

Josef Matušů; Josef Novák

Die Idee der Lienhardschen Interpolationsmethode bei der Lösung eines Interpolationsproblems

*Aplikace matematiky*, Vol. 21 (1976), No. 6, 434–443

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103668>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1976

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

DIE IDEE DER LIENHARDSCHEN INTERPOLATIONSMETHODE  
BEI DER LÖSUNG EINES INTERPOLATIONSPROBLEMS

JOSEF MATUŠŮ, JOSEF NOVÁK  
(Eingegangen 26. November 1975)

Bei der rechnergestützten Bearbeitung eines Strömungskanals, die für ein Industrieunternehmen durchgeführt wurde, musste ein Interpolationsproblem gelöst werden, welches mit vorgegebenen Stützpunkten und Stütztangenten arbeitet (siehe [1]). Dieses Problem ist dann später in dem Sinne erweitert worden, dass in den gemeinsamen Stützpunkten der benachbarten Interpolationsbögen die Gleichheit der  $q$ -ten Ableitungen ( $q = 2, 3, \dots, Q$ ) gefordert wurde. In dieser Arbeit wird dieses Problem gelöst. Die Lösung stützt sich auf einer Verallgemeinerung der Lienhardschen Interpolationsmethode (siehe [2]).

I. MATHEMATISCHE FORMULIERUNG DES PROBLEMS

Sei  $Q > 1$  ganzzahlig. Ferner sei  $n \geq 3$  ganzzahlig. Im Raum  $\mathbf{R}^m$  ( $m > 1$ ) seien  $n$  verschiedene Punkte  $P_i = x_j^{(i)}$  mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{v}_i = v_j^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ ) gegeben. Wir versuchen Polynome der Variablen  $s \in \langle -1, 1 \rangle$

$$(1) \quad P_{x_j}^{(i)}(s) = \sum_{k=0}^K a_{jk}^{(i)} s^k \quad (i = 1, \dots, n - 1)$$

derart zu bestimmen, dass

$$(2) \quad P_{x_j}^{(i)}(-1) = x_j^{(i)}, \quad P_{x_j}^{(i)}(1) = x_j^{(i+1)},$$

$$(3) \quad \frac{dP_{x_j}^{(i)}}{ds}(-1) = k_i v_j^{(i)}, \quad \frac{dP_{x_j}^{(i)}}{ds}(1) = m_i v_j^{(i+1)},$$

$$\frac{d^q P_{x_j}^{(i)}}{ds^q}(1) = \frac{d^q P_{x_j}^{(i+1)}}{ds^q}(-1)$$

( $q = 2, 3, \dots, Q$ ), wobei  $k_i, m_i$  gewisse positive Zahlen sind; sie werden wie in [1] gewählt. Damit (4) erfüllt ist, müssen die Werte der zweiten bis  $Q$ -ten Ableitung der

Funktion  $P_{x_j}^{(i)}$  in den Punkten  $P_i, P_{i+1}$  gegeben sein:

$$(5) \quad \frac{d^2 P_{x_j}^{(i)}}{ds^2}(-1) = x_j^{n(i)} = x_j^{(2)(i)}, \quad \frac{d^2 P_{x_j}^{(i)}}{ds^2}(1) = x_j^{n(i+1)} = x_j^{(2)(i+1)},$$

$$\frac{d^3 P_{x_j}^{(i)}}{ds^3}(-1) = x_j^{m(i)} = x_j^{(3)(i)}, \quad \frac{d^3 P_{x_j}^{(i)}}{ds^3}(1) = x_j^{m(i+1)} = x_j^{(3)(i+1)},$$

.....

$$\frac{d^Q P_{x_j}^{(i)}}{ds^Q}(-1) = x_j^{(Q)(i)}, \quad \frac{d^Q P_{x_j}^{(i)}}{ds^Q}(1) = x_j^{(Q)(i+1)}.$$

Die Bestimmung dieser Werte erfolgt später (siehe Abs. II). Nach (2), (3) und (5) sind für jedes Polynom (1) insgesamt  $2Q + 2$  Bestimmungsbedingungen gegeben, durch die  $P_{x_j}^{(i)}$  eindeutig als Polynom vom Grade  $K = 2Q + 1$  bestimmt ist:

$$(6) \quad P_{x_j}^{(i)}(s) = \sum_{k=0}^{2Q+1} a_{jk}^{(i)} s^k.$$

Die  $q$ -te Ableitung von  $P_{x_j}^{(i)}$  ist

$$(7) \quad \frac{d^q P_{x_j}^{(i)}}{ds^q}(s) = \sum_{k=q}^{2Q+1} k(k-1) \dots (k-q+1) a_{jk}^{(i)} s^{k-q}.$$

Wenn in (6), (7) die Werte  $s = -1, 1$  eingesetzt werden, dann erhalten wir, bei Berücksichtigung von (2), (3), (5), das folgende lineare Gleichungssystem von  $2Q + 2$  Gleichungen für die  $2Q + 2$  unbekanntenen Koeffizienten  $a_{jk}^{(i)}$  des Polynoms (6):

$$(8) \quad \sum_{k=0}^{2Q+1} (-1)^k a_{jk}^{(i)} = x_j^{(i)},$$

$$\sum_{k=1}^{2Q+1} (-1)^{k-1} k a_{jk}^{(i)} = k_i v_j^{(i)},$$

$$\sum_{k=2}^{2Q+1} (-1)^{k-2} k(k-1) a_{jk}^{(i)} = x_j^{n(i)},$$

.....

$$\sum_{k=Q}^{2Q+1} (-1)^{k-Q} k(k-1) \dots (k-Q+1) a_{jk}^{(i)} = x_j^{(Q)(i)},$$

$$\sum_{k=0}^{2Q+1} a_{jk}^{(i)} = x_j^{(i+1)},$$

$$\sum_{k=1}^{2Q+1} k a_{jk}^{(i)} = m_i v_j^{(i+1)},$$



## II. BESTIMMUNG DER WERTE $x_j^{(i)}, \dots, x_j^{(Q)(i)}$

Die Werte der zweiten bis  $Q$ -ten Ableitung in den Punkten  $P_i, P_{i+1}$  bestimmen wir folgendermassen. Nach Abb. 1 ist durch die Punkte  $(2h, x_j^{(i+h)})$  ( $-Q + 1 \leq h \leq Q - 1, h$  ganzzahlig) eindeutig ein Polynom

$$(12) \quad R_{x_j}^{(i)}(s) = \sum_{k=0}^{4Q-3} b_{jk}^{(i)} s^k \quad (s \in \langle -2Q + 2, 2Q - 2 \rangle)$$

derart bestimmt, dass  $dR_{x_j}^{(i)}(h)/ds = v_j^{(i+h)}$ . Wir setzen dann

$$(13) \quad \begin{aligned} x_j^{(i)} &= R_{x_j}^{(i)}(0) = 2b_{j2}^{(i)}, \quad x_j^{(i)} = R_{x_j}^{(i)}(0) = 6b_{j3}^{(i)}, \dots, x_j^{(Q)(i)} = \\ &= R_{x_j}^{(Q)(i)}(0) = Q(Q-1) \dots 3 \cdot 2 b_{jQ}^{(i)}. \end{aligned}$$

Da nun jeder Koeffizient des Polynoms (12) als lineare Kombination der Werte  $x_j^{(i-Q+1)}, v_j^{(i-Q+1)}, \dots, x_j^{(i+Q-1)}, v_j^{(i+Q-1)}$  ausgedrückt werden kann, ist auch jede von den Ableitungen (13) eine bestimmte Linearkombination dieser Werte. Es existiert deshalb eine Matrix  $\mathbf{B}$  vom Typ  $(Q-1, 4Q-2)$  derart, dass (siehe (10))

$$(14) \quad \mathbf{x}_{ij}^* = \|x_j^{(i-Q+1)}, v_j^{(i-Q+1)}, \dots, x_j^{(i+Q-1)}, v_j^{(i+Q-1)}\| \circ \mathbf{B}^t.$$

Es ist dann (siehe (9), (10))

$$(15) \quad \begin{aligned} &\|x_j^{(i)}, v_j^{(i)}, \mathbf{x}_{ij}^*\| = \\ &= \|x_j^{(i-Q+1)}, v_j^{(i-Q+1)}, \dots, x_j^{(i+Q-1)}, v_j^{(i+Q-1)}, x_j^{(i+Q)}, v_j^{(i+Q)}\| \circ \\ &\quad \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 2Q-1 & 1 & 0 \\ 2Q & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \end{aligned}$$

Wird in (15)  $i+1$  statt  $i$  eingesetzt, dann erhalten wir

$$(16) \quad \begin{aligned} &\|x_j^{(i+1)}, v_j^{(i+1)}, \mathbf{x}_{i+1,j}^*\| = \\ &= \|x_j^{(i-Q+1)}, v_j^{(i-Q+1)}, \dots, x_j^{(i+Q-1)}, v_j^{(i+Q-1)}, x_j^{(i+Q)}, v_j^{(i+Q)}\| \circ \end{aligned}$$





Zur Bestimmung der Matrix  $\mathbf{B}$  vom Typ (1,6) legen wir durch die Punkte  $(2h, x_j^{(i+h)})$ ,  $(-1 \leq h \leq 1, h \text{ ganzzahlig})$  das Polynom (12) derart, dass  $dR_{x_j^{(i)}}(h)/ds = v_j^{(i+h)}$ , und setzen nach (13)

$$x_j^{n(i)} = R_{x_j^{(i)}}(0) = 2b_{j2}^{(i)}.$$

Wir erhalten (siehe (14))

$$\mathbf{x}_{ij}^* = \left\| x_j^{(i-1)}, v_j^{(i-1)}, x_j^{(i)}, v_j^{(i)}, x_j^{(i+1)}, v_j^{(i+1)} \right\| \circ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4} \left\| 2, 1, -4, 0, 2, -1 \right\|.$$

Dann ist (siehe (19))

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{A}_2^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & k_i & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & m_i & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

und die Formel (18) im Endresultat (bei noch vorgenommener Multiplikation mit der Zahl 64) ergibt

$$(20) \quad 64\mathbf{a}'_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 30 & 20k_i + 1 & 30 & -20m_i - 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -54 & -28k_i + 1 & 54 & -28m_i + 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -24k_i - 2 & 4 & 24m_i + 2 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 28 & 40k_i - 2 & -28 & 40m_i - 2 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 4k_i + 1 & -2 & -4m_i - 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -6 & -12k_i + 1 & 6 & -12m_i + 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_j^{(i-1)} \\ v_j^{(i-1)} \\ x_j^{(i)} \\ v_j^{(i)} \\ x_j^{(i+1)} \\ v_j^{(i+1)} \\ x_j^{(i+2)} \\ v_j^{(i+2)} \end{pmatrix}.$$

Die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  werden zu viert gruppiert (siehe dazu [2]).

### Beispiel

In der Ebene  $\mathbf{R}^2$  betrachten wir die Punkte  $P_1 = (0,0)$ ,  $P_2 = (10,0)$ ,  $P_3 = (15,0)$ ,  $P_4 = (11,1)$  mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{v}_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (-1,0)$ . Dann ist (siehe die entsprechenden Formeln in [1])  $k_1 = 5$ ,  $m_1 = 5\sqrt{3}$ ;  $k_2 = m_2 = 5$ ;  $k_3 = 2$ ,  $m_3 = 4 - \sqrt{3}$ . Nach (20) folgt dann:

$$\begin{aligned}
 \widehat{P_1 P_2} \dots & P_{x_1}^{(1)}(s) = \frac{1}{128}(501 + \sqrt{3} + [541 + \sqrt{3}]s + 2[59 - s^2\sqrt{3}] + \\
 & \quad + 2[99 - \sqrt{3}]s^3 + [21 + \sqrt{3}]s^4 + [-99 + \sqrt{3}]s^5), \\
 & P_{x_2}^{(1)}(s) = \frac{1}{128}(-1 + 201\sqrt{3} + [-1 + \sqrt{3}]s + 2[1 - 121\sqrt{3}]s^2 + \\
 & \quad + 2[1 - \sqrt{3}]s^3 + [-1 + 41\sqrt{3}]s^4 + [-1 + \sqrt{3}]s^5), \\
 \widehat{P_2 P_3} \dots & P_{x_1}^{(2)}(s) = \frac{1}{128}(1547 + 202\sqrt{3} + 585s + 2[53 - 122\sqrt{3}]s^2 - \\
 & \quad - 370s^3 + [-53 + 42\sqrt{3}]s^4 + 105s^5), \\
 & P_{x_2}^{(2)}(s) = \frac{1}{128}-(198 + \sqrt{3} + [4 - \sqrt{3}]s + 2[118 - \sqrt{3}]s^2 + \\
 & \quad + 2[-4 + \sqrt{3}]s^3 + [-38 + \sqrt{3}]s^4 + [4 - \sqrt{3}]s^5), \\
 \widehat{P_3 P_4} \dots & P_{x_1}^{(3)}(s) = \frac{1}{128}(1822 - 79\sqrt{3} + [-190 - \sqrt{3}]s + 2[-94 + 47\sqrt{3}]s^2 + \\
 & \quad + 2[-66 + \sqrt{3}]s^3 + [30 - 15\sqrt{3}]s^4 + [66 - \sqrt{3}]s^5), \\
 & P_{x_2}^{(3)}(s) = \frac{1}{128}(99 + 53s - 38s^2 + 22s^2 + 3s^4 - 11s^5).
 \end{aligned}$$

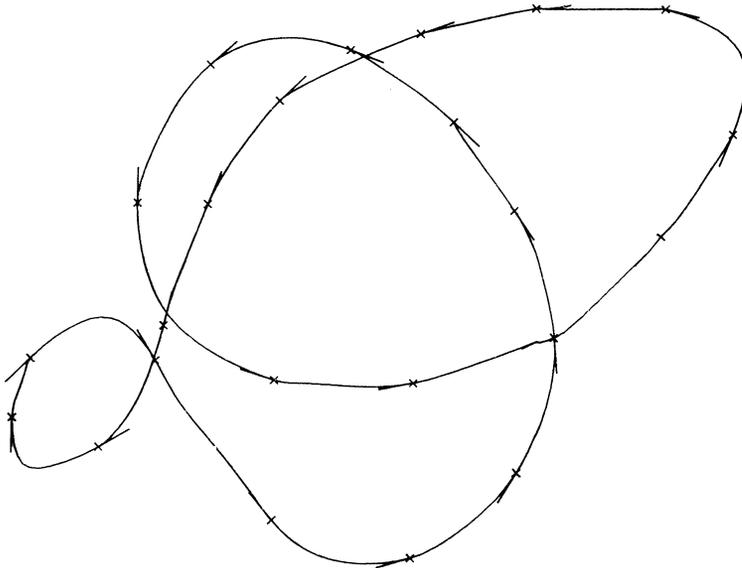


Abb. 2

#### IV. EINIGE BEISPIELE

Die oben entwickelte Interpolationsmethode wird für die Computerzeichnung von Kurven benutzt.

In Abb. 2 ist eine ebene abgeschlossene Interpolationskurve gezeichnet, die durch 24 Stützpunkte mit dazu vorgegebenen Stütztangenten hindurchgeht. Dasselbe Beispiel ist in [1] gezeichnet. Der Vergleich zeigt, dass durch weitere Forderungen (sich (4)) in gewissen Teilen des Kurvenverlaufs eine „Verschlechterung“ eintreten kann; in unserem Fall wird deshalb auch mit Polynomen höheren Grades gearbeitet.

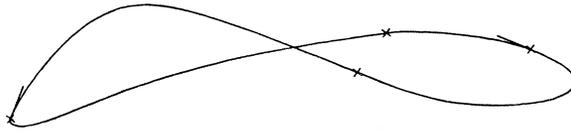


Abb. 3

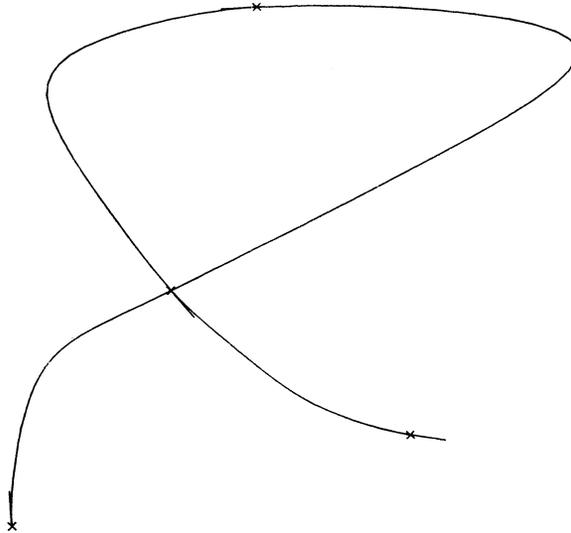


Abb. 4

In Abb. 3 handelt es sich wieder um eine ebene abgeschlossene Interpolationskurve. Hier geht es um 4 Stützpunkte mit dazu vorgegebenen Stütztangenten.

In Abb. 4 ist eine ebene nichtabgeschlossene Interpolationskurve gezeichnet.

In Abb. 5 ist eine in Axonometrie dargestellte räumliche nichtabgeschlossene Interpolationskurve gezeichnet, die durch 3 Stützpunkte mit dazu vorgegebenen Stütztangenten hindurchgeht. Auch dieses Beispiel ist in [1] gezeichnet.

Schliesslich ist in Abb. 6 eine wieder in Axonometrie dargestellte räumliche nicht-abgeschlossene Interpolationskurve gezeichnet, die durch 8 Stützpunkte mit dazu vorgegebenen Stütztangenten hindurchgeht.

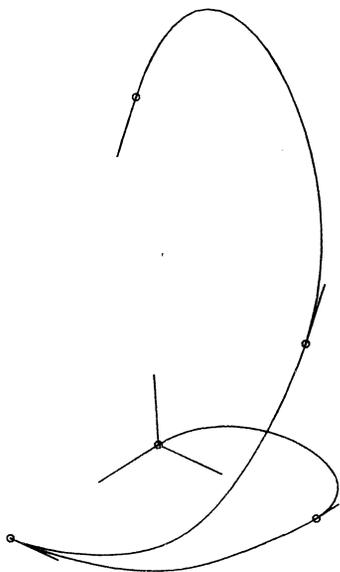


Abb: 5

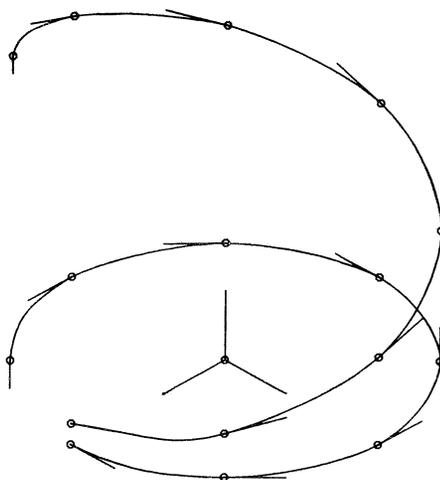


Abb. 6

#### Literaturverzeichnis

- [1] J. Matušů, J. Novák: Über ein Interpolationsproblem, Applikace matematiky 2, 1976.  
 [2] J. Matušů: Lienhardova interpolační metoda a některá její zobecnění, Acta polytechnica IV, 1976.

#### Souhrn

### MYŠLENKA LIENHARDOVY INTERPOLAČNÍ METODY PŘI ŘEŠENÍ JEDNOHO INTERPOLAČNÍHO PROBLÉMU

JOSEF MATUŠŮ, JOSEF NOVÁK

Práce pojednává o jednom interpolačním problému, v němž se pracuje s opěrnými body a opěrnými tečnami. Podobný problém byl řešen v práci [1]. Zpracování tohoto problému se od dřívějšího liší tím, že se teď požaduje rovnost  $q$ -tých derivací ( $q = 2, 3, \dots, Q$ ) ve společných opěrných bodech dvou sousedních interpolačních oblouků. Jsou uvedeny ukázky počítačového kreslení takovýchto interpolačních křivek.

Adressen der Autoren: Doc. Dr. Josef Matušů, CSc., ČVUT, Karlovo nám. 13, 120 00 Praha 2;  
 Dr. Josef Novák, CSc., ČVUT, Horská 4, 120 00 Praha 2.