Kosoúhlé promítání

Brána k vědění

FERDINAND VESELÝ

Kosoúhlé promítání

Jč
m+f

SVAZEK 15

KOSOÚHLÉ PROMÍTÁNÍ

FERDINAND VESELÝ

PRAHA 1950

PŘÍRODOVĚDECKÉ NAKLADATELSTVÍ

Vydala

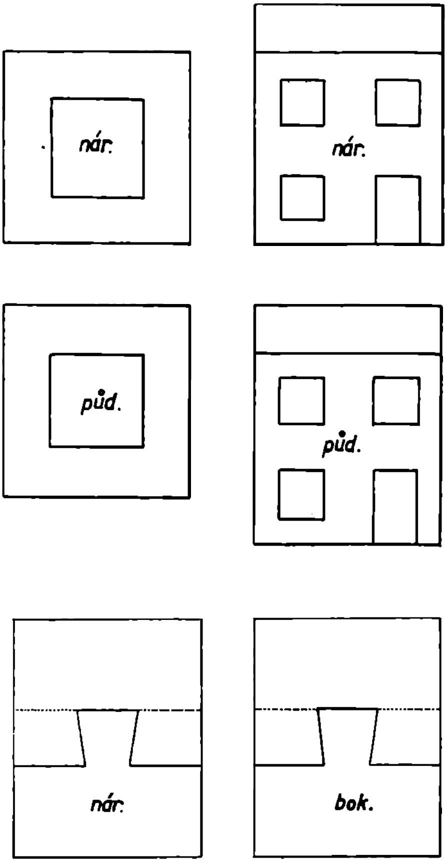
JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

ČÁST I.

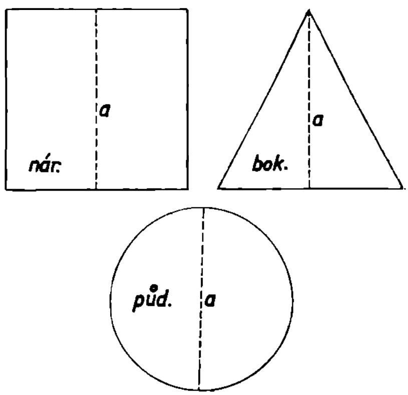
VLASTNOSTI KOSOÚHLÉHO PROMÍTÁNÍ

I. Úkol kosoúhlého promítání.

Plány a projekty stavebních objektů a technických předmětů jsou zpravidla kresleny v kolmém promítání na sdružené průmětny, t. zv. půdorysnu, nárysnu a bokorysnu, z nichž se dají snadno čísti rozměry objektů, podle kterých zkušený odborník dovede plán posoudit a projekt uskutečnit. Ale i sebezkušenějšímu znalci nebývá vždy při složitých objektech zběžným nahlédnutím do takto kresleného rysu patrný celkový vzhled objektu, jak by se mu jevil při přímém pozorování. Že bychom si velmi těžko učinili skutečnou a správnou představu i o zcela jednoduchých útvarech ze dvou sdružených průmětů kolmých, na př. z pů-



Obr. 1.



Obr. 2.

dorysu a nárysu, ukazuje obr. 1 a 1a, kde jsou zobrazeny dva útvary poměrně velmi jednoduché, nebo z nárysu a bokorysu v obr. 1b, který představuje čtyřboký hranol ze dvou různých dřev sestavený, anebo dokonce nebudeme moudří ani z obr. 2, v němž jsou narýsovány vedle sebe tři základní geom. útvary jako půdorys, nárys a bokorys zcela jednoduchého tělesa.

Snažíme se tedy zobraziti útvar i tak, že předložený obraz vyvolá v každém, i necvičeném oku, dojem, jaký by vyvolal samotný originál. Jednou takovou zobrazovací methodou je t. zv. *kosoúhlé promítání*, někdy také nazývané *rovnoběžnou perspektivou.*

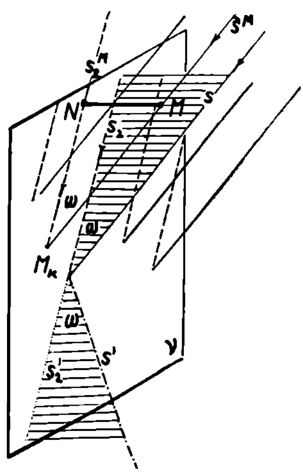
Kolmé promítání není názorné proto, že zobrazované útvary spočívají obyčejně svými podstavnými stěnami právě v rovinách, na něž kolmo promítáme, a hrany a stěny kolmé k těmto podstavám zobrazují se pak jako body a úsečky. Abychom zobrazili hrany opět jako úsečky a obrazce jako obrazce, promítáme je *paprsky rovnoběžnými*, ale takovými, že svírají s průmětnou, na které je zachytíme, *úhel kosý*. Směr těchto paprsků musí býti tedy napřed určen.

Při pozorování (čtení) takového kosoúhlého průmětu musíme si však uvědomit, že zrakový dojem jím vyvolaný se bude tím více shodovati s dojmem skutečným, čím méně se bude odchylka zrakových paprsků s průmětnou lišiti od odchylky paprsků promítacích, které promítaly naše těleso. Pozorujme tedy tyto obrazy z větší vzdálenosti a nestavme je přímo před sebe jako průměty pravoúhlé, ale stranou. Kosoúhlé průměty útvarů budou především sloužiti názornému zobrazení objektu; budou zpravidla sestrojovány jako doplněk pravoúhlých průmětů. Můžeme však v tomto promítání zobrazovati i řešení geometrických úloh prostorových, *úloh polohových*, které se zakládají jen na spojování, protínaní a rovnoběžnosti základních geometrických útvarů, bodů, přímek a rovin nebo *úloh metrických*, t. j. úloh o velikosti úseček, úhlů, vzdáleností a pod. Při těchto úlohách si ukážeme vzájemné vztahy mezi promítáním kolmým a kosoúhlým a použijeme těchto vztahů jak k určení kosoúhlého průmětu z daného objektu, tak obráceně k určení objektu z jeho průmětu kosoúhlého.

2. Směr promítání a průmětna.

Představme si nějakou rovinu, označenou řeckým písmenem ν, na př. nějakou svislou s naším čelem rovnoběžnou stěnu všemi směry prodlouženou. Považujme ji za *průmětnu*, na níž budeme všechny paprsky zachycovat; průměty útvarů budeme ihned vyrýsováním zobrazovat; bude tato průmětna tedy i *nákresnou.*

Zvolme si takový paprsek označený písmenem s, aby s rovinou svíral odchylku ω a požadujme, aby úhel ω byl vždy ostrý, t. j. $\omega < R$ (obr. 3). Takový paprsek nejlépe představuje paprsek sluneční. Představme si nějakou tyčinku k průmětně kolmou, jejíž jeden krajní bod N leží v průmětně, druhý M je mimo ni. Tyčinka osvětlena sluncem vrhá na průmětnu stín, který vychází z bodu N a končí v nějakém bodě, označeném písmenem M_k. Potom spojnice s^M bodů M, M_k je světelný paprsek a považujme jej také za paprsek promítací. Tento paprsek svírá s průmětnou odchylku, kterou určíme jako úhel paprsku s^M se stínem tyčinky NM. Jest zřejmé, že tento úhel bude vždy ostrý, neboť v pravoúhlém trojúhelníku MNM_k nemůže býti žádný z obou dalších úhlů tupý.



Obr. 3.

Stín NM_k je stínem úsečky NM, jest však také, jestliže jej v obou směrech prodloužíme, kolmým průmětem paprsku s^M na průmětnu ν. Označme jej tedy známým způsobem jako s_2^M. Jest tedy $M_kN \equiv s_2^M$ a odchylka paprsku s^M s průmětnou je úhel, který paprsek svírá se svým průmětem s_2^M kolmým k průmětně ν.

Kdyby nám slunce nepomáhalo, musíme si odchylku tímto způsobem vykonstruovat. Na paprsku s^M si zvolíme libovolný bod M, z něho spustíme kolmici (tyčinku) MN, stanovíme v průmětně její patu N a spojíme ji s průsečíkem M_k paprsku s^M s průmětnou ν

(stín). Úhel přímek s^M a $s_2^M \equiv NM_k$ je úhel ω paprsku s^M s rovinou ν. (Obr. 3.)

Všechny paprsky rovnoběžné s paprskem s^M budou s průmětnou svírati stejné odchylky ω. Také jejich kolmé průměty na rovinu ν budou spolu rovnoběžné. Odůvodněte, proč? Souhrn těchto rovnoběžných paprsků nazýváme *osnovou* rovnoběžek. Kterýkoliv z nich je *směrem osnovy* a jím je celá osnova určena. Každým bodem v prostoru prochází jeden paprsek osnovy.

Protože se můžeme po každé přímce pohybovati v dvojím smyslu, označíme šipkou ten smysl, který udává, odkud paprsky přicházejí, a mluvíme o *orientovaném* paprsku promítacím. Potom také jeho kolmý průmět s_2 bude orientován a i ten označíme šipkou. Bude také platit obráceně: Orientováním paprsku s_2 v průmětně, bude také orientován i paprsek s v prostoru (obr. 3). Kdybychom si v průmětně zvolili nějaký orientovaný paprsek s_2 a nad ním sestrojili k průmětně kolmou rovinu, můžeme v ní sestrojiti jen jediný paprsek s, který s průmětnou svírá určitý úhel $\omega < R$ a je s orientovaným paprskem s_2 souhlasně orientován.

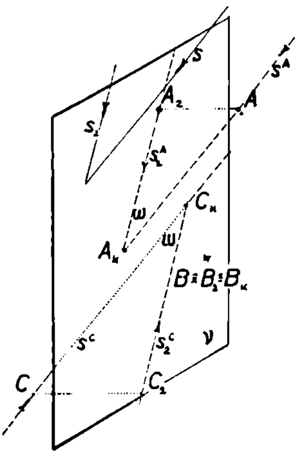
Z obr. 3 je patrné, že kdybychom byli zvolený paprsek s_2' orientovali obráceně, získali bychom v jeho kolmo promítací rovině a v témž poloprostoru roviny ν místo paprsku s jiný orientovaný paprsek s', který by s průmětnou ν svíral také úhel ω a jehož kolmým průmětem je s_2'.

3. Kosoúhlý průmět bodu.

Zvolme si někde v prostoru mimo průmětnu bod A (obr. 4) a veďme jím rovnoběžný paprsek s^A s daným směrem promítání s. Paprsek s^A protne průmětnu v bodě A_k, který budeme nazývat *kosoúhlým průmětem bodu A* na průmětnu ν. Bodu A říkáme také *originál*, značíme jej vždy bez indexu dole, paprsek s^A je *kosoúhle promítací paprsek bodu A* a značíme jej písmem s, v němž napravo nahoře udáme název originálu, tedy s^A. Kosoúhlé průměty budeme vždy označovati tak, že ke jménu originálu připojíme vpravo dole index k, tedy A_k.

Stejně jako bod A promítali bychom kosoúhle i jiné body v prostoru, na př. body M, R, Q ... atd.

Kdyby některý z těchto bodů, na př. bod B, ležel v průmětně ν, pak jeho kosoúhle promítací paprsek s^B protne průmětnu v bodě B_k, který splyne s bodem B v jediný bod; říkáme, že oba body se ztotožňují a píšeme: $B_k \equiv B$. Smluvme si, že kosoúhlé průměty takových bodů nebudeme označovati žádným indexem prostě jen jménem jejich originálu. Budeme-li psáti na př. B, jest to originál, ale je to i jeho kosoúhlý průmět za předpokladu, že bod B leží v průmětně.



Obr. 4.

Body $C, D, E, \ldots$, které by se nacházely v opačném poloprostoru průmětny ν, než jsou body $A, M, R, \ldots$, promítáme stejně. Ovšem jejich promítací paprsky s^C, s^D, s^E protnou průmětnu ν v bodech C_k, D_k, $E_k \ldots$ dříve, než projdou originály. Někdy si myslíme, že jsme vedli takovým bodem stejný paprsek, ale obráceně orientovaný a říkáme mu *paprsek zpětný*.

Protože není v prostoru jiných bodů, můžeme tvrdit:

Kosoúhlým průmětem každého bodu v prostoru je bod v průmětně.

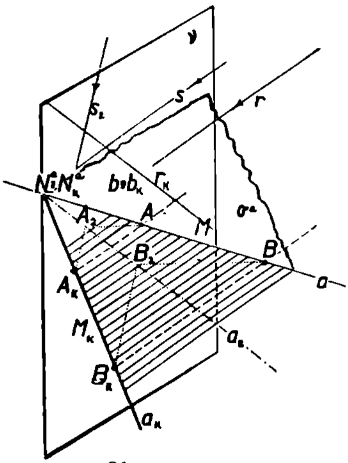
Kosoúhlý průmět bodu nacházejícího se mimo průmětnu, na př. A, sestrojíme prakticky takto: Z bodu A spustíme kolmici na průmětnu a stanovíme její patu A_2, bude to pravoúhlý průmět bodu A na ν. Bodem A_2 sestrojíme rovnoběžku s_2^A s paprskem s_2 a stanovíme průsečík $A_k \equiv (s^A \,.\, s_2^A)$ v rovině určené přímkami s^A, s_2^A a kolmé k průmětně, jak jsme o tom mluvili již v předcházejícím odstavci. K pravoúhlému trojúhelníku AA_2A_k se ještě vrátíme.

Představme si, že na rovné louce vypouštíme draka D, který je ze strany osvětlen sluncem. Drak vrhá na louku stín D_k. Draka D můžeme považovat za originál „bodu“, stín D_k bude jeho kosoúhlým průmětem, louka je průmětnou ν a sluneční paprsky jsou kosoúhle promítacími paprsky, z nichž ty, které byly drakem zachyceny, po prodloužení jsou kosoúhle promítacími paprsky s^D „bodu“ D. Spadne-li drak na louku, zakryje určité místo a to je jeho stínem.

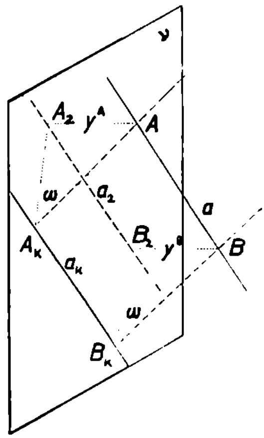
4. Kosoúhlý průmět přímky.

Zvolme si nyní libovolnou přímku a; tato neleží v průmětně, ale protíná ji v bodě N^a, t. zv. *stopníku* přímky; a nechť dále přímka a není rovnoběžná se směrem promítání (obr. 5). Vedeme-li každým jejím bodem M promítací paprsek s^M, vyplňují všechny tyto paprsky rovinu σ^a k průmětně zpravidla nakloněnou, která je s daným směrem kosoúhlého promítání rovnoběžná. Proč? Nazýváme ji *kosoúhle promítací rovinou přímky a*. Rovina σ^a protne průmětnu ν v přímce a_k, kterou nazýváme *kosoúhlým průmětem přímky a.*

Kdyby *přímka r* byla se *směrem s kosoúhlého promítání rovnoběžná*, splynou s ní všechny kosoúhle promítací paprsky bodů přímky a nevytvoří žádnou rovinu σ^r. *Kosoúhlým průmětem* této přímky *je bod* r_k (obr. 5).



Obr. 5.



Obr. 6.

Kosoúhlý paprsek s^B libovolného bodu B přímky a leží v její kosoúhle promítací rovině σ^a. V ní leží i přímka a_k; jsou tedy kosoúhle promítací paprsek s^B a průmět přímky a, označený a_ν, přímky různoběžné. Jejich průsečík $B_k \equiv (s^B \,.\, a_k)$ je kosoúhlý průmět bodu B. Přímky s^B a s_k nemohou býti rovnoběžné z tohoto důvodu: Přímka s^B svírá s průmětnou úhel $\omega > 0$ a v průmětně nemůže ležet žádná přímka, která by s ní svírala úhel ω, tedy nemůže to býti ani přímka a_k, která v průmětně leží, neboť dvě rovnoběžné přímky musí s rovinou ν svírati stejné odchylky. Tedy platí:

Leží-li bod na přímce, leží jeho kosoúhlý průmět na kosoúhlém průmětu té přímky.

Podle této věty musí tedy přímka a_k procházeti i stopníkem N^a přímky a, neboť platí $N^a \equiv N^a_k$.

Přímku a_k sestrojíme takto: na přímce a zvolíme dva body A a B a sestrojíme jejich kosoúhlé průměty A_k a B_k. Spojnice bodů A_k a B_k je přímka $a_k \equiv A_k B_k$. Známe-li stopník N^a přímky a, stačí zvoliti už jen jeden bod, na př. B, a kosoúhlý průmět přímky a je $a_k \equiv NB_k$. Není-li stopník N^a znám, je tím určena jeho konstrukce jako průsečíku přímky a s jejím kosoúhlým průmětem $a_k \equiv A_k B_k$.

Budiž dána přímka a rovnoběžná s průmětnou ν (obr. 6). Protože všechny body takové přímky jsou od průmětny stejně vzdálené, jsou všechny trojúhelníky AA_2A_k, BB_2B_k, ..., shodné, neboť jsou pravoúhlé se stejným úhlem ω proti stejným odvěsnám $AA_2 = BB_2 = \ldots$ Jest tedy také $\overline{AA}_k = \overline{BB}_k$ a čtyřúhelník ABB_kA_k je rovnoběžníkem, neboť dvě jeho protilehlé strany jsou rovnoběžné a stejné. Přímka a_k je rovnoběžná s přímkou a.

Kosoúhlý průmět rovnoběžky s průmětnou je s přímkou rovnoběžný. Bude-li přímka d k průmětně kolmá, a to je naše známá tyčinka, je jejím kosoúhlým průmětem spojnice stopníku $N^d \equiv B_2$ s kosoúhlým průmětem B_k jednoho jejího bodu B. Tato přímka $d_k \equiv N^d B_k \equiv B_2 B_k \equiv s_2^B$ je, jak jsme již viděli, pravoúhlým průmětem kosoúhle promítacího paprsku s^B.

Kosoúhlý průmět kolmice k průmětně je rovnoběžný s pravoúhlým průmětem kosoúhlého paprsku.

Jestliže přímka b leží v průmětně (obr. 5), jsou všechny její body M také v průmětně a jejich kosoúhlé průměty M_k s nimi splývají. Jest tedy $b_k \equiv b$; kosoúhlý průmět přímky ležící v průmětu se s ní ztotožňuje.

Protože jiných přímek v prostoru není, můžeme tvrditi:

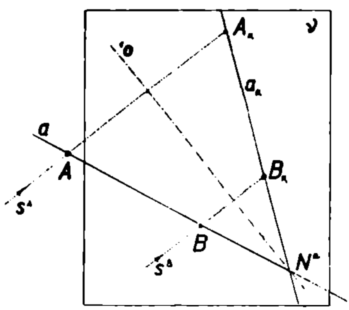
Kosoúhlým průmětem přímky, která není rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem, je přímka.

Kosoúhlým průmětem přímky rovnoběžné s kosoúhle promítacím paprskem je bod.

Napne-li se provázek, kterým je drak připoután k zemi, takže jej můžeme považovati za přímku, je jeho stín na louce jeho kosoúhlým průmětem. Zřejmě prochází místem (stopníkem), kde motouz je připoután k zemi. Kdybychom po provázku poslali drakovi „psaníčko" (bod), bude jeho stín se pohybovati po stínu provázku. Spadne-li drak k zemi, zakrývá natažený motouz na zemi svůj stín. Kdyby vanul takový vítr, že by nám drak zakryl slunce, je provázek rovnoběžný se směrem světelných paprsků, stín draka i provázku by padl na nás. Natažené dráty telegrafního nebo elektrického vedení se zemí rovnoběžné vrhají na ní stíny, které jsou s nimi rovnoběžné.

5. Úsečka.

Na přímce a, která není rovnoběžná s promítacím paprskem s, uvažujme úsečku AB a na průmětu a_k její kosoúhlý průmět A_kB_k. Body ABB_kA_k jsou vrcholy t. zv. *promítacího lichoběžníka*, jehož základnami jsou oba kosoúhlé paprsky s^A a s^B bodů A a B a rameny úsečky AB a A_kB_k. Protože tento lichoběžník je obecný, mohou býti tato ramena různá i stejná (obr. 5).



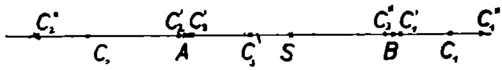
Obr. 7.

Kosoúhlý průmět úsečky je větší, rovný nebo menší než úsečka.

Nejzajímavější je případ, kdy $\overline{A_kB_k} = \overline{AB}$. Nastane, když úsečka je na přímce rovnoběžné s průmětnou, neboť v promítacím lichoběžníku ABB_kA_k (obr. 6) jsou protilehlé strany $AB = A_kB_k$ stejné. Lichoběžník ABB_kA_k se změní na rovnoběžník. Případ, kdy $\overline{A_kB_k} = \overline{AB}$, může také nastati nezávisle na poloze přímky a k průmětně při zvláštní poloze kosoúhle promítacího paprsku. Přihodí se někdy, že kosoúhle promítací paprsek je kolmý k jedné z os ^1o, ^2o úhlu přímek a a a_k. Pak promítací lichoběžník je rovnoramenný a opět $\overline{AB} = \overline{A_kB_k}$. (Obr. 7.)

6. Dělicí poměr.

Polohu nějakého bodu C na přímce o určujeme zpravidla tak, že zvolíme na přímce pevný bod O a stanovíme vzdálenost $\overline{OC}$ bodu C od bodu O, kterou vyjádříme t. zv. měrným číslem, t. j. poměrem úsečky OC k jednotkové úsečce. Jest však výhodné určiti polohu bodu C obecnějším způsobem: Zvolme na přímce *dva pevné body A a B*; jejich vzdálenost nazýváme *základnou* a body AB *body základními* (obr. 8). Poloha bodu C jest také určena poměrem vzdáleností bodu C od základních bodů A a B, t. j. poměrem $\overline{AC} : \overline{BC}$. Nazýváme jej *dělicím poměrem* bodu C k bodům A a B a značíme $\lambda = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ nebo také (ABC).



Obr. 8.

Ukážeme si, jakých hodnot nabývá tento dělicí poměr, když poloha bodu C se mění a prochází všemi body na přímce o (obr. 8).

1. Bod C budiž v poloze C_1. Pak dělicí poměr $\lambda = \dfrac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}$ je vždy nějaké kladné číslo větší než jedna, neboť úsečka $AC_1 > BC_1$, t. j. čitatel zlomku λ je větší než jmenovatel. V tomto případě vzniknou dva krajní případy:

a) Bod C přiblíží se na velmi malou vzdálenost do bodu C_1' k bodu B. Potom platí:

$$\lambda_1' = \frac{\overline{AC_1'}}{\overline{BC_1'}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC_1'}}{\overline{BC_1'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1'}} + 1.$$

V tabulce 1. vidíme, jak v případě pro $\overline{AB} = 3j$ se mění λ_1', když C_1' se blíží k bodu B.

Z ní soudíme, že splyne-li bod C_1' s bodem B, bude číslo λ_1' větší než kterékoliv nám známé číslo.

b) Druhá krajní poloha nastane, projde-li bod C takovou polohou C_1'' na přímce o, že bychom museli list, na kterém rýsujeme, velmi

Tab. 1.

$\overline{AB} = 3j.$

$\overline{BC_1'}$	$\overline{AB} : \overline{BC_1'}$	λ_1'
$0{,}1\,j$	$\frac{3}{0{,}1} = 30$	31
$0{,}01\,j$	$\frac{3}{0{,}01} = 300$	301
$0{,}001\,j$	$\frac{3}{0{,}001} = 3000$	3001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$0{,}000001\,j$	$\frac{3}{0{,}000001} = 3000000$	3000001
$\vdots$	$\vdots$	

daleko prodloužit. Na obr. 8 je tato poloha vyznačena šipkou. V tabulce 2 jsou hodnoty pro $AB = 3j$, když C_1'' se neomezeně vzdaluje:

Tab. 2.

$\overline{AB} = 3j.$

$\overline{BC_1''}$	$\overline{AB} : \overline{BC_1''}$	λ_1''
$10\,j$	$\frac{3}{10} = 0{,}3$	1,3
$100\,j$	$\frac{3}{100} = 0{,}03$	1,03
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$1000000\,j$	$\frac{3}{1000000} = 0{,}000003$	1,000003
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Z hodnot λ_1'' usuzujeme, že jestliže bod C_1'' se neomezeně po přímce vzdaluje, jeho dělicí poměr se blíží k *jedné. Dělicí poměry všech bodů C_1 napravo od základny jsou větší než jedna.*

2. Bod C nechť prochází polohami C_2 nalevo základny. I platí opět:

$$\lambda_2 = \frac{\overline{AC_2}}{\overline{BC_2}} = \frac{-\overline{C_2A}}{-\overline{C_2B}} = \frac{\overline{C_2B} - \overline{AB}}{\overline{C_2B}} = 1 - \frac{\overline{AB}}{\overline{C_2B}}$$

a protože $\overline{AB}$ je vždy menší než $\overline{C_2B}$, bude zlomek $\frac{\overline{AB}}{\overline{C_2B}}$ vždy menší než jedna a λ_2 bude kladné číslo také menší než jedna. Nastanou i zde dva krajní případy jako v případě prvém. Prvně C_2', když C_2 se blíží k bodu A, po druhé C_2'', když C_2 se neomezeně vzdaluje. Sestavením příslušných tabulek došli bychom k úsudku, že v tom případě λ_2' se blíží k nule a λ_2'' k číslu jedna, ale tak, že je stále menší než jedna. *Dělicí poměry všech bodů C_2 nalevo základny jsou kladná čísla menší než jedna.*

Z obou případů vychází:

Každému bodu na dané přímce, který je vně dané základny, přísluší kladný dělicí poměr.

3. Zbývá uvážit ještě body C_3 uvnitř úsečky $\overline{AB}$. Dělicí poměr bodu C_3 jest opět

$$\lambda_3 = \frac{\overline{AC_3}}{\overline{BC_3}} < O,$$

neboť o úsečce $\overline{AC_3}$ v čitateli předpokládáme, že je kladného smyslu $\overrightarrow{AC_3}$, kdežto úsečka $\overline{BC_3}$ v jmenovateli je potom smyslu obráceného, t. j. záporného. Poměr dvou relativních čísel nesouhlasných je záporný. Oba krajní případy a), kdy C_3' se blíží k bodu A a b), kdy C_3'' se blíží k bodu B, poskytnou po sestavení tabulek výsledek, že a) λ'_3 se blíží k nule, ale je stále záporné, a b) λ_3'' klesá pod všechna známá čísla záporná. Dělicí poměr bodu C_3^*, když tento prochází středem S úsečky

$$\overline{AB} \text{ je } \lambda_3^* = \frac{\overline{AS}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AS}}{-\overline{AS}} = -1.$$

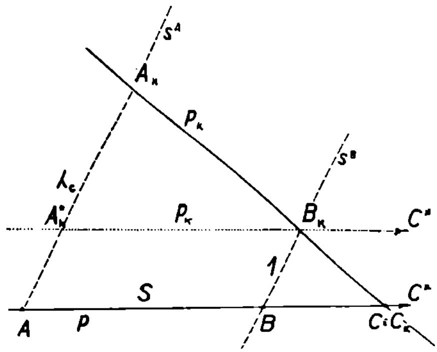
Z toho všeho plyne:

Každému bodu na dané přímce, který je uvnitř dané základny, přísluší záporný dělicí poměr.

III. Dokážeme si dále větu:

Každému bodu na přímce přísluší k určitým základním bodům jediný dělicí poměr a každému dělicímu poměru jediný bod.

Veďme v obr. 9 body A a B na přímce p dvě rovnoběžky s^A a s^B a na s^B vynesme od bodu B délkovou jednotku $\overline{BB_k}$. Spojnice $B_kC \equiv \equiv p_k$ protne rovnoběžku s^A v bodě A_k. Délka úsečky $\overline{AA_k}$ je dělicí poměr λ_C bodu C. Vyplývá to z podobných trojúhelníků $\triangle ACA_k \sim \triangle BCB_k$, v nichž platí: $\overline{AA_k} : 1 = \overline{AC} : \overline{BC}$, čili $\overline{AA_k} = = \lambda_C$. Prvá část věty je dokázána, neboť všechny spojnice bodů přímky p (až na jediný, t. j. bod B) s bodem B_k protnou přímku s^a a bod A_k a tedy i úsečka $\overline{AA_k}$ vždy existují. Jediná spojnice BB_k přímku s^A neprotne; je s ní rovnoběžná. I v tom případě říkáme, že bod A_k^* jest vždy za každým dosažitelným bodem a že hodnota dělicího poměru $\overline{AA_k^*}$ je vždy větší než jakékoliv známé číslo.



Obr. 9.

Obráceným postupem lze na s^A vynésti dělicí poměr λ_C od bodu A, koncový bod A_k spojiti s bodem B_k a přímka $p \equiv A_kB_k$ protne přímku p v jediném bodě C. Je-li $\lambda^* = 1$, pak $\overline{AA_k^*} = \overline{BB_k}$ a přímka p_k je s přímkou rovnoběžná; říkáme opět, že bod C^* leží za kterýmkoliv dosažitelným bodem, a nazýváme jej také *nevlastním bodem přímky p.*

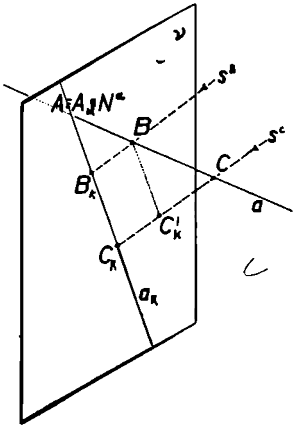
IV. Zvolme si na přímce a tři body A, B, C (obr. 10), při čemž bod A zvolme ve stopníku N^a přímky. Kosoúhlým průmětem přímky a a jejích bodů A, B, C jest přímka a_k a na ní ležící body A_k, B_k, C_k, při čemž $A_k \equiv A$. Z podobných trojúhelníků $\triangle ACC_k \sim \triangle BCC_k'$ plyne $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A_kC_k}}{\overline{B_kC_k}}$, t. j. $\lambda_C = \lambda_{C_k}$, což je pro kosoúhlé promítání velmi důležitá věta:

Dělicí poměr bodu na přímce se kosoúhlým promítáním nemění.

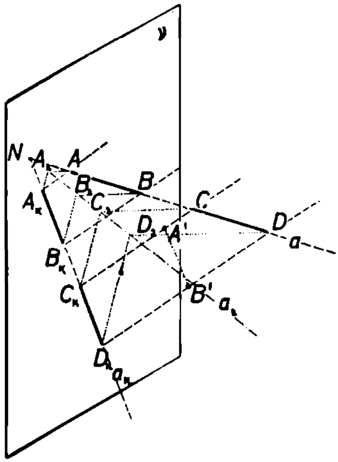
Bude-li tedy na př. $\lambda_C = -1$, bude také $\lambda_{C_k} = -1$, čili:

Kosoúhlým průmětem středu každé úsečky je střed jejího kosoúhlého průmětu.

Uvažujme na přímce a dvě stejné úsečky $\overline{AB} = \overline{CD}$ (obr. 11). Jejich kosoúhlými průměty jsou úsečky $\overline{A_kB_k}$ a $\overline{C_kD_k}$ na přímce a_k.



Obr. 10.



Obr. 11.

I platí:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_kC_k}}{\overline{B_kC_k}} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A_kD_k}}{\overline{B_kD_k}},$$

čili

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_kB_k} + \overline{B_kC_k}}{\overline{B_kC_k}} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{AB} + \overline{BD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A_kB_k} + \overline{B_kD_k}}{\overline{B_kD_k}},$$

čili

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} + 1 = \frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kC_k}} + 1 \quad \text{a} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} + 1 = \frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kD_k}} + 1$$

a také

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kC_k}} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{A_kB_k}}{\overline{B_kD_k}}.$$

Dále obrácením zlomků:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_kC_k}}{\overline{A_kB_k}} \text{ (I)} \quad \text{a} \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_kD_k}}{\overline{A_kB_k}} \text{ (II)}$$

a z rovnice (II)

$$\frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_kC_k} + \overline{C_kD_k}}{\overline{A_kB_k}},$$

čili

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B_kC_k}}{\overline{A_kB_k}} + \frac{\overline{C_kD_k}}{\overline{A_kB_k}}.$$

Odečteme-li od této rovnice rovnici I, bude:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C_kD_k}}{\overline{A_kB_k}},$$

jejíž levá strana $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 1$, neboť $\overline{CD} = \overline{AB}$.

Jest tedy

$$1 = \frac{\overline{C_kD_k}}{\overline{A_kB_k}},$$

z čehož

$$\overline{A_kB_k} = \overline{C_kD_k}.$$

Kosoúhlé průměty stejných úseček na jedné přímce ležících jsou stejné.

V. Uvažujme dvě různé úsečky $\overline{BC}$ a $\overline{B_kC_k}$ na daných přímkách a a a_k protínajících se v bodě $A \equiv A_k$. Úsečka $\overline{BC}$ buď na přímce p pevně položena (obr. 10), úsečka $\overline{B_kC_k}$ nikoliv. Úsečku $\overline{B_kC_k}$ můžeme jen tenkrát považovat za kosoúhlý průmět úsečky $\overline{BC}$ na přímku a_k, budou-li $s^B \equiv BB_k$ a $s^C \equiv CC_k$ spolu rovnoběžné. To však nastane tehdy, budou-li trojúhelníky $\triangle ABB_k \sim \triangle ACC_k$ podobné, t. j. bude-li platit $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A_kB_k} : \overline{A_kC_k}$. O takové poloze obou úseček $\overline{AB}$ a $\overline{A_kB_k}$ říkáme, že je *perspektivní.*

Jsou-li dvě úsečky ležící na dvou různoběžkách v poloze perspektivní, jsou dělicí poměry průsečíků obou různoběžek ke koncovým bodům obou úseček stejné!

Cvičení:

1. Na přímce si zvolte tři body A, B, C a stanovte dělicí poměry (ABC), (ACB), (BAC), (BCA)!

2. Jaký dělicí poměr má bod, který rozdělí úsečku na jednu pětinu a čtyři pětiny?

3. Dokažte, že jestliže $(ABC) = (ABC')$, že $C \equiv C'$!

4. Na přímce jsou dány tři body A, B, C. Stanovte bod D, aby $\lambda_D = \lambda_C + 1$! Stanovte bod E, aby $\lambda_E = -\lambda_C$!

5. Stanovte (ACB), když $(ABC) = a$!

6. Kolik dělicích poměrů určují tři body A, B, C? Stanovte je, je-li jeden z nich určen!

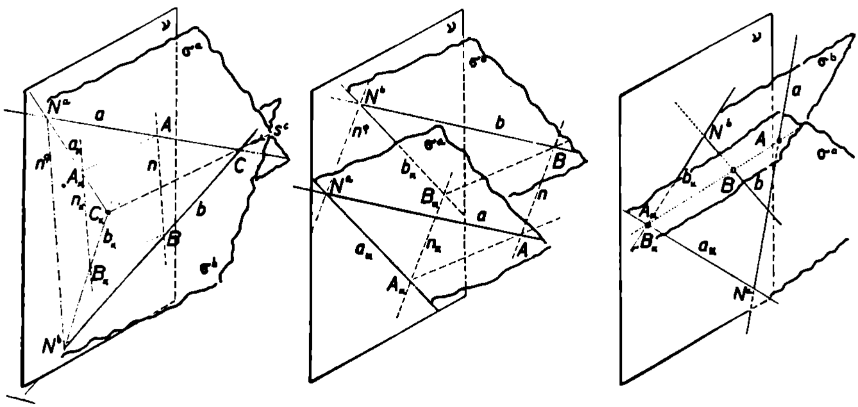
7. V rovnoběžníku $ABCD$ je sestrojena úhlopříčka $e \equiv \overline{AD}$ a na ní je promítnut z bodu B střed S strany $\overline{CD}$. Dokažte, že dělicí poměr tohoto průmětu na e k bodům A a D rovná se -2!

7. Dvě přímky.

Kosoúhlým průmětem dvou rovnoběžek neležících v jedné kosoúhlé promítací rovině jsou dvě rovnoběžky. (Obr. 12b.)

Kosoúhle promítací roviny σ^a a σ^b obou přímek a a b jsou spolu rovnoběžné, neboť každá z nich obsahuje dvě různoběžky (a a s) rovnoběžné s rovinou druhou. Průmětna je protne v rovnoběžkách a_k a b_k.

Kosoúhlým průmětem dvou různoběžek, které neleží v jedné kosoúhle promítací rovině, jsou dvě různoběžky. (Obr. 12a.)



Obr. 12. *a)* *b)* *c)*

Průsečnice obou jejich kosoúhle promítacích rovin σ^a a σ^b je kosoúhle promítacím paprskem s^C průsečíku C obou různoběžek a a b a průmětna protne obě roviny σ^a a σ^b ve dvou různoběžkách a_k a b_k, jichž průsečíkem C_k je průsečík paprsku s^C s průmětnou.

Leží-li obě rovnoběžky nebo různoběžky v jedné kosoúhle promítací rovině, jest jejich kosoúhlým průmětem jediná přímka.

Vedeme-li každým bodem A jedné takové přímky, na př. a, kosoúhle promítací paprsek s^A, leží ve společné promítací rovině $\sigma^a \equiv \equiv \sigma^b$ obou přímek a protne tedy přímku b v bodě B. Jest tedy i promítacím paprskem bodu B a jeho průsečík $A_k \equiv B_k$ s průmětnou je kos. průmětem bodu A přímky a i bodu B přímky b. Průměty a_k a b_k obou přímek tedy splynou.

Poznámka: 1. Abychom z takového průmětu $a_k \equiv b_k$ zjistili, jsou-li obě přímky rovnoběžné či nikoliv, musíme znát průměty dvou bodů jedné a dvou bodů druhé přímky.

2. Je-li jedna ze dvou různoběžek rovnoběžná se světelným paprskem, je jejím průmětem jen bod ležící na průmětu druhé přímky. Jsou-li obě rovnoběžky rovnoběžné s kosoúhle promítacím paprskem, jsou jejich kosoúhlým průmětem dva body.

Z věty o rovnoběžkách vyplývají další.

Kosoúhlým průmětem rovnoběžníka, jehož rovina není rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem, je opět rovnoběžník.

Víme, že kosoúhlým průmětem dvou párů rovnoběžek jsou opět dva páry rovnoběžek.

Stejné úsečky na rovnoběžkách mají stejné kosoúhlé průměty.

Koncové body obou úseček jsou vrcholy rovnoběžníka, jehož kosoúhlým průmětem je opět kosoúhelník, jehož protilehlé strany jsou stejné.

Kosoúhlé průměty dvou mimoběžek, z nichž žádná není rovnoběžná s promítacím paprskem, jsou dvě různoběžky nebo rovnoběžky.

Jsou-li mimoběžky a a b v takové poloze, že rovina s nimi rovnoběžná obsahuje také promítací paprsek, jsou kosoúhlým průmětem obou přímek dvě rovnoběžky.

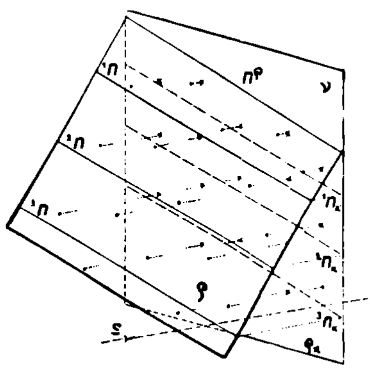
Není-li takové roviny, jsou kosoúhlým průmětem obou mimoběžek (obr. 12c) dvě různoběžky, jichž průsečík $A_k \equiv (a_k \,.\, b_k) \equiv B_k$ je kosoúhlým průmětem dvou bodů A a B, ležících na společném kosoúhle promítacím paprsku $s^A \equiv s^B$, z nichž A je na přímce a a B na přímce b.

Poznámka: Je-li jedna z mimoběžek rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem, jest kosoúhlým průmětem dvou mimoběžek přímka a bod mimo ni ležící.

8. Rovina.

Uvažujme rovinu ϱ, která není rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem. Každým jejím bodem M prochází jeden kosoúhle promítací paprsek s^M a všechny vyplňují osnovu paprsků. Průmětna protne každý z nich v jednom bodě, na příklad paprsek s^M v bodě M_k, který je kosoúhlým průmětem bodu M. Souhrn všech těchto bodů M_k je kosoúhlý průmět ϱ_k roviny ϱ, ale protože body M_k vyplní celou průmětnu, *je kosoúhlým průmětem roviny ϱ celá průmětna* (obr. 13). Při zobrazení roviny promítáme vždy jen určující prvky roviny, na př. tři její body, které neleží na jedné přímce, nebo dvě její různoběžky, jindy dvě rovnoběžky a pod. Z ostatních bodů a přímek roviny zobrazíme také ty, jichž je pro uložené konstrukce v rovině ϱ potřeba. Bude na př. v rovině ϱ zobraziti rovnostranný trojúhelník. Promítneme kosoúhle tedy jak jeho vrcholy i jeho strany.

Z přímek roviny ϱ je důležitá i její průsečnice s průmětnou, t. zv. *stopa n^ϱ roviny*. Její kosoúhlý průmět je s ní totožný $n^\varrho \equiv n_k^\varrho$. Toto dvojí označení, ačkoliv by bylo naprosto správné, nepoužíváme, píšeme jen n^ϱ. Jiné důležité přímky roviny jsou t. zv. *hlavní přímky*. To jsou takové přímky ležící v rovině, které jsou s průmětnou rovnoběžné. Kosoúhlý průmět jedné takové přímky, na př. ${}^3n$, je přímka ${}^3n_k$ a je s přímkou n rovnoběžná. Každá úsečka, která leží na hlavní přímce, promítá se kosoúhle do průmětny ve skutečné velikosti.



Obr. 13.

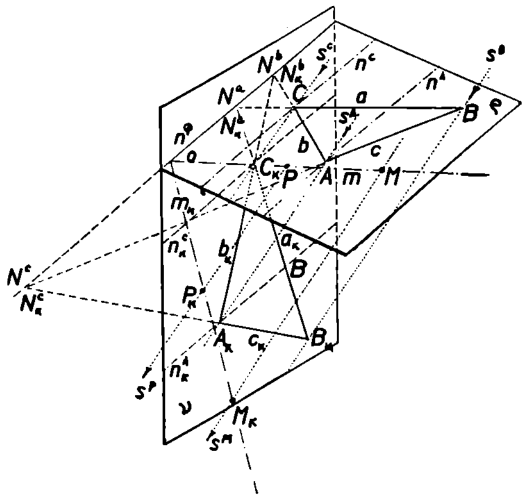
Kosoúhlým průmětem roviny rovnoběžné s kosoúhle promítacím paprskem a všech útvarů v takové rovině se nalézajícím je přímka.

Taková rovina jest vlastně kosoúhle promítací rovinou.

Abychom se naučili promítati útvary ležící v rovině, jest nutno porozuměti vztahu mezi útvarem v dané rovině a jeho kosoúhlým průmětem v průmětně, který se právě při kosoúhlém promítání vytvoří a který nazýváme *perspektivní afinitou.*

9. Perspektivní afinita.

I. Protneme-li dvě různoběžné roviny ϱ a ν osnovou rovnoběžných paprsků se směrem s, pak každý z nich, na př. s^M protne rovinu ϱ v bodě M a průmětnu ν v bodě M_k (obr. 14). Obrátíme-li smysl promítacích paprsků, lze bod M_k považovati za originál, rovinu ϱ za průmětnu a bod M za průmět bodu M_k. Říkáme, že jsme tímto dvojím



Obr. 14.

kosoúhlým promítáním body M a M_k *zpříbuznili*, nebo také *sdružili* anebo, že jsme *jeden k druhému přiřadili.* Tak lze k jinému bodu roviny ϱ, na př. bodu P, přiřaditi podobně bod P_k, přímce $m \equiv MP$ roviny ϱ přiřadíme přímku $m_k \equiv M_kP_k$ roviny ν, trojúhelníku ABC roviny ϱ trojúhelník $A_kB_kC_k$ v rovině ν a pod.

Toto přiřazení útvarů roviny ϱ k útvarům roviny ν bylo způsobeno kosoúhlým promítáním. Lze však dokázati, že stejné přiřazení útvarů roviny ϱ k útvarům roviny ν vznikne, budou-li body a přímky obou rovin splňovati tyto tři základní podmínky:

1. *Všechny body na průsečnici obou rovin jsou samy k sobě přiřazeny.* Píšeme $N \equiv N_k$ a body nazýváme samodružné.

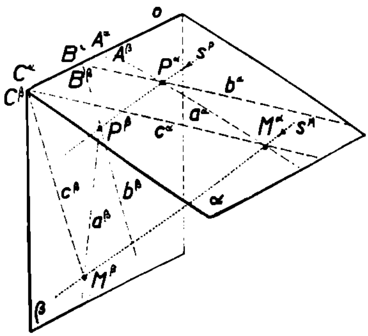
2. *Proběhne-li bod v jedné rovině jakoukoliv přímku, proběhne jemu přiřazený bod v rovině druhé také přímku.*

3. *Proběhnou-li dva body jedné roviny po dvou rovnoběžkách, proběhnou k nim přiřazené body v rovině druhé také po dvou rovnoběžkách.*

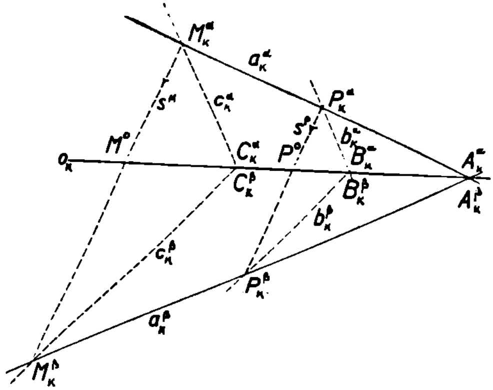
Tyto tři podmínky vyplývají z kosoúhlého promítání bodů a přímky v průmětně, bodů, přímek a rovnoběžek mimo průmětnu ležících. Jsou nutné a jsou i dostačující (jak ukážeme) pro sestrojení útvaru v rovině ν jako kosoúhlého průmětu útvaru roviny ϱ.

Uvažujme opět dvě roviny a označme je tentokrát α a β (abychom přiřazení nepovažovali za kosoúhlé promítání), které se protnou v přímce o (obr. 15). *Zvolme bod P^α v rovině α a přiřaďme mu nějaký bod P^β v rovině β* zcela náhodně zvolený. K dalšímu bodu M^α roviny α vyhledáme přiřazený bod M^β roviny β takto: Vedeme přímku $a^\alpha \equiv \equiv P^\alpha M^\alpha$ a stanovíme její průsečík $A^\alpha \equiv A^\beta$ s průsečnicí o. Bod $A^\alpha \equiv \equiv A^\beta$ je na průsečnici o a je tedy podle podmínky 1 sám k sobě přiřazen. Spojnice $A^\beta P^\beta$ v rovině β je přímka a^β přiřazená ku přímce a^α roviny α. Na ní musí ležeti bod M^β, neboť, proběhne-li bod M^α přímku a^α v rovině α, proběhne přiřazený bod M^β také přímku a^β roviny β (ad 2). Bodem P^α roviny α vedeme v rovině α přímku rozdílnou od a^α a stanovíme její průsečík $B^\alpha \equiv B^\beta$ s průsečnicí o a sestrojíme k ní přiřazenou přímku $b^\beta \equiv B^\beta P^\beta$, která je také rozdílná od a^β, neboť body A^β a B^β jsou dva různé body. Bodem M^α vedená rovnoběžka c^α s přímkou b^α protne přímku o v bodě $C^\alpha \equiv C^\beta$. Jím jde přiřazená přímka c^β roviny β rovnoběžná s přímkou b^β, neboť rovnoběžkám roviny α jsou přiřazeny rovnoběžky roviny β (ad 3). Průsečík M^β přímek a^β a c^β je přiřazený bod roviny β k bodu $M^\alpha \equiv a^\alpha \,.\, c^\alpha$ roviny α. K jeho sestrojení jsme nepotřebovali promítacích paprsků $s^P \equiv P^\alpha P^\beta \| s^M \equiv M^\alpha M^\beta$ a přece bod M^β je tentýž bod, který bychom byli obdrželi, kdybychom byli bod M^α kosoúhle promítli na rovinu β ve směru $P^\alpha P^\beta$. Jsou totiž oběma páry rovnoběžek (b^α, b^β) a (c^α, c^β) určeny dvě rovnoběžné roviny σ^a a σ^b a ty protnou rovinu $\sigma^\alpha \equiv (a^\alpha, a^\beta)$ ve dvou rovnoběžkách $P^\alpha P^\beta \parallel M^\alpha M^\beta$.

Toto přiřazení bodů a přímek ve dvou různoběžných rovinách nazýváme *perspektivní afinitou* (od lat. afinitas, t. j. příbuznost), průsečnici *o osou afinity*, promítací paprsky *afinními paprsky* a přiřazené útvary, útvary *perspektivně afinními*.



Obr. 15.



Obr. 16.

Jako důsledek uvedeného přiřazení podle podmínek 1., 2., 3. se jeví:

1. *Přiřazené přímky se protnou na ose afinity.*

Pohybuje-li se bod P^α po přímce a^α, projde také průsečíkem $A^\alpha \equiv A^\beta$, který je sám k sobě přiřazen, a přiřazený bod P^β bude se pohybovati také po přímce a^β a to tak, že projde-li bod P^α bodem A^α, projde P^β bodem A^β, tedy a^α protíná a^β právě na přímce o.

2. *Přiřazené body leží na rovnoběžných afinních paprscích.*

Důkaz tohoto tvrzení byl již podán.

Z těchto důsledků vyplývá další:

3. *V perspektivní afinitě dělicí poměry na přiřazených přímkách jsou stejné*, neboť přiřazené přímky jsou proťaty afinními paprsky rovnoběžnými ve dvojicích přiřazených bodů, a rovnoběžným promítáním se dělicí poměr nemění.

II. Kdybychom promítli kosoúhle obě roviny α i β na nějakou průmětnu ν, budou v ní ležeti průměty bodů M_k^α a přímek m_k^α a také průměty přiřazených bodů M^β_k a přímek m^β_k. Rovina ν bude jakousi dvojitou rovinou (obr. 16). Kosoúhlým průmětem přímek a^α . a^β protínajících se na ose o v bodě $A^\alpha \equiv A^\beta$ budou dvě přímky a^α_k . a^β_k protínající se na průmětě o_k osy o v bodě $A^\alpha_k \equiv A^\beta_k$. Podobně kosoúhlé průměty rovnoběžek b^α, c^α a b^β, c^β dají dva páry rovnoběžek b^α_k, c^α_k a b^β_k, c^β_k v průmětně ν. Označme v dalším značkou (α) nějaký *útvar v rovině* α. Útvarům $(\alpha)_k$ v průmětně budou přiřazeny v (dvojité) rovině ν útvary $(\beta)_k$ podle uvedených základních podmínek 1., 2., 3. Také tyto útvary v jedné dvojité rovině ležící jsou *perspektivně afinními.*

Kosoúhlé průměty dvou perspektivně afinních útvarů jsou zase perspektivně afinní.

III. Viděli jsme již v kapitole I, že tato příbuznost je určena, známe-li osu afinity o a dvojici přiřazených bodů P^α a P^β. Rovina α jest určena osou o a bodem P^α, rovina β osou o a bodem P^β. Spojnice $P^\alpha P^\beta$ je směr kosoúhlého promítání a tím je stanoven kosoúhlý průmět jakéhokoliv útvaru v rovině α na rovinu β. Jiný důkaz byl vlastně podán v konstrukci bodu M^β, přiřazeného ku M^α. Také v rovině ν je určena afinita osou afinity o_k a párem sdružených bodů P^α_k a P^β_k. Sestrojení bodu M^β se provede stejným způsobem, jako bylo vyloženo v prostoru. Vždyť i celá konstrukce v prostoru byla rozdělena do dvou rovinných konstrukcí, byla tedy planimetrická.

IV. Poměr úseček $\overline{P^\alpha_k P^o} : \overline{P^\beta_k P^o} = \overline{M^\alpha_k M^o} : \overline{M^\beta_k M^o} = \ldots = k$ jest stálý pro každou dvojici bodů P^α_k a P^β_k, což vyplývá z úměrnosti úseček v obr. 16, kde platí:

$$\overline{P^\alpha_k P^o} : \overline{M^\alpha_k M^o} = \overline{A^\alpha_k P^o} : \overline{A^\alpha_k M^o} = \overline{A^\beta_k P^o} : \overline{A^\beta_k M^o} = \overline{P^\beta_k P^o} : \overline{M^\beta_k M^o}$$

čili

$$\overline{P^\alpha_k P^o} : \overline{P^\beta_k P^o} = \overline{M^\alpha_k M^o} : \overline{M^\beta_k M^o}.$$

Tento poměr se nazývá *charakteristikou* perspektivní afinity, značíme jej k a lze jej vyjádřit i jako poměr vzdáleností $v^\alpha_k : v^\beta_k$ perspektivně afinních bodů od osy afinity, neboť v podobných trojúhelnících $\triangle M^\alpha_k M^o Q \sim \triangle M^\beta_k M^o R$ platí: $\overline{M^\alpha_k M^o} : \overline{M^\beta_k M^o} = v^\alpha_k : v^\beta_k = k$.

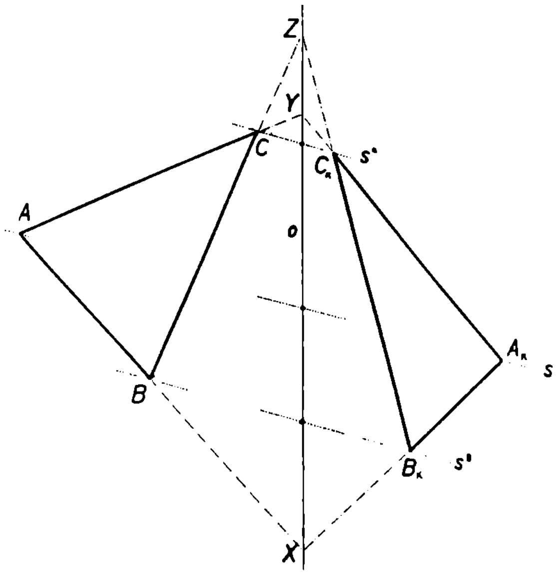
V obr. 17 jsou dva perspektivně afinní trojúhelníky $\triangle ABC$ a $\triangle A_k B_k C_k$ s charakteristikou afinity $k = v^a : v_k^a = v^b : v_k^b = v^c : v_k^c$. *Označme obsah* $\triangle ABC$ *značkou* $P(ABC)$. Trojúhelníky XYA a XYA_k mají společnou základnu. Protože jejich obsahy jsou $P(XYA) = \frac{1}{2}\overline{XY} \,.\, v^a$ a, $P(XYA_k) = \frac{1}{2}\overline{XY} \,.\, v_k^a$, platí:

$$P(XYA) : P(XYA_k) = v^a : v_k^a,$$

čili

$$P(XYA) = \frac{v^a}{v_k^a} \,.\, P(XYA_k),$$

kde $\dfrac{v^a}{v_k^a} = k$, t. j. charakteristice perspektivní afinity.



Obr. 17.

Totéž platí pro trojúhelníky s vrcholy C a C_k resp. B a B_k a protilehlými stranami na ose o. Potom lze psáti

$$P(ABC) = P(XYA) + P(YZC) - P(ZXB)$$

a podobně

$$P(A_k B_k C_k) = P(XYA_k) + P(YZC_k) - P(ZXB_k).$$

Jest tedy

$$P(ABC) = k \,.\, P(XYA_k) + k(YZC_k) - kP(ZXB_k) = kP(A_kB_kC_k),$$

čili

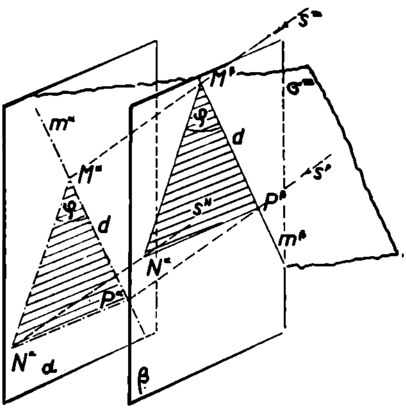
$$\frac{P(ABC)}{P(A_kB_kC_k)} = k.$$

Poměr obsahů dvou perspektivně afinních trojúhelníků (obrazců) je stálý a rovná se charakteristice perspektivní afinity.

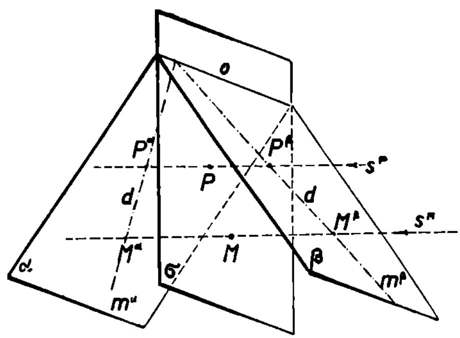
Jestliže promítneme kosoúhle oba perspektivně afinní útvary (α) a (β) na rovinu γ tak, aby kosoúhlý průmět O_k osy afinity o rozděloval úsečku $\overline{M_k^\alpha M_k^\beta}$, je $k < 0$ a perspektivní afinita je *protisměrná,* padne-li o_k po promítnutí mimo úsečku $\overline{M_k^\alpha M_k^\beta}$, jest $k > 0$ a perspektivní afinita je stejnosměrná. Pro $k = 1$ jsou $(\alpha)_k$ a $(\beta)_k$ *totožné,**) pro $k = -1$ jsou *afinně symetrické.*

V. 1. Jsou-li roviny α a β rovnoběžné, jest osou afinity nevlastní přímka obou rovin a nastane zvláštní případ perspektivní afinity, t. zv. *translace* čili *posunutí* (obr. 18). Přiřazené přímky m^α a m^β jsou rovnoběžné, neboť kosoúhle promítací rovina σ^m protne obě roviny α a β v rovnoběžkách. Přiřazené úsečky $\overline{P^\alpha M^\alpha} = \overline{P^\beta M^\beta}$ a úhly $\varphi^\alpha = \varphi^\beta$ jsou stejné. *Útvary* (α) a (β) *jsou shodné.*

Po kosoúhlém promítnutí těchto shodných útvarů (α) a (β) na rovinu γ jsou útvary $(\alpha)_k$ a $(\beta)_k$ v *rovinné translaci* s vlastnostmi výše uvedenými. Úsečku $P_k^\alpha P_k^\beta$ nazýváme *amplitudou translace* (μ).



Obr. 18.



Obr. 19.

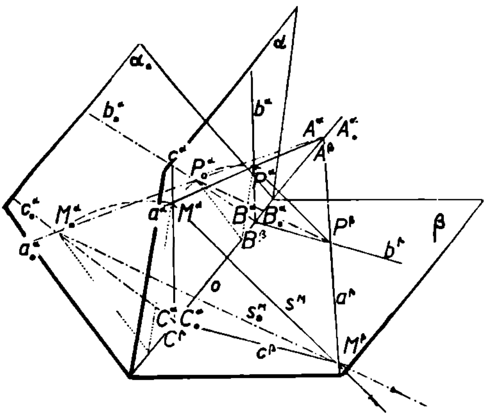
*) Případ, kdy paprsek $M_k^\alpha\, M_k^\beta$ je rovnoběžný s osou O_k, se nazývá *elace.* Útvary, které jsou v elaci, jsou *rovnoploché.*

2. Jiný zvláštní případ perspektivní afinity nastane, když paprsek afinity bude kolmý k jedné z obou rovin souměrnosti ${}^1\sigma$ a ${}^2\sigma$ rovin α a β. Jest to t. zv. *zrcadlení* podle roviny σ. Také při něm přiřazené úsečky $\overline{M^\alpha P^\alpha} = \overline{M^\beta P^\beta}$ a přiřazené úhly $\varphi^\alpha = \varphi^\beta$; útvary $(\alpha) \cong (\beta)$ jsou shodné (obr. 19). Případ podobný jsme zkoumali, když jsme pojednávali o průmětu úsečky.

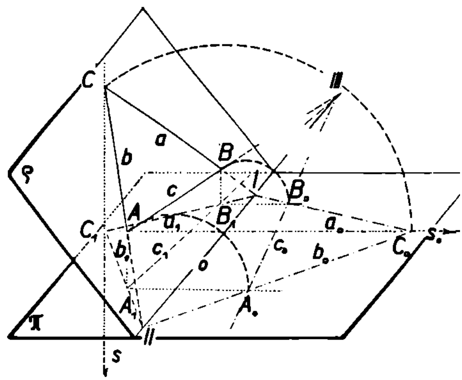
Promítneme-li je kosoúhlým paprskem z rovnoběžným s rovinou ${}^i\sigma$ na rovinu ν rovnoběžnou se směrem s, jsou průměty $(\alpha)_k$ a $(\beta)_k$ souměrně sdružené podle osy o_k. Útvary $(\alpha)_k \cong (\beta)_k$ jsou shodné opačného smyslu.

3. Rovinnou perspektivní afinitu, při níž paprsek afinity je kolmý k ose afinity, nazýváme pravoúhlou.

VI. Protože sestrojení přiřazeného bodu M^β roviny β k danému bodu M^α roviny α jest úloha ryze planimetrická prováděná v rovinách α a β, nezmění se po otočení roviny α okolo osy afinity do polohy α_0 konstrukce v poloze α_0. Jsou tedy také útvary v rovinách α_0 a β perspektivně afinní. Jediné paprsek afinity s^M přejde do polohy s_0^M (obr. 20) a opisuje při tomto otáčení roviny α plochu kuželovou s vrcholem v bodě M^β roviny β, kterým prochází.



Obr. 20.



Obr. 21.

Otáčením jednoho perspektivně afinního útvaru okolo osy afinity zůstane útvar s útvarem pevným v perspektivní afinitě.

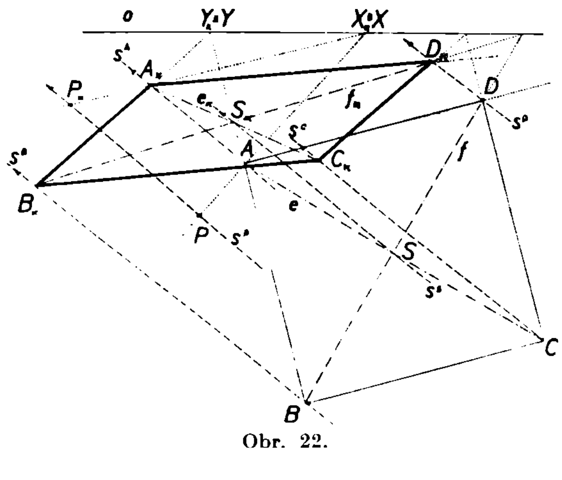
Tato věta je zvláště důležitou pro konstrukce v prostoru, zvláště pro kosoúhlé promítání rovinných útvarů. Útvar (ϱ) v rovině ϱ otočíme okolo osy afinity až do průmětny ν do polohy $(\varrho)_0$, v této dvojité rovině pracujeme z útvaru $(\varrho)_0$ afinitou útvar $(\varrho)_1$ se všemi potřebnými konstrukcemi. (Obr. 21.)

Jest tedy kosoúhlé promítání rovinných útvarů převedeno na úlohy perspektivně afinních útvarů ve dvojité rovině.

10. Perspektivně afinní obrazce.

Budiž perspektivní afinita určena osou o a párem přiřazených bodů P a P_k. Zvolme si nějaký obrazec, na př. čtverec $ABCD$ a hledejme k němu obrazec persp. afinní. (Obr. 22.)

Nejdříve stanovíme k vrcholu A přiřazený bod A_k. Bod A_k bychom našli stejným způsobem, jako jsme v obr. 16 sestrojili k bodu M_k^α bod M_k^β. Můžeme také postupovati takto: Body A a A_k budou ležeti na afinním paprsku $s^A \equiv AA_k$, který je rovnoběžný s paprskem $s^P \equiv PP_k$. Vedeme tedy bodem A rovnoběžku s^A s paprskem $s^P \equiv PP_k$. Přímce PA bude přiřazena taková přímka P_kA_k, že obě přímky se protnou v samodružném bodě $X \equiv X_k$ na ose afinity o. Vedeme tedy body P a A přímku PA a stanovíme její průsečík $X \equiv X_k$ s osou



Obr. 22.

o a ten spojíme s bodem P_k. Získali jsme přiřazenou přímku $P_kA_k \equiv P_kX_k$ ku přímce $PA \equiv PX$. Hledaný bod A_k musí ležeti na paprsku s^A a na přímce P_kA_k, jest tedy v jejich průsečíku $A_k \equiv (s^A \,.\, P_kX_k)$.

Podobně bychom k vrcholu B vyhledali bod přiřazený B_k. K jeho sestrojení však můžeme užíti také sestrojeného páru bodů A a A_k. Vedeme tedy bodem B paprsek $s^B \| s^A$, sestrojíme spojnici AB, t. j. stranu čtverce prodloužíme a stanovíme její průsečík $Y \equiv Y_k$ s osou o. Na spojnici A_kY_k leží přiřazený bod B_k. Jest to průsečík $B_k \equiv (s^B \ldots A_kY_k)$.

Body C_k a D_k můžeme sestrojiti pak už užitím kteréhokoliv z párů P, P_k, A, A_k nebo B, B_k. Po sestrojení bodu C_k, stačilo si uvědomiti, že rovnoběžník se promítá kosoúhle opět jako rovnoběžník a tak nebylo třeba bod D_k vyhledávati afinitou; stačilo vésti bodem C_k rovnoběžku se stranou $\overline{A_kB_k}$ a bodem A_k rovnoběžku se stranou $\overline{B_kC_k}$. Perspektivní afinitou přiřazený obrazec ku čtverci je rovnoběžník.

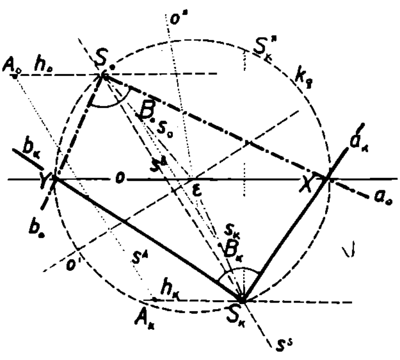
Když jsme sestrojili body A_k a B_k bylo možno také stanoviti bod S_k, přiřazený ke středu čtverce S; spojnice S_kA_k a S_kB_k budou úhlopříčky rovnoběžníka $A_kB_kC_kD_k$ a na nich leží body C_k a D_k tak, že $\overline{S_kA_k} = \overline{S_kC_k}$ a $\overline{S_kB_k} = \overline{S_kD_k}$, neboť kosoúhlé průměty stejných úseček na přímce jsou stejné.

II. Kosoúhlý průmět pravého úhlu a úsečky roviny.

1. Kosoúhlý průmět nějakého pravého úhlu je obecně úhel kosý.

Když rovina určená rameny pravého úhlu bude rovnoběžná s průmětnou (translace), nebo když kosoúhle promítací paprsek bude kolmý k rovině souměrnosti roviny pravého úhlu a průmětny (zrcadlení), bude kosoúhlým průmětem pravého úhlu opět úhel pravý.

Ukážeme si však, že ve zvolené rovině α, která je k průmětně nakloněná nebo kolmá a není rovnoběžná s kosoúhle promítacím paprskem, je možno každý její bod S považovat za vrchol jednoho pravého úhlu, který se kosoúhle promítá daným paprskem na průmětnu opět jako úhel pravý.



Obr. 23.

Otočíme-li tuto rovinu α okolo její stopy do průmětny, bude opět kosoúhlý průmět $(\alpha)_k$ útvarů (α), a tedy i pravého úhlu, v rovině α a otočený útvar $(\alpha)_0$ v perspektivní afinitě, jejíž osa je ve stopě o. Perspektivní afinita je určena párem přiřazených bodů, na př. S_k a S_0. (Obr. 23.)

Zvolme si tedy v nákresně osu afinity o a pár přiřazených bodů S_k a S_o. Existuje-li v nákresně pravý úhel R_o s vrcholem S_o, kterému je perspektivní afinitou přiřazen opět pravý úhel R_k s vrcholem v bodě S_k, potom ramena a_o a b_o pravého úhlu R_o se protnou s přiřazenými rameny a_k a b_k ve dvou bodech Y a X osy afinity o. (Proč?) Úsečka $\overline{XY}$ se stane přeponou dvou pravoúhlých trojúhelníků s vrcholy pravých úhlů v bodech S_o a S_k. Úsečka XY bude tak průměrem kružnice k_g (věta Thaletova) jdoucí body S_o a S_k, na níž leží všechny vrcholy pravých úhlů, jichž ramena jdou koncovými body průměru. Stačí sestrojiti osu souměrnosti o' bodů S_o a S_k, stanoviti její průsečík ε s osou afinity o a okolo ε opsati kružnici k_g jdoucí body S_k a S_o. Její průsečíky s osou o jsou body X a Y, v nichž ramena pravého úhlu s vrcholem v bodě S_o protnou přiřazená ramena pravého úhlu s vrcholem v S_k.

Protnou-li se o' a o pod malým úhlem, a to se stane často, stanovíme nejdřív k jednomu z bodů S_0 a S_k, na př. k bodu S_k, bod souměrně sdružený S_k'' podle osy o a místo osy o' sestrojíme osu o'' bodů S_0 a S_k'. Ta prochází také středem ε kružnice k_g.

Kdybychom nyní útvary $(\alpha)_0$ otočili zpět do roviny α, platí:

Každý bod roviny nakloněné k průmětně lze považovati za vrchol jednoho pravého úhlu roviny, který se kosoúhle promítá opět jako úhel pravý.

2. Veďme bodem S_o rovnoběžku h_o s osou afinity o a stanovme k ní přiřazenou přímku h_k. Jest to opět rovnoběžka s osou afinity jdoucí bodem S_k. Každá úsečka $\overline{S_oA_o}$ na přímce h_o se zřejmě reprodukuje ve skutečné velikosti na přímce h_k jako úsečka $\overline{S_kA_k}$, neboť čtyřúhelník $S_oA_oA_kS_k$ jest přece rovnoběžník.

Jinou takovou přímkou, na níž ležícím úsečkám se přiřazují úsečky stejné, je přímka $s_o \equiv S_o\varepsilon$. Protože bod ε je od S_o a S_k stejně vzdálen, jest $\triangle S_oS_k\varepsilon$ rovnoramenný a obě jeho ramena na s_o a s_k

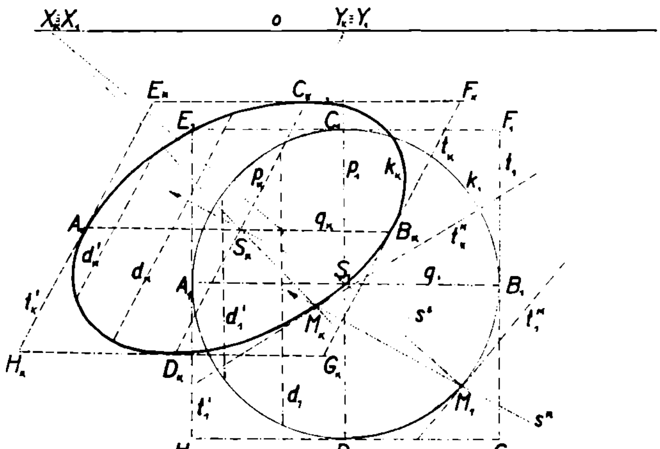
svírají s afinním paprskem stejné úhly. Vyneseme-li pak na s_0 od S_0 úsečku $\overline{S_0B_0}$ a vedeme-li bodem S_0 afinní paprsek s^B, je přiřazená úsečka $\overline{S_kB_k} = \overline{S_0B_0}$, neboť čtyřúhelník $S_0B_0B_kS_k$ je rovnoramenný lichoběžník, jehož ramena $\overline{S_0B_0}$ a $\overline{S_kB_k}$ jsou stejná.

Po otočení zpět do roviny α tedy platí:

V každé rovině nakloněné k průmětně jsou dvě osnovy rovnoběžek, na nichž ležící úsečky se kosoúhle promítají ve skutečné velikosti.

12. Kosoúhlý průmět kružnice.

I. Podobně jako jsme zobrazili perspektivně afinní obrazec (kosoúhlý průmět) ke čtverci nebo jinému mnohoúhelníku, sestrojíme kosoúhlý průmět kružnice. K tomu stačí takovou kružnici k opět otočiti okolo stopy její roviny do průmětny do polohy k_1, považovati ji za mnohoúhelník o nesčíslném počtu vrcholů a ke každému jejímu bodu M_1 perspektivní afinitou vyhledati přiřazený bod M_k. Souhrn těchto bodů je křivka k_k, o níž se v deskr. geometrii dokazuje, že je to *elipsa.*



Obr. 24.

Snadno si ověříme platnost těchto vět (obr. 24):

Každému bodu M_1 kružnice k_1 je přiřazen jeden bod M_k elipsy k_k.

Každé tětivě d_1 kružnice k_1 je přiřazena jedna tětiva d_k elipsy k_k.

Každé tečně t_1 kružnice k_1 je přiřazena jedna tečna t_k elipsy k_k.

Rovnoběžným tečnám t_1 a t_1' kružnice k_1 jsou přiřazeny rovnoběžné tečny t_k a t_k' elipsy k_k.

Rovnoběžným tětivám d_1 a d_1' kružnice k_1 jsou přiřazeny rovnoběžné tětivy d_1 a d_1' elipsy k_k.

Každému průměru p_1 kružnice k_1 je přiřazen jeden průměr p_k elipsy k_k.

Středu S_1 kružnice k_1 ke přiřazen střed S_k elipsy k_k.

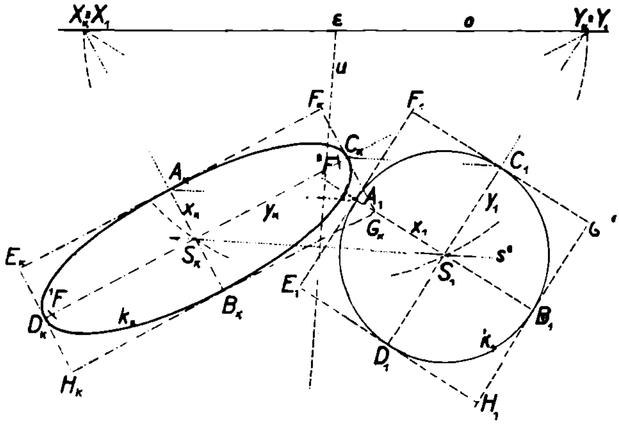
Čtverci opsanému kružnicí k_1 je přiřazen rovnoběžník opsaný elipse k_k.

Střední příčky p_1 a q_1 nějakého čtverce opsaného kružnicí k_1 jsou dva kolmé průměry kružnice k_1. Tyto průměry mají tu vlastnost, že tečny kružnice k_1, sestrojené v koncových bodech jednoho průměru, na př. p_1, jsou rovnoběžné s průměrem druhým, t. j. s průměrem q_1. Střední příčky p_k a q_k rovnoběžníka opsaného elipse jsou také dva její průměry, ale nejsou obecně na sobě kolmé, svírají nějaký kosý úhel. Tečny v koncových bodech jednoho z nich, na př. p_k jsou také rovnoběžné s průměrem druhým, t. j. průměrem q_k, neboť průměry p_k a q_k a tečny elipsy v jejich konc. bodech jsou perspektivně afinní k průměrům p_1 a q_1 a tečnám kružnice v koncových bodech; rovnoběžné přímky se v afinitě (kosoúhlém promítání) reprodukují opět jako rovnoběžky. Průměry p_k a q_k elipsy takovéto vlastnosti nazýváme *sdruženými průměry.*

Mají ještě další vlastnost. Průměr p_1 kružnice půlí všechny tětivy kružnice d_1, které jsou rovnoběžné s průměrem q_1. Také na př. průměr p_k elipsy půlí všechny tětivy d_k elipsy, které jsou rovnoběžné s průměrem sdruženým q_k. Platí tedy:

Tečny v koncových bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s průměrem sdruženým a tětivy rovnoběžné s jedním jsou sdruženým průměrem půleny.

V kružnici k_1 o středu S_1 bude existovati však jeden pár kolmých průměrů x_1 a y_1, jimž budou v elipse k_k o středu S_k přiřazeny také dva na sebe kolmé průměry x_k a y_k elipsy, které budou i sdružené. Konstrukce byla popsána v obr. 23 a je patrna znovu z obr. 25. Čtverci opsanému kružnici k_1 v koncových bodech těchto průměrů x_1 a y_1 bude přiřazen obdélník opsaný elipse k_k v koncových bodech průměrů x_k a y_k (obr. 25). Podle každého z těchto průměrů x_k a y_k bude elipsa



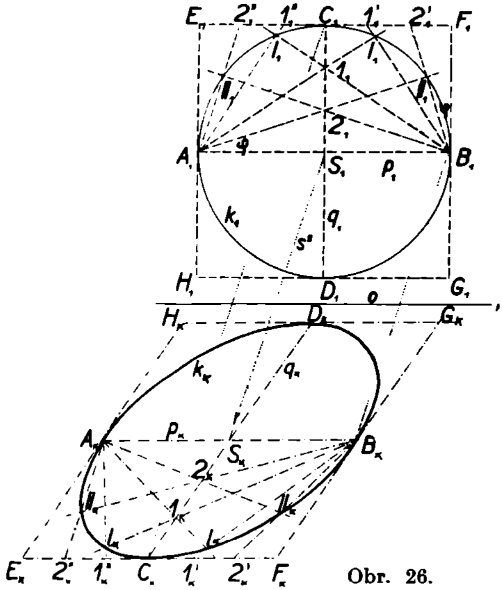
Obr. 25.

souměrná, jsou to *osy* souměrnosti *elipsy*. Umíme-li sestrojiti elipsu z jejích os, stačí tedy vyhledati oba tyto kolmé a sdružené průměry x_k a y_k elipsy i s jejich koncovými body a elipsu, na př. po vyhledání jejich ohnisek, sestrojiti provázkovou konstrukcí.

II. Elipsu k_k, jak jsme viděli na začátku tohoto odstavce, mohli bychom perspektivní afinitou bod za bodem sestrojovati z bodů kružnice k_k. Ukážeme si však, jak bychom sestrojovali jednotlivé body elipsy, která by už byla na př. určena dvěma sdruženými průměry p_k a q_k nebo osami x_k a y_k.

Uvažujme kružnicí k_1 opsaný čtverec $E_1F_1G_1H_1$ v koncových bodech A, B a C, D dvou jejích kolmých průměrů p_1 a q_1 (obr. 26). Kružnici k_1 rýsujeme zpravidla kružítkem. Ukážeme si, jak můžeme sestrojit její body bez užití kružítka. Rozdělme poloměr $\overline{C_1S_1}$ na př. na tři stejné díly a také obě polotečny ke kružnici v bodě C_1. Označme dělicí body číslicemi C_1, 1_1, 2_1, S_1 počínajíce bodem C_1 na poloměru $\overline{CS_1}$ a C_1, $1_1'$, $2_1'$, F_1 a C_1, $1''$, $2''$, E_1 počínajíce bodem C_1 na paprscích C_1F_1 resp. C_1E_1. Spojnice A_12_1 protne spojnici B_12_1' v bodě II_1, o němž můžeme tvrditi, že leží na kružnici k_1, neboť přímky A_12_1 a B_12_1'

svírají pravý úhel. Jsou totiž trojúhelníky A_1S_12 a B_1F_12' shodné, neboť jsou pravoúhlé a mají stejné odvěsny, a tedy úhel φ při A v $\triangle A_1S_12$ rovná se úhlu φ při B_1 v $\triangle B_1F_12'$; protože A_1S_1 je kolmá ku B_1F_1, je úhel $S_1\widehat{B_1}II_1 = R - \varphi$. Trojúhelník $A_1II_1B_1$ je pravoúhlý s pravým úhlem při II_1, ježto ostatní dva jeho úhly φ při vrcholu A_1 a $R - \varphi$, při B_1 dají dohromady úhel pravý. Stejným způsobem bychom obdrželi bod I_1 a dokázali o něm, že leží také na k_1. Body I_1 a II_1, které získáme jako průsečíky $I_1 \equiv B_1 1_1 \,.\, A_1 1_1''$ a $II_1 \equiv B_1 2_1 \,.\, A_1 2''$, leží také na kružnici k_1. Ve spodní polovině kružnice k_1 provedli bychom konstrukci užitím tečny v bodě D_1. Jest to t. zv. *příčková konstrukce bodů kružnice.*

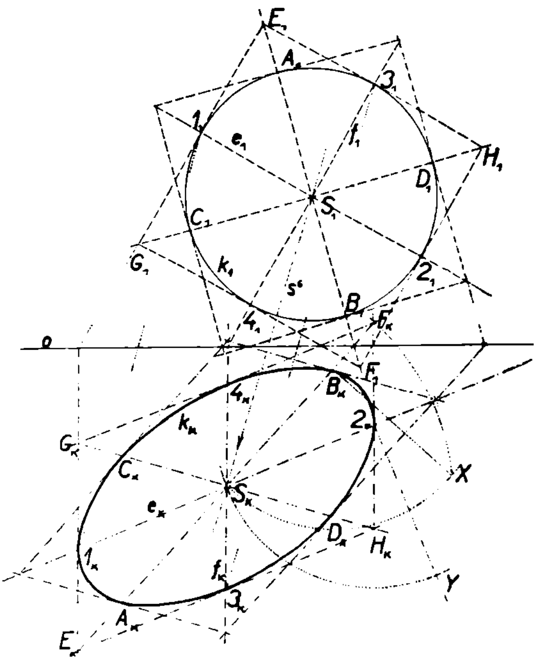


Obr. 26.

Přiřadíme-li nyní kružnici k_1 perspektivně afinní elipsu k_k, je opsanému čtverci $E_1F_1G_1H_1$ přiřazen rovnoběžník $E_kF_kG_kH_k$ opsaný elipse k_k v koncových bodech průměrů $p_k \equiv A_kB_k$ a $q_k \equiv C_kD_k$. Bodům 1_1 a 2_1 na $\overline{S_1C_1}$ jsou přiřazeny body 1_k a 2_k na $\overline{S_kC_k}$, které rozdělují $\overline{S_kC_k}$ také na tři stejné díly, neboť dělicí poměr se perspektivní afinitou (kosoúhlým promítáním) nemění. Stejně tak body $1_k'$, $2_k'$ a body $1_k''$ a $2_k''$, přiřazené k bodům $1_1'$ a $2_1'$ resp. $1_1''$ a $2_1''$, dělí polotečny $\overline{C_kF_k}$ a $\overline{C_kE_k}$ elipsy v bodě C_k na tři stejné díly. Přímce, na př. A_12_1 je přiřazena přímka A_k2_k a přímce B_12_1' přímka B_k2_k'. Průsečík $II_k \equiv (A_k2_k \,.\, B_k2_k')$ jest zřejmě bod přiřazený k bodu $II_1 \equiv (A_12_1 \,.\, B_12_1')$ kružnice k_1 a leží na elipse k_k.

Jsou-li tedy už určeny sdružené průměry $p_k \equiv \overline{A_kB_k}$ a $q_k \equiv \overline{C_kD_k}$ elipsy k_k, opíšeme jí rovnoběžník $E_kF_kG_kH_k$ a rozdělíme $\overline{C_kS_k}$ na tři díly. Také polotečny $\overline{C_kE_k}$ a $\overline{C_kF_k}$ rozdělíme na tři stejné díly a stanovíme průsečíky $A_kJ_k \,.\, B_kJ_k'$ resp. $A_kJ_k'' \,.\, B_kJ_k$, které jsou body elipsy k_k. V technické praxi, kde se této methody často používá, nazýváme ji ***dvanáctibodovou konstrukcí.***

III. Kružnici k_1 opišme v koncových bodech A_1, B_1 a C_1, D_1 dvou kolmých průměrů čtverec a sestrojme v něm úhlopříčky e_1 a f_1 a stanovme jejich průsečíky 1_1, 2_1, 3_1 a 4_1 s kružnicí k_1. Opišme dále v bodech 1_1, 2_1, 3_1 a 4_1 kružnici k_1 nový čtverec E_1, F_1, G_1, H_1. Tyto vrcholy leží na prodloužených středních příčkách A_1B_1 a C_1D_1. Potom$(F_1B_1S_1) =$ $= \frac{r_1\sqrt{2}}{r_1}$, kde $r_1 = \overline{S_1B_1}$. Strany tohoto čtverce jsou rovnoběžné s úhlopříčkami e_1 a f_1. (Obr. 27.)



Obr. 27.

Perspektivní afinitou přejdou oba čtverce v rovnoběžníky opsané elipse, při čemž vrcholy $E_kF_kG_kH_k$ budou ležeti na prodloužených středních příčkách A_kB_k a C_kD_k tak, že na př. $(F_kB_kS_k) = \frac{r_k\sqrt{2}}{r_k}$, kde $r_k = \overline{S_kB_k}$. Strany rovnoběžníka jsou rovnoběžné s úhlopříčkami e_k a f_k.

Sestrojíme v B_k kolmici ku S_kB_k a vynesme na ni od B_k úsečku $\overline{S_kB_k} = \overline{B_kX}$; potom úsečka $\overline{S_kX} = \overline{S_kF_k}$. Tuto délku vyneseme od S_k na S_kB_k a její koncový bod je vrchol F_k. Jím vedeme rovnoběžku $\overline{F_kE_k}$ s f_k, získáme bod E_k, podobně rovnoběžku s e_k atd. S tečnami v bodech A_k, B_k, C_k, D_k získáme ještě další čtyři tečny elipsy k_k v bodech 1_k, 2_k, 3_k a 4_k na úhlopříčkách e_k a f_k. Jest to t. zv. *osmitečnová konstrukce* a v praxi je také hojně používána.

V části druhé podáme další konstrukce elipsy užívané při kosoúhlém promítání.

Cvičení:

1. Ukažte, že perspektivní afinita je určena také: a) osou afinity, charakteristikou a směrem afinity, b) dvěma páry sdružených přímek, c) párem sdružených přímek a párem sdružených bodů, d) dvěma páry sdružených bodů a bodem na ose afinity, e) směrem afinity a dvěma páry sdružených rovnoběžek!

2. V persp. afinitě určené osou, charakteristikou $k = \frac{1}{2}$ a směrem afinity $\widehat{so} = 60°$ stanovte k rovnostrannému trojúhelníku sdružený trojúhelník!

3. V persp. afinitě určené dvěma páry sdružených různoběžek sestrojte k obdélníku s úhlopříčkami na jednom páru rovnoběžník sdružený!

4. V persp. afinitě určené párem sdružených přímek a párem sdružených bodů sestrojte pravidelný šestiúhelník se stranou na jedné z daných přímek o středu v jednom (souhlasném) z daných bodů a šestiúhelník k němu sdružený!

5. Stanovte perspektivní afinitu mezi daným trojúhelníkem ABC a trojúhelníkem rovnostranným, který je určen jedním vrcholem!

6. Stanovte rovnostranný trojúhelník přiřazený k danému trojúhelníku ABC, je-li dána ještě osa afinity!

7. K danému rovnoběžníku přiřaďte čtverec, je-li dána osa afinity!

8. K dané kružnici sestrojte persp. afinní elipsu o daném středu, jestliže osa afinity je a) libovolná nesečna kružnice, b) tečna kružnice, c) sečna kružnice!

9. V persp. afinitě určené osou a párem sdružených bodů určete ke kružnici o středu na ose afinity elipsu přiřazenou!

10. Sestrojte dvanáctibodovou konstrukcí elipsu určenou dvěma sdruženými průměry, b) osami!

11. Sestrojte osmitečnou konstrukcí elipsu určenou dvěma sdruženými průměry, b) osami!

12. Sestrojte šestnáctibodovou konstrukcí elipsu určenou dvěma sdruženými průměry!

13. K elipse určené dvěma sdruženými průměry sestrojte persp. afinní elipsu, jestliže osa afinity je v tečně elipsy v konc. bodě jednoho z průměrů!

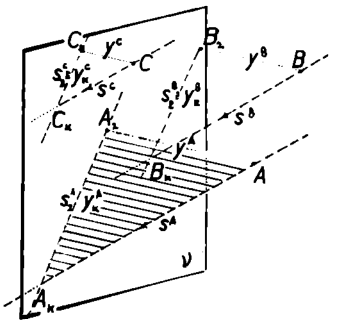
14. Sestrojte průsečíky přímky s elipsou určenou dvěma sdruženými průměry!

ČÁST II.

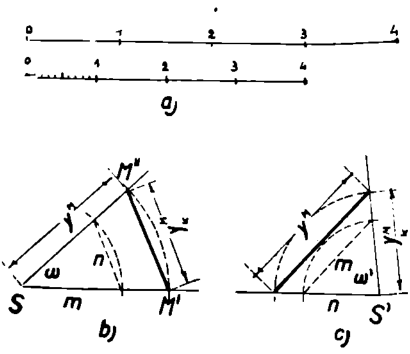
ZPŮSOBY KOSOÚHLÉHO PROMÍTÁNÍ

I. Kosoúhlé promítání na nárysnu.

Za nárysnu považujeme svislou průčelnou rovinu a učiňme ji také nákresnou. Poloha určitého bodu A vůči nárysně jest určena jeho kolmým průmětem A_2 a jeho vzdáleností od nárysny, t. zv. souřadnicí y^A bodu A. Vedeme-li bodem A kosoúhlý paprsek s^A, protne nárysnu v bodě A_k, kosoúhlém to průmětu bodu A. Vznikne pravoúhlý trojúhelník AA_2A_k s vrcholem pravého úhlu v bodě A_2; i můžeme odvěsnu $\overline{A_2A_k}$ považovati buď za kolmý průmět s_2^A kosoúhlého paprsku s^A nebo za kosoúhlý průmět y_k^A souřadnice y^A bodu A. Nazveme-li poměr délek $\overline{A_2A} : \overline{A_2A_k} = y^A : y_k^A = 1/q$ spádem kosoúhlého paprsku, vidíme z obr. 28, že spád kosoúhlých paprsků s^A, s^B, c^C, ... všech bodů A, B, C, ..., ležících mimo nárysnu je stejný, neboť trojúhelníky AA_2A_k, BB_2B_k, CC_2C_k, ..., jsou si podobné a jejich strany jsou úměrné.



Obr. 28.



Obr. 29.

Spád $1/q$ určuje, jak se zkrátí (nebo prodlouží) kosoúhlý průmět y_k^M souřadnice y^M nějakého bodu M proti této souřadnici skutečné, a nazýváme q pak zcela oprávněně *zkrácením* kosoúhlého promítání.

Orientovaným směrem $\vec{s}_2$ (nárysem kosoúhlého paprsku) *a zkrácením* q *je kosoúhlé promítání na nárysnu určeno.*

Abychom sestrojili kosoúhlý průmět M_k nějakého bodu M, sestrojíme nejprve nárys M_2 bodu M (t. j. kolmý průmět na nárysnu), vedeme jím nárys $s_2^M \| \vec{s}_2$ kosoúhlého paprsku s^M bodu M, zkrátíme souřadnici y^M bodu M v poměru spádu q a zkrácenou y_k^M vyneseme na s_2^M od bodu M_2 ve směru orientace paprsku s_2^M. Koncový bod je hledaný kosoúhlý průmět M_k bodu M.

Směr $\vec{s}_2$ se udává zpravidla ramenem úhlu ω s vodorovnou přímkou v nákresně, t. zv. základnicí x, a nazývá se krátce *zkosením*. Úhel ω uvažujeme ve smyslu ruč. hodinových od základnice x jdoucí zleva doprava.

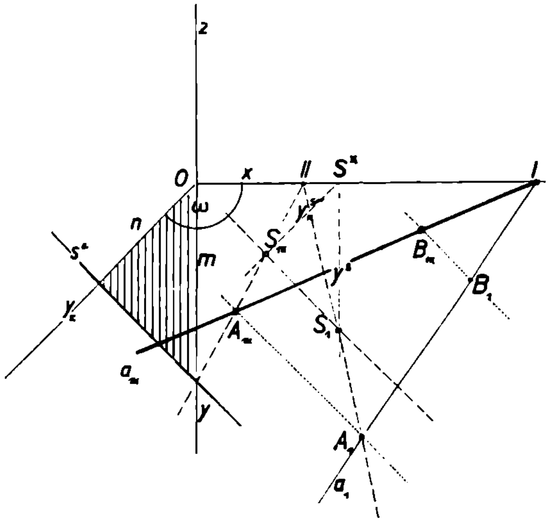
Zkrácení souřadnice y^M pro dané zkrácení q provedeme několikerým způsobem:

1. T. zv. *redukčním měřítkem*. Jest to nové měřítko, které si pořídíme z měřítka základního tak, že za jednotku měřítka redukčního považujeme $q$tou část jednotky měřítka základního. Na obr. 29a je sestrojeno pro poměr $q = \frac{3}{4}$.

2. Jiný způsob sestrojení zkrácené úsečky y_k^M je užitím *redukčního úhlu*. Jestliže spád $q = \frac{n}{m}$, sestrojíme úhel ω v kružnici o poloměru m příslušný k její tětivě délky n (obr. 29b). Ramena tohoto úhlu protne kružnice o poloměru y^M v bodech M' a M'' a tětiva $\overline{M'M''}$ se rovná zkrácené délce y_k^M. Také jest na obr. sestrojen pro poměr $q = \frac{3}{4}$. Někdy si sestrojíme i t. zv. *reciproký redukční úhel* pro poměr $q' = \frac{m}{n}$ pro převádění zkrácených souřadnic y_k^M na skutečné y^M (obr. 29c).

3. Často použijeme i t. zv. *redukčního trojúhelníka* pro spád $q = \frac{n}{m}$. Jest to obecný trojúhelník s jedním vrcholem O na základnici x, jednou stranou délky m na kolmici y ku základnici a druhou stranou délky n na přímce y_k jdoucí vrcholem O rovnoběžně se směrem $\vec{s}_2$. Úhel $\widehat{xs_2} = \widehat{xy_k} = \omega$. Každý jiný trojúhelník, jehož strany budou se stranami redukčního trojúhelníka rovnoběžné, je mu podobný a poměr jeho stran y^s a y_k^s rovnoběžných s y a y_k je dané zkrácení q (obr. 30). Třetí stranu tohoto trojúhelníka nazýváme pak také *zkrácením*.

Pro určité kosoúhlé promítání musí býti tedy napřed určeno zkosení ω a zkrácení q. Tak na př. ($\omega = 120°$, $q = \frac{1}{2}$). Jestliže $\omega = 135°$, $q = \sqrt{2} : 1$, mluvíme o *technickém kosoúhlém promítání*, neboť lze při



Obr. 30.

jeho zobrazování výhodně pracovati s rovnoramenným pravoúhlým trojúhelníkovým pravítkem, jímž můžeme jednou odvěsnou rýsovati zkosení a druhou zkrácení, posunujíce trojúhelník přeponou po vodorovné hraně příložníku.

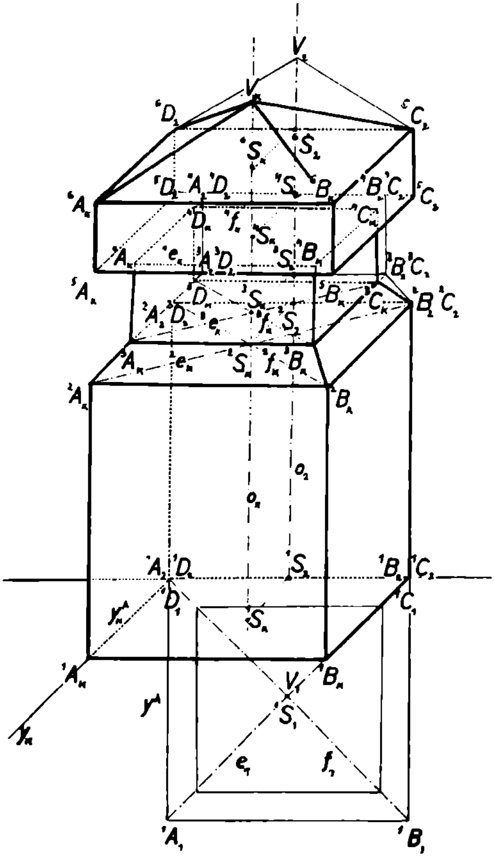
Kosoúhlé promítání na nárysnu poskytuje názorné obrázky, když je pozorujeme z větší vzdálenosti a ze strany, proto se také nazývá *rovnoběžnou perspektivou**). Volíme-li zkosení $\omega < 180°$, mluvíme o *nadhledu*, obrázky jsou pozorovány shora, je-li $\omega > 180°$, pak jde o *podhled*, obrázky pozorujeme zdola.

1. Příklad: *Podle půdorysu a nárysu narýsovaného v obr. 31 sestrojte kosoúhlý průmět hraničního kamene pro* $\omega = 135°$ a $q = \frac{1}{2}$!

Protože těleso je dosti složité, rozdělíme je na tělesa základní (hranoly, jehlany). Nejprve zobrazíme kosoúhlý průmět kvádru I.

*) Aby se obrázky příliš neskreslovaly, volíme $q \gtreqless \frac{1}{2}$. Pak úhel φ promítacích paprsků s průmětnou je větší než 60°.

Jeho nárysem je obdélník o vrcholech ${}^1A_2 \equiv {}^1D_2, {}^1B_2 \equiv {}^1C_2, {}^2A_2 \equiv {}^2D_2, {}^2B_2 \equiv {}^2C_2$. Protože podle půdorysu zjistíme, že vrcholy ${}^1D$, ${}^1C$, ${}^2D$, ${}^2C$ kvádru leží v nárysně, jsou jejich kosoúhlé průměty totožné s ${}^1D_2$, ${}^1C_2$, ${}^2D_2$ a ${}^2C_2$. Kosoúhlé průměty vrcholů ${}^1A, {}^1B, {}^2A$ a ${}^2B$ získáme tak, že na př. bodem ${}^1A_2 \equiv {}^1D_2$ vedeme rovnoběžku se zkosením, t. j. přímku, která se základnicí x svírá úhel $\omega = 135°$, a vyneseme na ní od bodu ${}^1A_2$ *polovinu* ($q = \frac{1}{2}$) vzdálenosti y^{1A} bodu ${}^1A$, kterou máme ve skutečné velikosti v půdoryse kvádru I jako vzdálenost bodu ${}^1A_1$ od základnice. Stejným způsobem stanovíme i body ${}^1B_k$, ${}^2A_k$ a ${}^2B_k$. Spojnice bodů ${}^1A_k, {}^1B_k, {}^2A_k$ a ${}^2B_k$ poskytnou kosoúhlý průmět obdélníka ${}^1A{}^1B{}^2A{}^2B$; vidíme, že je shodný, neboť leží v rovině s kosoúhlou průmětnou (nárysnou) rovnoběžnou. Spojnice $\overline{{}^1A_k{}^1D_k}$ a $\overline{{}^1B_k{}^1C_k}$, $\overline{{}^2A_k{}^2D_k}$ a $\overline{{}^2B_k{}^2C_k}$ jsou kosoúhlé průměty hran kvádru I, které jsou k nárysně kolmé.



Obr. 31.

Stejným způsobem bychom získali kosoúhlý průmět komolého jehlanu II, jehož nárysem je rovnoramenný lichoběžník o vrcholech ${}^2A_2 \equiv {}^2D_2, {}^2B_2 \equiv {}^2C_2, {}^3A_2 \equiv {}^3D_2, {}^3B_2 \equiv {}^3C_2$. Kosoúhlé průměty vrcholů ${}^2A$, ${}^2B$, ${}^2C$ a ${}^2D$ jsme již sestrojili, průměty ${}^3A_k$, ${}^3B_k$, ${}^3C_k$, ${}^3D_k$ lze získati i takto: Kvádr I a komolec II jsou souosé. Lze tedy snadno stanoviti kosoúhlý průmět ${}^3S_k$ středu ${}^3S$ horní podstavy komolce. Stanovíme kosoúhlý průmět $o_k \equiv {}^1S_k{}^2S_k$ osy tělesa o, vyneseme na ní od ${}^2S_k$ délku $\overline{{}^2S^3S}$, výšku komolce, a koncový bod je kosoúhlý průmět ${}^3S_k$ středu ${}^3S$, neboť osa o je rovnoběžná s kosoúhlou průmětnou (nárysnou) a všechny délky na ní ležící mají stejné kosoúhlé průměty. Sestrojíme dále kosoúhlé průměty obou úhlopříček ${}^2e$ a ${}^2f$ podstavy ${}^2A{}^2B{}^2C{}^2D$ a kosoúhlé průměty ${}^3e_k$ a ${}^3f_k$ úhlopříček ${}^3e$ a ${}^3f$ podstavy ${}^3A{}^3B{}^3C{}^3D$ jsou s ${}^2e_k$ a ${}^2f_k$ rovnoběžné. Vedeme-li tedy body ${}^3A_2 \equiv \equiv {}^3D_2$ a ${}^3B_2 \equiv {}^3C_2$ zkosení, protnou tyto dvě rovnoběžky kosoúhlé průměty ${}^3e_k$ a ${}^3f_k$ v kosoúhlých průmětech ${}^3A_k$, ${}^3B_k$, ${}^3C_k$, ${}^3D_k$.

Kosoúhlý průmět horní podstavy ${}^4A{}^4B{}^4C{}^4D$ hranolu III najdeme tak, že vedeme body ${}^3A_k$, ${}^3B_k$, ${}^3C_k$, ${}^3D_k$ rovnoběžky se přímkou o_k, jsou to kosoúhlé průměty pobočných hran hranolu III, vyneseme na ně délky hran $\overline{{}^3A{}^4A} = \overline{{}^3B{}^4B} = \overline{{}^3C{}^4C} = \overline{{}^3D{}^4D}$, neboť i ony jsou s kosoúhlou průmětnou rovnoběžné. Stačilo také určiti ${}^4S_k$ na o_k a jím vésti kosoúhlé průměty ${}^4e_k$, ${}^4f_k$ úhlopříček podstavy ${}^4A{}^4B{}^4C{}^4D$.

Na ${}^4e_k$ a ${}^4f_k$ a na prodloužených kosoúhlých průmětech pobočných hran ${}^1A{}^2A \parallel {}^1B{}^2B \parallel {}^1C{}^2C \parallel {}^1D{}^2D$ jsou ${}^5A_k$, ${}^5B_k$, ${}^5C_k$, ${}^5D_k$ a z nich snadno sestrojíme ${}^6A_k$, ${}^6B_k$, ${}^6C_k$, ${}^6D_k$ a ${}^6S_k$.

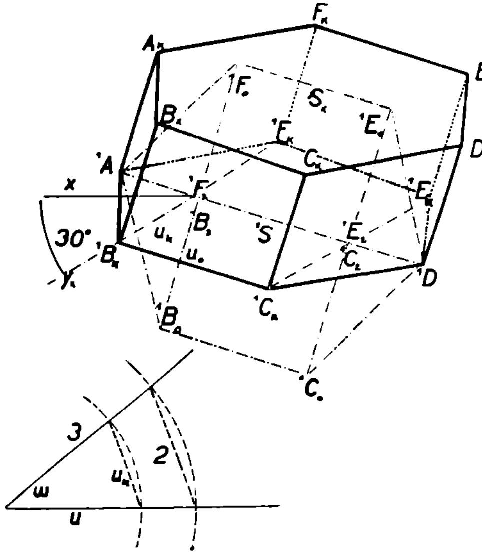
Nakonec stanovíme i kosoúhlý průmět jehlanu V. Stačí sestrojiti známým už způsobem kosoúhlý průmět V_k vrcholu jehlanu V tak, že na o_k vyneseme od ${}^6S_k$ výšku v jehlanu V.

Podle orientace s_2 stanovíme viditelnost kosoúhlých průmětů vrcholů hraničního kamene, při čemž se řídíme větou, že viditelnými budou ty, které jsou vzdálenější od průmětny. Obrysové vrcholy jsou viditelné všechny, z vnitřních jsou to ${}^2B_k$, ${}^3B_k$, ${}^5B_k$, ${}^6B_k$. Vrcholy ${}^4A_k$, ${}^4B_k$, ${}^4C_k$ ${}^4D_k$ jsou všechny neviditelné. Proč?

Po spojení příslušných viditelných vrcholů úsečkami silnými, jež jsou kosoúhlými průměty viditelných hran kamene, a neviditelných čarami čárkovanými získáváme kosoúhlý průmět kamene.

2. Příklad. *Užitím pomocného průmětu stanovte kosoúhlý průmět pro* $\omega = 150°$ a $q = \frac{2}{3}$ *pravidelné šestiboké desky o hraně* $a = 3$ *a výšce* $v = 2$, *jehož podstava je v rovině kolmé k nárysně* (obr. 32)!

Jednu úhlopříčku $\overline{{}^1A{}^1D}$ položíme do nárysny a bude také nárysem prvé podstavy, jíž sklopíme okolo ${}^1A{}^1D$ do nárysny. Sestrojíme totiž nad $\overline{^1A^1D}$ jako úhlopříčkou pravidelný šestiúhelník $^1A^1B_0{}^1C_0{}^1D^1E_0{}^1F_0$. Kratší úhlopříčky $^1B^1F$ a $^1C^1E$ jsou kolmé ku v, jejich nárysy jsou body $^1B_2$ a $^1C_2$ na $\overline{^1A^1D}$. Jimi vedeme zkosení pro úhel $\omega = 150°$ a na toto od $^1B_2$ resp. $^1C_2$ vyneseme zkrácené poloviny úhlopříček $\overline{^1B_0{}^1F_0}$ a $\overline{^1C_0{}^1E_0}$ užitím redukčního úhlu φ pro poměr $q = \frac{2}{3}$. Kosoúhlými průměty ^1A, ^1B_k, ^1C_k, ^1D, ^1E_k a ^1F vedeme kolmice ku $^1A^1D$ a vyneseme na ně od ^1A, ^1B_k ... výšky $v = 2$. Získáme tak kosoúhlý průmět druhé podstavy, neboť pobočné hrany desky jsou s nárysnou rovnoběžné. Nakonec určíme viditelnost průmětu.



Obr. 32.

2. Kosoúhlý půdorys.

Jest výhodné zobrazovati těleso v poloze průčelné, t. j. tak, aby jeho délka a výška byly rovnoběžné s průmětnou a zobrazovaly se na ní kosoúhle ve skutečné velikosti. Pak se zkosí a zkrátí jen šířka tělesa. Proto si obyčejně napřed zobrazíme t. zv. rozměrový čili osový kříž (obr. 30), vodorovnou (délkovou) osu označíme písmenem x, k ní je kolmá svislá osa (výšková) z, a k nim přidáme zkosenou osu šířek $y_k \equiv s_2$, aby úhel $\widehat{xy_k} = \omega$. Připojíme ještě redukční trojúhelník tak, že na prodlouženou osu výšek z pod základnicí vyneseme podle daného zkrácení $q = \frac{n}{m}$ délku m a na osu šířek y_k délku n. Třetí stranu tohoto trojúhelníka označíme s^a.

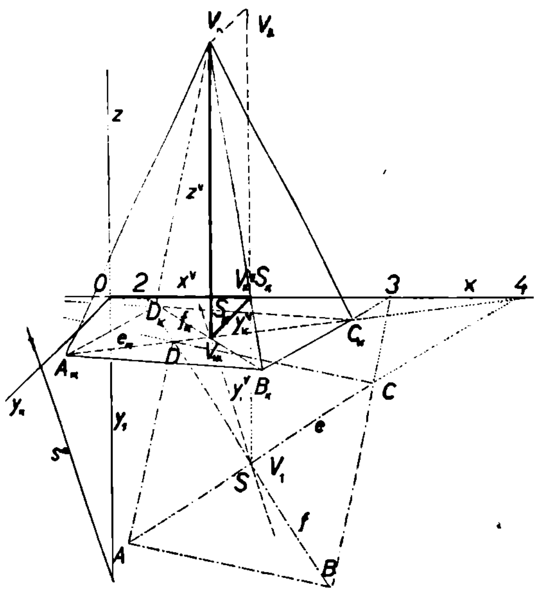
Uvažujme nyní v půdorysně určené osami x, y nějaký obrazec $\mathfrak{A}$. Jestliže jej kosoúhle promítneme do nárysny, bude perspektivně afinní se svým kosoúhlým průmětem $\mathfrak{A}_k$ s osou afinity v ose x a směrem afinity v kosoúhle promítacím paprsku. Otáčíme-li však obrazec $\mathfrak{A}$ okolo osy x do nárysny do polohy $\mathfrak{A}_1$, budou také obrazce $\mathfrak{A}_1$ a $\mathfrak{A}_k$ perspektivně afinní (ve dvojité rovině), kde jejich osou afinity bude opět osa x a směrem afinity právě ta třetí strana redukčního trojúhelníka s^a (zkrácení).

Za obrazec $\mathfrak{A}$ ležící v půdorysně lze považovati půdorys P_1 každého tělesa. Jeho kosoúhlý průmět $\mathfrak{A}_k$ nazývejme *kosoúhlým půdorysem* a značme P_{1k}. Sestrojíme jej tak, že nejdřív stanovíme kolmý půdorys sklopený okolo základnice x do nárysny a pak pracujeme perspektivní afinitou s osou x jako osou afinity a zkrácením s^a jako směrem afinity. K jejímu úplnému určení jest ovšem třeba k jednomu bodu sklopeného půdorysu (nejčastěji to bývá střed S_1 obrazce) stanoviti kosoúhlý půdorys (S_{1k}), což provedeme na př. redukčním trojúhelníkem (obr. 30). Ostatní body, na př. A_{1k}, B_{1k}, a přímky, na př. a_{1k}, kosoúhlého půdorysu vyvodíme ze sklopeného půdorysu (A_1, B_1, a_1) už jen perspektivní afinitou.

Příklad: *Zobrazte kosoúhlý průmět pravidelného čtyřbokého jehlanu o podstavě v půdorysně s podstavnou hranou $a = 5$ svírající s osou x úhel $\varphi = 15°$* a *výšce $v = 7$, jestliže $\omega = 135°$* a *$q = \frac{1}{3}$!* (Obr. 33.)

Sestrojíme si osový kříž pro $\omega = 135°$ a redukční trojúhelník se stranou s^a pro $q = \frac{1}{3}$. Ve sklopeném půdoryse zobrazíme čtverec $ABCD$, aby jeho jedna strana na př. $\overline{AB}$ svírala s osou x úhel $\varphi = 30°$ a úhlopříčkami e a f určíme jeho střed S. Bodem S vedeme rovnoběžku se stranou y_1 redukčního trojúhelníka a jejím průsečíkem S_x s osou x rovnoběžku s y_k (zkosení). Tu protneme v bodě S_k rovnoběžkou se stranou s^a jdoucí bodem S (zkrácení). Perspektivní afinita je určena. Stanovíme průsečíky *2* a *4* úhlopříček e a f s osou afinity x a spojnice $S_k2 \equiv e_k$ a $S_k4 \equiv f_k$ jsou kosoúhlé půdorysy úhlopříček e a f čtverce. Dále vedeme body A, B, C a D paprsky afinity rovnoběžně se směrem s^a a určíme jejich průsečíky A_k, B_k, C_k a D_k s e_k a f_k. Rovnoběžník $A_{1k}B_{1k}C_{1k}D_{1k}$ s úhlopříčkami e_k a f_k je kosoúhlý půdorys jehlanu, neboť bod $S \equiv V_1$ a také $S_k \equiv V_{1k}$. Výška v jehlanu je rovnoběžná s v a jde středem S podstavy, její kosoúhlý průmět rovná se tedy její skutečné velikosti $v = 7$ a jde bodem V_{1k} rovnoběžně s osou z. Koncový bod V_k spojíme kosoúhlými průměty pobočných hran jehlanu s A_k, B_k, C_k a D_k a rozhodneme o viditelnosti celého průmětu. A platí věta:

Vzdáleností od půdorysny a půdorysem jest kosoúhlý průmět bodu při daném osovém kříži a poměru zkrácení určen.



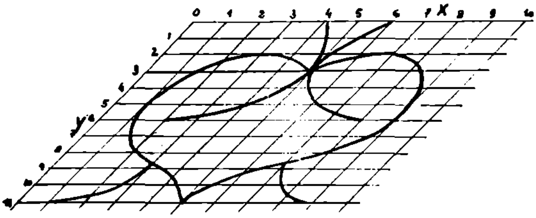
Obr. 33.

Důkaz vyplývá z konstrukce bodu V_k. Lze snadno dokázati i větu obrácenou:

Kosoúhlým půdorysem a vzdáleností od půdorysny (tedy kosoúhlým průmětem) *jest bod v prostoru při daném osovém kříži a poměru zkrácení určen.*

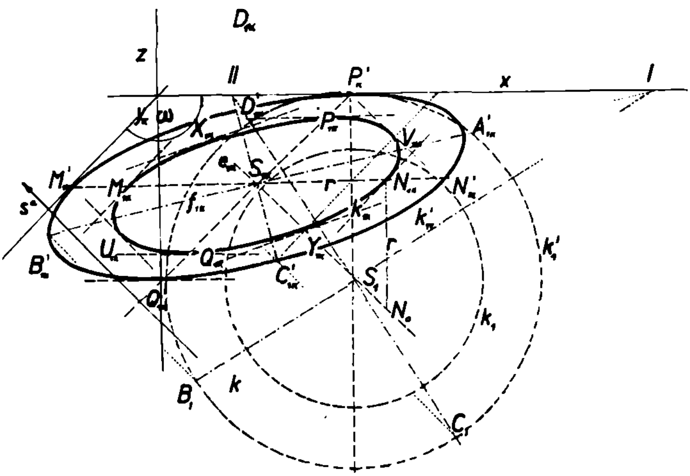
Veďme bodem V_{1k} rovnoběžku s y_k a stanovme její průsečík V_x se základnicí x. Tím veďme dále rovnoběžku s y_1 a protněme ji v bodě V_1 rovnoběžkou se směrem s^a jdoucí bodem V_{1k}. Bod V_1 je sklopený půdorys bodu V. Nárys V_2 je na kolmici ku ose x v bodě V_x a je od V_x vzdálený o danou vzdálenost bodu V od půdorysny, t. j. o délku $z^v = \overline{V_k V_{1k}}$. Půdorysem V_1 a nárysem V_2 je bod V určen.

Při složitějších půdorysech neodvozujeme ze sklopeného půdorysu kosoúhlý půdorys bod za bodem, ale sestrojíme si ve sklopeném půdoryse *čtvercovou síť*, vyvodíme si její kosoúhlý průmět jako síť rovnoběžníkovou a do ní vyrýsujeme kosoúhlý půdorys obrazce (obr. 34).



Obr. 34.

Kosoúhlý průmět kružnice ležící v půdorysně sestrojíme tak, že nejdříve sklopíme danou kružnici okolo osy x do nárysny, do polohy k_1 k jejímu středu S_1 vyhledáme užitím redukčního trojúhelníka jeho kosoúhlý průmět S_k a perspektivní afinitou stanovíme známým způsobem osy elipsy k_k, nebo zvolíme v kružnici dva na sebe kolmé průměry (nejlépe, aby jeden byl s osou x rovnoběžný a druhý k ní kolmý), stanovíme jejich kosoúhlé průměty užitím jejich samodružných bodů

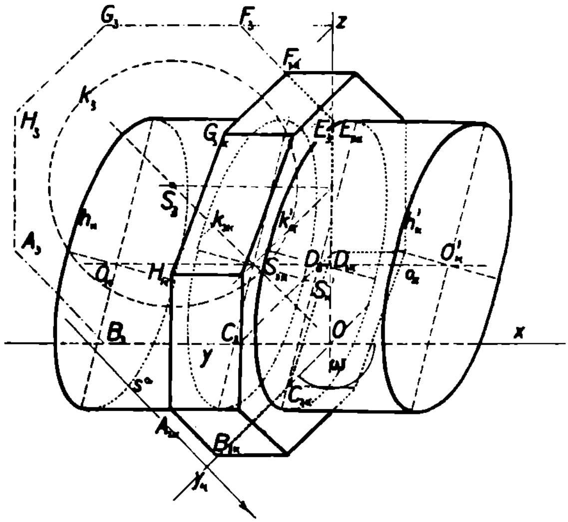


Obr. 35.

na ose x a paprsků afinity jdoucích sklopenými půdorysy jejich koncových bodů. Známou osmitečnovou konstrukcí sestrojíme pak ze sdružených průměrů elipsu k_k. Na obr. 35 bylo takto zobrazeno mezikruží ležící v půdorysně. Vnější elipsa sestrojena byla z os, vnitřní z osmi tečen.

3. Kosoúhlý stranorys.

Také obrazec $\mathfrak{B}$ v stranorysně je se svým kosoúhlým průmětem $\mathfrak{B}_k$ perspektivně afinní s osou z jako osou afinity a směrem kosoúhlého promítání s jako směrem afinity. Sklopíme-li opět stranorysnu okolo osy z do nárysny, budou také sklopený bokorys $\mathfrak{B}_3$ a kosoúhlý průmět $\mathfrak{B}_{3k}$ perspektivně afinní s osou afinity v ose z a směrem afinity ve směru s^a (obr. 36). Ten je třetí stranou redukčního trojúhelníka pro $q = \frac{n}{m}$ tentokrát tak sestrojeného, že na prodlouženou osu x byla od počátku

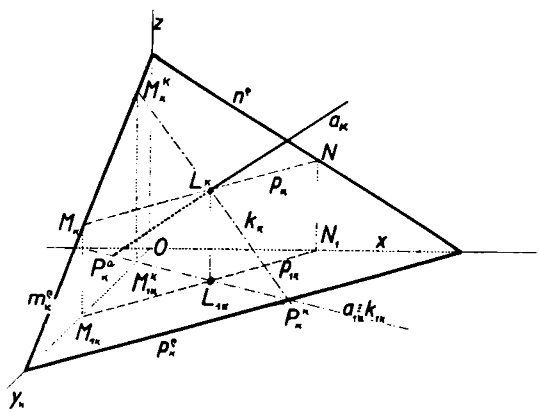


Obr. 36.

O vynesena délka m a na kosoúhlý průmět y_k délka n a jejich koncové body spojeny paprskem s^a. Na tomto obrázku byla tak sestrojena rovnoběžná perspektiva pravidelné osmiboké desky o poloměru opsané kružnice $r = 3{,}5$ a výšce $v = 1{,}5$ s podstavou ve stranorysně. Ta byla provrtána souosým rotačním válcem o poloměru $r' = 2{,}5$ a výšce $v' = 5$. Byl sestrojen sklopený bokorys S_3 středu S osmiúhelníka, sklopený osmiúhelník, dále redukčním trojúhelníkem kosoúhlý bokorys S_{3k}, jak patrno z obr., a perspektivní afinitou kosoúhlý průmět jedné (levé) podstavy hranolku. Jeho vrcholy a středem byly dále vedeny rovnoběžně s osou x kosoúhlé průměty pobočných hran a osy o, vyneseny na ně jejich délky ve skutečné velikosti (proč?) a sestrojen kosoúhlý průmět druhé podstavy. Okolo S_3 byla opsána dále kružnice k_3 o poloměru $r' = 2{,}5$, k ní sestrojena perspektivně afinní elipsa k_{3k} o středu S_{3k}, druhá s ní shodná a s rovnoběžnými osami elipsa k_k' o středu S_k a nalevo i napravo ve vzdálenostech $v = 2{,}5$ kosoúhlé průměty obou podstav h a h' válce jako shodné a shodně položené elipsy h_k a h_k' s elipsou k_{3k} o středech O_k a O_k' na o_k.

4. Úlohy deskriptivní geometrie v kosoúhlém promítání.

S kosoúhlým půdorysem resp. i stranorysem pracujeme i při zobrazování řešení úloh deskriptivní geometrie. Tak na obr. 37 jest zobrazena rovina ϱ kosoúhlými průměty stop p^ϱ, n^ϱ a m^ϱ v hlavních

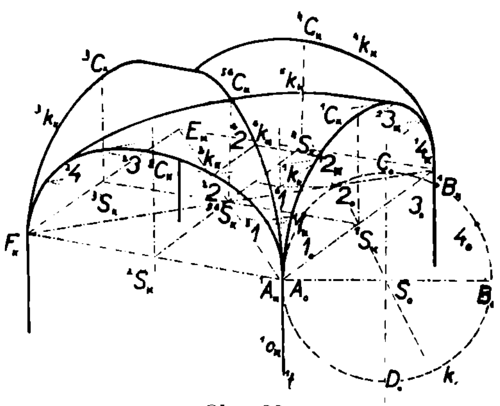


Obr. 37.

průmětnách, v ní zobrazena hlavní přímka p, která je rovnoběžná s půdorysnou, svým kosoúhlým průmětem p_k a kosoúhlým půdorysem p_{1k}, na přímce p a tedy i v rovině ležící bod L svým L_k a L_{1k} a řešena úloha průsečíku přímky a určené kosoúhlým průmětem a_k a kosoúhlým půdorysem a_{1k} s rovinou užitím krycí přímky k ležící v rovině ϱ a mající s přímkou m společný půdorys: $a_1 \equiv k_1$ a tedy také $a_{1k} \equiv k_{1k}$.

Příklad: *V kosoúhlém promítání na ν zobrazte klášterní klenbu v poloze nárožní postavenou nad čtvercovým půdorysem* ${}^1A{}^1BEF$! (Obr. 38.)

Elipsa ${}^1k_k$ byla sestrojena ze dvou sdružených průměrů $\overline{{}^1S_k{}^1A_k}$ a $\overline{{}^1C_k{}^1S_k}$, z nichž $\overline{{}^1S_k{}^1A}$ je rovnoběžný s π a $\overline{{}^1S^1C}$ s osou z, perspektivní afinitou z kružnice k_o o poloměru $\overline{{}^1S_k{}^1C_k}$, která se dotýká v bodě ${}^1A_k \equiv A_o$ tečny ${}^1o_k \| z$ elipsy ${}^1k_k$ a je vlastně okolo ${}^1o$ otočená kružnice ${}^1k$ do roviny rovnoběžné s nárysnou ν. Osou afinity je tečna ${}^1o_k$ a směrem afinity spojnice $S_o{}^1S_k$. Kružnice k_o byla rozdělena na 12 stejných dílů a k bodům 1_o, 2_o, 3_o, 4_o sestrojeny přiřazené body ${}^11_k$, ${}^12_k$, ${}^13_k$, ${}^14_k$ elipsy ${}^1k_k$ způsobem patrným z obr. pro bod ${}^12_k$. Také elipsa ${}^2k_k$ je s k_o perspektivně afinní se směrem $S_o{}^2S_k$ a osou ${}^1o_k$ afinity. K jejímu sestrojení bylo opět užito bodů 1_o, 2_o, 3_o, 4_o kružnice k_o. Elipsy ${}^3k_k$ a ${}^4k_4$ získáme posunutím z elips ${}^1k_k$ a ${}^2k_1$ o délku ${}^1S_k{}^3S_k$ resp. ${}^2S_k{}^4S_k$ v těchto směrech; jsou to kosoúhlé průměty druhých podstav obou rotačních válců. Průnikem obou ploch válcových, jak se v deskr. geometrii dokazuje, jsou dvě elipsy ${}^5k$ a ${}^6k$, jichž jednotlivé body, na př. ^{62} sestrojíme, vedeme-li bodem ^{12} povrchovou přímku jedné plochy, bodem ^{22} povrchovou přímku druhé plochy a jejich průsečíkem je právě bod ^{62} na ${}^6k$. Konstrukci provedeme v kosoúhlém průmětu. Elipsy ${}^5k_k$ a ${}^6k_k$ lze ovšem sestrojiti také ze sdružených průměrů, na př. $k_k{}^5$ z průměru $\overline{{}^{5,6}S_kF_k}$ a $\overline{{}^{5,6}S_k{}^{5,6}C_k}$, kde ${}^{5,6}C_k$ je průsečík kosoúhlých průmětů nejvyšších povrchových přímek obou ploch válcových. Na obr. byly sestrojeny jen půlelipsy.



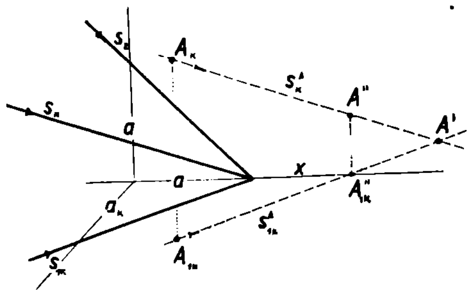
Obr. 38.

5. Rovnoběžné osvětlení.

Buďtež kosoúhle promítací paprsky světelnými paprsky. Vedeme-li nějakým bodem A rovnoběžku s^A se směrem těchto paprsků a stanovíme-li její stopník A' s půdorysnou a její stopník A'' s nárysnou, říkáme, že jsme strojili vržené stíny bodu A na π resp. ν při rovnoběžném osvětlení daného směru s. Považujeme-li však průmětny za neprůhledné, jest ihned patrné, že z obou bodů A' a A'' má praktický význam jen ten, který je k bodu A bližší (t. j. A''). Jest tedy rovnoběžné osvětlení útvarů vlastně kosoúhlým promítáním buď na π nebo ν.

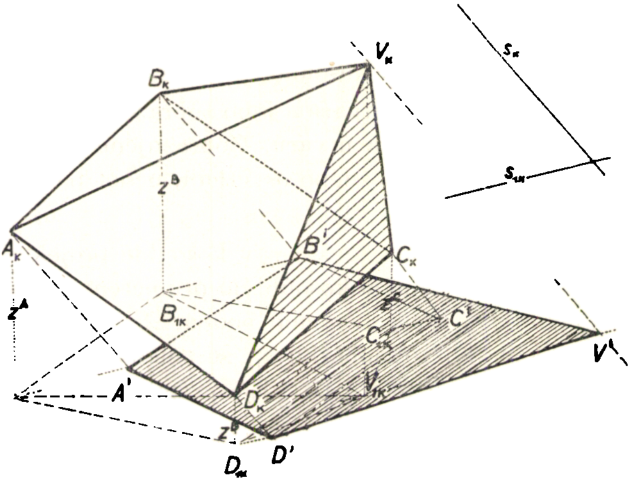
Rovnoběžného osvětlení útvarů a jeho zobrazení užíváme ke zvýšení názornosti zobrazovaných útvarů. Zobrazujeme tedy i v kosoúhlém promítání jevy rovnoběžného osvětlení, neboť názornost takových obrázků více vynikne.

Nechť bod A i paprsek s je určen v kosoúhlé projekci o daném osovém kříži a poměru q svým kosoúhlým průmětem A_k a s_k a kosoúhlým půdorysem A_{1k} a s_{1k}. Vedeme bodem A_k rovnoběžku s_k^A se směrem s_k a bodem A_{1k} rovnoběžku s_{1k}^A se směrem s_{1k}. Jejich průsečík A' (správně bychom měli psáti A_k') je kosoúhlý průmět půdorysného stopníku přímky s^A, tedy kosoúhlý průmět vrženého stínu A' bodu A na půdorysnu. Kosoúhlý půdorys s_{1k}^A protne osu x v bodě A_{1x} a na kolmici k ose x v něm vztyčené a na s_k^A leží A'' nárysný stopník přímky s^A,. t. j. vržený stín bodu A na nárysnu. Čím je vlastně tato kolmice? (Obr. 39.)



Obr. 39.

Jedná-li se o sestrojení kosoúhlých průmětů vržených stínů soustavy bodů $A, B, \ldots$, jest výhodné toto stanovení bodů $A', B' \ldots$ a $A'', B'' \ldots$ (obr. 40). Všechny trojúhelníky $\triangle A_k A_{1k} A'$, $\triangle B_k B_{1k} B' \ldots$ jsou podobné a jejich strany tudíž úměrné. Pak platí: $z^A : \overline{A_k A'} = z_h^B : \overline{B_k B'} = z : s_k = \ldots$ Sestrojíme-li pro $z : s_k$ redukční úhel, kde z je vzdálenost nějakého bodu M od půdorysny a s_k vzdálenost kosoúhlého průmětu M_k od kosoúhlého průmětu stínu M' bodu M na π, lze z úhlu získávati přímo vzdálenosti $\overline{A_kA'}$, $\overline{B_kB'}$, ... přetnutím úhlu vzdálenostmi z^A, z^B, ... Pak rýsujeme jen rovnoběžky s_k^A, s_k^B a na ně vynášíme od A_k, B_k, ... úsečky $\overline{A_kA'}$, $\overline{B_kB'}$, ..., jichž koncové body A', B', ..., jsou vržené stíny bodů A, B, ... na π. Na obr. 40 sestrojeno takto osvětlení čtyrbokého jehlanu s rovnoběžníkovou podstavou na půdorysnu. Byly dány vrcholy jehlanu A, B, C, V svými



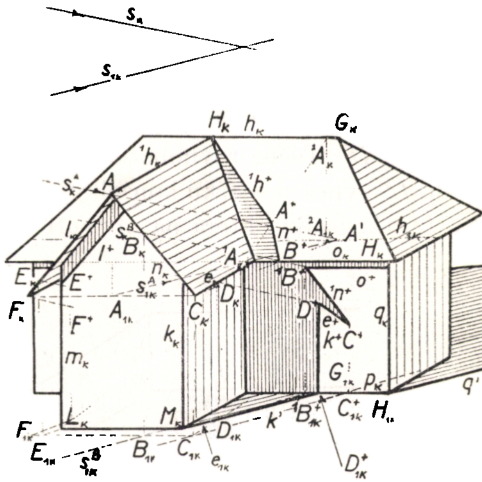
Obr. 40.

kosoúhlými průměty a kosoúhlými půdorysy a taktéž směr osvětlení s. Když byly podle redukčního úhlu, který v obr. nebyl rýsován, sestrojeny kosoúhlé průměty vržených stínů všech vrcholů jehlanu na π, byl sestrojen obrys celého obrazce, t. zv. *mez stínu vrženého* jehlanu. Vyznačíme-li na kosoúhlém průmětu jehlanu kosoúhlé průměty hran, které vrhají stíny do stran meze stínu vrženého, obdržíme tak kosoúhlý průmět prostorového mnohoúhelníka na tělese, t. zv. *meze stínu vlastního*. Ta odděluje na mnohostěnu osvětlené stěny od zastíněných.

1. Příklad. *V kosoúhlém promítání sestrojte rovnoběžné osvětlení hospodářského stavení o půdorysu tvaru písmene T!* (Obr. 41.)

Byl sestrojen kosoúhlý průmět stavení a zvolen směr osvětlení kosoúhlým průmětem s_k a kosoúhlým půdorysem s_{1k}. K vrcholu A nalezen jeho půdorys A_1 na rovinu okapů, bodem A veden paprsek $s^A \| s$ a bodem

A_1 paprsek $s_1^A \| s_1$ a stanoven jejich průsečík A' jako vržený stín bodu A na rovinu okapu. Paprsek s_1^A protne půdorys h_1 hřebene h na okapovou rovinu v bodě ${}^2A_1$. Světelná rovina, t. j. rovina proložená paprskem s^A a kolmá ku rovině okapu protne hřeben h v bodě ${}^2A$, jehož půdorysem je bod ${}^2A_1$ a okap o v bodě ${}^1A \equiv (s_1^A \,.\, o)$. Spojnice ${}^1A\,{}^2A$ jest průsečnice světelné roviny se střešní rovinou (ho). Průsečík A^+ světelného paprsku s^A s průsečnicí ${}^1A\,{}^2A$ je vržený stín bodu A na střešní rovinu (ho). Spojnice ${}^1h^+ \equiv \overline{HA^+}$ je vržený stín hřebene ${}^1h$ na rovinu (ho). Vržený stín $\overline{CA'}$ hrany $\overline{CA}$ na rovinu okapu protne okap o v bodě B^+, jest to vržený stín bodu B hrany $\overline{CA}$, který leží s B^+ na jednom světelném paprsku s^B. Tento paprsek protne dále průčelnou stěnu budovy nad přímkou p se zdvíhající v bodě ${}^1B^+$. Získáme jej, že sestrojíme B_1 na π, vedeme jím $s_1{}^B$ a stanovíme jeho průsečík ${}^1B_1^+$ s hranou p. Bodem ${}^1B_1{}^+$ vedeme kolmici ku p a v jejím průsečíku s s^B je ${}^1B^+$. Stejným způsobem získán i C^+ jako vržený stín bodu C. Vržený stín k' hrany k na π protne půdorys e_1 okapu e v bodě D_1 a světelná rovina hranou k proložená a kolmá ku π protne okap e v bodě D. Vržený stín D^+ na průčelnou stěnu je na $s^D \| s$ a na k^+ vrženém to stínu části hrany k na průčelnou stěnu, který prochází bodem $D_{1k}^+ \equiv (k' \,.\, p)$. Bodem ${}^1B^+$ vedená rovnoběžka o^+ s okapem o je vržený stín okapu o na průčelnou stěnu (p). Vržený stín l^+ hrany l sestrojen jako rovnoběžka s l jdoucí bodem E^+, který je průsečíkem světelné roviny proložené hranou m s hranou l. Z obr. je dále patrné sestrojení meze stínu vlastního a části meze stínu vrženého na půdorysnu.

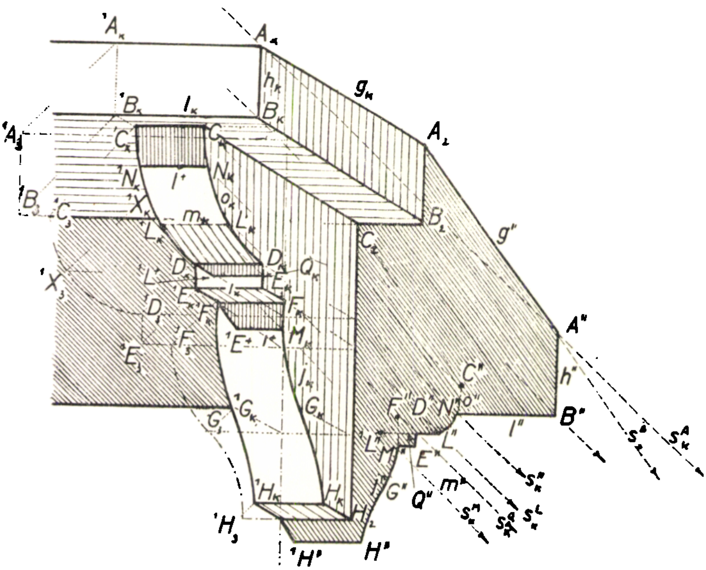


Obr. 41.

2. Příklad. *V kosoúhlém promítání (podhledu) stanovte rovnoběžné*

osvětlení na nárysnu konsolky připevněné k nárysně a na ní spočívající vodorovné desky! (Obr. 42.)

Užitím stranorysu (${}^1A_3{}^1B_3{}^1C_3{}^1D_3{}^1E_3{}^1F_3{}^1H_3$) byla sestrojena rovnoběžná perspektiva konsolky s deskou. Vržený stín A'' bodu A na ν je průsečík paprsku s^A jdoucího bodem A s paprskem s_2^A, který prochází nárysem A_2 bodu A. Podobně sestrojen B''. Jím prochází přímka l'' vržený stín hrany l desky rovnoběžné s ν; je tedy $l \| l_k$. Byly ještě sestrojeny C'' a D'' a vržený stín čtvrtkružnice $\widehat{CD}$ jako oblouk o'' elipsy $\widehat{C''D''}$. Tečna rovnoběžná s l'' této elipsy, na níž od dotykového bodu L'' vyneseme šířku konsolky, je vrženým stínem povrchové přímky $\overline{L^1L}$ konsolky, která na ní tvoří část meze stínu vlastního. Bod L_k



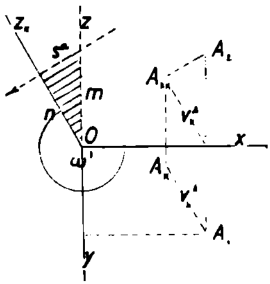
Obr. 42.

stanovíme jako průsečík světelného paprsku s^L jdoucího bodem L'' s obloukem $o \equiv \widehat{CD}$. Dále stanovíme stíny bodů E'', F'', G'' a H'', oblouku $\widehat{FH}$, jakož i ${}^1H''$. Vrženým stínem hrany $i \equiv {}^1\overline{EE}$ je ${}^1E''E'' \#$ $\# {}^1EE$. Ten protne vržený stín j'' oblouku j v bodě M''. Světelným paprskem s^M stanovíme na j bod M, jímž prochází vržený stín $i^+ \equiv$

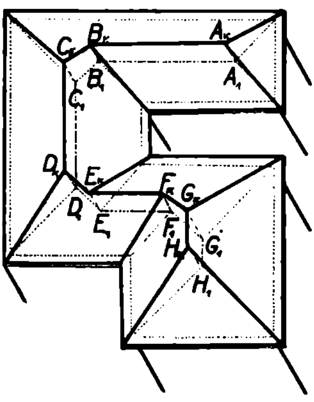
$\equiv \overline{{}^1E^+E^+}$ hrany i na plochu ${}^1FF^1HH$. Na světelném paprsku ${}^1s^E$ a na i^+ je ${}^1E^+$. Oblouk ${}^1\widehat{F^1E^+}$ je vržený stín hrany $\overline{{}^1F^1E}$ na plochu ${}^1FF^1HH$. Podobně ale užitím bodu $Q'' \equiv ({}^1L''L'' \,.\, D''E'')$ stanovíme vržený stín povrchové přímky $m \equiv \overline{{}^1LL}$ tvořící na ploše ${}^1CC^1DD$ mez stínu vlastního na plochu ${}^1DD^1EE$ a také vržený stín ${}^1L^+$ a užitím bodu $N'' \equiv \equiv (l'' \,.\, o'')$ vržený stín l^+ hrany l na plochu ${}^1CC^1DD$. Osvětlení bude dokončeno, když podle meze stínu vrženého na ν určíme mez vlastního stínu konsolky.

6. Kosoúhlé promítání na půdorysnu.

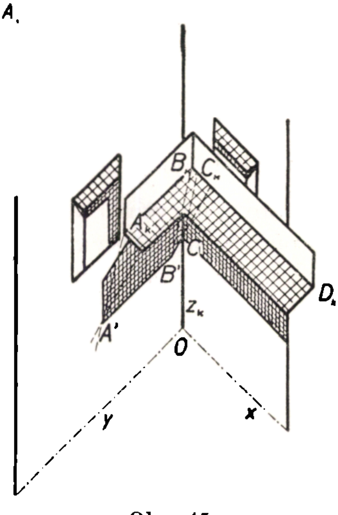
Ve stavitelství se užívá kosoúhlého promítání na půdorysnu, při čemž se mluví o t. zv. *kavalírní perspektivě*, neboť se v ní již v římském stavitelství zobrazovaly t. zv. kavalíry v pevnostech. Průmětnou je



Obr. 43.



Obr. 44.



Obr. 45.

zde půdorysna. Kosoúhlý průmět se tu vynáší přímo z kolmého půdorysu. Osa x a osa y svírají v tomto promítání pravý úhel, osa z (výšek) se zobrazí jako „zkosená" a „zkrácená". Jest tedy toto promítání shodné s předešlým, jen se zamění význam a označení osy y a osy z. Na obr. 43 jest zobrazen takto bod A, jestliže je dán opět úhel ω' (zkosení osy z) a zkrácení $q' = \frac{n}{m}$ (její zkrácení). Bodem A_1 vedeno zkosení $\overline{A_1 A_k} \| z_k$ a vynesena od A_1 na ně redukovaná v_k^A výška v^A bodu A nad půdorysnou. Redukce provedena užitím redukčního trojúhelníka.

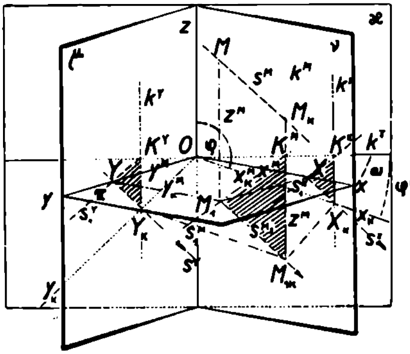
Na obr. 44 byla tímto způsobem zobrazena střecha domu o stejném spádu střešních rovin s okapem na stejné úrovni nad daným vyřešeným půdorysem střechy, při čemž za půdorysnu zvolena rovina okapů. Získání bodů A_k, B_k ... z A_1, B_1 ... je patrné z obrázku.

V praxi se pracuje se zkosením $\omega' = 225°$ a zkrácením $q' = 1$, takže výšky v se vynášejí ve skutečné velikosti. Je-li $q' < 1$ mluvíme o *zploštění obrazu*, pro $q' > 1$ o jeho *převýšení*. Převýšení se užívá v praxi zpravidla $q' = 2$.

Někdy se chybně nazývá kavalírní perspektiva ptačí perspektivou, t. j. staršího označení nadhledu. I v kavalírní perspektivě se však pracuje s podhledem, v němž je, na př. v obr. 45, zobrazen detail budovy s balkonem a provedeno osvětlení rovnoběžnými paprsky. Konstrukci nechť si popíše čtenář sám!

7. Kosoúhlé promítání na svislou rovinu.

Osou z kolmou k půdorysně a ležící v nárysně proložme svislou rovinu $\varkappa$, aby s nárysnou svírala úhel $\omega = \widehat{xk^\pi}$, a sestrojme její průsečnici k^π s půdorysnou. Osa k^π bude kolmá k ose z (obr. 46). Zvolme nyní na ose x, v níž se protnou půdorysna s nárysnou, bod X a přiřaďme k němu bod X_k v rovině $\varkappa$. I bude rovina $\varkappa$ kosoúhlou průmětnou a spojnice $s^x \equiv XX_k$ kosoúhle promítacím paprskem bodu X na rovinu $\varkappa$. Kosoúhlé promítání je tím určeno. Osa x se pak kosoúhle promítne jako přímka $x_k \equiv OX_k$ svírající s osou k^π úhel φ^x. Veďme ještě bodem X rovinu σ^x rovnoběžnou s osou z, aby obsahovala paprsek s^x, a stanovme její průsečnici s_1^x s půdorysnou, její průsečnici k^x rovnoběžnou s osou z s průmětnou $\varkappa$ a průsečík $K^x \equiv (s_1^x \,.\, k^x)$. Pak můžeme ke každému bodu M_1 půdorysny stanoviti známým způsobem jeho kosoúhlý průmět M_{1k}, když sestrojíme spojnici $m_1 \equiv M_1X$ ležící v π, její průsečík M^k s osou k^π, jím vedeme přímku $m_{1k} \equiv M^kX_k$, dále bodem M_1 rovnoběžný paprsek s_1^M s paprskem s_1^x, jeho průsečíkem $K^M \equiv (s_1^M \,.\, k^\pi)$ s osou k^π rovnoběžku k^M s k^x a stanovíme průsečík M_{1k} přímek $k^M \,.\, m_{1k}$. Jsou totiž opět půdorysna a kosoúhlá průmětna $\varkappa$ perspektivně afinní s osou afinity v přímce k^π a směrem afinity s^x.



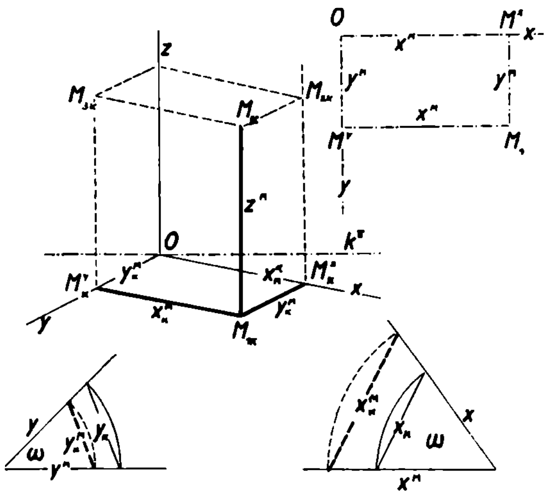
Obr. 46.

A sklopíme-li dále půdorysnu π do průmětny $\varkappa$ okolo osy k^π, budou také sklopený půdorys $(\pi)_0$ nějakého útvaru (π) a jeho kosoúhlý průmět $(\pi)_k$ útvary perspektivně afinními ve dvojité rovině $(\varkappa)$ s osou afinity k^π a směrem afinity $s_0^x \equiv X_0X_k$. V praxi však této příbuznosti mezi sklopenou půdorysnou a kosoúhlou průmětnou nepoužíváme, třebaže z ní lze vyvoditi theoreticky četné zajímavé úkoly.

Sestrojme si však ještě kosoúhlý průmět osy y. Obdržíme jej, když kosoúhle promítneme jeden její bod Y a jeho kosoúhlý průmět Y_k spojíme přímkou y_k s počátkem O. Úhel $\widehat{x_k y_k}$ bude obecně kosý. Přímky z, x_k, y_k tvoří t. zv. osový kříž. Úsečky na ose z a všechny jiné, které leží na přímkách s ní rovnoběžných, t. j. všechny vzdálenosti od půdorysny, se promítají v této projekci ve skutečné velikosti. Délky na osách x a y a přímkách s nimi rovnoběžných se tímto promítáním zkracují (prodlužují) v poměrech $q^x = \dfrac{\overline{OX_k}}{\overline{OX}}$ a $q^y = \dfrac{\overline{OY_k}}{\overline{OY}}$. Dá se dokázati, že osovým křížem a poměry q^x a q^y je toto kosoúhlé promítání jednoznačně určeno. Od důkazu pro malý rozsah tohoto tisku však upouštíme.

V praxi zobrazíme si pravoúhlý půdorys $(\pi)_1$ nějakého útvaru a připojíme jej (obr. 47) zcela volně k danému osovému kříži do nákresny. K daným poměrům q^x a q^y si pořídíme redukční úhly ω^x a ω^y

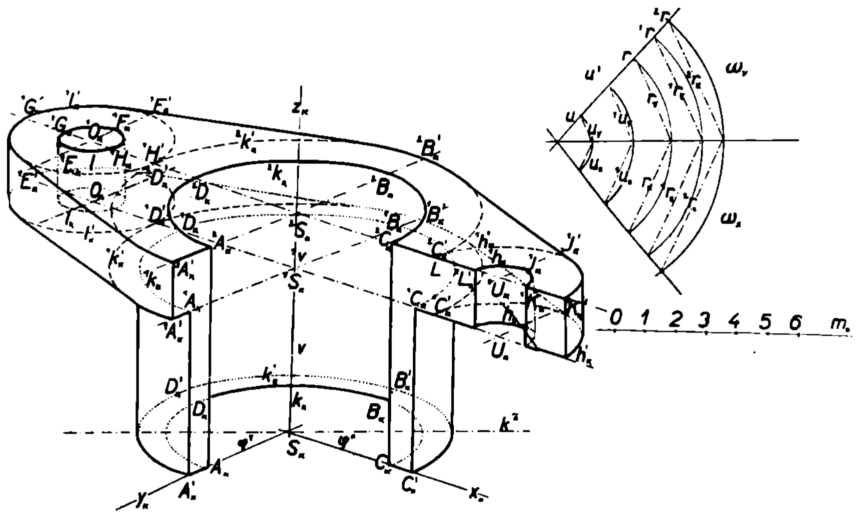
po případě i redukční úhly reciproké. Tento pravoúhlý půdorys zobrazíme i s osami x a y třeba i v zmenšeném nebo jakémkoliv jiném měřítku, než je průmět kosoúhlý. Pro jednoduchost předpokládejme měřítko v obou průmětech stejné. Půdorysem M_1 bodu M vedeme pak



Obr. 47.

obě rovnoběžky x^M a y^M s osami x a y a stanovíme jejich průsečíky M^x a M^y s těmito osami x a y. Podle redukčních úhlů ω^x a λ^y zredukujeme úsečky $\overline{OM^x}$ a $\overline{OM^y}$ na úsečky $\overline{OM^x_k}$ a $\overline{PM^y_k}$ a takto zredukované vyneseme do osového kříže na x_k a y_k, útvar doplníme na rovnoběžník $OM^x_kM_{1k}M^y_k$ a čtvrtý vrchol jeho je kosoúhlý půdorys M_{1k} bodu M. Jím vedeme rovnoběžku s osou z, vyneseme na ni od M_{1k} vzdálenost bodu M od π ve skutečné velikosti a koncový bod M_k je kosoúhlý průmět bodu M.

Kosoúhlého promítání na svislou rovinu se užívá při zhotovování náčrtů strojních součástek, neboť při kosoúhlém promítání na nárysnu se kružnice ležící v půdorysně nebo rovinách s půdorysnou rovnoběžných dost skreslují. Na obr. 48 je v něm zobrazena příruba rourová (tři čtvrtiny) podle polovičního půdorysu a nárysu, který v obr. nebyl rýsován. Redukované délky podle redukčních úhlů ω^x a ω^y před vnášením do kosoúhlého průmětu dvakrát zvětšíme. Na kosoúhlé průměty x_k a y_k os x a y byly vyneseny dvojnásobné redukované délky $\overline{S_kA_k}$ a $\overline{S_kC_k}$, z nich sestrojena jako ze sdružených průměrů elipsa k_k. Po-



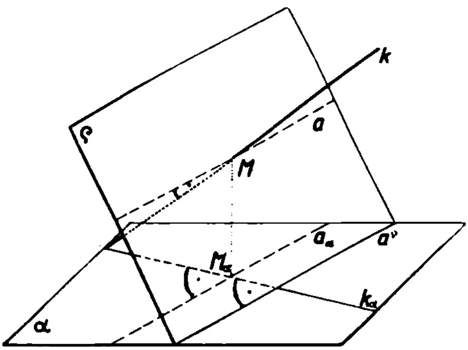
Obr. 48.

dobně sestrojena byla i soustředná elipsa k_k'. Také elipsy o_k o středu O_k a μ_k o středu U_k byly sestrojeny stejným způsobem po stanovení jejich středů O_k a U_k, které získány vynesením dvojnásobné redukované délky $\overline{O_kS_k} = \overline{S_kU_k}$ podle ω^x na osu x_k. Konstrukce ostatních elips o středech ${}^1S_k$, ${}^1O_k$, ${}^1U_k$ resp. ${}^2S_k$ je zřejmá z obrázku. Délky $\overline{S_k{}^1S_k}$ a $\overline{O_k{}^1O_k} = \overline{U_k{}^1U_k} = \overline{{}^1S_k{}^2S_k}$ jsou ovšem vyneseny jako dvojnásobky příslušných délek přímo z nárysu.

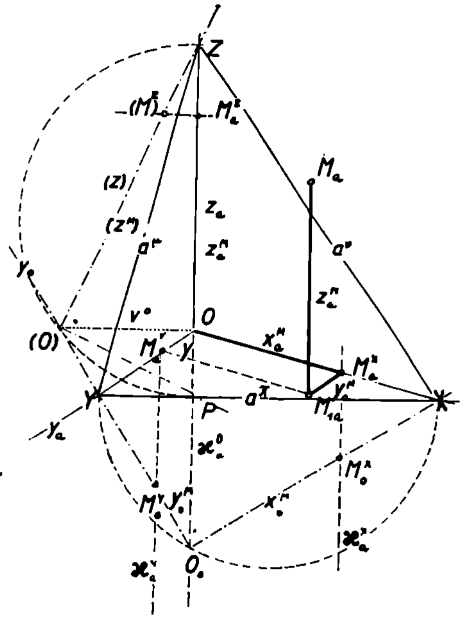
8. Kosoúhlé promítání na obecnou rovinu.

Na obr. 49 je zobrazena nějaká průmětna α a rovina ϱ k ní nakloněná, která ji (průmětnu α) protne ve stopě a^ϱ. Sestrojme v bodě M roviny ϱ k ní kolmici k. Ta je kolmá ke všem přímkám roviny ϱ, tedy také k hlavní přímce a roviny ϱ jdoucí bodem M. Jest nám známo, že pravý úhel $\widehat{ka}$, jehož aspoň jedno rameno a je rovnoběžné s průmětnou, se kolmo do této promítá opět jako úhel pravý $\widehat{k_a a_a}$ a protože průmět a^α přímky a je rovnoběžný se stopou a^ϱ, je průmět k_α kolmý ku a^ϱ.

Uvažujme nyní tři základní průmětny, půdorysnu π, nárysnu ν a bokorysnu μ, jež se protnou ve třech osách x, y, z o společném počátku O a zvolme si libovolnou rovinu α ke všem osám nakloněnou (obr. 50).



Obr. 49.



Obr. 50.

Ta protne tyto průmětny ve třech přímkách a^π, a^ν, a^μ, stopách rovin π, ν, μ. Tyto stopy tvoří ostroúhlý trojúhelník, jehož vrcholy X, Y, Z jsou průsečíky os x, y, z s rovinou α. Kdybychom nyní promítli kolmo osu z na rovinu α, je zřejmé, že její průmět z_a je kolmý ku a^π, neboť osa z je kolmá ku půdorysně π. Stejně tak i x_a je kolmá ku a^μ a y_a ku a^ν. Jsou tedy kolmé průměty všech os výškami trojúhelníka XYZ a kolmý průmět O_a počátku O průsečíkem výšek tohoto trojúhelníka.

Trojúhelník XOY je pravoúhlý s vrcholem pravého úhlu v počátku O, jeho kolmý průmět XO_aY na rovinu α je trojúhelník tupoúhlý.

Otočme nyní trojúhelník XOY okolo stopy $a^\pi \equiv XY$ do roviny α. Při tomto otáčení se bude bod O otáčeti v rovině $\varkappa^o$ kolmé ku přímce a^π a tedy i k rovině α, a její kolmý průmět na rovinu α bude přímka $\varkappa^o_a$ jdoucí bodem O_a kolmo ku a^π, tedy prodloužená z_a. Stačí nad úsečkou $\overline{XY}$ sestrojiti kružnici jako nad průměrem (je to souhrn vrcholů pravých úhlů, jichž ramena jdou body X a Y) a v jejím průsečíku s $\varkappa^o_a \equiv z_a$ je otočený počátek O_o. Spojnice $x_o \equiv XO_o$ a $y_o \equiv YO_o$ jsou otočené osy x a y a na nich ležící úsečky jsou zde zobrazeny ve skutečné velikosti.

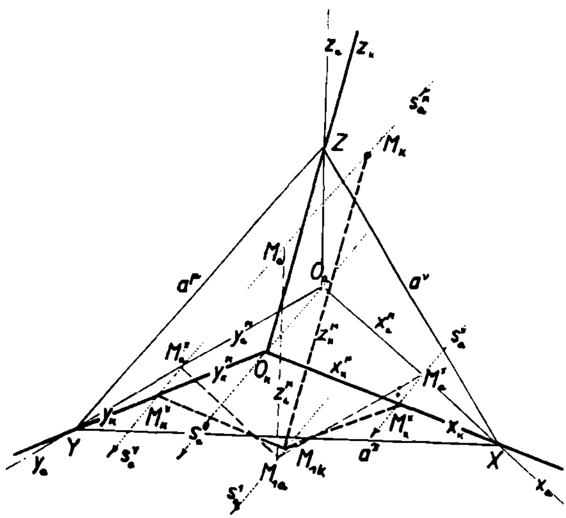
V rovině $\varkappa^o$ leží pravoúhlý trojúhelník ZOP s vrcholem pravého úhlu při O, jehož přepona $\overline{ZP}$ je v průmětně α a jehož jedna odvěsna $\overline{ZO}$ jest osa z. Sklopme opět tento trojúhelník okolo přepony $\overline{ZP}$ do roviny α. Počátek O se otočí do bodu (O), který je na kružnici opsané nad $\overline{ZP}$ jako nad průměrem a na kolmici ku ZP vztyčené v bodě O_a. Spojnice $Z(O)$ je sklopená osa (z) a úsečky na ní ležící jsou zde ve skutečné velikosti. Současně jsme získali ve výšce $\overline{O_a(O)}$ trojúhelníka $Z(O)P$ vzdálenost v^o počátku od roviny α.

Vynesme nyní na otočenou osu x_o délku x^M a na y_o délku y^M od bodu O_o. Koncové body M^X_o a M^Y_o otočme dále zpět na osy x a y a sestrojme jejich kolmé průměty M^X_a a M^Y_a na x_a a y_a. Jest zřejmé, že body M^X_a a M^X_o resp. M^Y_a a M^Y_o se nalézají v rovinách $\varkappa^x$ a $\varkappa^y$ kolmých ku $a^\pi \equiv XY$, jichž kolmým průmětem na rovinu α budou kolmice $\varkappa^x_a$ a $\varkappa^x_a$ ku a^π jdoucí body M^X_o resp. M^Y_o. Jsou tedy $M^X_a \equiv (x_a \,.\, \varkappa^x_a)$ a $M^Y_a \equiv$ $\equiv (y_a \,.\, \varkappa^y_a)$. Sestrojíme-li nyní kosodélník $OM^x_aM_{1a}M^y_a$, je jeho čtvrtý vrchol M_{1a} kolmým průmětem na rovinu α nějakého bodu M_1 ležícího v půdorysně a majícího od os x a y vzdálenosti x^M a y^M.

Mysleme si dále nad půdorysnou π, a to právě nad bodem M_1, ve vzdálenosti $z^M \equiv \overline{M_1M}$ bod M. Tato vzdálenost je rovnoběžná s osou z a její kolmý průmět z^M_a na rovinu α je rovnoběžka z^M_a s přímkou z_a, která prochází bodem M_{1a}. Kdybychom z^M vynesli na sklopenou osu (z) od bodu (O) a koncový bod (M^z) otočili zpět na z_a do bodu M^z_a na z_a, jest úsečka $\overline{O_aM^z_a}$ kolmý průmět z^M_a délky z^M na rovinu α. Vyneseme tedy od M_{1a} na z^M_a délku z^M_a a její koncový bod M_a je kolmý průmět na rovinu α bodu M určeného vzdálenostmi x^M, y^M a z^M od průměten π, ν, μ.

Jest tedy kolmý průmět M_a bodu M na rovinu α určen, známe-li trojúhelník XYZ, v němž rovina α je rovinami π, ν a μ proťata, a vzdálenosti x^M, y^M, z^M bodu M od těchto rovin *(kolmá axonometrie)*.

Mysleme si nyní v rovině α bod O_k (obr. 51) a považujme jej za kosoúhlý průmět počátku O na rovinu α. Spojnice O_aO_k je kolmý průmět s_a^O kosoúhle promítacího paprsku s^O jdoucího bodem O na kosoúhlou průmětnu α. Spojnice $x_k \equiv XO_k$, $y_k \equiv YO_k$ a $z_k \equiv ZO_k$ jsou kosoúhlé průměty os x, y a z na rovinu α. Kosoúhlý průmět bodů M^x a M^y obdržíme, že vedeme body M_a^X a M_a^Y kolmé průměty s_a^x a s_a^y koso-



Obr. 51.

úhlé promítacích paprsků jdoucích body M^x a M^y a stanovíme jejich průsečíky M_k^Y a M_k^X s přímkami x_k a y_k. Doplníme-li body M_k^Y, O_k, M_k^X na rovnoběžník $M_k^Y O_k M_k^X M_{1k}$, je čtvrtý vrchol M_{1k} kosoúhlým půdorysem bodu M, a jestliže ještě vedeme bodem M_{1k} rovnoběžku z_k^M s přímkou z_k je průsečík M_k této rovnoběžky z_k^M s kolmým průmětem s_a^M kosoúhle promítacího paprsku s^M jdoucího bodem M kosoúhlým průmětem M_k bodu M na rovinu α.

Protože známe také vzdálenost v^o a úsečku $\overline{O_aO_k}$, jest poloha kosoúhlého paprsku s^O přesně určena, zcela obdobně, jak jsme již viděli při kosoúhlém promítání, na př. na nárysnu. Jest dále jisté, že poměry $q^x = \frac{x_k^M}{x^M}$, $q^y = \frac{y_k^M}{y^M}$ a $q^z = \frac{z_k^M}{z^M}$ zůstanou konstantní, nechť jde o jakýkoliv bod M.

Kdybychom si tedy v nákresně a průmětně α narýsovali tři úsečky x_k, y_k a z_k, vycházející z jednoho bodu O_k a učinili $x^M = y^M = z^M$, potom platí věta:

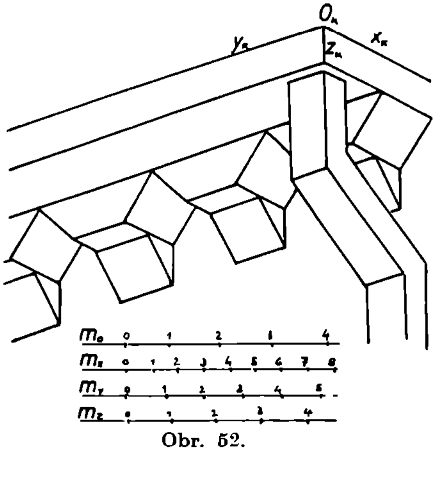
Tři libovolné úsečky ležící v jedné rovině a vycházející z jednoho bodu, jež všechny nejsou v téže přímce, z nichž alespoň dvě jsou nenulové a žádná není nekonečně velká, lze považovati za kosoúhlý průmět tří vzájemně kolmých a stejných úseček z jednoho bodu v prostoru vycházejících.

Jest to t. zv. *věta Pohlkeova*, jejíž důkaz najde čtenář v každé učebnici deskriptivní geometrie.

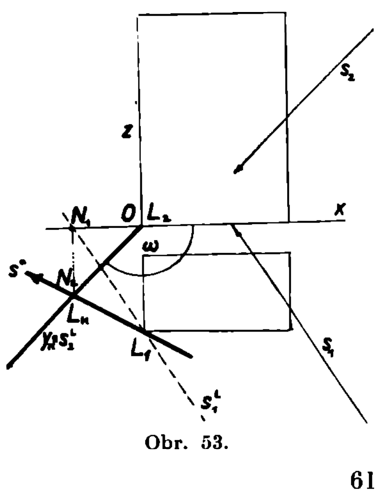
V praxi volíme tři poměry zkrácení q^x, q^y, q^z a osový kříž tak, aby z_k byla svislá a druhé dvě osy x_k a y_k svíraly s ní úhly α a β, pro něž platí

$$100° < \alpha < 110° \text{ a } 110° < \beta < 120°,$$

aby obrázky takto vznikající příliš neskreslovaly skutečnost. K poměrům q^x, q^y, q^z si sestrojíme redukční měřítka, úhly nebo trojúhelníky a pak z daného půdorysu a nárysu, případně i bokorysu vyneseme redukované délky ve směrech x, y, z do délek x_k, y_k a z_k. Na obr. 52 byla takto podle redukčních měřítek zobrazena část střešního okapu s pozednicí a odtokovou rourou. Řešení je z obr. patrné.



Obr. 52.



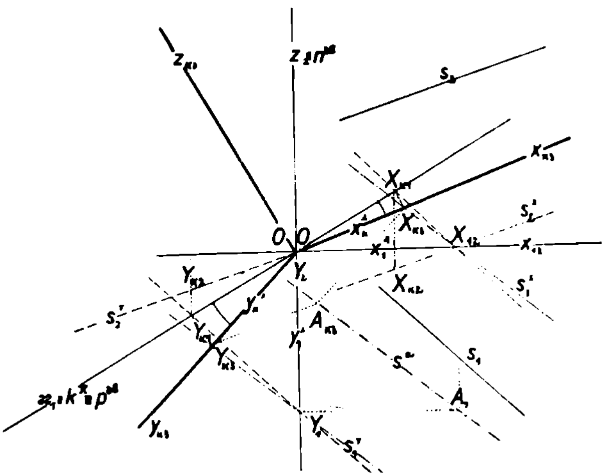
Obr. 53.

9. Jiný způsob určení kosoúhlého promítání.

Někdy se zobrazí k danému půdorysu a nárysu objektu i průměty s_1 a s_2 směru s kosoúhlého promítání a zapíše se, že nárysna nebo půdorysna má býti kosoúhlou průmětnou. Tak na př. na obr. 53 je oběma průměty zobrazen kvádr v průčelné poloze, jsou připojeny oba průměty paprsku s a určena nárysna za kosoúhlou průmětnu. Je zřejmé, že nárys s_2 paprsku s jest totožný s kosoúhlým průmětem y_k osy y, tedy zkosením a že zkrácení q získáme, když si na přímce s zvolíme libovolný bod L (L_1 na s_1 a L_2 na s_2), stanovíme nárysný stopník $N^s \equiv$

$\equiv L_k$ přímky s a zkrácení $q = \dfrac{\overline{L_2L_k}}{\overline{L_2L_1}} = \dfrac{\overline{L_2L_k}}{\overline{L_1x}}$.

Jestliže průmětnou má býti svislá rovina $\varkappa$ (obr. 54), postupujeme takto: Nárysnou stopu $n^\varkappa$ roviny $\varkappa$ považujeme za osu z, základnici $x \equiv (\pi \,.\, \nu)$ za osu x, stopní bod $X^\varkappa$ roviny $\varkappa$ za počátek O a kolmici



Obr. 54

vztyčenou v počátku k nárysně za osu y. Potom zvolíme na osách x a y body X a Y tak, aby $\overline{OX} = \overline{OY}$, vedeme jimi paprsky s^x a s^y rovnoběžně s daným směrem s a stanovíme jejich průsečíky X_k a Y_k s rovinou $\varkappa$. Rovinu $\varkappa$ s osou z, počátkem O a body X_k a Y_k sklopíme do půdorysny okolo půdorysné stopy $p^{\varkappa} \equiv k^{\pi}$ roviny $\varkappa$, spojíme $x_{k3} \equiv \equiv OX_{k3}$ a $y_{k3} \equiv OY_{k3}$, čímž získáme osový kříž z_{k3}, y_{k3}, x_{k3}. Poměry zkrácení jsou

$$q^x = \frac{\overline{OX_k}}{\overline{OX}} \text{ a } q^y = \frac{\overline{OY_k}}{\overline{OY}}.$$

Kosoúhlé promítání na svislou rovinu je určeno pak známými podmínkami. Navíc však je tu možno užíti perspektivní afinity mezi skutečným půdorysem a sklopeným půdorysem kosoúhlým s osou afinity v přímce k^{π} a směrem afinity $\overline{A_1 A_{k3}}$.

Popište sami, jak bychom určili kosoúhlé promítání na obecnou rovinu známými podmínkami, t. j. x_k, y_k, z_k a q^x, q^y a q^z, bude-li rovina α a směr promítání určen oběma sdruženými průměty (t. j. α_1 a α_2, s_1 a s_2)!

10. Volné kosoúhlé promítání.

Zatím co při čtení pravoúhlých průmětů nějakého objektu musíme dbáti vzájemné polohy originálu a průmětny, máme-li získati správnou představu (názor) o tvaru a poloze útvaru, nikterak k tomu nemusíme přihlížeti při pozorování průmětu kosoúhlého. Nestaráme se v tomto případě ani o průmětnu, ani o promítací paprsek, zvláště ne tenkrát, čteme-li obraz z patřičné vzdálenosti a správného směru. Také okolnost, že útvary se promítají kosoúhle vždy jako útvary stejného druhu, ať je promítáme jakýmkoliv paprskem na jakoukoliv rovinu, a skutečnost, že podmínky perspektivní afinity, jíž k originálu rovinnému přiřazujeme útvar v nákresně, jsou nezávislé na promítání, vedou nás k otázce, zda-li není zbytečné určovati průmětnu a kosoúhle promítací paprsky a zda možno bez nich zobraziti nějakým obrazem kosoúhlé průměty jistých útvarů zcela volně.

Všimněme si na př., že kosoúhlým průmětem trojúhelníka neležícího v promítací rovině je vždy opět trojúhelník. Narýsujeme-li tedy nějaký trojúhelník v nákresně, můžeme jej vždy považovati za kosoúhlý průmět určitého trojúhelníka v prostoru. Rovněž tak kosoúhlý průmět rovnoběžníka, trojhranu, čtyrstěnu, rovnoběžnostěnu atd. vyvolá vždy dojem originálu. Budou však také kosoúhlé průměty ně-kterých útvarů, na př. koule, které nebudou názorným zobrazením originálu, od narýsované elipsy o poloosách $a = 6$ a $b = 1$ těžko bychom očekávali, že vzbudí u někoho představu koule.

Jsou tedy útvary, jichž zcela volně a nezávisle na průmětně a směru promítání sestrojené obrazy, při nichž je dbáno všech vět odvozených při kosoúhlém promítání, při nichž užíváme i jiných zobrazovacích prostředků, jako jsou na př.: sepjetí útvarů, viditelnosti, osvětlení, pomocného průmětu, jeho průmětu kosoúhlého a pod., budou vždy odborníkem považovány za kosoúhlé průměty jistých útvarů v prostoru.

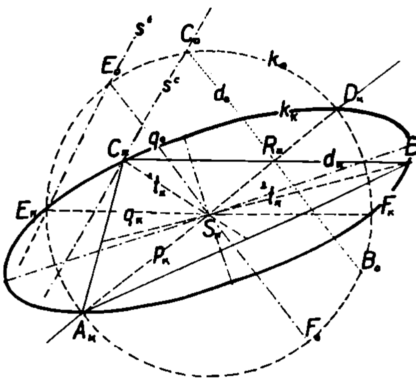
II. Volný průmět útvarů rovinných.

Při kosoúhlém promítání poznáváme často, že z určitých základních útvarů při dodržování pravidel o spojování, protínání, dělicím poměru a rovnoběžnosti je možné dokresliti kosoúhlé průměty útvarů jiných v téže rovině se nalézajících. Vzpomeňme jen, že ke třem vrcholům A_k, B_k, C_k stačí rovnoběžkami vrcholy B_k resp. C_k se stranami $\overline{A_kC_k}$ resp. $\overline{A_kB_k}$ stanoviti čtvrtý vrchol D_k rovnoběžníka $A_kB_kC_kD_k$, který je kosoúhlým průmětem rovnoběžníka $ABCD$, jehož tři vrcholy A, B, C jsme promítli do bodů A_k, B_k, C_k. Ukažme si v následujícím na několik podobných příkladů takového zobrazení nezávislého na promítání.

Příklady: 1. *Považujme nějaký trojúhelník $A_kB_kC_k$ ležící v nákresně za kosoúhlý průmět rovnostranného trojúhelníka ABC v prostoru a sestrojme v nákresně kosoúhlý průmět jemu opsané kružnice*! (Obr. 55.)

Těžnice trojúhelníka $A_kB_kC_k$ jsou kosoúhlé průměty těžnic, os stran i os úhlů trojúhelníka ABC. Jejich průsečík S_k je kosoúhlým průmětem středu S obou kružnic k^o i k^v, spojnice S_kA_k kosoúhlým průmětem jednoho průměru kružnice k^o, když druhý koncový bod D_k je v prodloužení $\overline{A_kS_k}$ tak, že $\overline{A_kS_k} = \overline{S_kD_k}$ a spojnice $\overline{B_kC_k}$ je k němu sdružená tětiva elipsy k_k, neboť je jím půlena. Elipsa k_k je tedy určena. Nad A_kD_k jako nad průměrem opíšeme afinní kružnici k_o, v bodech S_k a $R_k \equiv (A_kD_k \,.\, B_kC_k)$ vztyčíme ku A_kD_k kolmice S_kE_o a R_kC_o a stanovíme jejich průsečíky E_o a C_o s afinní kružnicí k_o. Rovnoběžně se směrem afinity $s^c \equiv C_kC_o$ vedeme bodem E_o paprsek

s^E a určíme jeho průsečík E_k s průměrem elipsy S_kE_k rovnoběžným s tětivou $\overline{B_kC_k}$. Sdruženými průměry $\overline{S_kA_k}$ a $\overline{S_kE_k}$ je elipsa k_k jako kosoúhlý průmět opsané kružnice k^o trojúhelníku ABC určena. Protože poloměr kružnice vepsané k^v je poloviční poloměr kružnice k, je jejím kosoúhlým průmětem elipsa k_k^v homothetická ku k_k o středu homothetie v bodě S_k a poměru 1 : 2. V obr. rýsována nebyla.



Obr. 55.

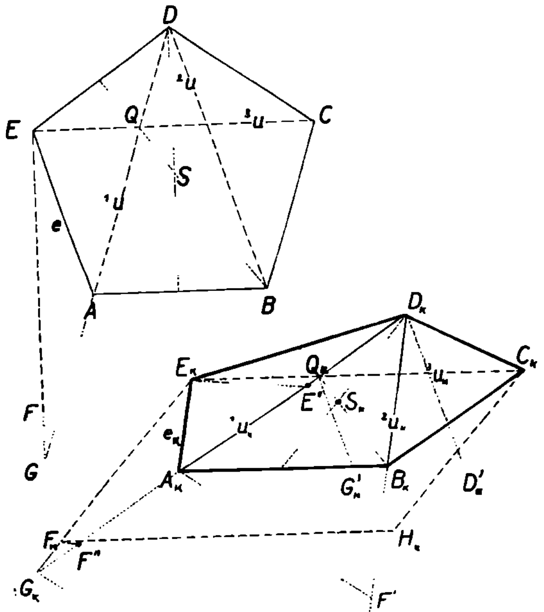
2. *Zobrazte v kosoúhlém promítání pravidelný šestiúhelník, jsou-li určeny kosoúhlé průměty vrcholů A_k, C_k, D_k.*

V pravidelném šestiúhelníku $AB \dots F$ tvoří vrcholy A, C, D, F obdélník, jehož strany AC a DF jsou úhlopříčkou $\overline{BE}$ půleny, při čemž také $\overline{SB}$ a $\overline{SE}$ jsou jimi půleny. Podle toho sestrojí si čtenář kosoúhlý průmět pravidelného šestiúhelníka $A_kB_kC_kD_kE_kF_k$ sám. Takový šestiúhelník $A_k \dots F_k$ vyvolá dojem pravidelného šestiúhelníka ležícího v nějaké rovině k nákresně nakloněné nebo kolmé.

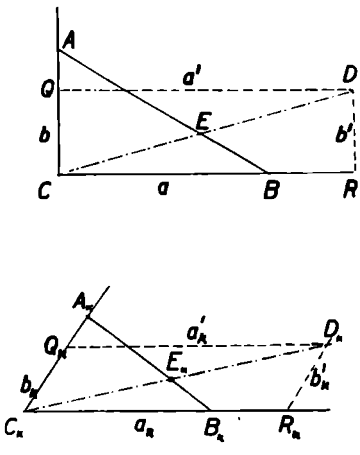
3. *Vrcholy A_k, B_k, D_k v nákresně jsou kosoúhlé průměty tří vrcholů pravidelného pětiúhelníka o straně AB. Dokreslete tento kosoúhlý průmět a zobrazte i kosoúhlý průmět čtverce, sestrojeného nad jednou úhlopříčkou pravidelného pětiúhelníka a v jeho rovině ležícího*! (Obr. 56.)

Zobrazíme-li pravidelný pětiúhelník, zjistíme, že dělicí poměr průsečíku Q dvou úhlopříček k vrcholům každé úhlopříčky je v každém pravidelném pětiúhelníku stejný a víme, že se kosoúhlým promítáním nemění. Stanovíme tedy na A_kD_k bod Q_k, aby $\dfrac{\overline{A_kQ_k}}{\overline{D_kQ_k}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{DQ}}$. Potom už vedeme bodem Q_k s přímkou A_kB_k rovnoběžku ${}^3\mu_k$ a bodem A_k rovnoběžku e_k s přímkou B_kD_k, jejich průsečík E_k je další vrchol kosoúhlého průmětu pravidelného pětiúhelníka. Podobně stanovíme C_k.

V pravidelném pětiúhelníku $A \ldots E$ sestrojíme nad $\overline{EC}$ čtverec $ECFH$ a stanovíme průsečík G strany EF s úhlopříčkou ${}^1\mu \equiv AD$. Na ${}^3\mu_k$ určíme bod G_k, aby jeho dělicí poměr $(A_kD_kG_k) = (ADG)$ a na spojnici $\overline{E_kG_k}$ bod F_k, aby $(E_kG_kF_k) = (EGF)$. Rovnoběžník $E_kC_kH_k$ a F_k je kosoúhlým průmětem čtverce spjatého s prav. pětiúhelníkem.



Obr 56.



Obr. 57.

Ve všech uvedených příkladech je patrné, že útvary, které jsme dokreslovali, jsou spjaty s danými podle podmínek plynoucích z kosoúhlého promítání. Takové soustavy bodů a přímek ležící v nějaké rovině jsou schopné volného kosoúhlého zobrazování. A lze pracovati i úlohy metrické.

4. *Trojúhelník $A_kB_kC_k$ v nákresně je kosoúhlým průmětem pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách $a = 5$ a $b = 3$. Stanovte kosoúhlý průmět bodu D, jenž má od jeho odvěsen vzdálenosti $\overline{Da} = 2$ a $\overline{Db} = 7$!* (Obr. 57.)

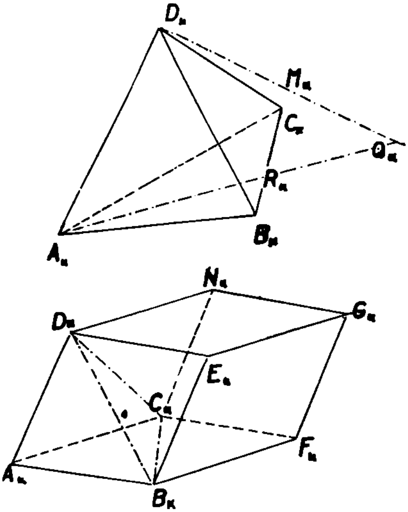
Sestrojíme opět pomocný pravoúhlý trojúhelník $a = 5$, $b = 3$ a v něm bod D. Jím vedeme rovnoběžky a' a b' s odvěsnami a a b a stanovíme dělicí poměry jejich průsečíků Q a R s prodlouženými odvěsnami b a a ke koncovým bodům odvěsen C a B resp. C a A. Jsou $\lambda_R = \frac{7}{2}$ a $\lambda_Q = -\frac{2}{1}$. Na C_kA_k stanovíme pak bod Q_k, aby $(C_kA_kQ_k) = -\frac{2}{1}$ a na C_kB_k bod R_k, aby $(C_kB_kR_k) = \frac{7}{2}$. Body Q_k a R_k vedeme rovnoběžky a_k' a b_k' s a_k a b_k a jejich průsečík je kosoúhlý průmět žádaného bodu D_k. Jak lze stanoviti bod D_k jinak? Bod D_k je jednoznačně určen, ať trojúhelník $A_kB_kC_k$ prodělává jakékoliv změny tvaru a velikosti.

12. Volný průmět útvarů prostorových.

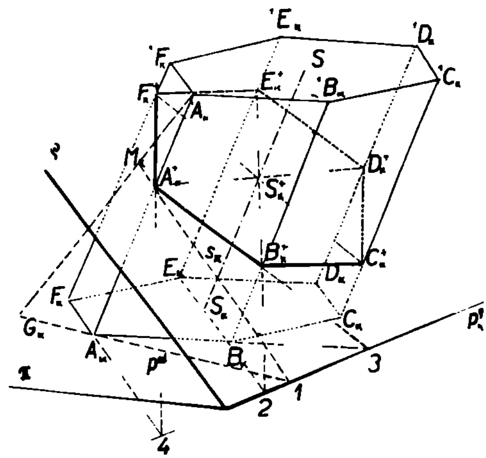
Nejjednodušším mnohostěnem jest čtyřstěn, jeho kosoúhlý průmět jest čtyřúhelník, jehož jednu úhlopříčku rýsujeme jako neviditelnou, čárkovaně. Změní-li se čtyřstěn, nebo promítací paprsek anebo průmětna, bude kosoúhlým průmětem čtyřstěnu opět čtyřúhelník se dvěma úhlopříčkami. Jest tedy i tato soustava čtyř bodů vhodná pro volné promítání, neboť čtyřúhelník v nákresně s oběma úhlopříčkami můžeme vždy považovati za kosoúhlý průmět nějakého čtyřstěnu. Z této soustavy lze odvoditi soustavy další. Zvolme na př. libovolný bod M mimo čtyřstěn (obr. 58a). Jeho sepětí se čtyřstěnem stanovíme na př. takto: Spojnice DM protne stěnu ABC v bodě Q a spojnice AQ hranu BC v bodě R. Dělicími poměry (BCR), (ARQ) a (DQM) je poloha bodu M ku čtyřstěnu určena. Zůstanou-li tyto dělicí poměry zachovány i ve volném průmětu, jest bod M_k věrným obrazem bodu M, ať čtyřúhelník $A_kB_kC_kD_k$ dozná jakýchkoliv změn.

V obr. 58b doplněny $\triangle A_kB_kD_k$, $\triangle A_kC_kD_k$ a $\triangle A_kB_kC_k$ na rovnoběžníky body E_k, F_k, N_k a $\triangle B_kE_kF_k$ bodem G_k na další a také tak $\triangle C_kN_kF_k$. Po vyrýsování stran $\overline{A_kC_k}$, $\overline{C_kF_k}$ a $\overline{H_kC_k}$ čárkovanými čarami lze považovati celou soustavu bodů a stran za kosoúhlý průmět rovnoběžnostěnu. Také tato nová soustava je schopná dalšího rozšiřování ve volném zobrazení.

Jest tedy možno volně zobrazovati útvary vzniklé spojováním bodů, protínáním přímek a vedením rovnoběžných rovin a přímek v prostoru. Při těchto konstrukcích v prostoru prokládáme vždy nejprve pomocnou rovinu, v ní vedeme pomocné přímky a řešíme spojování, protínání a rovnoběžnost. Jsou tedy i prostorové úlohy planimetrické, tak jako jsou jejich kosoúhlé průměty. Má-li býti pak kosoúhlý průmět těchto nových útvarů zcela určitý, je nutné v každém vyznačiti všechny pomocné roviny i přímky. Tak na př. v obr. 58a bod M není určen, nebude-li známá pomocná rovina σ a její průsečnice s s rovinou trojúhelníka ABC; rovina σ je určena přímkou AD a bodem M, průsečnice s body A a Q. Takto vyznačené kosoúhlé průměty pak nazýváme *úplnými* čili *spjatými*.



Obr. 58.



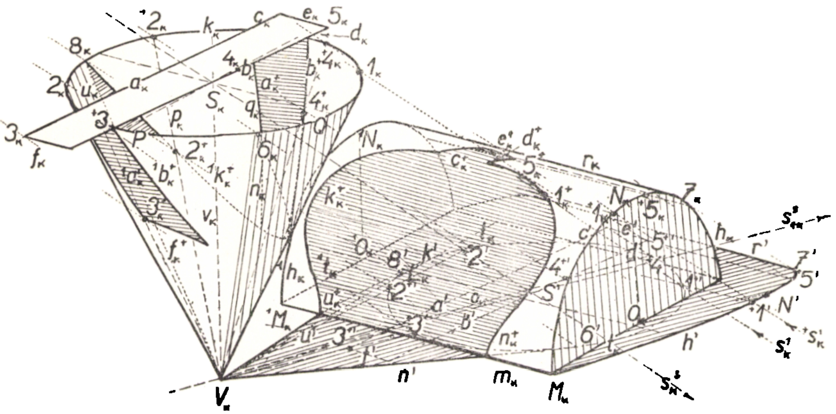
Obr. 59.

Poznámky: Při volném zobrazování pracujeme také průsečnici dvou rovin na základě věty, že průsečnice tří různých rovin jdou jedním bodem. K určení prostorových útvarů používáme také pomocných průmětů na nějakou rovinu, zpravidla půdorysnu a zobrazujeme vedle kosoúhlého průmětu i kosoúhlý půdorys.

Příklady: 1. *Ve volném promítání jest zobraziti průsek kosého hranolu rovinou!* (Obr. 59.)

Kosoúhlým průmětem hranolu jsou dva shodné mnohoúhelníky s rovnoběžnými stranami a n kosodélníků; získali bychom jej dokreslováním, jako jsme ze čtyřstěnu zobrazili rovnoběžnostěn. Kosoúhlým průmětem roviny bude stopa p_k^ϱ a bod M_k, který však musíme sepjati s hranolem, na př. tak, že jej položíme na přímku $\overline{{}^1AG}$, kde bod G je v podstavné rovině π, a je spjat s prvou podstavou a bod ${}^1A$ je vrchol druhé podstavy. Pak je s hranolem pevně spjata i celá rovina ϱ. Průsečíky A a G přímek $A{}^1A$ a ${}^1AM$ s podstavnou rovinou π prochází stopa p^α roviny $\alpha \equiv ({}^1AAM)$ a body M a $1 \equiv (p^\alpha \,.\, p^\varrho)$ průsečnice s rovin ϱ a α. Přímka s protne hranu ${}^1AA$ v bodě A^+, v jednom vrcholu průsečného obrazce. Zbývající vrcholy určíme perspektivní afinitou mezi obrazci $AB \ldots$ a $A^+B^+ \ldots$, ježto známe osu afinity p^ϱ a dvojici přiřazených bodů A a A^+. Na konstrukci se nic nezmění, ať je podstavný obrazec jakýkoliv mnohoúhelník, zůstane v podstatě táž, bude-li i křivkou, na příklad kružnicí a hranol kruhovým válcem.

2. *Zobrazte skupinu: Dutý rotační kužel s podstavou v horizontální rovině o poloměru* $r = 3$ *a výšce* $v = 7$, *na jehož podstavě je položená destička šířky* $š = 1{,}3$ *tak, že jedna její hrana jde středem podstavy, a rotační půlválec s osou v horizontální rovině, která jde vrcholem kužele, ve vzdálenosti* $\mu = 6$ *od vrcholu, o poloměru podstavy* $\varrho = 3$ *a výšce* $w = 7$! *Skupinu osvětlete rovnoběžnými paprsky*! (Obr. 60.)



Obr. 60.

Sestrojíme si libovolnou elipsu k_k a v ní dva sdružené průměry p_k a q_k. Každý rozdělíme na tři díly a získáváme měřítka m_p a m_q v těchto směrech. Na svislé přímce v_k volíme bod V_k a vzdálenost

$\overline{S_kV_k}$ udává 7 dílků měřítka ve směru v_k. Kosoúhlým průmětem vrcholu V a řídicí kružnicí k_a je určen kosoúhlý průmět dutého rotačního kužele. Vrcholem V_k vedeme rovnoběžku l_k s p_k a od V_k vyneseme na ní vzdálenost $u = 6$ v jednotkách měřítka m_p. Koncovým bodem L_k jde kosoúhlý průmět o_k osy válce o rovnoběžně s q_k. Na něj vyneseme výšku $w = 7$ v jednotkách měřítka m_q, koncovými body O_k a ${}^1O_k$ vedeme přímky t_k a ${}^1t_k$ rovnoběžně s p_k a vyneseme na ně délky $\overline{O_kM_k}$ a $\overline{{}^1O_k{}^1M_k} = \varrho = 3$ v jednotkách m_p v obou směrech. Na rovnoběžky O_kN_k a ${}^1O_k{}^1N_k$ v jednom směru délky $\overline{O_kN_k} = \overline{{}^1O_k{}^1N_k} = 3$ jednotky měřítka m_v. Ze sdružených průměrů $\overline{O_kM_k}$ a $\overline{O_kN_k}$ resp. $\overline{{}^1O_k{}^1M_k}$ a $\overline{{}^1O_k{}^1N_k}$ sestrojíme poloelipsy h_k a ${}^1h_k$ jako kosoúhlé průměty obou podstav válce. Kosoúhlý průmět válce je určen. Na podstavu kužele položíme destičku, jejíž hrana b_q jde středem kužele. Bodem V_k vedeme libovolnou přímku b_k, ke směru b_k stanovíme sdružený průměr g_k elipsy k_k, ten rozdělíme na tři díly, čímž získáme měřítko m_g. V tomto směru vyneseme 1,3 délky tohoto měřítka a koncovým bodem této délky vedeme rovnoběžku a_k s b_k. Strany c_k a f_k jsou rovnoběžné s g_k a skupina je zobrazena.

Osvětlení při volbě s_k^s a s_{1k}^s si provede podle obrázku laskavý čtenář sám.

3. Podobným způsobem, při němž bylo nutno různorodé útvary tak zobraziti, aby byly rovinami a přímkami mezi sebou spjaty, byly rýsovány všechny názorné obrázky celého tohoto pojednání. K zvýšení názornosti, byly roviny ohraničovány rovnoběžníky a často bylo dbáno i viditelnosti, jako by tyto ohraničené roviny byly neprůhledné.

OBSAH

Ferdinand Veselý:

KOSOÚHLÉ PROMÍTÁNÍ

Knižnice Brána k vědění, sv. 15

Šéfredaktor Miroslav Střída. Odborný redaktor Miroslav Fuka. Redaktor knižnice Vítězslav Jozífek. Výtvarný redaktor Miloš Hrbas. Plán. skupina 301 03/130, čís. pov. výměru 46913/50/III, čís. publ. 47. Sazba 27. IX. 1950, tisk 27. XII. 1950. První vydání. Náklad 5500 výtisků. Stran 72, obrazců 60. Počet plán. archů 4,50, autorských archů 4,01, vydavatelských archů 4,12. Papír: skupina 221-07, formát 61/86, gramáž 80 g. Vytiskly Středočeské tiskárny n. p., závod 07 (Prometheus), Praha VIII. Tištěno ze sazby písmem Extended. Všeobecná daň 1%. Cena brož. výtisku 22 Kčs.