Julius Albrecht

Eigenvalue problems with functional-differential equations

In: Jaroslav Kurzweil (ed.): Equadiff 7, Proceedings of the 7th Czechoslovak Conference on Differential Equations and Their Applications held in Prague, 1989. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1990. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 118. pp. 212--213.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/702359

EIGENWERTAUFGABEN MIT FUNKTIONAL-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ALBRECHT J., CLAUSTHAL-ZELLERFELD, FRG

Die von L. Collatz untersuchten Eigenwertaufgaben (EWA) mit Funktional-Differentialgleichungen

[1] $-\phi''(x) = \lambda\phi(\frac{x}{2})$ in $[-1,1]$; $\phi(-1)=0$, $\phi(1)=0$

und

[2] $-\phi''(x) = \lambda\phi(1-x)$ in $[0,1]$; $\phi(0)=0$, $\phi'(1)=0$

sind einer EWA mit einem positiven Operator

[1.1] $\phi(x) = \lambda(P\phi)(x)$ in $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, wobei

$$(Pf)(x) := \int_{-1/2}^{1/2} K(x,2\eta)f(\eta)d\eta \text{ und}$$

$$K(x,\xi) := \begin{Bmatrix} (1-x)(1+\xi) & \text{für } \xi \le x \\ (1+x)(1-\xi) & \text{für } x \le \xi \end{Bmatrix} \text{ ist,}$$

bzw. einer linksdefiniten EWA mit symmetrischen Bilinearformen

[2.1] $M(f,\phi) = \lambda N(f,\phi)$ für alle $f \in D$, wobei

$$M(f,g) := \int_0^1 f'(x)g'(x)dx,\ N(f,g) := \int_0^1 f(x)g(1-x)dx \text{ für } f,g \in D \text{ und}$$

$$D := \{f \in C^1[0,1]: f(0)=0\} \text{ ist,}$$

äquivalent. Es ist also möglich, S c h r a n k e n für die (ersten) Eigenwerte (EW) anzugeben, und zwar mit folgenden Methoden:

[1.2] Quotienteneinschließungssatz für EW positiver Operatoren;

[2.2] Verfahren von Ritz zur Berechnung oberer bzw. unterer Schranken für positive bzw. negative EW,
Verfahren von Lehmann zur Berechnung unterer bzw. oberer Schranken für positive bzw. negative EW.

Einige Ergebnisse (Schranken für den ersten (positiven) EW λ_1):

[1.3] Iterationsfolge $v_o = 48(1-x^2)$, $v_1 = (1-x^2)(23-x^2)$, ...

k	$\underset{\lvert x\rvert \le 1/2}{\text{Min}} \frac{v_{k-1}(x)}{v_k(x)}$	$\underset{\lvert x\rvert \le 1/2}{\text{Max}} \frac{v_{k-1}(x)}{v_k(x)}$
1	2.09 05	2.09 15
2	2.0906 57	2.0906 95

[2.3] Ansatzfunktionen $v_{2k-1} = x^{4k-3}$, $v_{2k} = x^{4k-2}$ $(k=1,\ldots,n)$

n	Lehmann	Ritz
1	3.5 06	3.5 53
2	3.5160152 66	3.5160152 81

Eine ausführlichere Darstellung ist in Vorbereitung.

Literatur

[1] L. Collatz: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Geest und Portig, Leipzig 1949.

[2] L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950.

[3] F. Goerisch, J. Albrecht: Eine einheitliche Herleitung von Einschließungssätzen für Eigenwerte. ISNM 69 (1984), S. 58-88, Birkhäuser, Basel.

[4] K.M. Liu, E.L. Ortiz: Numerical Solution of Ordinary and Partial Functional-Differential Eigenvalue Problems. Computing 41 (1989), S. 205-217.