun einige grundsätzliche Unterschiede zwischen $H_{p,2}(K)$ und $\bar{H}_{p,2}(K)$ nachweisen. Es ist klar, daß $\bar{H}_{p,2}(K)$ kanonisch mit einer vollständigen Norm, ja sogar mit einem Skalarprodukt versehen werden kann, während dies für $H_{p,2}(K)$ im allgemeinen nicht der Fall ist. Andererseits ist die Widerspiegelung der kombinatorischen Eigenschaften von K durch $H_{p,2}(K)$ viel besser als durch $\bar{H}_{p,2}(K)$.

<u>Lemma 2.8.</u> Ist $H_{p,2}(K) \neq \bar{H}_{p,2}(K)$, so existieren unendlich viele linear unabhängige Homologieklassen in $H_{p,2}(K)$, deren Bild in $\bar{H}_{p,2}(K)$ gleich Null ist. Entsprechendes gilt in der Kohomologie.

Beweis. $H_{p,2} \neq \bar{H}_{p,2}$ und $B_{p,2} \neq \bar{B}_{p,2}$ sind gleichwertig. Ist also $H_{p,2} \neq \bar{H}_{p,2}$, so ist die Kodimension von $B_{p,2}$ in $\bar{B}_{p,2}$ unendlich. Seien $z_1+B_{p,2}$, $z_2+B_{p,2}, \ldots$ linear unabhängige Elemente aus $\bar{B}_{p,2}/B_{p,2}$. Dann sind $z_1+B_{p,2}$, $z_2+B_{p,2}, \ldots$ linear unabhängige Homologieklassen in $H_{p,2}$, deren Bild in $\bar{H}_{p,2}$ gleich Null ist. □

<u>Folgerung 2.9.</u> Ist $\bar{H}_{p,2}(K) = (0)$, $H_{p,2}(K) \neq (0)$, so gilt $\dim H_{p,2}(K) = \infty$. Entsprechendes gilt in der Kohomologie. □

<u>Satz 2.10.</u> Sei K unendlich, g.l.e. und zusammenhängend. Dann gilt $\bar{H}_{o,2}(K) \cong \bar{H}^o_2(K) \cong (0)$ und $\dim H_{o,2}(K) = \infty$.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus folgenden Aussagen.
a. Jede Ecke von K ist Rand aus $\bar{B}_{o,2}$. b. Jede 0-Kette mit endlichem Träger ist Rand in $\bar{B}_{o,2}$. c. Jede 0-Kette $f \in C_{o,2} = Z_{o,2}$ ist Limes einer in $C_{o,2}$ konvergenten Folge von 0-Ketten mit endlichem Träger. Wegen der Abgeschlossenheit von $\bar{B}_{o,2}$ ist $f \in \bar{B}_{o,2}$. Aus a. folgt sofort b., c. ist trivial. Zu zeigen ist also nur a.. Sei $v_o \in K^o$ eine Ecke. Nach Voraussetzung existiert eine Folge von 1-Simplexen = Kanten $\sigma^1_i = [v_i, v_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, d.h. ein unendlicher bei v_o beginnender Kantenweg ohne Zweige. Sei $f^{(\nu)} = -\sum_{i=0}^{10^\nu-1} (1 - i/10^\nu)\, \sigma^1_i$. Dann gilt $d^* f^{(\nu)} = v_o - \sum_{i=1}^{10^\nu-1} 1/10^\nu\, v_i$, also $\|v_o - d^* f^{(\nu)}\|^2 =$

$= (10 - 1)/10^{2\nu} \leq 1/10^{\nu} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0$. Die zweite Aussage folgt aus Folgerung 2.9, wenn man $H_{o,2}(K) \neq (0)$ zeigen kann. Letzteres gilt, denn $v_o \notin B_{o,2}(K)$. □

Als Trägerkomplex tr g einer p-Kette $g = \sum_{\sigma^p \in K} g_\sigma \sigma$ wird der von $\{\sigma^p \in K \mid g_\sigma \neq 0\}$ erzeugte Komplex bezeichnet, d.h. $\mathrm{tr}\, g = \text{Hü} \{\sigma^p \in K \mid g_\sigma \neq 0\}$. Sei L ein homogen p-dimensionaler g.l.e. simplizialer Komplex. Als geometrischen Rand von L definieren wir den Trägerkomplex der Kette $d^* \sum_{\sigma^p \in L} \sigma^p$.

Analog zu 2.10 zeigt man

<u>Satz 2.11.</u> Jeder Zyklus $z \in C_{p,2}(K)$, zu dessen Trägerkomplex tr z ein zur kanonischen Triangulation von $|\mathrm{tr}\, z| \times R_+$ isomorpher Teilkomplex L in K existiert, dessen geometrischer Rand tr z ist, ist in $\overline{H}_{p,2}(K)$ 0-homolog. □

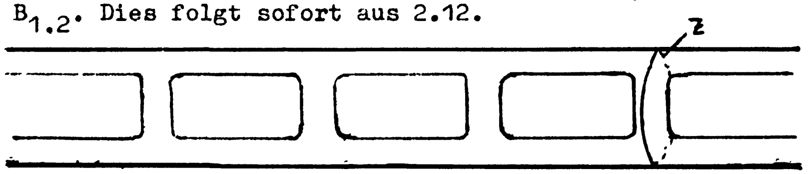
Für einen simplizialen Komplex L bzeichne L^q wie üblich das q-dimensionale Gerüst. Ein noch allgemeineres hinreichendes Kriterium dafür, daß $z \in Z_{p,2}$ im Nullelement von $\overline{H}_{p,2}(K)$ liegt, liefert

<u>Satz 2.12.</u> Sei $z = z_o \in Z_{p,2}$. Es existiere eine Folge von Zyklen $z_1, z_2, \dots$ $Z_{p,2}$, so daß $\|z_i\| \leq c$, $z_i \sim z_{i+1} \bmod B_{p,2}$, $z_{i+1} - z_i = d^* c_i$, $c_i \in C_{p+1,2}(K)$, $(\mathrm{tr} c_i)^{p+1} \cap (\mathrm{tr} c_k)^{p+1} = \emptyset$ für $k \neq i, i+1$ und $(\mathrm{tr} c_i)^{p+1} \cap (\mathrm{tr} c_{i+1})^{p+1} = \mathrm{tr} z_{i+1}$. Dann ist $z = z_o \in \overline{B}_{p,2}(K)$.

Beweis. Man ersetze im Beweis von 2.10 v_o durch z_o, v_i durch z_i und σ_i^1 durch c_i. Setzt man $f^{(\nu)} = -\sum_{i=0}^{10^{\nu}-1} (1 - i/10^{\nu}) c_i$, so gilt $d^* f^{(\nu)} = z_o - \sum_{i=1}^{10^{\nu}-1} 1/10^{\nu} \cdot z_i$,

$$\|z_o - d^* f^{(\nu)}\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^{10^{\nu}-1} \frac{1}{10^{\nu}} z_i\Big\|^2 \leq \frac{10^{\nu} - 1}{10^{2\nu}} c^2 \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0. \ \square$$

<u>Beispiel.</u> In der üblichen Triangulation K der unendlichen Leiter ist der angedeutete Zyklus z Element von $\overline{B}_{1,2}$, nicht aber von $B_{1,2}$. Dies folgt sofort aus 2.12.



Ausgehend von diesem Beispiel, konstruiert man sofort höherdimensionale Beispiele.

Man sieht also in der Tat, daß die reduzierte L_2-Homologie

$\bar{H}_{p,2}(K)$ viele topologisch relevante L_2-Zyklen wegläßt, topologisch $H_{p,2}(K)$ bedeutsamer als $\bar{H}_{p,2}(K)$ ist. Entsprechendes gilt gemäß 2.7 für die L_2-Kohomologie.

Sei K ein g.l.e. n-dimensionaler simplizialer Komplex. Eine simpliziale Unterteilung K' von K heißt von beschränktem Unterteilungsgrad, falls eine Schranke N existiert, so daß jedes Simplex von K in nicht mehr als N Simplexe unterteilt wird. Wir fragen nun nach der Invarianz von H_{*2}, H_2^* bei Unterteilungen von beschränktem Unterteilungsgrad. Die Antwort gibt

Satz 2.13. Sei K' eine Unterteilung von beschränktem Unterteilungsgrad. Dann induziert die Unterteilungsabbildung $\Theta : C_{*2}(K) \longrightarrow C_{*2}(K')$ einen Isomorphismus $\Theta_* : H_{*2}(K) \longrightarrow H_{*2}(K')$. Entsprechendes gilt in der Kohomologie. □

Einen ausführlichen Beweis von Satz 2.13 für die reduzierte L_2-Homologie und -Kohomologie findet man in [6]. Aus diesem Beweis erhält man unmittelbar auch die Unterteilungsinvarianz von H_{*2}, H_2^*.

Seien K,K' g.l.e. Triangulationen von $|K| = |K'|$. Es wird definiert $K' < K$, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind. Zu jeder Ecke $v' \in K'$ existiere eine Ecke $w \in K$ mit $|st\ v'| \subset |st\ w|$. Es existiere eine Zahl M, so daß jeder Eckenstern von K höchstens M Simplexe von K' enthält. Dann definiert die Zuordnung $v' \longrightarrow w$ eine simpliziale Abbildung $\eta : K' \longrightarrow K$.

Lemma 2.14. Ist $K' < K$, so induziert η einen Isomophismus $\eta_* : H_{*2}(K') \longrightarrow H_{*2}(K)$.

Beweis. Alle $K_i < K$ bilden eine gerichtete Familie, in der die baryzentrischen Unterteilungen von K eine konfinale Teilfamilie bilden. Aus der Transitivität der η und der Isomorphie der η_* für baryzentrische Unterteilungen folgt die Behauptung. □

Die Isomorphie der η_* für baryzentrische Unterteilungen folgt aus [6], die Konfinalität der baryzentrischen Unterteilungen im obigen System von Triangulationen erhält man aus dem Beweis von Satz 32.41 aus [9], Seite 332-338.

Satz 2.15. Seien K_1 und K_2 g.l.e. Triangulationen ein und desselben Polyeders, so daß zu jedem Simplex $\sigma \in K_i$ höchstens M Simplexe $\tau \in K_j$ existieren mit $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$, $i \neq j$, $i,j=1,2$. Dann gilt $H_{*2}(K_1) \cong H_{*2}(K_2)$, $H_2^*(K_1) \cong H_2^*(K_2)$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen an K_1, K_2 folgt die Existenz einer g.l.e. Triangulation $K' < K_1, K_2$. Lemma 2.14 ergibt dann die Behauptung.□

Wir nennen zwei g.l.e. Triangulationen K_1, K_2 von $|K_1| = |K_2|$ äquivalent, falls sie die Voraussetzungen von 2.15 erfüllen. Die Äquivalenzklasse einer g.l.e. Triangulation K werde mit [K] bezeichnet. Dann kann man die Resultate zusammenfassen in

Satz 2.16. Für eine Äquivalenzklasse [K] von g.l.e. Triangulationen sind $\bar{H}_{*2}$, $\bar{H}_2^*$ bis auf topologische Isomorphie, H_{*2}, H_2^* bis auf Isomorphie definiert.□

Bemerkung. Für $\bar{H}_2^*$ wurde dieses Resultat schon in [2] formuliert.

Wir wenden uns nun der Frage nach Zusammenhängen zwischen analytischen Eigenschaften der Laplaceoperatoren von (M^n,g) und kombinatorischen Eigenschaften von M^n zu. Dazu muß M^n mit einer kombinatorischen Struktur, d.h. einer Triangulation, versehen sein. Sei σ^n ein krummes n-Simplex auf M^n. Als Fülle $\Theta(\sigma)$ wird dann definiert $\Theta(\sigma) = \mathrm{vol}(\sigma)/(\mathrm{diam}(\sigma))^n$. Wir betrachten Triangulationen $t: K \xrightarrow{\cong} M^n$, die folgende Bedingungen erfüllen ([4]).

a. Es existiert ein $\Theta_0 > 0$, so daß für jedes krumme Simplex σ^n die Fülle $\Theta(\sigma)$ der Ungleichung $\Theta(\sigma) \geq \Theta_0$ genügt.

b. Es existieren Konstanten $c_1 > c_2 > 0$, so daß für jedes σ^n gilt
$$c_2 \leq \mathrm{vol}(\sigma) \leq c_1.$$

c. Es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für jede Ecke $v \in K$ die baryzentrische Koordinatenfunktion $\varphi_v: M \longrightarrow R$ die Bedingung $|\nabla \varphi_v| \leq c$ erfüllt.

Setzt man die Bedingung a. voraus, so ist b. äquivalent zur Existenz von Schranken $d_1 > d_2 > 0$, so daß $d_2 \leq \mathrm{diam}(\sigma) \leq d_1$ für alle $\sigma \in K$. a. und b. sind äqivalent zur Beschränktheit der Volumina von unten und der Durchmesser von oben.

Triangulationen, die den Bedingungen a.-c. genügen, sollen uniform heißen.

Die nun entstehende Frage ist die nach der Existenz uniformer Triangulationen. Dazu betrachten wir zwei Bedingungen.

Bedingung (I): Der Injektivitätsradius besitzt auf (M^n,g) eine positive untere Schranke, d.h. $\inf_{x \in M} r_{inj}(x) > 0$.

Bedingung (B_k): $\nabla^i R$ ist auf M beschränkt, $0 \leq i \leq k$, wobei R den Krümmungstensor bezeichne.
Erfüllt (M^n,g) die Bedingungen (I) und (B_k), so ist die Geometrie von (M^n,g) nach Definition bis zur Ordnung k beschränkt.
Eine Antwort auf die Frage nach der Existenz uniformer Triangulationen gibt der folgende Satz von Calabi.
Satz 2.17. Besitzt (M^n,g) eine bis zur Ordnung 0 beschränkte Geometrie, so läßt (M^n,g) eine uniforme Triangulation $t: K \xrightarrow{\simeq} M$ zu. □
Daraus resultiert die Frage nach denjenigen topologischen Typen glatter offener Mannigfaltigkeiten, die eine beschränkte Geometrie zulassen. Nach einem Satz von Greene gibt es keine topologischen Obstruktionen gegen eine Metrik, die (B_k) erfüllt.
Satz 2.18. Seien M^n eine glatte offene parakompakte Mannigfaltigkeit, k eine natürliche und $\varepsilon > 0$ eine reelle Zahl. Dann existiert auf M^n eine Riemannsche Metrik g, die die Bedingung $|\nabla^i R| \leq \varepsilon$, $0 \leq i \leq k$, erfüllt ([8]). □
Dagegen bereitet es große Schwierigkeiten, das Erfülltsein der Bedingung (I) zu sichern. Beispiele für beschränkte Geometrien bis zur Ordnung 0 sind Geometrien auf offenen Mannigfaltigkeiten ten, deren Schnittkrümmung die Bedingung $0 \leq K \leq k_0$ erfüllt ([10]). Jede homogene Riemannsche Mannigfaltigkeit besitzt beschränkte Geometrie beliebig hoher Ordnung.
Topologisch kann man folgende einfache Tatsachen fixieren.
Satz 2.19. a. Die Klasse derjenigen offenen Mannigfaltigkeiten, die eine beschränkte Geometrie zulassen, ist abgeschlossen bezüglich endlicher zusammenhängender Summen und des Überganges zu Überlagerungen.
b. Jede offene Mannigfaltigkeit, die durch unendlich oft wiederholtes Zusammenkleben endlich vieler Bordismen entsteht, läßt eine Metrik beschränkter Geometrie zu. □
Besonders wichtig sind uniforme Triangulationen auch wegen ihrer guten kombinatorischen Eigenschaften.
Satz 2.20. a. Jede uniforme Triangulation ist g.l.e..
b. Die Whitneysche Standardunterteilung einer uniformen Triangulation ist wieder uniform.
c. Zwei uniforme Triangulationen K_1 und K_2, die zu ein und der-

selben Riemannschen Metrik g gehören, erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.4'. Insbesondere gilt also $H_2^*(K_1) \cong H_2^*(K_2)$, $\bar{H}_2^*(K_1) \cong \bar{H}_2^*(K_2)$. □

Es ist jetzt sinnvoll und natürlich, nach den Zusammenhängen zwischen $\bar{H}_2^*(M,d)$ und $\bar{H}_2^*(K)$ bzw. zwischen $H_2^*(M,\bar{d})$ und $H_2^*(K)$ für eine uniforme Triangulation von (M^n,g) zu fragen. Gemäß 2.5 identifizieren wir für vollständiges (M^n,g) $\bar{H}_2^p(M,\bar{d})$, $\bar{H}^{p,k}(M,d)$ mit $\mathcal{H}^p(M)$. Eine gewisse Antwort auf diese Frage gibt der folgende

Satz 2.21. Seien (M^n,g) von beschränkter Geometrie bis zur Ordnung $k > n/2 -1$ und $t: K \xrightarrow{\cong} M$ eine glatte uniforme Triangulation. Dann definiert die Integration von Formen über die Simplexe von K einen L_2-Isomorphismus $\int : \mathcal{H}^*(M) \longrightarrow H_2^*(K)$. □

Bemerkung. Zuerst wurde dieser Satz für normale Überlagerungen geschlossener Mannigfaltigkeiten von Dodziuk in [3] bewiesen. Hierdurch angeregt. konnte der Satz auch für die Klasse aus 2.19.b. gezeigt werden ([7]). Aus den Beweisen war mehr oder minder ersichtlich, daß man nur die beschränkte Geometrie brauchte. Dies wurde von Dodziuk erkannt und damit 2.21 bewiesen.

Als interessante Folgerung aus 2.10 und 2.21 erhalten wir

Satz 2.22. Sei (M^n,g) offen, zusammenhängend, vollständig und von beschränkter Geometrie bis zur Ordnung $k > n/2 -1$. Dann besitzt (M^n,g) keine quadratintegrierbaren harmonischen p-Formen, $p = 0,n$. □

Es entsteht die Frage nach einem Analogon von 2.21 für $H^{p,k}(M,d) = Z^{p,k}/B^{p,k}$ und $H_2^p(K)$. H und $\bar{H}$ können auf kombinatorischem und analytischem Niveau außerordentlich unterschiedlich ausfallen. Kombinatorisch zeigen dies 2.8 - 2.12. Sei H^n der n-dimensionale einfach zusammenhängende hyperbolische Raum. Dann gilt für $p = (n-1)/2 +1$ $\dim H_2^p(H^n,d) = \infty$, $\mathcal{H}^p(H^n) \cong \bar{H}_2^p(H^n,\bar{d}) \cong H^{p,k}(H^n,d) \cong (0)$.

Sei (M^n,g) von beschränkter Geometrie bis zur Ordnung $k > n/2 -1$. Satz 2.21 folgt unter anderem aus folgenden Tatsachen.

1. $\int : \Lambda^{p,k+1} \longrightarrow C_2^p(K)$ ist beschränkt.
2. Für die Whitneyabbildung W gilt $dW = Wd^c$, wobei $d^c : C_2^p(K) \longrightarrow C_2^{p+1}(K)$ jetzt den kombinatorischen Korandoperator

bezeichne.

3. $\int \circ W = \mathrm{id}$.

4. $W: C_2^p(K) \to \Lambda^{p,k+1}$ (W gebildet bezüglich einer geeigneten Zerlegung der Einheit) ist beschränkt ([4]).

Satz 2.23. Seien (M^n,g) von beschränkter Geometrie bis zur Ordnung $k > n/2 - 1$, K eine zugehörige uniforme Triangulation. Dann induziert Integration über die Simplexe von K eine Surjektion $\int : H^{*,k}(M,d) \longrightarrow H_2^*(K)$.

Beweis. Aus 1. und dem Stokesschen Satz erhält man $\int(Z^{p,k}) \subset Z_2^p(K)$, $\int(B^{p,k}) \subset B_2^p(K)$, also einen Morphismus $\int : H^{p,k}(M,d) \longrightarrow H_2^p(K)$. Ferner gilt gemäß 2.,3.,4. $W(Z_2^p(K)) \subset Z^{p,k}$, $W(B_2^p(K)) \subset B^{p,k}$ und $\int \circ W = \mathrm{id}_{C^p(K)}$, woraus die Surjektivität von $\int : H^{p,k}(M,d) \to H_2^p(K)$ folgt. □

Es ist nun noch die Frage nach der Injektivität von $\int$ in 2.23 offen. Diese wird jetzt studiert und teilweise beantwortet. Es bezeichne dazu $K^{(r)}$ die r-te Standardunterteilung von K, W_r eine zugehörige Whitneyabbildung, so daß 4. gilt.

Lemma 2.24. Zu jedem $\omega \in \Lambda^{p,k+1}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $r \geq 0$, so daß $\|\omega - W_r \circ \int \omega\| \leq \varepsilon$ ([4]). □

Hieraus erhält man

Satz 2.25. Seien (M^n,g) von beschränkter Geometrie bis zur Ordnung $k > n/2 - 1$, K eine zugehörige uniforme Triangulation und $\bigcup_{r=0}^{\infty} (\mathrm{im}(dW_r)) \subset d_{p-1}\Lambda^{p-1,k+1}$. Dann ist $\int : H^{p,k}(M,d) \longrightarrow H_2^p(K)$ injektiv.

Beweis. Sei $[\int \omega] = 0$, $\omega \in Z^{p,k}$. Da Integration und Unterteilung kommutieren und die Unterteilungsabbildung gemäß 2.13 ein Isomorphismus ist, gilt $[\int_{K^{(r)}} \omega] = 0$ für alle r. Sei $(\varepsilon_i)_i$ eine positive Nullfolge. Gemäß 2.24 existiert zu jedem i ein $r(i)$, so daß

$$\|\omega - W \int_{K^{(r(i))}} \omega\| < \varepsilon_i .$$

Wegen $\int_{K^{(r(i))}} \omega \in B_2^p(K^{(r(i))})$ existiert ein $f_i \in C_2^{p-1}(K^{(r(i))})$ mit $\int_{K^{(r(i))}} \omega = d^c f_i$. Hieraus folgt wegen $dW_r f_i = W_r d^c f_i$

$$\|\omega - dW_{r(i)} f_i\| \leq \|\omega - W_{r(i)} \int_{K^{(r(i))}}\| + \|W_{r(i)} \int_{K^{(r(i))}} \omega - dW_{r(i)} f_i\| = \|\omega - W_{r(i)} \int_{K^{(r(i))}} \omega\| < \varepsilon_i ,$$

also $dW_{r(i)}f_i \longrightarrow \omega$. Aus der Voraussetzung folgt die Existenz eines $\rho \in \Lambda^{p-1,k+1}$ mit $d_{p-1}\rho = \omega$, also $[\omega] = 0$. □
Die Injektivität in 2.23 gilt sicher dann, wenn auf analytischem und auf kombinatorischem Niveau $H_2^* = \bar{H}_2^*$ gilt.
Wir betrachten $d_{p-1}: \Lambda^{p-1,k+1} \longrightarrow \Lambda^{p,k}$, $d_{p-1}^{c,r}: C_2^{p-1}(K^{(r)}) \longrightarrow$ $\longrightarrow C_2^{p}(K^{(r)})$.

Lemma 2.26. a. Ist im d_{p-1} abgeschlossen, so ist im $d_{p-1}^{c,r}$ abgeschlossen für alle $r \geq 0$.
b. Ist im $d_{p-1}^{c,0}$ abgeschlossen, $\bigcup_{r=0}^{\infty} (\mathrm{im}(dW_r)) \subset \mathrm{im}\, d_{p-1}$, so ist im d_{p-1} abgeschlossen.
c. im d_{p-1} und im d_p sind abgeschlossen genau dann, wenn im Δ_p abgeschlossen ist.
d. Es ist im Δ_p abgeschlossen genau dann, wenn $0 \notin \sigma_e(\Delta_p|_{(\ker \Delta_p)^{\perp}})$.

Beweis.a. Sei $(f_\nu)_\nu$ eine Folge aus im $d_{p-1}^{c,r}$, die gegen $f \in C_2^p(K^{(r)})$ konvergiere. Wegen der beschränkten Geometrie sind W und $\int$ beschränkte Abbildungen. Man erhält also mit $f_\nu =$ $= d_{p-1}^{c,r} g_\nu$ $\| W_r f_\nu - W_r f\| \longrightarrow 0$, $\| W_r d_{p-1}^{c,r} g_\nu - W_r f\| \longrightarrow 0$, $\| dW_r g_\nu - W_r f \| \longrightarrow 0$. Aus $d_{p-1}(\Lambda^{p-1,k+1}) = B^{p,k}$ abgeschlossen folgt die Existenz eines ρ mit $d_{p-1}\rho = W_r f$, also $\int d_{p-1}\rho =$ $= \int W_r f = f, \int d_{p-1}\rho = d_{p-1}^{c,r} \int \rho = f$, $f \in \mathrm{im}\, d_{p-1}^{c,r}$.
b. Ist im $d_{p-1}^{c,0} = B_2^p(K)$ abgeschlossen, so auch im $d_{p-1}^{c,r} = B_2^p(K^{(r)})$ für alle r. Denn es ist im $d_{p-1}^{c,0}$ abgeschlossen genau dann, wenn $\mathcal{H}^p(K) \cong \bar{H}_2^p(K) \cong H_2^p(K)$. Aus der Isomorphieeigenschaft von Θ_* und dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_2^p(K) & \longrightarrow & H_2^p(K) \\ \wr\!\!\| \big\downarrow & & \wr\!\!\| \big\downarrow \\ H_2^p(K^{(1)}) & \longrightarrow & H_2^p(K^{(1)}) \end{array}$$

folgt $H_2^p(K^{(1)}) \cong \bar{H}_2^p(K^{(1)})$, also im $d_{p-1}^{c,1}$ abgeschlossen. Für beliebiges r zeigt man das Entsprechende durch vollständige Induktion. Sei jetzt $(\omega)_\nu$ eine Folge aus $d_{p-1}(\Lambda^{p-1,k+1})$, die gegen ω konvergiere und $(\varepsilon_i)_i$ eine positive Nullfolge. Aus $\omega_\nu = d_{p-1}\rho_\nu$, $d_{p-1}\rho_\nu \longrightarrow \omega$, $\int_{K^{(r)}} d\rho_\nu \longrightarrow \int_{K^{(r)}} \omega$,
$d_{p-1}^{c,r} \int_{K^{(r)}} \rho_\nu \longrightarrow \int_{K^{(r)}} \omega$ und im $d_{p-1}^{c,r}$ abgeschlossen folgt die

Existenz eines $g^{(r)} \in C_2^{p-1}(K^{(r)})$ mit $d_{p-1}^{c,r} g^{(r)} = \int_{K^{(r)}} \omega$. $r(i)$ sei so gewählt, daß $\|\omega - W_{r(i)} \int_{K^{(r(i))}} \omega\| < \varepsilon_i$,

$\|\omega - dW_{r(i)} g^{(r(i))}\| = \|\omega - W_{r(i)} \int_{K^{(r(i))}} \omega\| < \varepsilon_i$,

also $dW_{r(i)} g^{(r(i))} \longrightarrow \omega$. Aus der Voraussetzung folgt dann die Existenz eines $\varrho \in \Lambda^{p-1,k+1}$ mit $d_{p-1}\varrho = \omega$.

Bezüglich c. und d. verweisen wir auf [5], [11]. □

Satz 2.27. Sei (M^n, g) von beschränkter Geometrie bis zur Ordnung $k > n/2 - 1$. Unter jeder der nachfolgenden Bedingungen ist $\int : H^{p,k}(M,d) \longrightarrow H_2^p(K)$ ein Isomorphismus.

a. im d_{p-1} ist abgeschlossen.

b. im $d_{p-1}^{c,0}$ ist abgeschlossen und $\overline{\bigcup_{r=0}^{\infty} (\mathrm{im}(dW_r))} \subset \mathrm{im}\, d_{p-1}$.

c. im Δ_p ist abgeschlossen.

d. $0 \notin \sigma_e(\Delta_p|_{(\ker \Delta_p)^\perp})$.

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus 2.27 und 2.21. □

Bisher stand der Spektralwert 0 von Δ_p und Δ_p^c im Vordergrund. Es ist natürlich, auch nach Beziehungen für andere Spektralwerte zu fragen. Dafür empfiehlt es sich, noch eine andere Variante des Laplaceoperators, den semikombinatorischen Laplaceoperator Δ^{sc} zu betrachten. Δ^{sc} ist wie folgt definiert. Man versehe $C_2^p(K)$ (unter der Voraussetzung beschränkter Geometrie) mit einem anderen Skalarprodukt, und zwar sei $\langle\, ,\, \rangle_W$ definiert durch $\langle Wf, Wg \rangle = \int Wf \wedge * Wg$. δ^W sei dann der zu d bezüglich $\langle\, ,\, \rangle_W$ adjungierte Operator und $\Delta^{sc} = d\delta^W + \delta^W d$.

Δ^{sc} ist beschränkt, Δ unbeschränkt. Beide Operatoren haben einen grundverschiedenen Definitionsbereich. Trotzdem hat es einen Sinn, nach einer teilweisen Approximation von Δ durch Δ^{sc} im spektralen Sinne zu fragen. $\sigma_e(\Delta)$ enthält unter der Voraussetzung beschränkter Geometrie (bis zur Ordnung 1) eine Halbgerade $[\bar{\lambda}, \infty[$. Wir betrachten folgendes

Problem. Seien $\lambda \in [\bar{\lambda}, \infty[$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Existieren dann ein r und ein $\mu \in \sigma(\Delta^{sc}(K^{(r)}, W_r))$, so daß $|\lambda - \mu| < \varepsilon$?

An diesem Problem wird zur Zeit gearbeitet. Mit großer Wahrscheinlichkeit fällt die Antwort positiv aus.

LITERATUR

[1] CHEEGER J. "On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds", Proc. Symp. Pure Math., 36 (1980), 91-146.

[2] DEBAUN D. "L^2-cohomology of noncompact surfaces", Preprint.

[3] DODZIUK J. "De Rham-Hodge theory for L^2 cohomology of infinite coverings", Topology, 16 (1977), 157-165.

[4] DODZIUK J. "Sobolev spaces of differential forms and de Rham-Hodge isomorphism", J. Diff. Geom., 16 (1981), 63-73.

[5] DONNELLY H. "The differential form spectrum of hyperbolic space", manuscr. math., 33 (1981), 365-385.

[6] EICHHORN J. "Spektraltopologie I", ersch. in Colloq. Math..

[7] EICHHORN J. "Der de Rhamsche Isomorphiesatz in der L_2-Kategorie für eine Klasse offener Mannigfaltigkeiten", Math. Nachr., 97 (1980), 7-14.

[8] GREENE R. "Complete metrics of bounded curvature on noncompact manifolds", Archiv der Mathematik, 31 (1978), 89-95.

[9] RINOW W. "Topologie", Berlin 1975.

[10] TOPONOGOV W. "Nichtkompakte Räume nichtnegativer Krümmung", Anhang zu "Riemannsche Geometrie im Großen", Moskau 1971.

[11] ZUCKER S. "Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincare metric", Annals of Math., 109 (1979), 415-476.

JÜRGEN EICHHORN
DDR-2200 GREIFSWALD
SEKTION MATHEMATIK
JAHNSTRASSE 15a