Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Navrátil

Poznámka k větě o substituci pro Riemannův integrál

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 106 (1981), No. 1, 79--83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108279

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1981

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 106 (1981), Praha

POZNÁMKA K VĚTĚ O SUBSTITUCI PRO RIEMANNŮV INTEGRÁL

JIŘÍ NAVRÁTIL, Praha

(Došlo dne 4. prosince 1978)

V tomto článku je uveden elementární důkaz (neužívající dokonce žádného kriteria existence Riemannova integrálu) následující věty o substituci pro Riemannův integrál:

Věta 1. *Nechť funkce g má Riemannův integrál v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť $G(x) = \int_a^x g + K$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, kde K je nějaké pevně zvolené reálné číslo. Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle c, d\rangle = G(\langle a, b\rangle)$. Potom platí:*
Existuje-li aspoň jeden z integrálů (Riemannových)

$$\int_a^b (f \circ G)\, g\,, \tag{1}$$

$$\int_c^d f\,, \tag{2}$$

potom existuje i druhý a platí rovnost

$$\int_a^b (f \circ G)\, g = \int_{G(a)}^{G(b)} f\,. \tag{3}$$

V článku [2], popř. [1] je věta dokázána za předpokladu, že existuje integrál (2). V článku [3] je pomocí výsledku [2] elementárně dokázána výše uvedená věta použitím oscilačního kriteria existence Riemannova integrálu (viz [4], str. 217–218).

Všechny integrály v tomto článku se rozumí ve smyslu Riemannově.

Nejprve rozšíříme obvyklou definici horního a dolního integrálu.

Definice. Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$. Potom definujeme

$$\overline{\int_b^a} f = -\overline{\int_a^b} f\,.$$

Nechť funkce f je definovaná v bodě c. Potom definujeme

$$\overline{\int_c^c} f = 0 .$$

Analogicky rozšiřujeme definici dolního Riemannova integrálu.

Poznámka 1. Nechť funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom indukcí snadno dokážeme, že pro libovolná $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \langle a, b\rangle$ platí

$$\overline{\int_{x_0}^{x_n}} f = \sum_{k=1}^{n} \overline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f$$

a analogický vztah pro dolní integrál.

K důkazu věty 1 použijeme následující lemma:

Lemma. *Nechť jsou splněny předpoklady věty* 1 *a nechť funkce G je navíc na intervalu* $\langle a, b\rangle$ *ryze monotonní. Potom platí tvrzení věty* 1.

Důkaz. Nechť jsou splněny předpoklady věty 1 a nechť funkce G je na intervalu $\langle a, b\rangle$ např. rostoucí. Zvolme $M > 0$ tak, že $|f(x)| < M$ pro všechna $x \in G(\langle a, b\rangle)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že platí

$$S(g, D) - s(g, D) < \frac{\varepsilon}{2M}, \tag{4}$$

$$S((f \circ G)\, g, D) - \overline{\int_a^b} (f \circ G)\, g < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5}$$

$$S(f, G(D)) - \overline{\int_{G(a)}^{G(b)}} f < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6}$$

neboť G je spojitá a rostoucí funkce na $\langle a, b\rangle$.

Nechť $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, kde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Označme $I_k = \langle x_{k-1}, x_k\rangle$, $J_k = \langle G(x_{k-1}), G(x_k)\rangle$. Nechť $\xi_k \in I_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Potom platí:

$$|f(G(\xi_k))\,(G(x_k) - G(x_{k-1})) - f(G(\xi_k))\, g(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})| \leqq$$
$$\leqq M(\sup_{\xi \in I_k} g(\xi) - \inf_{\xi \in I_k} g(\xi))\,(x_k - x_{k-1}),$$

takže

$$|\sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi \in I_k} (f(G(\xi)\,(G(x_k) - G(x_{k-1})))) - \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi \in I_k} (f(G(\xi))\, g(\xi)\,(x_k - x_{k-1}))| \leqq$$

$$\leqq M(S(g, D) - s(g, D)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Podle poznámky 1 je dále

$$(7) \qquad \overline{\int}_{G(a)}^{G(b)} f = \sum_{k=1}^{n} \overline{\int}_{G(x_{k-1})}^{G(x_k)} f \leqq \sum_{k=1}^{n} \sup_{\tau \in J_k} \left(f(\tau)\left(G(x_k) - G(x_{k-1})\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi \in I_k} \left(f(G(\xi))\left(G(x_k) - G(x_{k-1})\right)\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi \in I_k} \left(f(G(\xi))\, g(\xi)\left(x_k - x_{k-1}\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= S((f \circ G)\, g, D) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int}_{a}^{b} (f \circ G)\, g + \varepsilon .$$

Obdobně dostáváme odhad

$$(8) \qquad \overline{\int}_{a}^{b} (f \circ G)\, g \leqq \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi \in I_k} \left(f(G(\xi))\left(G(x_k) - G(x_{k-1})\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sup_{\tau \in J_k} \left(f(\tau)\left(G(x_k) - G(x_{k-1})\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2} = S(f, G(D)) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int}_{G(a)}^{G(b)} f + \varepsilon ,$$

neboť funkce G je na $\langle a, b \rangle$ spojitá a rostoucí.

Z nerovností (7) a (8) dostáváme

$$\overline{\int}_{G(a)}^{G(b)} f = \overline{\int}_{a}^{b} (f \circ G)\, g ;$$

obdobně dokážeme rovnost dolních integrálů. Odtud plyne tvrzení lemmatu.

Poznámka 2. Metodou, použitou při důkazu lemmatu, lze dokonce dokázat toto tvrzení:

Nechť jsou splněny předpoklady věty 1 *a nechť existuje integrál* (1). *Potom existuje integrál* $\int_{G(a)}^{G(b)} f$ *a platí rovnost* (3).

Stačí si totiž uvědomit, že při důkazu nerovnosti (7) jsme nikde nepoužili nerovnost (6) a že nerovnost

$$\sum_{k=1}^{n} \sup_{\tau \in J_k} \left(f(\tau)\left(G(x_k) - G(x_{k-1})\right)\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi \in I_k} \left(f(G(\xi))\left(G(x_k) - G(x_{k-1})\right)\right)$$

platí i bez předpokladu monotonie funkce G.

Platí tedy za uvedených předpokladů

$$\overline{\int}_{G(a)}^{G(b)} f \leqq \int_{a}^{b} (f \circ G)\, g .$$

Obdobně dokážeme nerovnost

$$\overline{\int}_{G(a)}^{G(b)} f \geqq \int_{a}^{b} (f \circ G)\, g$$

a analogické nerovnosti pro dolní integrál. Tedy existuje integrál $\int_{G(a)}^{G(b)} f$ a platí rovnost (3).

Důkaz věty 1. Nechť jsou splněny předpoklady věty 1. Zvolme $M > b - a$ tak, že $|g(x)| < M$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$, $|f(x)| < M$ pro všechna $x \in G(\langle a, b\rangle)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a = x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = b$, takové, že $S(g, D) - s(g, D) < \varepsilon^2$. Označme $A_0 = \{k \in N; 1 \leqq k \leqq n\}$, $A_1 = \{k \in A_0; \sup_{t \in I_k} g(t) - \inf_{t \in I_k} g(t) < \varepsilon\}$, $A_2 = \{k \in A_1; \inf_{t \in I_k} |g(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon\}$, $A_3 = A_0 - A_1$, $A_4 = A_1 - A_2$, kde $I_k = \langle x_{k-1}, x_k\rangle$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$. Dále označme

$$R_k = \left| \overline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} (f \circ G)\, g - \overline{\int_{G(x_{k-1})}^{G(x_k)}} f \right| .$$

Potom platí

$$\sum_{k \in A_3} (x_k - x_{k-1}) \leqq \frac{1}{\varepsilon} (S(g, D) - s(g, D)) < \varepsilon ,$$

takže

$$\sum_{k \in A_3} R_k < \varepsilon M^2 + M \sum_{k \in A_3} |G(x_k) - G(x_{k-1})| \leqq \varepsilon M^2 + M^2 \sum_{k \in A_3} (x_k - x_{k-1}) < 2\varepsilon M^2 .$$

Dále pro $k \in A_2$ platí $\sup_{t \in I_k} |g(t)| < \frac{3}{2}\varepsilon$, takže

$$\sum_{k \in A_2} R_k < \tfrac{3}{2}\varepsilon M(b - a) + M \sum_{k \in A_2} |G(x_k) - G(x_{k-1})| \leqq$$

$$\leqq \tfrac{3}{2}\varepsilon M(b - a) + \tfrac{3}{2}\varepsilon M \sum_{k \in A_2} (x_k - x_{k-1}) \leqq 3\varepsilon M(b - a) < 3\varepsilon M^2 .$$

Nechť existuje aspoň jeden z integrálů (1) a (2). Pro $k \in A_4$ je buď $g(t) \geqq \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ pro všechna $t \in I_k$, nebo $g(t) \leqq -\frac{1}{2}\varepsilon < 0$ pro všechna $t \in I_k$, tedy podle lemmatu platí $\sum_{k \in A_4} R_k = 0$; tedy

$$\left| \overline{\int_a^b} (f \circ G)\, g - \overline{\int_{G(a)}^{G(b)}} f \right| \leqq \sum_{k \in A_0} R_k < 5\varepsilon M^2 ,$$

takže

$$\overline{\int_a^b} (f \circ G)\, g = \overline{\int_{G(a)}^{G(b)}} f .$$

Obdobně dokážeme rovnost dolních integrálů; platí tedy rovnost (3) a existuje integrál (1) a $\int_{G(a)}^{G(b)} f$.

Existenci integrálu (2) dostaneme použitím právě dokázané části věty 1 na interval $\langle a_1, b_1\rangle$ místo $\langle a, b\rangle$, kde $a_1, b_1 \in \langle a, b\rangle$, $a_1 < b_1$ volíme tak, aby $G(a_1) \leqq \leqq G(x) \leqq G(b_1)$, resp. $G(b_1) \leqq G(x) \leqq G(a_1)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

Literatura

[1] *H. Kestelman:* Change of Variable in Riemann Integration, Math. Gazette *45* (1961), 17—23.

[2] *Roy O. Davies:* An Elementary Proof of the Theorem on Change of Variable in Riemann Integration, Math. Gazette *45* (1961), 23—25.

[3] *D. Preiss, J. Uher:* Poznámka k větě o substituci pro Riemannův integrál, Časopis pro pěstování matematiky *95* (1968), 345—347.

[4] *K. Petr:* Počet integrální, Praha 1931.

Adresa autora: 186 00 Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83 (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

Summary

NOTE ON THE THEOREM ON CHANGE OF VARIABLE IN RIEMANN INTEGRAL

JIŘÍ NAVRÁTIL, Praha

In the paper the following theorem is proved using only elementary properties of Riemann integral:

Let g be a Riemann integrable function on $\langle a, b\rangle$. *Let* $G(x) = \int_a^x g + K$ *for all* $x \in \langle a, b\rangle$, *where K is a fixed real number. Let f be a bounded function on* $\langle c, d\rangle = G(\langle a, b\rangle)$. *Then, if either of the Riemann integrals* $\int_a^b (f \circ G)\, g$, $\int_c^d f$ *exists, there exists also the latter and* $\int_a^b (f \circ G)\, g = \int_{G(a)}^{G(b)} f$.