Časopis pro pěstování matematiky

Ludvík Janoš

Vlastnosti Zassenhausovy konstrukce v grupách a svazech

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 88 (1963), No. 2, 246--249

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/108734

*Literatura*

[1] *G. Pickert*: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
[2] *A. M. Gleason*: Finite Fano planes. Am. J. Math. *78* (1956), 797—807.
[3] *N. S. Mendelsohn*: Non-desarguesian projective plane geometries which satisfy the harmonic point axiom. Can. J. Math. *8* (1956), 532—562.
[4] *A. Zaddach*: Über Anti-Fano-Ebenen. Math. Zeitschr. *65* (1956), 353—388.
[5] *K. Schütte*: Schliessungssätze für orthogonale Abbildungen euklidischer Ebenen. Math. Ann. *132* (1957), 314—317.
[6] *V. Havel*: Eine Bemerkung zum Staudtschen Satz in der Moufang-Ebene. Czech. Math. J. *7* (1957), 314—317.
[7] *V. Havel*: Poznámka o semihomomorfismech alternativních okruhů. Mat.-fyz. čas. *8* (1957), 3—6.
[8] *G. Pickert*: Die Assoziativität der Multiplikationen und Additionen in einer projektiven Ebene. Dal Convegno Internazionale Reticoli e Geometrie Proiettive, Palermo-Messina 1957, 1—11.


## VLASTNOSTI ZASSENHAUSOVY KONSTRUKCE V GRUPÁCH A SVAZECH

(Vlastní referát LUDVÍKA JANOŠE o přednášce konané dne 3. 12. 1962 na matematicko-fysikální fakultě KU)

Hlavním výsledkem sdělení je důkaz věty:

*K tomu, aby Zassenhausova konstrukce nevedla k vlastnímu zjemnění daných dvou normálních řetězců v grupě je nutné a stačí, aby řetězce byly zdola jednoduše podobné.*

Budiž $S$ svaz, jeho uspořádání resp. průsek resp. spojení budeme psát $a \leqq b$ resp. $a \wedge b$ resp. $a \vee b$; $a < b \Leftrightarrow a \leqq b,\ a \neq b$. Jestliže je $a \geqq b$, pak pod kvocientem $a/b$ rozumíme množinu definovanou takto: $x \in a/b \Leftrightarrow a \geqq x \geqq b$. *Dolní přímou* resp. *horní přímou* resp. *dolní jednoduchou* resp. *horní jednoduchou* resp. *dolní speciální jednoduchou* resp. *horní speciální jednoduchou podobnost kvocientů* definujeme takto:

$$a_1/a_2 \underset{d}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_2 \vee b_1 = a_1;\ a_2 \wedge b_1 = b_2\,,$$

$$a_1/a_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow b_1/b_2 \underset{d}{\sim} a_1/a_2\,,$$

$$a_1/a_2 \underset{j}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_1/a_2 \underset{d}{\sim} u_1/u_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2 \text{ při vhodném } u_1/u_2\,,$$

$$a_1/a_2 \overset{j}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_1/a_2 \overset{d}{\sim} u_1/u_2 \underset{d}{\sim} b_1/b_2\,,$$

$$a_1/a_2 \underset{r}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_1/a_2 \underset{d}{\sim} a_1 \wedge b_1/a_2 \wedge b_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2\,,$$

$$a_1/a_2 \overset{r}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_1/a_2 \overset{d}{\sim} a_1 \vee b_1/a_2 \vee b_2 \underset{d}{\sim} b_1/b_2\,.$$

Budiž $a_1/a_2 \underset{d}{\sim} u_1/u_2 \overset{d}{\sim} b_1/b_2$. *Regulárním zobrazením* této podobnosti rozumíme zobrazení $a_1/a_2$ do $b_1/b_2$ definované takto:

$$x \in a_1/a_2\,, \quad x \to (x \wedge u_1) \vee b_2 \in b_1/b_2\,.$$

Buďtež dány dva řetězce délky $r$ resp. $s$ mezi prvky $a > b$:

$$a = a_0 > a_1 > a_2 \ldots > a_r = b\,, \tag{1}$$

$$a = b_0 > b_1 > b_2 \ldots > b_s = b\,. \tag{2}$$

*Dolní Zassenhausovo zjemnění řetězce* (1) řetězcem (2) je řetězec sestavený z prvků $a_{ij}$ takto definovaných:

$$a_{ij} = a_{i+1} \vee (a_i \wedge b_j)\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r - 1\,,\ j = 0, 1, 2, \ldots, s\,.$$

Obdobně prvky

$$b_{ij} = b_{i+1} \vee (b_i \wedge a_j) \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s - 1\,,\ j = 0, 1, 2, \ldots, r$$

definují dolní Zassenhausovo zjemnění řetězce (2) řetězcem (1). Duálně se definuje *horní* Zassenhausovo zjemnění:

$$\bar{a}_{ij} = a_i \wedge (a_{i+1} \vee b_j)\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, r - 1\,,\ j = 0, 1, 2, \ldots, s\,,$$

$$\bar{b}_{ij} = b_i \wedge (b_{i+1} \wedge a_j)\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s - 1\,,\ j = 0, 1, 2, \ldots, r\,.$$

Budiž nyní $r = s = n$. Řekneme, že řetězce (1) a (2) jsou zdola jednoduše podobné, když existuje permutace $\varphi$ čísel $0, 1, 2, \ldots, n - 1$ tak, že platí:

$$a_i/a_{i+1} \underset{j}{\sim} b_{\varphi(i)}/b_{\varphi(i)+1}\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, u - 1\,;$$

obdobně definujeme horní jednoduchou podobnost řetězců. Je podán důkaz věty:

*Jestliže řetězce* (1), (2) *jsou současně zdola i shora jednoduše podobné, tedy jestliže existují dvě permutace* $\varphi$, $\psi$ *čísel* $0, 1, 2, \ldots, n - 1$ *tak, že je*

$$a_i/a_{i+1} \underset{j}{\sim} b_{\varphi(i)}/b_{\varphi(i)+1}\,, \quad a_i/a_{i+1} \overset{j}{\sim} b_{\psi(i)}/b_{\psi(i)+1}\,,$$
$$i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1\,,$$

pak platí

1. $\varphi = \psi$.

2. $a_i/a_{i+1} \underset{r}{\overset{r}{\sim}} b_{\varphi(i)}/b_{\varphi(i)+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, u - 1$.

3. Řetězce (1), (2) se dolní a horní Zassenhausovou konstrukcí nezjemní.

Zavedeme nyní do svazu $S$ relaci $\mathbf{N}$ (*normálnost*), mající všechny základní vlastnosti normálnosti známé z teorie grup, především tedy: $a\ \mathbf{N}\ b \Rightarrow a \geqq b$. V práci Vladimíra Kořínka: „Der Schreiersche Satz und das Zassenhaussche Verfahren in Verbänden“ (Věstník Královské společnosti nauk, třída mat.-přírodov., ročník 1941) jsou za předpokladu, že k libovolné dvojici $a, b \in S$ existuje prvek $u \in S$ tak, že $a\ \mathbf{N}\ u$, $b \geqq u$, odvozeny nutné a postačující podmínky, které musí relace $\mathbf{N}$ splňovat, aby pro normální řetězce platila Zassenhausova věta známá z teorie grup. Jsou to podmínky I, II, VII, VIII uvedené ve zmíněné práci. Jejich splnění budeme v dalším předpokládat. To znamená, že jsou-li řetězce (1) a (2) normální, tedy

$$a_i \mathbf{N}\, a_{i+1}\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots, r - 1\,,\quad b_i \mathbf{N}\, b_{i+1}\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots, s - 1\,,$$

pak platí:

1. $a_{ij} \mathbf{N}\, a_{i,j+1},\ b_{ji} \mathbf{N}\, b_{j,i+1}\,,\ i = 0, 1, 2, \ldots, r - 1,\ j = 0, 1, 2, \ldots, s - 1\,.$

2. $a_{ij}/a_{i,j+1} \underset{d}{\sim} a_i \wedge b_j/(a_i \wedge b_{j+1}) \vee (a_{i+1} \wedge b_j) \overset{d}{\sim} b_{ji}/b_{j,i+1}\,,$

   $i = 0, 1, 2, \ldots, r - 1,\ j = 0, 1, 2, \ldots, s - 1\,.$

3. Regulární zobrazení této podobnosti je svazový isomorfismus kvocientů $a_{ij}/a_i a_{i,j+1},\ b_{ji}/b_{j,i+1}$.

Je dokázána pomocná věta:

*Budiž* $a_1 \mathbf{N}\, a_2,\ b_1 \mathbf{N}\, b_2,\ b_1 \mathbf{N}\, \bar{b}_2 \geqq b_2,\ a_1/a_2 \underset{j}{\sim} b_1/b_2,\ a_1/a_2 \underset{r}{\sim} b_1/\bar{b}_2$, *pak* $\bar{b}_2 = b_2$.

Z ní již plyne základní věta:

**Věta.** *K tomu, aby normální řetězce* (1) *a* (2) *přešly dolní Zassenhausovou konstrukcí v sebe, je nutné a stačí, aby byly zdola jednoduše podobné, tedy* $r = s = n$, *a aby existovala permutace* $\varphi$ *čísel* $0, 1, 2, \ldots, u - 1$ *tak, že je*

$$a_i/a_{i+1} \underset{j}{\sim} b_{\varphi(i)}/b_{\varphi(i)+1}\,,\quad i = 0, 1, 2, \ldots, u - 1\,.$$

Buďtež nyní opět (1) a (2) dva normální řetězce délky $r$ resp. $s$. Buďtež dány řetězce

(3) $$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n = b\,,$$

(4) $$a = y_0 > y_1 > y_2 > \ldots > y_n = b\,,$$

a) které jsou zdola jednoduše podobné;

b) řetězec (3) je zjemněním řetězce (1) a řetězec (4) je zjemněním řetězce (2).

Řetězcům (3), (4) s těmito dvěma vlastnostmi budeme říkat *Schreierovo zjemnění řetězců* (1) a (2). Jestliže z řetězců (3) a (4) nelze žádné prvky vynechat, aniž by uvedené dvě vlastnosti zůstaly zachovány, řekneme, že řetězce (3) a (4) jsou *minimálním* Schreierovým zjemněním řetězců (1) a (2).

Ze základní věty lze snadno dokázat, že Zassenhausovo zjemnění řetězců (1) a (2) je jejich minimálním Schreierovým zjemněním a že žádné Schreierovo zjemnění není kratší než Zassenhausovo.

O relaci normálnosti $\mathbf{N}$ bylo předpokládáno, že pro $a, b \in S$ existuje $u \in S$ tak, že $a \mathbf{N}\, u,\ b \geqq u$, z čehož je patrno, že věty o normálních řetězcích nelze dualisovat. Nicméně však pro shora jednoduše podobné řetězce platí analogická věta.

Definujme dříve horní normální jednoduchou podobnost kvocientů takto:

$$a_1/a_2 \overset{j\mathbf{N}}{\sim} b_1/b_2 \Leftrightarrow a_1/a_2 \overset{d}{\sim} u_1/u_2 \underset{d}{\simeq} b_1/b_2$$

při vhodném $u_1/u_2$, $u_1$ $\mathbf{N}$ $u_2$.

**Věta.** *Buďtež* (1), (2) *řetězce,* $r = s = n$, *shora normálně jednoduše podobné, což znamená, že existuje permutace* $\varphi$ *čísel* 0, 1, 2, ..., $n - 1$ *tak, že je*

$$a_1/a_{i+1} \overset{j\mathbf{N}}{\sim} b_{\varphi(i)}/b_{\varphi(i)+1}\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1\,,$$

*pak platí*

1. $a_i/a_{i+1} \underset{r}{\simeq} b_{\varphi(i)}/b_{\varphi(i)+1}\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$
2. Řetězce (1) a (2) přejdou dolní Zassenhausovou konstrukcí v sebe.

*Ludvík Janoš*, Praha